

水の染み渡り具合をサイコロで調べてみよう

東京大学数理科学研究科
舟木直久

第18回藤岡おもしろ数学教室は、藤岡市・藤岡市教育委員会の主催、日本数学会・関孝和先生顕彰会の後援により、2013年10月3日（木）に藤岡市立西中学校体育館で開催されました。主な対象は同中学校の生徒393人でしたが、藤岡市のホームページ等で事前に広報され、市民あるいは市外から合わせて15人程度の参加があったと聞きました。日本数学会からは、理事の戸瀬信之先生と徳永浩雄先生にご同行いただきました。

講演時間は1時間でしたが、前半は20面のサイコロ（藤岡市教育委員会のご厚意で準備していただきました）による作業に当てました。これだけ多くの中学生を相手に話すのはもちろん今回が初めてでしたが、できるだけ多くの生徒に興味を持ってもらうよう作業を取り入れました。今回の講演の背景には「パーコレーション」の問題があります。この分野はフィールズ賞の連続受賞に見られるように最近大いに注目を集めています。ただ、その部分を中学生に伝えるのは難しく、特に講演の最後は駆け足になってしまい無理があったように思います。

生徒に行ってもらった作業ですが、以下のスライドにあるように、まず一人に1個ずつのサイコロと $7 \times 7 = 49$ マスの表を配布し、サイコロを49回振ってマスに出た目の数を順番に記入してもらいました。次に、この表を16人からなる1グループごとに貼りあわせ、 $28 \times 28 = 784$ マスの表を作りました。欠員は先生に補ってもらい400人、25のグループで実験を行いました。

地元の上毛新聞が取材に来ており、翌日の紙面では『「役立つ数学」に納得 藤岡西中でさいころ使い確率実験』と題し、大きく取り上げられたとのこと。ウェブにも記事が掲載され、その記事が講演の意図をよくとらえているので、引用しておきます：

『確率50%に当たる10以下の升目を塗りつぶした時、升目はあまり連続していなかったが、60%に当たる12以下まで塗ると升目が連続する確率が跳ね上がることが分かった。この実験を踏まえ、シェールガスが含まれる岩石を採掘する時、ガスが染み込みやすい部分が60%以上だと多量のガスが採れる可能性が高いと判断できるという実例を紹介、「数学は社会で役に立つもの」と強調した。』

これはサイトパーコレーションの臨界確率が $p=0.592746\dots$ という事実に関係しています。

当日の実験では、10以下で連続したのは25グループ中、3グループ、11以下で連続したのは7グループ、12以下で連続したのは18グループ、13以下で連続したのは23グループでした。11と12の間にギャップがありますが、計算機実験で予想したほどではありませんでした。28×28=784マスではまだ不十分ということかと思えます。戸瀬先生と徳永先生には作業が順調に進むよう生徒の指導に当たっていただきました。

事後に藤岡市立西中学校から感想文が送られてきましたが、数学を不得意と感じている生徒が非常に多く、また学年間で比較するとやはり3年生の理解度は高く、こちらの意図を感じ取ってもらえたように思います。サイコロ振りの作業は好評でした。講演終了直後に生徒会長による「お礼の言葉」がありましたが、内容を的確にとらえしっかりとした挨拶に感心させられました。

以下、講演用のスライドを掲載させていただきます。

なお、今回のおもしろ数学教室開催に当たっては、群馬県藤岡市教育委員会の田中政文教育長、藤岡市立西中学校の品川勝校長を始めとして藤岡市の関係の方々には大変お世話になりました。また、今回の講演に際し、信州大学理学部の乙部巖己氏からは、講演内容のアドバイス、さらに同氏製作のパーコレーションシミュレーターの使用の許可をいただきました。この場を借りてこれらの皆様に厚く感謝申し上げます。

藤岡おもしろ数学教室

～水の染み渡り具合をサイコロで調べてみよう～

舟木直久

東京大学数理科学研究科，日本数学会理事長

2013年10月3日¹

¹藤岡西中学校

舟木直久

東京大学数理科学研究科，日本数学会理事長

藤岡おもしろ数学教室

今日の授業のあらまし

- 1 20面ダイスによる実験
- 2 計算機実験
- 3 浸透 (パーコレーション) の問題の背景
- 4 最近のフィールズ賞 (=数学のノーベル賞) 受賞者とガウス賞受賞者について



関孝和

(ウィキペディア より)

舟木直久

東京大学数理科学研究科，日本数学会理事長

藤岡おもしろ数学教室

1. 20面ダイスによる実験

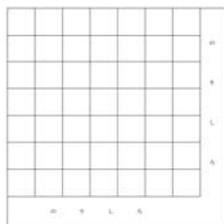
作業手順: Step 0~5

Step 0: 事前の準備を確認

- 16人ごとに1つのグループを作る。
1グループは、5個の机をくっつけた周りに座る。
全体で25(程度)のグループがある。
- 各自に1個の20面ダイス(サイコロ)と
1枚の表(7×7=49マス)を配布。
- 各自、赤鉛筆(or 赤ボールペン)と
(グループごとにいくつかの)糊を用意。

Step 1

- 20面ダイスを振り、表の49マスに、出た目の数を順に記入する。

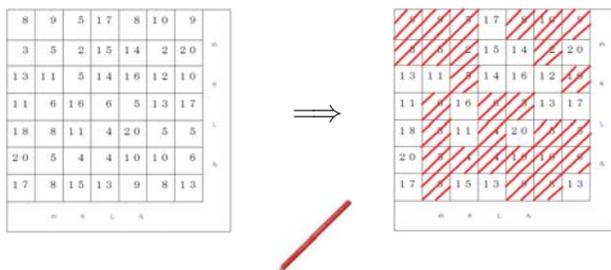


8	9	5	17	8	10	9
3	5	2	15	14	2	20
13	11	5	14	16	12	10
11	6	16	6	5	13	17
18	8	11	4	20	5	5
20	5	4	4	10	10	6
17	8	15	13	9	8	13

(乱数表を用いて作成)

Step 2

- 数が 1~10 のマスに赤鉛筆で塗る。
(べったり塗らなくても、斜線を 3~4 本引けばよい。)



Step 3 (16 人のグループによる作業)

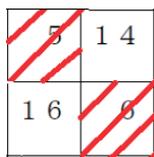
縦 28 マス×横 28 マス (計 784 マス) の大きな表を作る。

- まず 4 人ずつに分かれ、4 枚を横に糊で貼りあわせる。
- 次に、これを縦に 4 枚 (計 16 枚)、糊で貼りあわせる。



Step 4 (大きな表で水の流れを判定)

- 塗ってあるマスは、水を流すと考える。上辺から下辺へ、あるいは左辺から右辺へ水が流れるかどうか判定する。
- マスの角だけがつながっていても水は流れない。
- また、上辺から左辺、上辺から右辺、下辺から左辺、あるいは下辺から右辺がつながっていても流れたとは言わない。



流れない



流れる

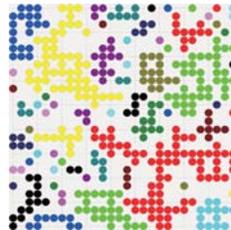
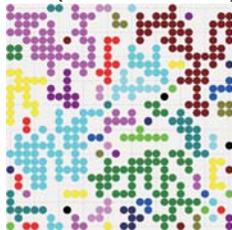
Step 5

- この操作で水が流れないとき、書いてある数が 11 のマスも赤鉛筆で塗る。これで流れるかどうか判定する。
- それでも、水が流れないとき、書いてある数が 12 のマスも赤鉛筆で塗る。これで流れるかどうか判定する。
- だめなら、流れるまでこれを繰り返す。

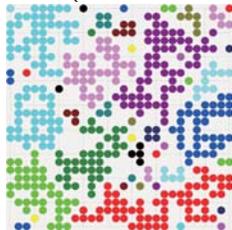
2. 計算機実験

- マスごとに独立に、水を流す (= スポンジに穴が開いている or 水道管が通っている) 確率を p とする。
 - ダイスの実験では、すべての面が等確率に出るなら、目の数が 10 以下の確率 $p = \frac{10}{20} = 0.5$
 - 11 以下の確率 $p = \frac{11}{20} = 0.55$
 - 12 以下の確率 $p = \frac{12}{20} = 0.6$
 - 13 以下の確率 $p = \frac{13}{20} = 0.65$
-
- 信州大学理学部・乙部 巖己准教授のパーコレーション・シミュレーター <http://argent.shinshu-u.ac.jp/lab/>
 - マスの数： 28×28 , $p = 0.5, 0.55, 0.6$

$p = 0.5$ (目が 10 以下)

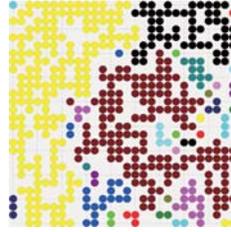
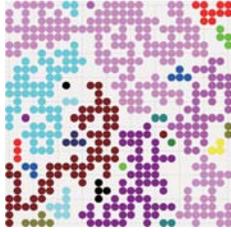


$p = 0.55$ (目が 11 以下)



* 流れがつながる部分を同じ色で塗っている。

$p = 0.6$ (目が 12 以下)



【計算機実験】 p を決めて 24 回 (=グループ数) 行う。
それをさらに 4 回繰り返すと、そのうち

10 ($p = 0.5$) で流れる : 0 回, 2 回, 2 回, 1 回

11 ($p = 0.55$) で流れる : 5 回, 5 回, 6 回, 5 回

12 ($p = 0.6$) で流れる : 21 回, 24 回, 17 回, 21 回

13 ($p = 0.65$) で流れる : 23 回, 23 回, 22 回, 24 回

* 2 次元 site percolation の critical probability = 0.592746

マス の 数 を 増 や す : 800×800 , $p = 0.55$ (目が 11 以下)



マスの数： 800×800 , p を変化させる。縮小表示

■ $p = 0.55$



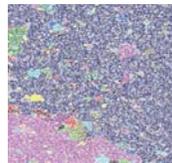
■ $p = 0.58$



■ $p = 0.59$



■ $p = 0.6$



3. 浸透の問題の背景

- 液体（水、コーヒー）のしみこみ
- 森林火災の広がり
- シェールガスの探索
- リンゴ園の植え方
- 複雑な海岸線



石油・シェールガスの採掘

石油は多孔質岩石（頁岩：けつがん、シェール）にしみ込んで留まっています。岩の中を細かく調べると、しみ込みやすいところとしみ込みにくいところが入り混じって分布しています。石油やシェールガスの効率よい採掘にパーコレーションの理論が応用できます。しみ込みやすい部分がどのくらいの比率かを調べれば石油の広がり具合がわかるからです。

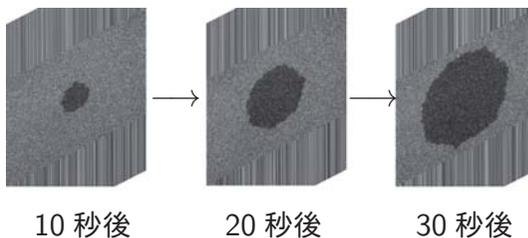


リンゴ園の植え方

太陽光が届く範囲でぎっしり植えた方がよいでしょうか。ときには病害虫が発生したり、落雷などによって山火が発生することがあります。木の間隔が狭いとそれだけ病気も移りやすく、また炎も燃え広がりやすくなります。病気の発生や山火事で全滅してしまうことのないように、しかしまた効率も上げるためにはどの程度の間隔で木を植えればよいでしょうか。このような問題にもパーコレーションの考え方が使えます。



紙の燃焼の拡大（レーザーによる実験）



(東京大学理学研究科物理・竹内一将氏のウェブページより)

4. 最近のフィールズ賞・ガウス賞受賞者



Wendelin Werner
Fields 賞 (2006)



Stanislav Smirnov
Fields 賞 (2010)



伊藤清
Gauss 賞 (2006)

(ウィキペディア・MFO ウェブより)

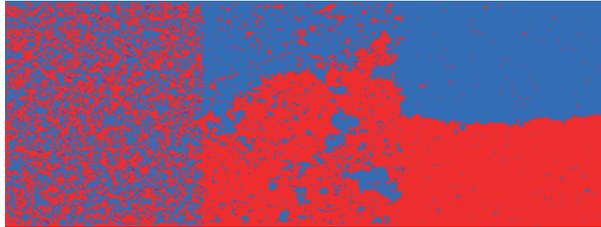
Werner のインタビュー :

東京大学数理科学研究科ビデオゲストブック 2008 年

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/video/index.html>

$p_c = 0.592746$: 臨界確率 (この値を境に状況が一変)

イジング模型 (合金のモデル) の臨界現象



高温
よく混ざる
(でたらめ)

臨界温度

低温
混ざらない
(相互作用が強い)

(Smirnov ウェブページより)

臨界値における境界の挙動



SLE (Schramm-Loewner Evolution) :
伊藤清が開発した確率微分方程式で記述される

和算

- 代数学や幾何学の問題を多く扱う
- 自然現象等への応用は強くなかった
- 土木・建築・測量・財務・暦(天地明察) などと関係