デデキント和の相互法則の一般化について

小樽商科大学　赤塚　広隆 (Hirotaka Akatsuka)

1　導入

h と k を互いに素な正整数とし, $s(h,k)$ を

$$s(h,k)=\frac{1}{4k}\sum_{a=1}^{k-1}\cot\left(\frac{\pi a}{k}\right)\cot\left(\frac{\pi ha}{k}\right)$$

で定め, これを Dedekind 和という. Dedekind 和は,

$$s(h,k)+s(k,h)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{hk}+\frac{k}{h}\right) \tag{1.1}$$

を満たすことが知られており, これを Dedekind 和の相互法則という. これと, 自明な関係式「$h\equiv h' \pmod{k}$ ならば $s(h,k)=s(h',k)$」を組み合わせることで, h と k が与えられたときに Euclid の互除法と類似の方法で $s(h,k)(\in\mathbb{Q})$ を計算することができる.

Dedekind 和の相互法則 (1.1) は様々な一般化がされてきたが, 本稿では Zagier によるものおよび Bettin–Conrey によるものを説明する. そして, これらを合わせたような相互法則の一般化を得たのでそれを報告する. 詳細は [1] を参照いただきたい.

2　Zagier による相互法則

$r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. $h_0,\ldots,h_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$d(h_0;h_1,\ldots,h_r)=(-1)^{r/2}\sum_{a=1}^{h_0-1}\prod_{j=1}^{r}\cot\left(\frac{\pi h_j a}{h_0}\right)$$

とおく．$s(h,k) = -d(k;1,h)/(4k)$ であり，$d(h_0;h_1,\ldots,h_r)$ は Dedekind 和 $s(h,k)$ の一般化である．

$a \mapsto h_0 - a$ の変換を行うことにより，r が奇数のとき，この量 (a に関する和) は 0 となることが分かる．そこで，r が偶数のときを考える．このとき，自明には $d(h_0;h_1,\ldots,h_r) \in \mathbb{Q}(\zeta_{h_0})$，ただし $\zeta_{h_0} \in \mathbb{C}$ は 1 の原始 h_0 乗根，である．さらに，任意の $j \in \{1,\ldots,r\}$ に対し $\gcd(h_j,h_0) = 1$ の場合，$d(h_0;h_1,\ldots,h_r)$ は Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{h_0})/\mathbb{Q})$ の作用で不変であることを容易に確認でき，$d(h_0;h_1,\ldots,h_r) \in \mathbb{Q}$ が分かる．

Zagier は，$d(h_0;h_1,\ldots,h_r)$ に対し以下の相互法則を証明した ([9, §3])．

定理 (Zagier)**.** r を偶数とし，$h_0,\ldots,h_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする．さらに，$0 \leq j < k \leq r$ なる任意の j, $k \in \mathbb{Z}$ に対し h_j と h_k は互いに素であると仮定する．このとき，

$$\sum_{j=0}^{r} \frac{1}{h_j} d(h_j;h_0,\ldots,\hat{h}_j,\ldots,h_r) = 1 - \frac{C_{r+1,r}(h_0,\ldots,h_r)}{r!h_0\cdots h_r}$$

が成り立つ．ここで，$\hat{h}_j$ は h_j を省くという意味である．また，$(\omega_1,\ldots,\omega_r) \in (\mathbb{C}\setminus\{0\})^r$ に対し $C_{r,n}(\omega_1,\ldots,\omega_r)$ は以下の母関数で定まる数である:

$$\prod_{j=1}^{r} \frac{\omega_j u}{\tanh(\omega_j u)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{r,n}(\omega_1,\ldots,\omega_r)}{n!} u^n. \tag{2.1}$$

注意. 式 (2.1) の左辺は u に関する偶関数であるから，n が奇数のとき $C_{r,n}(\omega_1,\ldots,\omega_r) = 0$ となることが直ちに分かる． また，$u/\tanh(u)$ の $u=0$ での展開は Bernoulli 数で表すことができるため，$C_{r,2k}(\omega_1,\ldots,\omega_r)$ は Bernoulli 数で書くことができる．

3 Bettin–Conrey による相互法則

$x \in \mathbb{Q}$ とし，$x = h/k$(ただし，$h,k \in \mathbb{Z}$ は互いに素で，$k>0$) と書く．この x に対し，Dedekind 和の類似

$$c_0(x) := -\sum_{a=1}^{k-1} \frac{a}{k} \cot\left(\frac{\pi h a}{k}\right) \in \mathbb{Q}(\zeta_k) \tag{3.1}$$

を考える．この和は有理数になるとは限らないが，Bettin–Conrey[4] がこの和に対するある種の相互法則を得た．本節ではそれを説明したい．

$\mathrm{Im}(z)>0$ とし,

$$E_1(z)=1-4\sum_{n=1}^{\infty}d(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nz}$$

とおく．ただし, $d(n)=\sum_{d|n}1$ である．$E_1(z)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ に対する正則 Eisenstein 級数の, Fourier 級数表示の観点からの類似物である．$E_1(z)$ は本来の意味での $SL_2(\mathbb{Z})$-保型性を満たさない．しかし, $\mathrm{Im}(z)>0$ に対し

$$\psi_0(z)=E_1(z)-\frac{1}{z}E_1\left(-\frac{1}{z}\right)$$

とおくとき, $\psi_0(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ 上の正則関数として接続されることが知られている. Bettin-Conrey[4] はこの $\psi_0(z)$ を用いて, 以下の $c_0(x)$ に関する関係式を得た.

定理 (Bettin–Conrey)**.** $x=h/k\in\mathbb{Q}_{>0}$ に対し,

$$xc_0(x)+c_0\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\pi k}=\frac{\sqrt{-1}x}{2}\psi_0(x).$$

左辺 $xc_0(x)+c_0(1/x)-1/(\pi k)$ は元々は $\mathbb{Q}_{>0}$ で定義される関数であるが, $\mathbb{R}_{>0}$ へ連続関数として拡張を持つこと, さらには $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ の正則関数へ伸ばすことができるということを言っている．$1/(\pi k)$ を無視して大雑把な見方をすれば, $c_0(x)$ と $c_0(1/x)$ は $\mathbb{R}_{>0}$ 上の連続関数 (または $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ 上の正則関数) を法として関係を持つということであり, 彼らはこれを相互法則と呼んでいる.

Bettin–Conrey[5] は $c_0(x)$ の一般化も考察した．$s\in\mathbb{C}$, $h/k\in\mathbb{Q}_{>0}$ に対し,

$$c_s\left(\frac{h}{k}\right):=k^s\sum_{a=1}^{k-1}\cot\left(\frac{\pi ha}{k}\right)\zeta\left(-s,\frac{a}{k}\right)$$

とおく. ただし,

$$\zeta(s,x):=\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}$$

は Hurwitz ゼータ関数である.[1] $\zeta(0,x)=\frac{1}{2}-x$ が成り立つことが知られており, $c_s(h/k)$ は $s=0$ のとき式 (3.1) と一致することを確認することが

[1] $0<x<1$ のときこの級数は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束する．さらに, $s=1$ で一位の極を持ち, それ以外の s では正則であるような有理型関数として接続を持つ. 正確には, 有理型接続した関数を Hurwitz ゼータ関数という.

できる. Bettin–Conrey[5, Theorem 4] は, 一般の $s \in \mathbb{C}$ に対しても,

$$c_s\left(\frac{h}{k}\right) - \left(\frac{k}{h}\right)^{1+s} c_s\left(\frac{-k}{h}\right) + k^s \frac{s\zeta(1-s)}{\pi h} \tag{3.2}$$

が (上の $E_1(z)$ とは別の) 正則 Eisenstein 級数の類似物で書けることを証明した. ここで, $\zeta(s)$ は Riemann ゼータ関数である.

4 主結果

本節では, 前 2 つの節で述べた Dedekind 和の相互法則の一般化を合わせたような結果を得たので, それを説明する. なお, 今回得た結果は, 正則 Eisenstein 級数の類似物ではなく, Barnes の多重ゼータ関数に近い関数[2]で相互法則が記述される. まずはその関数から説明する. r を正整数とし, $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{C}^r$ はすべての j に対し $\mathrm{Re}(\omega_j) > 0$ を満たすものとする. このとき, $Z_r(s;\underline{\omega})$ を

$$Z_r(s;\underline{\omega}) = \sum_{(n_1,\ldots,n_r)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^r \setminus \{(0,\ldots,0)\}} \varepsilon_{n_1}\cdots\varepsilon_{n_r}(n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r)^{-s} \tag{4.1}$$

で定める. ここで,

$$\varepsilon_n := \begin{cases} 1/2 & n = 0 \text{ のとき} \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

であり, $(n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r)^{-s}$ の枝は $\arg(n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r) \in (-\pi/2, \pi/2)$ となるように定める. r および $\underline{\omega}$ を固定したとき, 級数 (4.1) は $\mathrm{Re}(s) > r$ で絶対かつ広義一様収束する. 標準的な方法により, $Z_r(s;\underline{\omega})$ は,

$$Z_r(s;\underline{\omega}) = \frac{1}{2^r\Gamma(s)(e^{2\pi\sqrt{-1}s} - 1)} \int_{\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon} \left(\prod_{j=1}^{r} \frac{e^{\omega_j u} + 1}{e^{\omega_j u} - 1} - 1\right) u^{s-1} du \tag{4.2}$$

という径路積分表示を持つことが分かる. ここで, ε は $0 < \varepsilon < \min_{1\leq j\leq r} \frac{2\pi}{|\omega_j|}$ なる実数であり, $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$ は複素平面において $+\infty$ から ε へ進み, 中心が 0 で半径が ε の円を反時計回りに一周し, $\varepsilon e^{2\pi\sqrt{-1}}$ から $+\infty e^{2\pi\sqrt{-1}}$ へ進む径路である. この積分表示により, $Z_r(s;\underline{\omega})$ は $s \in \mathbb{C}$ への有理型接続を持つこと

[2]実際, 有限個の Barnes の多重ゼータ関数の和で表すことができる.

が分かる. $s=1,2,\ldots,r$ に高々1位の極を持ち,[3] それ以外の $s\in\mathbb{C}$ では $Z_r(s;\underline{\omega})$ は正則である.

以上の記号のもとで, 次の結果を得た.

定理 1. r を正整数とし, $\underline{h}=(h_1,\ldots,h_r)\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^r$ とする. $1\leq j<k\leq r$ なる任意の $j,\ k\in\mathbb{Z}$ に対し, h_j と h_k は互いに素であると仮定する. このとき, $s\in\mathbb{C}$ に対し次が成り立つ:

1. r が偶数のとき

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{h_k}\sum_{a=1}^{h_k-1}\left(\prod_{j\neq k}\cot\left(\frac{\pi h_j a}{h_k}\right)\right)\zeta\left(1-s,\frac{a}{h_k}\right)\\&+\frac{1}{h_1\cdots h_r}\sum_{l=0}^{\frac{r}{2}-1}(-1)^l\frac{C_{r,2l}(\underline{h})}{(2l)!}\binom{s-1}{r-2l-1}\frac{\zeta(r-2l-s)}{\pi^{r-2l-1}}\\&=(-1)^{\frac{r}{2}+1}2^r(2\pi)^{-s}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)Z_r(s;\underline{h}).\end{aligned}\tag{4.3}$$

ここで, 左辺第一項の j に関する積は $1\leq j\leq r$ かつ $j\neq k$ を満たす整数 j 全体を走る有限積である. また, $\zeta(s,x)$ は §3 で説明した Hurwitz ゼータ関数, $C_{r,2l}(\underline{h})$ は式 (2.1) で定まる数である.

2. r が奇数のとき

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{h_k}\sum_{a=1}^{h_k-1}\left(\prod_{j\neq k}\cot\left(\frac{\pi h_j a}{h_k}\right)\right)\zeta\left(1-s,\frac{a}{h_k}\right)\\&+\frac{1}{h_1\cdots h_r}\sum_{l=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^l\frac{C_{r,2l}(\underline{h})}{(2l)!}\binom{s-1}{r-2l-1}\frac{\zeta(r-2l-s)}{\pi^{r-2l-1}}\\&=(-1)^{\frac{r-1}{2}}2^r(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)Z_r(s;\underline{h}).\end{aligned}\tag{4.4}$$

注意. Auli–Bayad–Beck[3] はより一般の枠組で相互法則を与えている. しかし, 彼らの相互法則はパラメータ s に制約があり, 公式そのものも我々のものより複雑な形をしている.

r が偶数のとき, 式 (4.3) の左辺第一項 (a に関する和), 左辺第二項, 右辺は, すべての $s\in\mathbb{C}$ で正則になっていることを確認することができる.

[3] さらに, r が偶数のときは奇数点 $s=1,3,\ldots,r-1$ は除去可能な特異点であり, r が奇数のときは偶数点 $s=2,4,\ldots,r-1$ は除去可能な特異点であることも分かる.

一方, r が奇数のときは, 式 (4.4) の左辺の第一項と第二項および右辺は $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で正則である. $s=0$ ではそれぞれの項が高々一位の極となっており, $s=0$ における Laurent 展開の s^{-1} の係数を比較することで, §2 で説明した Zagier の相互法則を復元することができる.

定理 1 から, 前節で述べた Bettin–Conrey による $c_0(x)$ の相互法則を, 二重ガンマ関数の対数微分を用いた別表示を得ることができる. そのため, 多重ガンマ関数について簡単に復習する. r を正整数, $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{C}^r$ とする. 簡単のため, 各 j に対し $\mathrm{Re}(\omega_j) > 0$ が成り立つとする. $\mathrm{Re}(z) > 0$ とし, Barnes の多重ゼータ関数 $\zeta_r(s, z; \underline{\omega})$ を

$$\zeta_r(s, z; \underline{\omega}) = \sum_{n_1, \ldots, n_r = 0}^{\infty} (n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r + z)^{-s}$$

で定める. ここで $(n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r + z)^{-s}$ の枝は $\arg(n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r + z) \in (-\pi/2, \pi/2)$ となるように定める. z と $\underline{\omega}$ を固定したとき, 級数は $\mathrm{Re}(s) > r$ で絶対かつ広義一様に収束し, その範囲での正則関数となる. さらに, 式 (4.2) と類似の径路積分で表すことにより, $\zeta_r(s, z; \underline{\omega})$ は全複素平面 $s \in \mathbb{C}$ に有理型接続される. さらに, $s = 1, 2, \ldots, r$ に高々一位の極を持つが, それ以外の s では正則である. 特に $s = 0$ で正則であるので,

$$\Gamma_r(z; \underline{\omega}) := \exp\left[\frac{\partial \zeta_r}{\partial s}(0, z; \underline{\omega})\right]$$

とおき, これを多重ガンマ関数という.

定理 1 を $r=2$, $s=1$ と特殊化することで, 次が得られる.

系 2. $x = h/k \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し,

$$\begin{aligned} &xc_0(x) + c_0(1/x) - \frac{1}{\pi k} \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\Gamma_2'}{\Gamma_2}(1; (1, x)) + \frac{\Gamma_2'}{\Gamma_2}(1; (1, 1/x))\right) + \frac{\log x}{2\pi}(x-1). \end{aligned}$$

5 定理 1 の証明の方針

まず, r が偶数の場合の証明の方針を説明する. $\underline{h} = (h_1, \ldots, h_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^r$ を定理 1 のようにとり,

$$f_r(u; \underline{h}) := \prod_{j=1}^{r} \frac{e^{h_j u} + 1}{e^{h_j u} - 1} - 1$$

とおく．このとき, $f_r(u;\underline{h})$ は $u \in \mathbb{C}$ 上の有理型関数であり, 以下の性質を持つことを容易に確認することができる.

1. $f_r(u;\underline{h})$ は u に関して偶関数である.

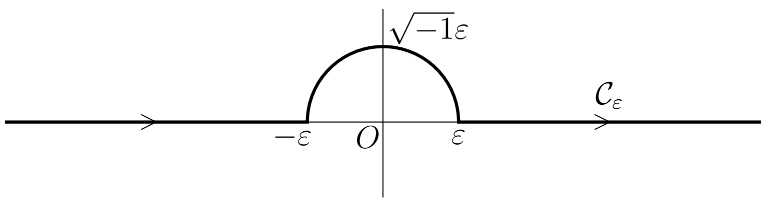
2. $f_r(u;\underline{h})$ は $u \to +\infty$, $u \to -\infty$ でそれぞれ指数関数的に減少する.

3. $u \to 0$ のとき $f_r(u;\underline{h}) = O(|u|^{-r})$.

以下の積分 $I_r(s;\underline{h})$ を考える:

$$I_r(s;\underline{h}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f_r(u;\underline{h}) u^{s-1} du. \tag{5.1}$$

ここで, ε は $0 < \varepsilon < \min_{1 \le j \le r} \frac{2\pi}{h_j}$ なる実数である．また, $\mathcal{C}_\varepsilon$ は $-\infty$ から $-\varepsilon$ へ進み, $-\varepsilon$ から ε へ原点を中心とした円を時計回りに移動し, ε から $+\infty$ へ進む積分路である (下図参照).



$f_r(u;\underline{h})$ は $u \to \pm\infty$ で指数関数的に減少することから, 積分は $s \in \mathbb{C}$ 上で広義一様収束する．また, Cauchy の積分定理を用いることで, 積分 $I_r(s;\underline{h})$ は ε の取り方によらずに決まることも分かる．この積分を以下の二通りに計算する.

- s を $\mathrm{Re}(s) > r$ に一時的に制限し, $\varepsilon \downarrow 0$ とする．このとき, $f_r(u;\underline{h})$ は偶関数であるから実質的に 0 から $+\infty$ の同じ積分が二つ出てくる．式 (4.2) を導出する計算を逆にたどることで, それらの積分を $Z_r(s;\underline{h})$ で表すことができる．両辺の s に関する解析性を調べることで s に関する制限を外す.

- 積分路を上にシフトする (積分路を $\mathrm{Im}(u) = +\infty$ に動かす) ことで留数計算をする．$\mathrm{Im}(u) > 0$ にある $f_r(u;\underline{h})$ の極は $u = 2\pi\sqrt{-1}n/h_j$, ただし $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$, $j \in \{1, \ldots, r\}$, にある． r 位の極である $u = 2\pi\sqrt{-1}n (n \in \mathbb{Z}_{\ge 1})$ の留数計算から式 (4.3) の左辺第二項が本質的に現れ, その他の一位の極の留数計算から左辺第一項が現れる.

上の二つの計算から式 (4.3) が得られる.

r が奇数の場合, 上の $f_r(u;\underline{h})$ は偶関数でも奇関数でもなく, また, $u \to -\infty$ のとき指数関数的に減少でもなくなる. そのため, 積分 (5.1) の収束が悪くなり, 上の二つの計算ができなくなる. そこで, $f_r(u;\underline{h})$ ではなく,

$$g_r(u;\underline{h}) = \prod_{j=1}^{r} \frac{e^{h_j u}+1}{e^{h_j u}-1} - \frac{e^{h_r u}+1}{e^{h_r u}-1}$$

を考える. この $g_r(u;\underline{h})$ は奇関数であり, また, $u \to \pm\infty$ で指数関数的に減少することが分かる. あとは $I_r(s;\underline{h})$ の被積分関数にある $f_r(u;\underline{h})$ を $g_r(u;\underline{h})$ に置き換え, r が偶数の場合と同様の計算をする. r が偶数の場合よりもやや計算も面倒になるが, 式 (4.4) が得られる.

注意. 詳細は省略するが, 多重三角関数は, (被積分関数は異なるが) $\mathcal{C}_\varepsilon$ を積分路とする積分表示を持つことが知られている (Narukawa[8, §4.2]). 上の証明方針は, 多重三角関数の積分表示に由来を持つものである.

6 今後の課題など

本稿の最後に, 関連する部分的な計算や今後考えられる問題を二つほど述べておきたい.

一つは, 前節で述べた証明は $\underline{h}$ を正の整数にしておく必要はなく, かなり一般的な状況でも通用するということである. 簡単のため, r が偶数のときに限って説明することにする. $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}) \in \mathbb{C}^{r-1}$ とし, 以下のいずれかの条件を満たすものとする:

(1) 任意の j に対し $\alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(2) 任意の j に対し $\alpha_j \in (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}) \setminus \mathbb{Q}$.

このような $\underline{\alpha}$ に対し $\xi_{r-1}(s;\underline{\alpha})$ を以下で定める:

$$\xi_{r-1}(s;\underline{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{r-1} \cot(\pi n \alpha_j) \right) n^{-s}.$$

この級数は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいところで絶対収束することを示すことができる.[4] $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{C}^r$ は, 各 j に対し $\mathrm{Re}(\omega_j) > 0$ を満たすもの

[4] $\underline{\alpha}$ が条件 (1) を満たす場合は容易に $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束することが分かる. (2) の場合は Diophantus 近似に関する Roth の定理などを用いることで, 絶対収束域を見つけることができる.

とする. 各 $k \in \{1,2,\ldots,r\}$ に対し,

$$q_k(\underline{\omega}) := \left(\frac{\omega_1}{\omega_k},\ldots,\frac{\omega_{k-1}}{\omega_k},\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k},\ldots,\frac{\omega_r}{\omega_k}\right) \in \mathbb{C}^{r-1}$$

とおく. すべての k に対し $q_k(\underline{\omega})$ は上記条件 (1) を満たす, もしくは, すべての k に対し $q_k(\underline{\omega})$ は上記条件 (2) を満たすものとする. このような設定の下で, $\underline{h}$ を $\underline{\omega}$ に置き換えて前節と同様の計算を行うと, (少なくとも $\mathrm{Re}(s) < 1-r$ の範囲で) 下記の変換法則を証明することができる:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{r} \omega_k^{-s}\xi_{r-1}(1-s; q_k(\underline{\omega}))\\&= (-1)^{\frac{r}{2}+1}2^r(2\pi)^{-s}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)Z_r(s;\underline{\omega}).\end{aligned}$$

この変換公式を用いて, 適当な $\underline{\alpha}$ に対し $\xi_{r-1}(s;\underline{\alpha})$ の性質 (例えば特殊値) を調べることはできるだろうか. この方面の先行研究について簡単に触れておくと, $\underline{\alpha} = (e^{\pi\sqrt{-1}/r},\ldots,e^{\pi\sqrt{-1}(r-1)/r})$ などのように条件 (1) を満たす場合, $\xi_{r-1}(s;\underline{\alpha})$ の特殊値については Komori–Matsumoto–Tsumura[7] による結果がある. 一方, 条件 (2) を満たす場合については, α が実二次無理数のとき, $\xi_1(s;\alpha)$(コタンジェント関数 1 つを係数とする Dirichlet 級数) の特殊値, 解析性などは Arakawa[2] により詳しく調べられている.

考えられる二つ目の問題は, 積分 (5.1) の $f_r(u;\underline{h})$ を指数関数的減少および対称性を持つ別の有理型関数に置き換え, 別の相互法則を導出できるか, ということである. 例えば, $f_r(u;\underline{h})$ の代わりに

$$\prod_{j=1}^{r}\frac{e^{h_j u/2}}{e^{h_j u}-1}$$

を考える. これは指数関数的減少であり, u に関する対称性を持つ. 簡単のため $h_1+\cdots+h_r$ が偶数の場合に限って述べるが, §5 の計算と同様の計算を行うことで,

$$\sum_{a=1}^{h_k-1}(-1)^a\left(\prod_{j\neq k}\csc\left(\frac{\pi h_j a}{h_k}\right)\right)\zeta\left(1-s,\frac{a}{h_k}\right)$$

に関する定理 1 の類似を得ることができる. ここで $\csc(x) = 1/\sin(x)$ である. これは Fukuhara[6] による三角関数二つの積の交代和に関する相互法則の拡張となっている. 例えば相反多項式に e^u を代入したものの比を考えることで, 指数関数的減少および対称性を持つ有理型関数を構成できる. そこから非自明な相互法則を導出できるだろうか.

謝辞. 今回, 第 65 回代数学シンポジウムで貴重な研究発表の機会をくださった数論分野プログラム責任者の小林真一氏と中筋麻貴氏, シンポジウム責任者の大野泰生氏に深く感謝申し上げます. 本研究は科学研究費補助金 (19K03392) から援助を受けています.

参考文献

[1] H. Akatsuka, Reciprocity formulas for sums involving cotangent products, in preparation.

[2] T. Arakawa, Dirichlet series, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot \pi n\alpha}{n^s}$, Dedekind sums, and Hecke L-functions for real quadratic fields, Comment. Math. Univ. St. Paul. **37** (1988) 209–235.

[3] J. S. Auli, A. Bayad and M. Beck, Reciprocity theorems for Bettin–Conrey sums, Acta Arith. **181** (2017) 297–319.

[4] S. Bettin and B. Conrey, A reciprocity formula for a cotangent sum, Int. Math. Res. Not. IMRN **2013** no.24 (2013) 5709–5726.

[5] S. Bettin and B. Conrey, Period functions and cotangent sums, Algebra Number Theory **7** (2013) 215–242.

[6] S. Fukuhara, New trigonometric identities and generalized Dedekind sums, Tokyo J. Math. **26** (2003) 1–14.

[7] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Barnes multiple zeta-functions, Ramanujan's formula, and relevant series involving hyperbolic functions, J. Ramanujan Math. Soc. **28** (2013) 49–69.

[8] A. Narukawa, The modular properties and the integral representations of multiple elliptic gamma functions, Adv. Math. **189** (2004) 247–267.

[9] D. Zagier, Higher order Dedekind sums, Math. Ann. **202** (1973) 149–172.

〒047–8501 北海道小樽市緑 3–5–21
小樽商科大学商学部一般教育系
E-mail: `akatsuka@res.otaru-uc.ac.jp`