非正則 2 次 Siegel 保型形式の Fourier 展開に現れる特殊関数

石井 卓 (Ishii Taku, 成蹊大理工)

1　はじめに

古典的な 1 変数正則保型形式の Fourier 展開, ゼータ関数について簡単に述べる. $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ とする. G は Poincaré 上半平面 $\mathfrak{h}_1 = \{z = x + \sqrt{-1}y \mid y > 0\}$ に 1 次分数変換で作用する. $k \in \mathbf{Z}$ とし, $\mathfrak{h}_1$ 上の正則関数 f が保型性 $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$, $\forall\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, $\forall g \in G$ をみたすとする. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ についての保型性から周期性 $f(z+1) = f(z)$ が従うので, f は $f(x+\sqrt{-1}y) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(y)\mathbf{e}(nx)$ と Fourier 展開できる. ここで $\mathbf{e}(x) := e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ とおいた. さらに f は Cauchy-Riemann 方程式 $(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y})f = 0$ をみたすので $a_n(y) = a_n \exp(-2\pi ny)$, $a_n \in \mathbf{C}$ の形となり, $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n \mathbf{e}(nz)$ という Fourier 展開を得る. $n < 0$ に対して $a_n = 0$ となるような f を重さが k の正則保型形式 (楕円保型形式) といい, さらに $a_0 = 0$ をみたすものを尖点形式という.

正則ではない保型形式の例として $\mathfrak{h}_1$ 上のラプラシアンの固有関数となる Masss 波動形式 (実解析的保型形式) がある. すなわち保型性 $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (\frac{cz+d}{|cz+d|})^k f(z)$, $\forall\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, $\forall g \in G$ および増大条件 $f(x+\sqrt{-1}y) = O(y^N)$ $(y \to \infty)$ に加えて, ある $\nu \in \mathbf{C}$ に対し $\{-y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + \sqrt{-1}ky\frac{\partial}{\partial y}\}f = (\frac{1}{4} - \nu^2)f$ をみたす $\mathfrak{h}_1$ 上の C^∞ 関数である. $k = 0$ のときは Maass 波動形式といわれる. Maass 形式も楕円保型形式と同様, $f(x+\sqrt{-1}y) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(y)\mathbf{e}(nx)$ という展開をもち, $a_n(y)$ $(n \neq 0)$ は Whittaker の微分方程式をみたす. 増大条件を考慮すると, 尖点形式は $f(x+\sqrt{-1}y) = \sum_{n\neq 0} a_n W_{\mathrm{sgn}(n)k/2,\nu}(4\pi|n|y)\mathbf{e}(nx)$ という Fourier 展開をもつことがわかる. ここで $W_{\kappa,\mu}$ は Whittaker 関数である. なお, $k = 0$ のときは $f(x+\sqrt{-1}y) = \sum_{n\neq 0} a_n\sqrt{y}K_\nu(2\pi|n|y)\mathbf{e}(nx)$ となる (K_ν は変形 Bessel 関数).

重さ k の楕円尖点形式 $f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n\mathbf{e}(nz)$, $s \in \mathbf{C}$ に対して Dirichlet 級数 $L(s, f) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ を考える. この Dirichlet 級数は Fourier 係数 a_n の自明な評価から $\mathrm{Re}(s) > k/2 + 1$ で絶対収束する. f が $a_1 = 1$ と正規化された Hecke 固有形式 (すべての $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して $\lambda(m) \in \mathbf{C}$ が存在して $m^{k-1}\sum_{ad=m,d>0}\sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f(\frac{az+b}{d}) = \lambda(m)f(z)$ をみたす) であれば, $L(s, f) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} = \prod_p \{(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \beta_p p^{-s})\}^{-1}$ という 2 次の Euler 積

表示をもつことがわかる．$L(s,f)$ を解析接続するために Hecke が導入したゼータ積分は

$$Z(s,y)=\int_0^\infty f(\sqrt{-1}y)y^{s-1}dy$$

である．f が尖点形式であることから $Z(s,f)$ はすべての s で絶対収束する．また f の保型性から関数等式 $Z(s,f)=\sqrt{-1}^k Z(k-s,f)$ が従う．$Z(s,f)$ に f の Fourier 展開を代入すると $\mathrm{Re}(s)>k/2+1$ において,

$$Z(s,f)=\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-2\pi ny}y^{s-1}\,dy=\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}\int_0^\infty e^{-2\pi y}y^{s-1}dy$$

となる．アルキメデスゼータ積分 $\int_0^\infty e^{-2\pi y}y^{s-1}dy$ は $(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ に等しくなるので, $\Gamma_{\mathbf{C}}:=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とおくと, 完備されたゼータ関数 $\Lambda(s,f)=\Gamma_{\mathbf{C}}(s)L(s,f)$ が全 $\mathbf{C}$ 平面に整型に解析接続され, 関数等式 $\Lambda(s,f)=\sqrt{-1}^k\Lambda(k-s,f)$ をみたすことがわかる．この $\Gamma_{\mathbf{C}}(s)$ は保型 L 関数のアルキメデス L 因子 (ガンマ因子) と言われ, Langlands 分類により期待される形が予想されている．

Maass 波動形式に対するアルキメデスゼータ積分は K-Bessel 関数の Mellin 変換 $\int_0^\infty K_\nu(2\pi y)y^{s-1}\,dx$ であるが, これは $2^{-2}\Gamma_{\mathbf{R}}(s+\nu)\Gamma_{\mathbf{R}}(s-\nu)$ に等しくなる． ここで $\Gamma_{\mathbf{R}}(s):=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ とおいた．このようにアルキメデスゼータ積分は Fourier 展開に現れる特殊関数の積分変換になっており, その積分を具体的に計算することで完備化された保型 L 関数 (大域的 L 関数) の解析接続, 関数等式を得ることができる．

本稿の目的は多変数保形形式の一つである 2 次 Siegel 保型形式の Fourier 展開にどのような特殊関数が現れるかを紹介し, そのアルキメデスゼータ積分の計算への応用について述べることである．

2 Siegel 保型形式の Fourier 展開

2.1 正則 Siegel 保型形式

実 2 次シンプレクティック群 $G:=\mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})=\{g\in \mathrm{GL}(4,\mathbf{R})\mid {}^tgJg=J=\left(\begin{smallmatrix}0 & -1_2\\ 1_2 & 0\end{smallmatrix}\right)\}$ は Siegel 上半空間 $\mathfrak{h}_2:=\{z=x+\sqrt{-1}y\in M(2,\mathbf{C})\mid x,y\in \mathrm{Sym}(2,\mathbf{R}), y>0\}$ に $g\langle z\rangle=(az+b)(cz+d)^{-1}$, $g=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in G$, $z\in\mathfrak{h}_2$ により作用する．ここで $\mathrm{Sym}(2,\mathbf{R})$ は実 2 次対称行列全体とし, $y>0$ は y が正定値であることを意味する．G の離散部分群 Γ を本稿においては $\Gamma:=\mathrm{Sp}(2,\mathbf{Z})$ とする．標準的保型因子 $j:G\times\mathfrak{h}_2\to \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ を $j(\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right),z)=cz+d$ とし, (τ,V_τ) を $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ の有限次元既約有理表現とする．$\mathfrak{h}_2$ 上の V_τ 値正則関数 F で保型性 $F(\gamma\langle z\rangle)=\tau(j(\gamma,z))F(z)$, $\forall(\gamma,z)\in\Gamma\times\mathfrak{h}_2$ をみたすものを重さ τ の正則 Siegel 保型形式といい, その全体を $M_\tau(\Gamma)$ と表す．とくに $\tau=\det^k$ のとき $M_\tau(\Gamma)$ はいわゆる重さ k の正則 Siegel 保型形式の空間である．楕円保型形式の場合と同様に $\left(\begin{smallmatrix}1_2 & b\\ 0 & 1_2\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma$ についての保型性から $F(z+b)=F(z)$, $\forall b\in \mathrm{Sym}(2,\mathbf{Z})$ が成り立つので

$$F(x+\sqrt{-1}y)=\sum_{T\in\mathcal{T}} a_T(y)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(Tx)), \tag{2.1}$$

という展開を得る．ここで $\mathcal{T}$ は semi-integral な実対称行列全体, すなわち $\mathcal{T} = \{T = \left(\begin{smallmatrix} t_1 & t_2/2 \\ t_2/2 & t_3 \end{smallmatrix}\right) \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{Z}\}$ である．F が正則であることから $a_T(y) = a_T \exp\{-2\pi \mathrm{tr}(Ty)\}$ ($a_T \in \mathbf{C}$) と指数関数で表すことができる．楕円保型形式の場合とは異なり，「$a_T \neq 0 \Rightarrow T \geq 0$ (T が半正定値)」(Koecher 原理) が成立し,

$$F(z) = \sum_{T \in \mathcal{T}^+} a_T \, \mathbf{e}(\mathrm{tr}(Tz)) \tag{2.2}$$

という Fourier 展開を持つことがわかる．ここで $\mathcal{T}^+ := \{T \in \mathcal{T} \mid T \geq 0\}$ である．$F \in M_\tau(\Gamma)$ が尖点形式とは Siegel の Φ 作用素で消えること, すなわち $(\Phi F)(z) = \lim_{\lambda \to \infty} f\left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}\lambda \end{smallmatrix}\right) = 0$, $\forall z \in \mathfrak{h}_1$ をみたすこと, として定義され, 尖点形式全体を $S_\tau(\Gamma)$ とかく．$F \in S_\tau(\Gamma)$ は「$a_T \neq 0 \Rightarrow T > 0$」をみたす．

正則 Siegel 保型形式 F を群 G 上の関数に持ち上げる．$\mathfrak{h}_2$ 上の 1 点 $z_0 = \sqrt{-1}1_2$ の固定化部分群を K とおく: $K = \{g \in G \mid g\langle z_0 \rangle = z_0\} = G \cap \mathrm{O}(4) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \mid a + \sqrt{-1}b \in \mathrm{U}(2)\}$. $K \cong \mathrm{U}(2)$ は G の極大コンパクト部分群であり, $g \mapsto g\langle z_0 \rangle$ により G/K は $\mathfrak{h}_2$ と同一視される．G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ とおく: $\mathfrak{k} = \{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ -B & A \end{smallmatrix}\right) \mid A \in \mathrm{Alt}(2, \mathbf{R}), B \in \mathrm{Sym}(2, \mathbf{R})\}$ ($\mathrm{Alt}(2, \mathbf{R})$ は実 2 次交代行列全体). さらに $\mathfrak{p} = \{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B & -A \end{smallmatrix}\right) \mid A, B \in \mathrm{Sym}(2, \mathbf{R})\}$ とおくと Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ が成り立つ．K は $\mathfrak{p}$ の複素化 $\mathfrak{p}_\mathbf{C} = \mathfrak{p} \otimes_\mathbf{R} \mathbf{C}$ に $X \to k^{-1}Xk$ ($X \in \mathfrak{p}_\mathbf{C}, k \in K$) により作用し, $\mathfrak{p}_\pm$ を $\pm\sqrt{-1}$ に対する固有空間とする: $\mathfrak{p}_\pm = \{\left(\begin{smallmatrix} A & \pm\sqrt{-1}A \\ \pm\sqrt{-1}A & A \end{smallmatrix}\right) \mid A \in \mathrm{Sym}(2, \mathbf{C})\}$. $X \in \mathfrak{g}$, $f \in C^\infty(G, V_\tau)$ に対して $R(X)f = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(g \exp(tX))$ とおく (右微分). この作用 R は $\mathfrak{g}_\mathbf{C} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbf{R} \mathbf{C}$, そして普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ の作用に自然に伸びる．

$M_\tau(\Gamma)$ の元 F に対して, $f_F(g) = \tau(j(g, z_0))^{-1} F(g\langle z_0 \rangle)$ とおくと, F の保型性から $f_F(\gamma g k) = \tau(k^{-1}) f_F(g)$, $\forall(\gamma, g, k) \in \Gamma \times G \times K$ が成り立つ．さらに正則性から $R(X) f_F(g) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{p}_-$ が従い, $M_\tau(\Gamma \backslash G) = \{f \in C^\infty(G, V_\tau) \mid$ (i) $f(\gamma g k) = \tau(k^{-1}) f(g)$, $\forall(\gamma, g, k) \in \Gamma \times G \times K$, (ii) $R(X)f = 0$, $\forall X \in \mathfrak{p}_-\}$ とおくと, 写像 $F \mapsto f_F$ は同型 $M_\tau(\Gamma) \cong M_\tau(\Gamma \backslash G)$ を与える．

尖点形式は $M_\tau(\Gamma \backslash G)$ の元で Fourier 展開の定数項が消えるものである．G には Siegel 放物部分群 $P_S := \{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0_2 & * \end{smallmatrix}\right) \in G\}$ と Jacobi 放物部分群 $P_J := \{\left(\begin{smallmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \end{smallmatrix}\right) \in G\}$ という 2 つの極大放物部分群がある．それぞれのべき単根基を N_S, N_J とかく．2.3 節の記号を用いると $N_S = \{n(0, x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$, $N_J = \{n(x_0, x_1, x_2, 0) \mid x_0, x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$ である．このとき $S_\tau(\Gamma \backslash G) = \{f \in M_\tau(\Gamma \backslash G) \mid \int_{(N_S \cap \Gamma) \backslash N_S} f(ng) \, dn = 0$, $\int_{(N_J \cap \Gamma) \backslash N_J} f(ng) \, dn = 0\}$ とおくと $S_\tau(\Gamma) \cong S_\tau(\Gamma \backslash G)$ となる．

2.2 離散系列表現

正則保型形式と正則離散系列表現の関係, そして本稿で主に扱う非正則保型形式が属している「大きな離散系列表現」について述べる．G の極大コンパクト部分群 K は前節のものに固定し, $K \cong \mathrm{U}(2)$ の既約表現の実現を述べておく．$\mathrm{U}(2)$ の既約表現は $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ の有限次元既約有理表現の $\mathrm{U}(2)$ への制限によって得られ, 集合 $L = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{Z}^2 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2\}$ によってパラメトライズされる．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in L$ に対して $V_\lambda := \{f \in \mathbf{C}[x_1, x_2] \mid f$ は $(\lambda_1 - \lambda_2)$ 次斉次多項式 $\}$ と

おき, $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ の V_λ への作用 τ_λ を $(\tau_\lambda(g)f)(x_1,x_2)=(\det g)^{\lambda_2}f((x_1,x_2)\cdot g)$ ($g\in\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$, $f\in V_\lambda$) により定め, τ_λ の $\mathrm{U}(2)$ への制限も τ_λ とかくと (τ_λ,V_λ) は最高ウエイト λ の $\mathrm{U}(2)$ の既約表現となる. V_λ の基底として $\{v_i\equiv v_i^\lambda:=x_1^ix_2^{\lambda_1-\lambda_2-i}\mid 0\le i\le\lambda_1-\lambda_2\}$ をとると, τ_λ の微分 $d\tau_\lambda$ に対して $\mathfrak{u}(2)_{\mathbf{C}}\cong\mathfrak{gl}(2,\mathbf{C})$ の作用は $d\tau_\lambda(E'_{11})v_i^\lambda=(\lambda_1+i)v_i^\lambda$, $d\tau_\lambda(E'_{12})v_i^\lambda=(\lambda_1-\lambda_2-i)v_{i+1}^\lambda$, $d\tau_\lambda(E'_{21})v_i^\lambda=iv_{i-1}^\lambda$, $d\tau_\lambda(E'_{22})v_i^\lambda=(\lambda_1-i)v_i^\lambda$ で与えられる. ここで $E'_{ij}\in\mathfrak{gl}(2,\mathbf{C})$ は行列単位.

連結半単純 Lie 群 G が離散系列表現を持つための必要十分条件は G の階数と G の極大コンパクト部分群の階数が等しいことであるが, $G=\mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})$ はこの条件をみたし, K に含まれる G の Cartan 部分群 T として $T=\{t_{\theta_1,\theta_2}:=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & & \sin\theta_1 & \\ & \cos\theta_2 & & \sin\theta_2\\ -\sin\theta_1 & & \cos\theta_1 & \\ & -\sin\theta_2 & & \cos\theta_2\end{pmatrix}\mid 0\le\theta_1,\theta_2\le 2\pi\}$ をとる. G の離散系列表現はルート系 $\Delta(G,T)$ を用いてパラメトライズされる. $i=1,2$ に対して $e_i(t_{\theta_1,\theta_2})=e^{\sqrt{-1}\theta_i}$ とおくと T の指標群は $\widehat{T}=\mathbf{Z}e_1\oplus\mathbf{Z}e_2$ となる. $a_1,a_2\in\mathbf{Z}$ に対して, $a_1e_1+a_2e_2\in\widehat{T}$ を (a_1,a_2) と書くことにすると $\Delta(G,T)=\{\pm(2,0),\pm(1.1),\pm(0,2),\pm(1,-1)\}$ となる. $\Delta_c:=\Delta(K,T)=\{\pm(1,-1)\}$ の正系を $\Delta_c^+=\{(1,-1)\}$ と固定すると Δ_c^+ を含むような正系は $\Delta_{\mathrm{J}}^+=\Delta_{\mathrm{J},nc}^+\cup\Delta_c^+$ ($\mathrm{J}\in\{\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV}\}$) の 4 つである. ここで $\Delta_{\mathrm{I},nc}^+=\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$, $\Delta_{\mathrm{II},nc}^+=\{(2,0),(1,1),(0,-2)\}$, $\Delta_{\mathrm{III},nc}^+=\{(2,0),(-1,-1),(0,-2)\}$, $\Delta_{\mathrm{IV},nc}^+=\{(-2,0),(-1,-1),(0,-2)\}$ である.

離散系列表現は集合 $\{\Lambda=(\Lambda_1,\Lambda_2)\in\mathbf{Z}^2\mid\Lambda_1\neq0,\Lambda_2\neq0,\Lambda_1+\Lambda_2\neq0,\Lambda_1-\Lambda_2>0\}$ によりパラメトライズされる. Λ に対応する G の離散系列表現を π_Λ とかき, Λ を Harish-Chandra パラメータという. π_Λ は 4 つの正系 Δ_{J}^+ との positivity に応じて 4 系列に分類される: $\Xi_{\mathrm{I}}=\{(\Lambda_1,\Lambda_2)\in\widehat{T}\mid\Lambda_1>\Lambda_2>0\}$, $\Xi_{\mathrm{II}}=\{(\Lambda_1,\Lambda_2)\in\widehat{T}\mid\Lambda_1>-\Lambda_2>0\}$, $\Xi_{\mathrm{III}}=\{(\Lambda_1,\Lambda_2)\in\widehat{T}\mid-\Lambda_2>\Lambda_1>0\}$, $\Xi_{\mathrm{IV}}=\{(\Lambda_1,\Lambda_2)\in\widehat{T}\mid0>\Lambda_1>\Lambda_2\}$. 離散系列表現 π_Λ の極小 K タイプ τ_λ は以下で与えられ, λ を Blattner パラメータという: (i) $\Lambda\in\Xi_{\mathrm{I}}:\lambda=\Lambda+(1,2)$, (ii) $\Lambda\in\Xi_{\mathrm{II}}:\lambda=\Lambda+(1,0)$, (iii) $\Lambda\in\Xi_{\mathrm{III}}:\lambda=\Lambda+(0,-1)$, (iv) $\Lambda\in\Xi_{\mathrm{IV}}:\lambda=\Lambda+(-2,-1)$.

π_Λ は, $\Lambda\in\Xi_{\mathrm{I}}$ のとき正則離散系列表現, $\Lambda\in\Xi_{\mathrm{IV}}$ のとき反正則離散系列表現, $\Lambda\in\Xi_{\mathrm{II}}\cup\Xi_{\mathrm{III}}$ のとき「大きな離散系列表現」(Vogan による) といわれる. 後述のように (反) 正則離散系列表現は Whittaker 模型を持たず, 大きな離散系列表現は Whittaker 模型をもつ.

保型形式の空間 $\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ を G 上の $\mathbf{C}$ に値をとる C^∞ 関数で以下の 4 つの条件をみたすもの全体とする: (i) $f(\gamma g)=f(g)$, $\forall(\gamma,g)\in\Gamma\times G$, (ii) f は右 K 有限, つまり $g\in G$ を固定したとき $\dim\{f(gk)\mid k\in K\}<\infty$, (iii) f は左 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ 有限, つまり普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の中心 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の余次元有限の右イデアル J で f を消す ($R(X)f=0,\forall X\in J$) ものがある. (iv) f は緩増加. さらに尖点形式の空間 $\mathcal{A}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash G)$ を $S_\tau(\Gamma\backslash G)$ の定義と同じように $\mathcal{A}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash G)=\{f\in\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)\mid\int_{(N_S\cap\Gamma)\backslash N_S}f(ng)\,dn=0,\int_{(N_J\cap\Gamma)\backslash N_J}f(ng)\,dn=0\}$ と定める.

$\pi_{\Lambda=(-\lambda_2-1,-\lambda_1-2)}$ を極小 K タイプ $\tau_{\lambda=(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ をもつ正則離散系列表現とする. (定数倍を除いて唯一の)K 埋め込み $\iota:\tau_\lambda\hookrightarrow\pi_\Lambda$ により $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)}(\pi_\Lambda,\mathcal{A}(\Gamma\backslash G))\to\mathrm{Hom}_K(\tau_\lambda,\mathcal{A}(\Gamma\backslash G))\cong\{\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)\otimes V_{\tau_\lambda}^\vee\}^K$ となる. ここで $(\tau_\lambda^\vee,V_{\tau_\lambda}^\vee)$ は (τ_λ,V_λ) の反傾表現であり, $\tau_\lambda^\vee\cong\tau_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ が成り立つ. V_λ の基底 $\{v_i\}$ の双対基底を $\{v_i^\vee\}$ とかく. 絡作用素 $\Phi\in\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)}(\pi_\Lambda,\mathcal{A}(\Gamma\backslash G))$ に対して, $f_\Phi(g):=\sum_i\Phi(v_i)(g)\otimes v_i^\vee$ とおく. τ_λ が π_Λ の

極小 K タイプであることから, 後述のように $\tau_\lambda \otimes \mathfrak{p}_-$ の既約成分は π_Λ の K タイプにならないため, 写像 $\Phi \mapsto f_\Phi$ は同型 $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)}(\pi_{(-\lambda_2-1,-\lambda_1-2)}, \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)) \cong M_{\tau_{(\lambda_1,\lambda_2)}}(\Gamma\backslash G)$, $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)}(\pi_{(-\lambda_2-1,-\lambda_1-2)}, \mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)) \cong S_{\tau_{(\lambda_1,\lambda_2)}}(\Gamma\backslash G)$ を引き起こすことがわかる.

2.3 Fourier 展開

2.1 節で述べた Fourier 展開を Siegel 放物部分群 $P_S \in G$ に沿った Fourier 展開として述べる. アデール群上の保型形式として見た場合の Fourier 展開については [25] を参照されたい. $f \in \mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)$ を尖点形式とする. G の極大べき単部分群 N を $N = \{n(x_0,x_1,x_2,x_3) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & x_0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 \\ & & -x_0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid x_0,x_1,x_2,x_3 \in \mathbf{R}\}$ ととる. $P_S = M_S N_S$ を Levi 分解とすると $M_S = \{\ell(m) := \left(\begin{smallmatrix} m & \\ & {}^t m^{-1} \end{smallmatrix}\right) \mid m \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{R})\}$, $N_S = \{n(0,x_1,x_2,x_3) \in N\}$ となる. アーベル群 N_S の指標は $T \in \mathrm{Sym}(2,\mathbf{R})$ を用いて $\psi_T(n(0,x_1,x_2,x_3)) = \mathbf{e}(\mathrm{tr}(T\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{smallmatrix}\right)))$ の形になる. $\psi_T|_{\Gamma\cap N_S} \equiv 1$ のとき (つまり $T = \left(\begin{smallmatrix} t_1 & t_2/2 \\ t_2/2 & t_3 \end{smallmatrix}\right)$, $t_1,t_2,t_3 \in \mathbf{Z}$ のとき),

$$f_T(g) = \int_{\Gamma\cap N_S\backslash N_S} f(ng)\psi_T^{-1}(n)\,dn = \int_{[0,1]^3} f(n(0,x_1,x_2,x_3)g)\mathbf{e}(-t_1x_1 - t_2x_2 - t_3x_3)dx_1dx_2dx_3$$

とおくと, $f_T(ng) = \psi_T(n)f_T(g)$, $\forall(n,g) \in N_S \times G$ をみたし,

$$f(ng) = \sum_{T\in\mathcal{T}} f_T(g)\psi_T(n), \quad \forall(n,g) \in N_S \times G$$

という Fourier 展開を得る. これは (2.1) に他ならない.

以下 T の階数ごとに f_T の様子をみる. $M_S \cap \Gamma$ の元による保型性 $f(\ell(m)g) = f(g)$, $\forall \ell(m) \in \Gamma \cap M_S$ により, $f_T(\ell(m)g) = f_{{}^t mTm}(g)$, $\forall m \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}) \cdots (\natural)$ が成り立つことに注意しておく.

$\mathrm{rank}\, T = 0$ の項は尖点形式 f に対しては $f_T = 0$ となる. $\mathrm{rank}\, T = 1$ の項を考える. $(\natural)$ により $T = T_{c_3} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_3 \end{smallmatrix}\right)$, $c_3 \in \mathbf{Z}_{\neq 0}$ としてよい. $g \in G$ を固定し $h(x_0) = h(x_0;g) = f_{T_{c_3}}(n(x_0,0,0,0)g)$ $(x_0 \in \mathbf{R})$ とおくと, 保型性から $h(x_0+1) = h(x_0)$ であるから Fourier 逆公式より $h(0) = \sum_{c_0\in\mathbf{Z}} \int_0^1 h(x_0)\mathbf{e}(-c_0x_0)dx_0$ となる. f が尖点形式であることから $c_0 = 0$ の項は消えて,

$$f_{T_{c_3}}(g) = \sum_{c_0\in\mathbf{Z}_{\neq 0}} W_{f,(c_0,c_3)}(g)$$

とかけることがわかる. ここで

$$\begin{aligned} W_{f,(c_0,c_3)}(g) &= \int_0^1 h(x_0;g)\mathbf{e}(-c_0x_0)\,dx_0 \\ &= \int_{[0,1]^4} f(n(x_0,x_1,x_2,x_3)g)\mathbf{e}(-c_0x_0 - c_3x_3)\,dx_0dx_1dx_2dx_3 \end{aligned}$$

は f の Fourier-Whittaker 係数といわれ, $W_{f,(c_0,c_3)}(n(x_0,x_1,x_2,x_3)g) = \mathbf{e}(c_0x_0 + cx_3)W_{f,(c_0,c_3)}(g)$ をみたす. また $W_{f,(c_0,c_3)} \neq 0$ となる f を generic という. 正則保型形式は generic ではない (正則離散系列表現は Whittaker 模型を持たない).

続いて $\mathrm{rank}\,T=2$ の項を考える．正則保形形式 f については正則性という強い制約性により T が正定値の時の項のみが残り，f_T は指数関数となる．しかし大きい離散系列表現や波動形式のような保型形式に対しては f_T のみたす微分方程式の解空間は無限次元となるため，さらに細分化された展開が必要になる．M_S の N_S への作用は M_S の $\widehat{N_S}$ への作用を誘導する．指標 ψ_T の M_S における固定化部分群 $M_S(T)=\{\begin{pmatrix} m & \\ & {}^t m^{-1}\end{pmatrix} \mid {}^t mTm=T\}$ の単位元の連結成分を $M_S(T)^o$ とする．3.3 節で述べるように，$M_S(T)^o$ は $\det(T)>0$ のときは $\mathrm{SO}(2)$ に，$\det(T)<0$ のときは $\mathrm{SO}_o(1,1)\cong\mathbf{R}^\times_{>0}$ にそれぞれ同型になる．Ξ を $M_S(T)^o$ の指標で $\Gamma\cap M_S(T)^o$ 上自明なもの全体とする．$\chi\in\Xi$ に対して，

$$W_{f,T,\chi}(g)=\int_{\Gamma\cap M_S(T)^o\backslash M_S(T)^o} f_T(mg)\chi^{-1}(m)\,dm$$

とおくと $W_{f,T,\chi}(mg)=\chi(m)W_{f,T,\chi}(g)\ \forall(m,g)\in M_S(T)^o\times G$ をみたす．$\det(T)>0$ の場合は $\Gamma\cap M_S(T)^o\backslash M_S(T)^o$ はコンパクトなので

$$f_T(mg)=\sum_{\chi\in\Xi}W_{f,\chi,T}(g)\chi(m),\quad \forall(m,g)\in M_S(T)^o\times G$$

となり，$\det T<0$ のときは

$$f_T(mg)=\int_{\Xi}W_{f,\chi,T}(g)\chi(m)\,d\chi$$

となる．

3　一般化された球関数

3.1　問題設定

R を G の部分群とし η を R の smooth な既約表現とする．$C^\infty(R\backslash G,\eta):=\{f:G\to\mathbf{C},\mathrm{smooth}\mid f(rg)=\eta(r)f(g)\}$ は G の右移動による作用により G 加群となる．2.3 節の "Fourier 係数"$W_{f,(c_0,c_3)}$, $W_{f,T,\chi}$ はそれぞれ適当な (R,η) の組に対して $C^\infty(R\backslash G,\eta)$ に属している．そこで G の既約表現 (π,H_π) に対して $(\mathfrak{g}_\mathbf{C},K)$ 加群の間の絡作用素の空間 $\mathcal{I}(\pi,R,\eta):=\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbf{C},K)}(H_{\pi,K},C^\infty(R\backslash G,\eta))$ を考える．ここで $H_{\pi,K}$ は H_π の K 有限ベクトル全体である．また $\mathcal{I}_{\mathrm{mg}}(\pi,R,\eta)=\{\Phi\in\mathcal{I}(\pi,R,\eta)\mid$ すべての $f\in H_{\pi,K}$に対して $\Phi(f)$ は緩増加 $\}$ とする．Fourier 展開に寄与するのは絡作用素の像 $\Phi(f)$ なので，$S(\pi,R,\eta)$, $S_{\mathrm{mg}}(\pi,R,\eta)$ をそれぞれ $\{\Phi(f)\mid f\in H_{\pi,K},\Phi\in\mathcal{I}(\pi,R,\eta)\}$, $\{\Phi(f)\mid f\in H_{\pi,K},\Phi\in\mathcal{I}_{\mathrm{mg}}(\pi,R,\eta)\}$ の $\mathbf{C}$-span とする．$S(\pi,R,\eta)$, $S_{\mathrm{mg}}(\pi,R,\eta)$ を，$R=K$, η が自明表現のとき (帯) 球関数と呼ばれることにちなんで一般化された球関数の空間と呼ぶことにする．Fourier 展開の記述，保型 L 関数への応用のためには「重複度なし定理」$\dim\mathcal{I}_{\mathrm{mg}}(\pi,R,\eta)\leqq 1$ を示し，さらにこのときに $S_{\mathrm{mg}}(\pi,R,\eta)$ の元を G 上の関数として具体的に記述することが目標となる．

K の既約表現 (τ,V_τ) が π の K タイプであるとする．埋め込み $V_\tau\to H_{\pi,K}$ を経由して $\varphi:V_\tau\to S(\pi,R,\eta)$ という K 埋め込みが得られる．このとき $v\in V_\tau$ に対して $\varphi(v)(rgk)=$

$\eta(r)\varphi(\tau(k)v)(g)$, $\forall(r,g,k)\in R\times G\times K$ が成り立つ. G のある部分群 A に対して $G=RAK$ という分解があれば $\varphi(v)$ は A への制限 $\varphi(v)|_A$ (A 動径成分という) で決まる.

以下 π が大きな離散系列表現 π_Λ ($\Lambda=(\lambda_1-1,\lambda_2)\in\Xi_{\mathrm{II}}$) であり, τ がその極小 K タイプ $\tau_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ である場合に, 知られている結果を紹介する. 一連の研究の発端となった仕事は織田 [30] で, 以降様々な (π,R,η) に対して一般化された球関数の明示公式が与えられている. $\varphi(v)|_A$ の満たす偏微分方程式系を導出し, その解を与えるというのが基本的な戦略である.

正則離散系列表現は $\mathfrak{p}_-$ で消えるという特徴付けを持っていた. 大きな離散系列表現に対しても同様のことを考えるために $\mathfrak{p}_\pm$ の構造をみる. $p_\pm:\mathrm{Sym}(2,\mathbf{R})\ni A\mapsto\left(\begin{smallmatrix}A & \pm\sqrt{-1}A\\ \pm\sqrt{-1}A & -A\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{p}_\pm$ とし, $X_{\pm(2,0)}:=p_\pm\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $X_{\pm(1,1)}:=p_\pm\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $X_{\pm(0,2)}:=p_\pm\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ とおくと $\mathfrak{p}_\pm=\mathbf{C}X_{\pm(2,0)}\oplus\mathbf{C}X_{\pm(1,1)}\oplus\mathbf{C}X_{\pm(0,2)}$ となる. $\mathfrak{p}_\pm$ は随伴作用 ad により K 加群とみなせ, 同型 $\mathfrak{p}_+\cong V_{(2,0)}$, $\mathfrak{p}_-\cong V_{(0,-2)}$ が得られ, 基底の対応は $(X_{(0,2)},X_{(1,1)},X_{(2,0)})\leftrightarrow(v_0^{(2,0)},2v_1^{(2,0)},v_2^{(2,0)})$, $(X_{(-2,0)},X_{(-1,-1)},X_{(0,-2)})\leftrightarrow(v_0^{(0,-2)},-2v_1^{(0,-2)},v_2^{(0,-2)})$ で与えられる. $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in L$ が $\lambda_1>\lambda_2+1$ をみたすとき, $\mathrm{ad}\otimes\tau_\lambda$ の既約分解 $\mathfrak{p}_\pm\otimes V_\lambda\cong\oplus_{\beta\in\{(2,0),(1,1),(0,2)\}}V_{\lambda\pm\beta}$ が成り立つ. 一般化された球関数のみたす偏微分方程式系を得るには K 埋め込み $I_\lambda^{\pm\beta}:V_{\lambda\pm\beta}\to\mathfrak{p}_\pm\otimes V_\lambda$ を具体的に構成する必要がある. これは Clebsh-Gordan 係数を求めることに他ならない. π_Λ ($\Lambda\in\Xi_{\mathrm{II}}$) の K タイプの分布によれば, $\tau_{(\lambda_1,\lambda_2+2)}$, $\tau_{(\lambda_1-2,\lambda_2)}$, $\tau_{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}$ は $\pi_\Lambda|_K$ には現れないため, ここで用いるのは $I_\lambda^{(0,2)}$, $I_\lambda^{(-2,0)}$, $I_\lambda^{(-1,-1)}$ である. $c_i=(\lambda_1-\lambda_2-i)(\lambda_1-\lambda_2-i-1)$ とおくと, これらは (定数倍を除いて) 以下で与えられる.

- $I_\lambda^{(0,2)}(v_i^{\lambda+(0,2)})=c_i(X_{(2,0)}\otimes v_i^\lambda-X_{(1,1)}\otimes v_{i+1}^\lambda+X_{(0,2)}\otimes v_{i+2}^\lambda)$,
- $I_\lambda^{(-2,0)}(v_i^{\lambda-(2,0)})=c_i(X_{(0,-2)}\otimes v_i^\lambda+X_{(-1,-1)}\otimes v_{i+1}^\lambda+X_{(-2,0)}\otimes v_{i+2}^\lambda)$,
- $I_\lambda^{(-1,-1)}(v_i^{\lambda-(1,1)})=iX_{(0,-2)}\otimes v_{i-1}^\lambda-(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}-i)X_{(-1,-1)}\otimes v_i^\lambda-(\lambda_1-\lambda_2-i)X_{(-2,0)}\otimes v_{i+1}^\lambda$,

このことから一般化された球関数 $\varphi(v_i^\lambda)\in S(\pi_\Lambda,R,\eta)$ の動径成分 $\varphi(v_i^\lambda)(a)$ ($a\in A$) に対して以下のような 3 つの方程式 (Dirac-Schmid 方程式といわれる) を得ることができる:

$$R(X_{(2,0)})\varphi(v_i^\lambda)(a)-R(X_{(1,1)})\varphi(v_{i+1}^\lambda)(a)+R(X_{(0,2)})\varphi(v_{i+2}^\lambda)(a)=0, \tag{3.1}$$

$$R(X_{(0,-2)})\varphi(v_i^\lambda)(a)+R(X_{(-1,-1)})\varphi(v_{i+1}^\lambda)(a)+R(X_{(-2,0)})\varphi(v_{i+2}^\lambda)(a)=0, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&iR(X_{(0,-2)})\varphi(v_{i-1}^\lambda)(a)-(\tfrac{\lambda_1-\lambda_2}{2}-i)R(X_{-1,-1})\varphi(v_i^\lambda)(a)\\&-(\lambda_1-\lambda_2-i)R(X_{(-2,0)})\varphi(v_{i+1}^\lambda)(a)=0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで R は 2.1 節と同様に右微分を意味する. より具体的に方程式を記述するには $X_{(*,*)}\in\mathfrak{p}_\pm$ たちを $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(R)+\mathrm{Lie}(A)+\mathrm{Lie}(K)$ に沿って分解する.

3.2 Whittaker 関数

Fourier 展開の rank $T=1$ の項に寄与する関数を考える. $R=N=\{n(x_0,x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\mathbf{R}\}$ とする. N の指標 η は $c_0,c_3\in\mathbf{R}$ を用いて $\eta(n(x_0,x_1,x_2,x_3)))=\mathbf{e}(c_0x_0+c_3x_3)$ と書ける. $A=\{a=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\mid a_1,a_2>0\}$ とすれば岩澤分解 $G=NAK$ が成り立つ. このと

き $S(\pi,N,\eta)$ の元を Whittaker 関数という.

$E_{ij}\in M(4,\mathbf{R})$ を行列単位とする. $H_1:=E_{11}-E_{33}$, $H_2:=E_{22}-E_{44}$ とおくと $\mathfrak{a}:=\mathrm{Lie}(A)=\mathbf{R}H_1\oplus\mathbf{R}H_2$ となる. $e_i:\mathfrak{a}\to\mathbf{C}$ を $e_i(H_j)=\delta_{ij}$ とすると制限ルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ は $\{\pm 2e_1,\pm 2e_2,\pm(e_1+e_2),\pm(e_1-e_2)\}$ となる. 正系 $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ を $\{2e_1,2e_2,e_1\pm e_2\}$, ルートベクトルを $E_{2e_1}=E_{13}$, $E_{2e_2}=E_{24}$, $E_{e_1+e_2}=E_{14}+E_{23}$, $E_{e_1-e_2}=E_{12}-E_{43}$, $E_{-\alpha}=-{}^tE_\alpha$ ($\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$) ととる. $\mathfrak{n}:=\mathrm{Lie}(N)=\mathbf{R}E_{2e_1}\oplus\mathbf{R}E_{2e_2}\oplus\mathbf{R}E_{e_1+e_2}\oplus\mathbf{R}E_{e_1-e_2}$ である. また $\kappa:\mathfrak{u}(2)\ni X\mapsto\frac{1}{2}\begin{pmatrix} X+\bar{X} & \sqrt{-1}(\bar{X}-X)\\ \sqrt{-1}(X-\bar{X}) & X+\bar{X}\end{pmatrix}$ は同型 $\mathfrak{u}(2)\cong\mathfrak{k}=\mathrm{Lie}(K)$ を与える. κ の複素化も κ とかくと $\{\kappa(E'_{ij})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} E'_{ij}-E'_{ji} & -\sqrt{-1}(E'_{ij}+E'_{ji})\\ \sqrt{-1}(E'_{ij}+E'_{ji}) & E'_{ij}-E'_{ji}\end{pmatrix}\mid 1\le i,j\le 2\}$ は $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ の基底である.

Lie 環の岩澤分解 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}=\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}\oplus\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}\oplus\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ に沿って $X_{(*,*)}\in\mathfrak{p}_\pm$ を分解すると, $X_{\pm(2,0)}=\pm 2\sqrt{-1}E_{2e_1}+H_1\pm\kappa(E'_{11})$, $X_{\pm(0,2)}=\pm 2\sqrt{-1}E_{2e_2}+H_2\pm\kappa(E'_{22})$, $X_{(1,1)}=2(E_{e_1-e_2}+\sqrt{-1}E_{e_1+e_2})+2\kappa(E'_{21})$, $X_{-(1,1)}=2(E_{e_1-e_2}-\sqrt{-1}E_{e_1+e_2})-2\kappa(E'_{12})$ となる.

Whittaker 関数 $\varphi(v_i^\lambda)$ ($v_i^\lambda\in V_\lambda$), $a=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\in A$ に対して, $R(E_{e_1-e_2})\varphi(v_i^\lambda)(a)=2\pi\sqrt{-1}c_0\frac{a_1}{a_2}\varphi(v_i^\lambda)(a)$, $R(E_{2e_2})\varphi(v_i^\lambda)(a)=2\pi\sqrt{-1}c_3a_2^2\varphi(v_i^\lambda)(a)$, $R(E_{2e_1})\varphi(v_i^\lambda)(a)=0$, $R(E_{e_1+e_2})\varphi(v_i^\lambda)(a)=0$, $R(H_1)\varphi(v_i^\lambda)(a)=a_1\frac{\partial}{\partial a_1}\varphi(v_i^\lambda)(a)$, $R(H_2)\varphi(v_i^\lambda)(a)=a_2\frac{\partial}{\partial a_2}\varphi(v_i^\lambda)(a)$ であることを用いると, Dirac-Schmidt 方程式 (3.1) から

$$\begin{aligned}&(a_1\tfrac{\partial}{\partial a_1}+\lambda_2-i-2)\varphi(v_i^\lambda)(a)-4\pi\sqrt{-1}c_0\tfrac{a_1}{a_2}\varphi(v_{i+1}^\lambda)(a)\\&+(a_2\tfrac{\partial}{\partial a_2}-4\pi c_3a_2^2+\lambda_1-i-2)\varphi(v_{i+2}^\lambda)(a)=0,\quad(0\le i\le\lambda_1-\lambda_2-2)\end{aligned}$$

を得る. さらに (3.2), (3.3) からも同様な方程式が導かれこれら 3 つの方程式を整理すると以下の偏微分方程式系が得られる. この偏微分方程式系および, 重複度なし定理, 解の積分表示が織田 [30] によって得られた. ここでは森山 [22] による Mellin-Barnes 型表示を記す.

定理 3.1. ([30], [22]) π_Λ ($\Lambda=(\lambda_1-1,\lambda_2)\in\Xi_{\mathrm{II}}$) を大きな離散系列表現, $\tau_{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)}$ をその極小 K タイプとする. $a=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\in A$ とする.
(1) K 埋め込み $\varphi:V_\lambda\to S(\pi_\Lambda,N,\eta)$ に対して $\varphi(v_i^\lambda)(a)=a_1^{\lambda_2+1-i}a_2^{\lambda_1-i}\exp(-2\pi c_3a_2)\phi_i(a)$ とおくと $\{\phi_i(a)\mid 0\le i\le\lambda_1-\lambda_2\}$ は以下をみたす.

$$\begin{aligned}&\{\partial_1\partial_2+(2\pi c_0\tfrac{a_1}{a_2})^2\}\phi_{\lambda_1-\lambda_2}(a)=0,\\&\{(\partial_1+\partial_2+2\lambda_2-1)(\partial_1+\partial_2-1)-8\pi c_3a_2^2\partial_2\}\phi_{\lambda_1-\lambda_2}(a)=0,\\&2\pi\sqrt{-1}c_0\phi_i(a)+(\partial_1-\lambda_1+\lambda_2+i+1)\phi_{i+1}(a)=0,\ (1\le i\le\lambda_1-\lambda_2-1).\end{aligned}$$

ここで $\partial_i=a_i\frac{\partial}{\partial a_i}$ $(i=1,2)$.
(2) η *は非退化であるとする* ($c_0c_3\neq 0$). $c_3<0$ ならば $\dim\mathcal{I}_{\mathrm{mg}}(\pi_\Lambda,N,\eta)=0$ であり, $c_3>0$ ならば $\dim\mathcal{I}_{\mathrm{mg}}(\pi_\Lambda,N,\eta)=1$ である. さらに $c_3>0$ のとき, A 動径成分が以下で与えられる K 埋め込み $\varphi_{\mathrm{mg}}:V_\lambda\to S_{\mathrm{mg}}(\pi,N,\eta)$ が存在する:

$$\varphi_{\mathrm{mg}}(v_i^\lambda)(a)=a_1^{\lambda_2+1-i}a_2^{\lambda_1-i}\exp(-2\pi c_3a_2)\cdot\frac{(2\pi\sqrt{-1}c_0)^i}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{L(\sigma_1)}\int_{L(\sigma_2)}(\pi|c_0|\tfrac{a_1}{a_2})^{-2s_1}(4\pi|c_3|a_2^2)^{-s_2}$$

$$\times \frac{\Gamma(s_2-\lambda_2+\frac{1}{2})\Gamma(s_2+\frac{1}{2})\Gamma(s_1)\Gamma(s_1-s_2)\Gamma(2s_1+\lambda_1-\lambda_2-i)}{\Gamma(2s_1)}\, ds_2 ds_1.$$

ここで $\sigma \in \mathbf{R}$ に対して $\int_{L(\sigma_i)} = \int_{\sigma_i-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma_i+\sqrt{-1}\infty}$ を意味し, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{R}$ は $\sigma_1 > 0$, $\sigma_1 > \sigma_2 > -\frac{1}{2}$ となるようにとる.

Whittaker 模型を持つような, つまり $\dim \mathcal{I}(\pi, N, \eta) \neq 0$ となるような $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$ の既約表現 π は以下のいずれかになることが知られている (Vogan [35]): (i) 大きな離散系列表現, (ii) Jacobi 放物部分群 P_J から誘導された一般主系列表現 (P_J 主系列表現), (iii) (極小放物部分群から誘導された) 主系列表現, (iv) Siegel 放物部分群 P_S から誘導された一般主系列表現 (P_S 主系列表現).

これらのいずれの場合も, 極小 K タイプなどある特別な K タイプにおいて Whittaker 関数の明示公式が知られている. (ii) の場合は K タイプの分布が離散系列表現と似ており, (i) とほぼ同じような偏微分方程式系によって特徴付けられ, 宮崎-織田 [19], 森山 [22] によって明示公式が与えられた. (iii) のうちクラス 1 主系列表現に対しては丹羽 [29] が上記とは異なる構成的な方法 (テータリフトの Fourier-Whittaker 係数を取り出す) により, Whittaker 関数の積分表示を与え, 偏微分方程式系の解であることを示した. クラス 1 に限らない主系列表現については宮崎-織田 [18] によって偏微分方程式系が与えられ, 筆者 [12] がその解を求めた. 残る (iv) については長谷川 [5] によって得られた偏微分方程式系の解を筆者 [14] が与えた. Whittaker 模型をもつ $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$ の既約表現は主系列表現になるが, この場合の明示公式は宮崎 [16] による.

さて Whittaker 関数を特徴付ける偏微分方程式系の解空間の次元は (i), (ii) では 4 であるのに対し, (iii), (iv) では 8 になりその解はより複雑になる. 特殊関数の立場から見れば (i), (iv) はそれぞれ (ii), (iii) のベクトル値版と思うこともできる. [29] で与えられたクラス 1Whittaker 関数の [15] による Mellin-Barnes 型の積分表示を記しておく. クラス 1 主系列表現に対応する保型形式は波動形式であり, Maass 波動形式と同様に $\mathfrak{h}_2$ 上の不変微分作用素の固有関数となるものである. 不変微分作用素環は 2 次のものと 4 次のもので生成されており, 固有値のパラメータ (=クラス 1 主系列表現のパラメータ) を $\nu_1, \nu_2 \in \mathbf{C}$ とする. クラス 1 主系列表現 $\pi(\nu_1, \nu_2)$ の自明な K タイプからの K 埋め込み $\varphi_{\mathrm{mg}} : V_{(0,0)} \to S_{\mathrm{mg}}(\pi(\nu_1, \nu_2), N, \eta)$ で動径成分が以下で与えられるものが存在する:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\mathrm{mg}}(v_0^{(0,0)})(\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1})) \\
&= \frac{a_1^2 a_2}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{L(\sigma_1)} \int_{L(\sigma_2)} V(s_1, s_2)(|c_0|\tfrac{a_1}{a_2})^{-s_1}(|c_3| a_2^2)^{-s_2}\, ds_2 ds_1.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
V(s_1, s_2) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{L(\tau_1)} \int_{L(\tau_2)} &\Gamma_{\mathbf{R}}(s_1)\Gamma_{\mathbf{R}}(s_1-t_1-t_2)\Gamma_{\mathbf{R}}(s_2-t_1)\Gamma_{\mathbf{R}}(s_2-t_2) \\
&\times \Gamma_{\mathbf{R}}(t_1+\tfrac{\nu_1-\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(t_1-\tfrac{\nu_1-\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(t_2+\tfrac{\nu_1+\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(t_2-\tfrac{\nu_1+\nu_2}{2})\, dt_2 dt_1.
\end{aligned}$$

ここで $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$ は $\sigma_1 > \tau_1 + \tau_2$, $\sigma_2 > \tau_1 > |\mathrm{Re}(\frac{\nu_1-\nu_2}{2})|$, $\sigma_2 > \tau_2 > |\mathrm{Re}(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})|$ をみたすようにとる.

3.3 Siegel-Whittaker 関数 (Bessel 関数, 一般化された Whittaker 関数)

$\operatorname{rank} T = 2$ の展開項に現れる一般化された球関数を考える．Siegel 放物部分群 $P_S = M_S \ltimes N_S$ のべき単根基 N_S の指標は $H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2/2 \\ h_2/2 & h_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}(2, \mathbf{R})$ を用いて $\psi_H(n(0, x_1, x_2, x_3)) := \mathbf{e}(\mathrm{tr}(H \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix})) = \mathbf{e}(h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3)$ と書くことができる．$\det(H) \neq 0$ と仮定する．M_S の N_S への共役による作用は $\widehat{N_S}$ への作用を誘導し, $\psi_H \in \widehat{N_S}$ の固定化部分群の単位元の連結成分を $\mathrm{SO}(\psi_H)$ とおく: $\mathrm{SO}(\psi_H) := \mathrm{Stab}_{M_S}(\psi_H)^\circ = \{\ell(m) := \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & {}^t m^{-1} \end{pmatrix} \mid {}^t m H m = H\}^\circ$.

$\det H > 0$ のときは $H = {}^t u \begin{pmatrix} h_1' & \\ & h_3' \end{pmatrix} u$ $(h_1' h_3' > 0, u \in \mathrm{O}(2))$ と対角化すると, $\mathrm{SO}(\psi_H)$ の元は $\ell(m)$, $m = u \begin{pmatrix} 1/\sqrt{|h_1'|} & \\ & 1/\sqrt{|h_3'|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{|h_1'|} & \\ & \sqrt{|h_3'|} \end{pmatrix} u^{-1}$ とかけ, $\mathrm{SO}(\psi_H) \cong \mathrm{SO}(2)$ となる．$\mu \in \mathbf{Z}$ に対して $\mathrm{SO}(\psi_H)$ の指標 χ_μ を $\chi_\mu(\ell(m)) = e^{\sqrt{-1}\mu\theta}$ により定める．

$\det H < 0$ のときは $H = {}^t u \begin{pmatrix} 0 & h_2'/2 \\ h_2'/2 & 0 \end{pmatrix} u$ とおけるので $\mathrm{SO}(\psi_H)$ の元は $\ell(m)$, $m = u \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} u^{-1}$ $(t > 0)$ とかけ, $\mathrm{SO}(\psi_H) \cong \mathrm{SO}_o(1,1) \cong \mathbf{R}^\times_{>0}$ となる．$\mu \in \mathbf{C}$ に対して $\mathrm{SO}(\psi_H)$ の指標 χ_μ を $\chi_\mu(\ell(m)) = t^\mu$ により定める．

$(R, \eta) = (\mathrm{SO}(\psi_H) \ltimes N_S, \chi_\mu \cdot \psi_H)$ とする．$S(\pi, R, \eta)$ の元は Siegel-Whittaker 関数, あるいは Bessel 関数, 一般化された Whittaker 関数といわれる．$\det H > 0$ のときは Whittaker 関数と同じように $A = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) \mid a_1, a_2 > 0\}$ とし, $\det H < 0$ のときは $A = \{\exp\{a_1 \frac{H_0}{2} + \log(a_2) \frac{H_1 + H_2}{2}\} \mid a_1 \in \mathbf{R}, a_2 > 0\}$ ととると $G = RAK$ という分解が成り立つ．ここで $H_0 = E_{12} + E_{21} - E_{34} - E_{43}$ とおいた．

Whittaker 関数の場合と同様に, Dirac-Schmid 方程式から $\varphi(v_i^\lambda)(a)$ $(a \in A)$ のみたす偏微分方程式系が得られる．$\det H > 0$ の場合は宮崎 [17] により偏微分方程式系が求められ, 重複度なし定理が示された．よい増大条件をみたす Siegel-Whittaker 関数の積分表示式は権-織田 [4] によって得られた．$\det H < 0$ の場合の同様の結果は森山 [25] による．

定理 3.2. ([17], [4]) π_Λ $(\Lambda = (\lambda_1 - 1, \lambda_2) \in \Xi_{\mathrm{II}})$ を大きな離散系列表現, $\tau_{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)}$ をその極小 K タイプとする．$H = \mathrm{diag}(h_1, h_3)$, $h_1, h_3 > 0$ とする．$a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) \in A$ とする．
(1) K 埋め込み $\varphi : V_\lambda \to S(\pi_\Lambda, R, \eta)$ に対して $\varphi(v_i^\lambda)(a) = (\sqrt{h_1} a_1)^{\lambda_2 + i} (\sqrt{h_3} a_2)^{\lambda_1 - i} \exp\{-2\pi(h_1 a_1^2 + h_3 a_2^2)\} \phi_i(a)$ *とおくと,* $\phi_i(a)$ *は以下をみたす:*

$$\begin{aligned}
&h_3 a_2^2 (\partial_1 - 8\pi h_1 a_1^2 + 2\lambda_2 - 2 + 2i \tfrac{h_1 a_1^2}{\Delta}) \phi_{i-1}(a) + 2\sqrt{-1}\mu \tfrac{h_1 a_1^2 h_3 a_2^2}{\Delta} \phi_i(a) \\
&\quad + h_1 a_1^2 \{\partial_2 - 8\pi h_3 a_2^2 + 2\lambda_2 - 2 - 2(\lambda_1 - \lambda_2 - i) \tfrac{h_3 a_2^2}{\Delta}\} \phi_{i+1}(a) = 0, \\
&i \tfrac{h_3 a_2^2}{\Delta} \phi_{i-1}(a) + \sqrt{-1}\mu \tfrac{h_3 a_2^2}{\Delta} \phi_i(a) - \{\partial_1 + (\lambda_1 - \lambda_2 - i) \tfrac{h_3 a_2^2}{\Delta}\} \phi_{i+1}(a) = 0, \\
&(\partial_2 - i \tfrac{h_1 a_1^2}{\Delta}) \phi_{i-1}(a) - \sqrt{-1}\mu \tfrac{h_1 a_1^2}{\Delta} \phi_i(a) + (\lambda_1 - \lambda_2 - i) \tfrac{h_1 a_1^2}{\Delta} \phi_{i+1}(a) = 0.
\end{aligned}$$

ここで $\Delta = h_1 a_1^2 - h_3 a_2^2$ とおいた．
(2) $|\mu| \geq \lambda_1 - \lambda_2$ かつ $\mu + \lambda_1 - \lambda_2 \in 2\mathbf{Z}$ のとき, $\dim \mathcal{I}_{\mathrm{mg}}(\pi_\Lambda, R, \eta) \leq 1$ である．このとき A 動径成分が以下で与えられる K 埋め込み $\varphi_{\mathrm{mg}} : V_\lambda \to S_{\mathrm{mg}}(\pi, R, \eta)$ が存在する: $\varphi_{\mathrm{mg}}(v_i^\lambda)(a) =$

$(h_1a_1^2-h_3a_2^2)^{(|\mu|-\lambda_1+\lambda_2)/2}\exp\{-2\pi(h_1a_1^2+h_3a_2^2)\}\sum_{j=0}^{\lambda_1-\lambda_2}x_{ij}f_j(a)$,

$$\begin{aligned}f_j(a)&=(\sqrt{h_1}a_1)^{\lambda_2+i+2j+1}(\sqrt{h_3}a_2)^{3\lambda_1-2\lambda_2-i-2j+1}\\&\quad\times\int_0^1 F\big(2\pi h_1a_1^2t+2\pi h_3a_2^2(1-t)\big)t^{\frac{|\mu|-\lambda_1+\lambda_2-1}{2}+j}(1-t)^{\frac{|\mu|+\lambda_1-\lambda_2-1}{2}-j}\,dt\end{aligned}$$

ここで $F(x)=e^xx^{-\frac{|\mu|+\lambda_1+1}{2}}W_{\frac{\lambda_1-|\mu|-1}{2},\frac{\lambda_2}{2}}(2x)$ であり, $x_{ij}\in\mathbf{C}$ は明示的に与えられる.

定理 3.3. ([25]) π_Λ $(\Lambda=(\lambda_1-1,\lambda_2)\in\Xi_{\rm II})$ を大きな離散系列表現, $\tau_{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)}$ をその極小 K タイプとする. $H=\left(\begin{smallmatrix}0&h_2/2\\h_2/2&0\end{smallmatrix}\right)$ とする. $a=\exp\{a_1\frac{H_0}{2}+\log(a_2)\frac{H_1+H_2}{2}\}\in A$ とする $(a_1\in\mathbf{R},a_2>0)$.

(1) K *埋め込み* $\varphi:V_\lambda\to S(\pi_\Lambda,R,\eta)$ *に対して* $\varphi(v_i^\lambda)(a)=\exp\{-2\pi h_2a_2\,\mathrm{sh}(a_1)\}\phi_i(a)$ *とおくと,* $\phi_i(a)$ *は以下をみたす:*

$$\begin{aligned}&(\partial_2-2\pi h_2a_2\,\mathrm{sh}(a_1)+\tfrac{-\lambda_1+\lambda_2}{2}-1)(\phi_{i+1}(a)+\phi_{i-1}(a))+4\pi h_2a_2\,\mathrm{ch}(a_1)\phi_i(a)=0,\\&(\lambda_1-\lambda_2-i-1)\mathrm{th}(a_1)\phi_{i+2}(a)-(2\partial_2+\tfrac{2\mu}{\mathrm{th}(a_1)}-\lambda_1-\lambda_2-i-2)\phi_{i+1}(a)\\&-\{2\tfrac{\partial}{\partial a_1}+(i+1)\mathrm{th}(a_1)\}\phi_i(a)+i\phi_{i-1}(a)=0,\\&(\lambda_1-\lambda_2-i)\phi_{i+1}(a)-\{2\tfrac{\partial}{\partial a_1}+(\lambda_1-\lambda_2-i+1)\mathrm{th}(a_1)\}\phi_i(a)\\&-(2\partial_2-\tfrac{2\mu}{\mathrm{ch}(a_1)}-2\lambda_1-2+i)\phi_{i-1}(a)+(i-1)\mathrm{th}(a_1)\phi_{i-2}(a)=0.\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{ch}(t)=\cosh(t)$, $\mathrm{sh}(t)=\sinh(t)$, $\mathrm{th}(t)=\tanh(t)$ と略記し, $\partial_2=a_2\frac{\partial}{\partial a_2}$ とおいた.

(2) $\dim\mathcal{I}_{\rm mg}(\pi_\Lambda,R,\eta)\le 1$ *である. このとき* A *動径成分 (の境界値) が以下で与えられる* K *埋め込み* $\varphi_{\rm mg}:V_\lambda\to S_{\rm mg}(\pi,R,\eta)$ *が存在する:*

$$\begin{aligned}&\varphi_{\rm mg}(v_i^\lambda)(\mathrm{diag}(a_2,a_2,a_2^{-1},a_2^{-1}))\\&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{L(\sigma)}\frac{\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\frac{\lambda_1+\lambda_2+2}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\frac{\lambda_1-\lambda_2+2}{2})}{\Gamma_{\mathbf{R}}(s+\mu+\lambda_1-i+2)\Gamma_{\mathbf{R}}(s-\mu+\lambda_2+i+2)}(|h_2|a_2)^{-s}\,ds\end{aligned}$$

注意 3.4. Siegel-Whittaker 関数の明示公式についての最初の結果は $\det H>0$ で π がクラス 1 主系列表現の場合の丹羽 [28] によるものである. $\det H>0$ の場合の Siegel-Whittaker 関数は宮崎 [17] によって系統的に調べられ, P_J 主系列表現の場合にある K タイプでの明示公式が与えられた. さらに主系列表現の場合にも偏微分方程式系が書き下されており, 筆者 [11] によって解の（境界値) が与えられた. $\det H<0$ のときは, [25] において P_J 主系列表現の場合の明示公式も与えられている.

3.4 その他の一般化された球関数

これまでに Siegel 放物部分群に沿った Fourier 展開に関連する一般化された球関数を扱ったが, G には Jacobi 放物部分群 P_J という極大放物部分群がある. 正則保型形式に対してこの P_J に沿った展開は Fourier-Jacobi 展開といわれる. P_J のべき単根基 N_J は 3 次元 Heisebelg 群 $H(\mathbf{R})$ と同

型になり, Fourier 展開を扱うにはその無限次元表現に対応する項も考える必要がある. 平野による一連の研究 [7], [8], [9] においては, R として Jacobi 群 $\cong \mathrm{SL}(2,\mathbf{R}) \ltimes H(\mathbf{R})$ をとり, そのすべての既約表現 η に対して, π が離散系列表現, P_J 主系列表現, 主系列表現の場合に, 重複度なし定理, 一般化された球関数の明示公式が得られている. G のもう一つの放物部分群である極小放物部分群 P_0 に沿った Fourier 展開は. 正則保型形式に対して成田 [26] によって定式化がなされた. 正則性から P_0 のべき単根基 N の指標に対する展開項は消え, この場合も N の無限次元表現を考える必要がある.

Fourier 展開からという文脈からは外れるが, $R = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, $R = \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ とした一般化された球関数は保型 L 関数を考える上で重要な新谷関数といわれるものである. 森山 [20], [21] において π が離散系列表現や P_J 主系列表現の場合にその明示公式が与えられている.

また行列係数, すなわち $R = K$ としたときには, 飯田 [10] において P_J 主系列表現の場合に, 織田 [31], [32] において離散系列表現の場合にその明示式が与えられている. これらの明示式には 2 変数の超幾何関数が現れる.

4 アルキメデスゼータ積分

Langlands による保型 L 関数の定義によれば, 2 次 Siegel 保型形式に付随する保型 L 関数は $\mathrm{GSp}(2,\mathbf{C})$ の有限次元表現を経由して定義される. 基本ウエイトに対応するのはスピノール L 関数, 標準 L 関数といわれるそれぞれ 4 次, 5 次の Euler 積を持つ L 関数である. Andrianov [1] による重さ k の正則 Siegel 保型形式のスピノール L 関数の積分表示による研究が出発点となり, これまでにさまざまなゼータ積分が発見されている. ここでは generic な保型形式に適用可能な積分表示に対してアルキメデスゼータ積分の計算例を紹介する.

4.1 Novodvorsky のゼータ積分

以下ではアデールの言葉で述べることにする. $\mathbf{A}$ を代数体 F のアデール環, $\mathsf{G} := \mathrm{GSp}(2) = \{g \in \mathrm{GL}(4) \mid$ ある $\nu(g) \in \mathbf{G}_m$が存在して ${}^tgJg = \nu(g)J\}$, $\Pi = \otimes'_v \Pi_v$ を $\mathsf{G}(\mathbf{A}) = \mathrm{GSp}(2,\mathbf{A})$ の尖点保型表現とする. $\mathsf{N} := \{n(x_0,x_1,x_2,x_3) \in \mathsf{G}\}$ とし, 非自明な加法指標 $\mathbf{e_A} : \mathbf{A}/F \to \mathbf{C}^{(1)}$ を固定し, $\mathsf{N}(\mathbf{A})$ の指標 $\eta = \prod_v \eta_v$ を $\eta(n(x_0,x_1,x_2,x_3)) = \mathbf{e_A}(x_0+x_3)$ で定める. Π が generic であるとは, ある尖点形式 $f \in \Pi$ に対して, 大域的 Whittaker 関数

$$W_f(g) := \int_{\mathsf{N}(F)\backslash \mathsf{N}(\mathbf{A})} f(ng)\eta(n^{-1})\, dn$$

が消えないこととする. Novodvorsky のゼータ積分 [27] とは

$$Z(s,f) := \int_{F^\times\backslash\mathbf{A}^\times}\int_{(F\backslash\mathbf{A})^3} F(\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & -x_0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & & & \\ & y & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix})\, \mathbf{e_A}(x_0)|y|_{\mathbf{A}}^{s-1/2}\, dx_0dx_1dzd^\times y$$

という "Mellin 変換型" の積分表示である. Hecke のゼータ積分と同様に f の尖点性により大域的ゼータ積分 $Z(s,f)$ はすべての s で絶対収束し, s についての整関数となる. さらに f の Fourier 展

開を用いることで, $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ において 「基本等式」

$$Z(s,f) = \int_{\mathbf{A}^\times}\int_{\mathbf{A}} W_f(\left(\begin{smallmatrix} y&0&0&0\\ 0&y&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&x&0&1\end{smallmatrix}\right))|y|_{\mathbf{A}}^{s-3/2}\,dxd^\times y$$

を得る. 局所的な Whittaker 模型の一意性 $\dim \mathrm{Hom}_{\mathsf{G}(F_v)}(\Pi_v, \mathrm{Ind}_{\mathsf{N}(F_v)}^{\mathsf{G}(F_v)}(\eta_v)) \le 1$ により, 大域的 Whittaker 関数 W_f は局所 Whitaker 関数 W_v の積に分解される. 3.1 節における $S(\pi,R,\eta)$ と同様に Whittaker 関数の空間を定義し, それをここでは $\mathrm{Wh}(\Pi_v,\eta_v)$ とかくことにする. $Z(s,f) = \prod_v Z_v(s,W_v)$ と局所ゼータ積分の積に分解される. ここで

$$Z_v(s,W_v) = \int_{F_v^\times}\int_{F_v} W_v(\left(\begin{smallmatrix} y&0&0&0\\ 0&y&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&x&0&1\end{smallmatrix}\right))|y|^{s-3/2}\,dxd^\times y$$

である. 不分岐有限素点における局所 Whittaker 関数 W_v の明示公式 (加藤-Casselman-Shalika の公式) を用いると $Z_v(s,W_v)$ がスピノール L 関数の局所 L 因子 $L(s,\Pi_v)$ と一致することが示される. 分岐有限素点における $Z_v(s,W_v)$ の解析は Takloo-Bighash [34] によってなされたので, 残るはアルキメデスゼータ積分 $Z_\infty(s,W_\infty)$ の計算となる.

Novodvorsky 積分の最初の計算例である, 森山 [23] の結果を紹介する. $v \cong \mathbf{R}$ とし Π_v の $\mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})$ への制限が大きな離散系列表現の直和になるとする: $\Pi_v|_{\mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})} = \pi_{(\lambda_1-1,\lambda_2)} \oplus \pi_{(-\lambda_2,-\lambda_1+1)}$ $(1-\lambda_1 < \lambda_2 < 0)$. また簡単のため Π_v の中心指標は自明であるとし, $\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(t) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$ $(t \in \mathbf{R})$ とする. このとき W_v は定理 3.1 における $\varphi_{\mathrm{mg}}(v_i^\lambda)$ ととることができ, 後述の Barnes の第 1 補題などいくつかの積分公式を援用して

$$Z_v(s,W_v) = c(\sqrt{-1})^i\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\tfrac{\lambda_1-\lambda_2-1}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\tfrac{\lambda_1+\lambda_2-1}{2})B(s)$$

を得ることができる. ここで c は i には依存しない定数であり,

$$B(s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\tau-\sqrt{-1}\infty}^{\tau+\sqrt{-1}\infty} \frac{\Gamma_{\mathbf{C}}(t+\frac{\lambda_1-\lambda_2-1}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(t+\frac{\lambda_1+\lambda_2-1}{2})}{\Gamma_{\mathbf{R}}(t+s+\lambda_2+i)\Gamma_{\mathbf{R}}(t-s-i+\lambda_1+1)}\,dt$$

である. 冒頭の Hecke のゼータ積分と異なり, 局所ゼータ積分と局所 L 因子は一致しない. つまり $B(s)$ は定数ではない. これはいわゆるユニポテント積分 ($x \in \mathbf{R}$ での積分) があることに起因するが, 実は $B(s)$ は $\det H < 0$ のときの Siegel-Whittaker 関数の単位元での値と関係している (cf. 定理 3.3(2)). さて, L 関数の関数等式を示すために必要な局所関数等式は以下のようにして得ることができる.

Whittaker 関数 $W_v \in \mathrm{Wh}(\Pi_v,\eta_v)$ に対して, $\widetilde{W}_v(g) := W_v(g\left(\begin{smallmatrix} &&&1\\ &&-1&\\ &-1&&\\ 1&&&\end{smallmatrix}\right))$ とおくと $\widetilde{W}_v \in \mathrm{Wh}(\widetilde{\Pi}_v,\eta_v)$ となる. ここで $\widetilde{\Pi}_v$ は Π_v の反傾表現である. $W_v = \varphi_{\mathrm{mg}}(v_i^\lambda)$ のときは $\widetilde{W}_v(g) = \sqrt{-1}^{\lambda_1+\lambda_2}(-1)^i\varphi_{\mathrm{mg}}(v_{\lambda_1-\lambda_2-i}^\lambda)(g)$ となるので, 上の計算と同様に

$$Z_v(s,\widetilde{W}_v) = c(-1)^{\lambda_1}(\sqrt{-1})^i\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\tfrac{\lambda_1-\lambda_2-1}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\tfrac{\lambda_1+\lambda_2-1}{2})B'(s)$$

となる. ここで

$$B'(s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\tau-\sqrt{-1}\infty}^{\tau+\sqrt{-1}\infty} \frac{\Gamma_{\mathbf{C}}(t+\frac{\lambda_1-\lambda_2-1}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(t+\frac{\lambda_1+\lambda_2-1}{2})}{\Gamma_{\mathbf{R}}(t+s+\lambda_1-i)\Gamma_{\mathbf{R}}(t-s+i+\lambda_2+1)}\,dt$$

であるが, $B'(s)=B(1-s)$ が成り立つので局所関数等式

$$\frac{Z(1-s,\widetilde{W}_v)}{L(1-s,\widetilde{\Pi}_v)}=\varepsilon(s,\Pi_v,\eta_v)\frac{Z(s,W_v)}{L(s,\Pi_v)}$$

を得る．ここで $L(s,\Pi_v)=\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\frac{\lambda_1-\lambda_2-1}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\frac{\lambda_1+\lambda_2-1}{2})$, $\varepsilon(s,\Pi_v,\eta_v)=\sqrt{-1}^{\lambda_1}$ は Π_v の Langlands パラメータから定まる (期待される) アルキメデス L, ε 因子である.

さて 3.2 節で述べたように, Whittaker 模型を持つような $\mathrm{GSp}(2,F_v)$ の既約表現に対する Whittaker 関数の明示公式は得られていたので, 主系列表現の場合は [15], P_S 主系列表現の場合には [14], 複素素点では [16] において同様の計算がなされた. 以上の結果をまとめると以下を得る.

定理 4.1. $\Pi=\otimes'_v\Pi_v$ を *generic* な $\mathrm{GSp}(2,\mathbf{A})$ の尖点保型表現とする．大域的スピノール L 関数 $L(s,\Pi)=\prod_v L(s,\Pi_v)$ は全 $\mathbf{C}$ 平面に整型に解析接続され, 関数等式 $L(s,\Pi)=\varepsilon(s,\Pi)L(1-s,\widetilde{\Pi})$ をみたす．ここで $\varepsilon(s,\Pi)=\varepsilon(s,\Pi_v,\eta_v)$ である.

注意 4.2. この定理は Langlands-Shahidi 法からも示されている ([2]).

Novodvorsky [27] はスピノール L 関数の積分表示に加えて, generic な $\mathrm{GSp}(2)$ の保型表現 $\Pi=\otimes'_v\Pi_v$ と $\mathrm{GL}(2)$ の保型表現 $\Pi'=\otimes'_v\Pi'_v$ の組から定まる 8 次の Euler 積をもつ L 関数に対する積分表示も与えた．この積分に対してもいくつかの場合にアルキメデスゼータ積分の計算が実行されている: [29] (Π_v, Π'_v がともにクラス 1 主系列表現). [24] (Π_v が大きな離散系列表現もしくは P_J 主系列表現, Π'_v が離散系列表現)

[29] で示された等式は以下の通りである. $\mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})$ のクラス 1Whittaker 関数 $W_v=\varphi_{\mathrm{mg}}(v_0^{(0,0)})$ (3.2 節, $c_0=c_3=1$ とする), $\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})$ のクラス 1Whittaker 関数 $W'_v(\mathrm{diag}(a_1,a_2))=2^{-1}a_1K_\nu(2\pi\frac{a_1}{a_2})$ に対して

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty W_v\big(\mathrm{diag}(a_1\sqrt{a_2},\sqrt{a_2},1/(a_1\sqrt{a_2}),1/\sqrt{a_2}\big)W'_v(\mathrm{diag}(a_2,1))a_1^{2s-2}a_2^{s-2}\frac{da_1}{a_1}\frac{da_2}{a_2}\\&=\frac{1}{\Gamma_{\mathbf{R}}(2s)}\cdot\Gamma_{\mathbf{R}}(s+\nu+\tfrac{\nu_1-\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(s+\nu-\tfrac{\nu_1-\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(s+\nu+\tfrac{\nu_1+\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(s+\nu-\tfrac{\nu_1+\nu_2}{2})\\&\times\Gamma_{\mathbf{R}}(s-\nu+\tfrac{\nu_1-\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(s-\nu-\tfrac{\nu_1-\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(s-\nu+\tfrac{\nu_1+\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(s-\nu-\tfrac{\nu_1+\nu_2}{2}).\end{aligned}$$

前述のスピノール L 関数の場合とは異なり, アルキメデスゼータ積分と期待される局所 L 因子が一致する．証明には ([29] のものとは異なるが) 以下の Barnes の第 1 補題を用いればよい:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma_{\mathbf{R}}(z+a)\Gamma_{\mathbf{R}}(z+b)\Gamma_{\mathbf{R}}(-z+c)\Gamma_{\mathbf{R}}(-z+d)\,dz\\&=\frac{\Gamma_{\mathbf{R}}(a+c)\Gamma_{\mathbf{R}}(a+d)\Gamma_{\mathbf{R}}(b+c)\Gamma_{\mathbf{R}}(b+d)}{\Gamma_{\mathbf{R}}(a+b+c+d)}.\end{aligned}$$

4.2 Bump-Friedberg-Ginzburg による複素 2 変数のゼータ積分

Bump-Friedberg-Ginzburg によるゼータ積分 [3] は尖点形式に 2 つの極大放物部分群に対する Eisenstein 級数をかけたものである．$\mathsf{P}_1 = \{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \in \mathsf{G}\}$ (Jacobi), $\mathsf{P}_2 = \{\begin{pmatrix} * & * \\ 0_2 & * \end{pmatrix} \in \mathsf{G}\}$ (Siegel) を $\mathsf{G} = \mathrm{GSp}(2)$ の 2 つの極大放物部分群とする．その Levi 分解 $\mathsf{P}_i = \mathsf{M}_i\mathsf{N}_i$ は $\mathsf{M}_i = \{\iota_i(\alpha, g) \mid \alpha \in \mathrm{GL}(1), g =\in \mathrm{GL}(2)\}$, $\mathsf{N}_1 = \{n(x_0, x_1, x_2, 0) \in \mathsf{G}\}$, $\mathsf{N}_2 = \{n(0, x_1, x_2, x_3) \in \mathsf{G}\}$ で与えられる．ここで $\iota_1(\alpha, g) = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & a & & b \\ & & \alpha^{-1}\det g & \\ & c & & d \end{pmatrix}$, $\iota_2(\alpha, g) = \begin{pmatrix} \alpha g & \\ & {}^t g^{-1} \end{pmatrix}$ とした．P_i のモジュラス指標 δ_i は $\delta_1(\iota_1(\alpha, g)) = |\det g|^{-2}|\alpha|^4$, $\delta_2(\iota_2(\alpha, g)) = |\det g|^3|\alpha|^3$ で与えられる．$s \in \mathbf{C}$ に対して，$\mathrm{Ind}_{\mathsf{P}_i(\mathbf{A})}^{\mathsf{G}(\mathbf{A})}(\delta_i^s)$ を $\mathsf{G}(\mathbf{A})$ 上の smooth な関数 $f_i(s, g)$ で $f_i(s, pg) = \delta_i^s(p) f_i(s, g), \forall(p, g) \in \mathsf{P}_i(\mathbf{A}) \times \mathsf{G}(\mathbf{A})$ をみたすもの全体とする． $s_1, s_2 \in \mathbf{C}$ に対して大域切断 $f_1 = \prod_v f_{1,v} \in \mathrm{Ind}_{\mathsf{P}_1(\mathbf{A})}^{\mathsf{G}(\mathbf{A})}(\delta_1^{s_1/2+1/4})$, $f_2 = \prod_v f_{2,v} \in \mathrm{Ind}_{\mathsf{P}_2(\mathbf{A})}^{\mathsf{G}(\mathbf{A})}(\delta_2^{(s_2+1)/3})$ をとり，Eisenstein 級数 $E_i(s_i, f_i, g)$ を定義する: $E_i(s_i, f_i, g) = \sum_{\gamma \in \mathsf{P}_i(F)\backslash\mathsf{G}(F)} f_i(s_i, \gamma g)$. $f \in \Pi$ を generic な尖点形式とし,

$$Z(s_1, s_2, f, f_1, f_2) = \int_{\mathsf{Z}(\mathbf{A})\mathsf{G}(F)\backslash\mathsf{G}(\mathbf{A})} f(g) E_1(s_1, f_1, g) E_2(s_2, f_2, g)\, dg.$$

とおく．ここで Z は G の中心. Eisenstein 級数を unfolding して, $\mathrm{Re}(s_1), \mathrm{Re}(s_2) \gg 0$ において基本等式

$$Z(s_1, s_2, f, f_1, f_2) = \int_{\mathsf{Z}(\mathbf{A})\mathsf{N}_{12}(\mathbf{A})\backslash\mathsf{G}(\mathbf{A})} W_f(g) f_1(s_1, w_2 g) f_2(s_2, w_1 g)\, dg$$

が得られる．ここで $\mathsf{N}_{12} = \mathsf{N}_1 \cap \mathsf{N}_2 = \{n(0, x_1, x_2, 0) \in \mathsf{G}\}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である. 局所ゼータ積分

$$Z_v(s_1, s_2, W_v, f_{1,v}, f_{2,v}) = \int_{\mathsf{Z}(F_v)\mathsf{N}_{12}(F_v)\backslash\mathsf{G}(F_v)} W_v(g) f_{1,v}(s_1, w_2 g) f_{2,v}(s_2, w_1 g)\, dg$$

の不分岐有限素点における計算は [3] でなされている．実素点での筆者の計算例の一つを紹介する [13]．$v \cong \mathbf{R}$, Π_v をクラス 1 主系列表現とする．$f_{i,v}$ たちは $K \cong \mathrm{U}(2)$ 上の値で決まるが, $f_{1,v}(k) = f_{2,v}(k) = 1$ $(k \in K)$ ととると, クラス 1Whittaker 関数 W_v に対して

$$\begin{aligned} Z_v(s_1, s_2, W_v, f_{1,v}, f_{2,v}) &= \frac{2^3 \cdot \Gamma_{\mathbf{R}}(s_1 + \frac{\nu_1-\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(s_1 + \frac{-\nu_1+\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(s_1 + \frac{\nu_1+\nu_2}{2})\Gamma_{\mathbf{R}}(s_1 + \frac{-\nu_1-\nu_2}{2})}{\Gamma_{\mathbf{R}}(2s_1+1)\Gamma_{\mathbf{R}}(s_2+1)\Gamma_{\mathbf{R}}(2s_2)} \\ &\quad \times \Gamma_{\mathbf{R}}(s_2)\Gamma_{\mathbf{R}}(s_2+\nu_1)\Gamma_{\mathbf{R}}(s_2+\nu_2)\Gamma_{\mathbf{R}}(s_2-\nu_1)\Gamma_{\mathbf{R}}(s_2-\nu_2). \end{aligned}$$

が得られ, 期待される 2 つの L 因子の積 (を Eisenstein 級数の正規化因子でわったもの) になる．証明には前述の Barnes の第 1 補題に加えて, 以下の第 2 補題を用いる:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma_{\mathbf{R}}(z+a)\Gamma_{\mathbf{R}}(z+b)\Gamma_{\mathbf{R}}(-z+c)\Gamma_{\mathbf{R}}(-z+d)\Gamma_{\mathbf{R}}(-z+e)}{\Gamma_{\mathbf{R}}(-z+a+b+c+d+e)}\, dz \\ &= \frac{\Gamma_{\mathbf{R}}(a+c)\Gamma_{\mathbf{R}}(a+d)\Gamma_{\mathbf{R}}(a+e)\Gamma_{\mathbf{R}}(b+c)\Gamma_{\mathbf{R}}(b+d)\Gamma_{\mathbf{R}}(b+e)}{\Gamma_{\mathbf{R}}(a+b+d+e)\Gamma_{\mathbf{R}}(b+c+d+e)\Gamma_{\mathbf{R}}(c+a+d+e)}. \end{aligned}$$

注意 4.3. generic とは限らない保型形式に対するゼータ積分の計算例は, 正則な場合にはさまざまな結果があるが, 非正則な場合にはあまり多くはない. 堀 [6] は [28] の明示公式を用いて Andrianov のゼータ積分 [1] ([33]) の実素点における計算を実行し, Siegel 波動形式のスピノール L 関数の解析接続, 関数等式を得ている. P_J 主系列表現に対しては, 宮崎 [17] において同様の計算がなされている.

参考文献

[1] Andrianov, A. N., Euler products that correspond to Siegel's modular forms of genus 2. (Russian) Uspehi Mat. Nauk **29** (1974), no. 3 (177), 43–110.

[2] Asgari, Mahdi; Shahidi, Freydoon, Generic transfer from $GSp(4)$ to $GL(4)$. Comps. Math. **142** (2006), 541–550.

[3] Bump, Daniel; Friedberg, Solomon; Ginzburg, David, Rankin-Selberg integrals in two complex variables. Math. Ann. **313** (1999), no. 4, 731–761.

[4] Gon, Yasuro; Oda, Takayuki, An explicit integral representation of Siegel-Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})$ for the large discrete series representations. Number theory related to modular curves—Momose memorial volume, 105–123, Contemp. Math., **701**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

[5] Hasagawa, Yasuko, Principal series and generalized principal series Whittaker functions with peripheral K-types on the real symplectic group of rank 2. Manuscripta Math. **134** (2011), no. 1-2, 91–122.

[6] Hori, Akira, Andrianov's L-functions associated to Siegel wave forms of degree two. Math. Ann. **303** (1995), no. 2, 195–226.

[7] Hirano, Miki, Fourier-Jacobi type spherical functions for discrete series representations of $Sp(2,\mathbf{R})$. Compositio Math. **128** (2001), no. 2, 177–216.

[8] Hirano, Miki, Fourier-Jacobi type spherical functions for P_J-principal series representations of $Sp(2,\mathbf{R})$. J. London Math. Soc. (2) **65** (2002), no. 3, 524–546.

[9] Hirano, Miki, Fourier-Jacobi type spherical functions for principal series representations of $Sp(2,\mathbf{R})$. Indag. Math. (N.S.) **15** (2004), no. 1, 43–53.

[10] Iida, Masatoshi, Spherical functions of the principal series representations of $Sp(2,\mathbf{R})$ as hypergeometric functions of C_2-type. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **32** (1996), no. 4, 689–727.

[11] Ishii, Taku, Siegel-Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$ for principal series representations. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), no. 2, 303–346.

[12] Ishii, Taku, On principal series Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$. J. Funct. Anal. **225** (2005), no. 1, 1–32.

[13] Ishii, Taku, Whittaker functions on real semisimple Lie groups of rank two, Canad. J.

Math. **62** (2010), 563–581.

[14] Ishii, Taku, Whittaker functions for generalized principal series representations of GSp$(2,\mathbf{R})$. J. Funct. Anal. **276** (2019), no. 1, 284–327.

[15] Ishii, Taku; Moriyama, Tomonori, Spinor L-functions for generic cusp forms on $GSp(2)$ belonging to principal series representations. Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 11, 5683–5709.

[16] Miyazaki, Tadashi, Principal series Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{C})$. J. Funct. Anal. **261** (2011), no. 4, 1083–1131.

[17] Miyazaki,Takuya, The generalized Whittaker functions for $Sp(2,\mathbf{R})$ and the gamma factor of the Andrianov L-function. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), no. 2, 241–295.

[18] Miyazaki, Takuya; Oda, Takayuki, Principal series Whittaker functions on $Sp(2;\mathbf{R})$. Explicit formulae of differential equations. Automorphic forms and related topics (Seoul, 1993), 59–92, Pyungsan Inst. Math. Sci., Seoul, 1993.

[19] Miyazaki, Takuya; Oda, Takayuki, Principal series Whittaker functions on $Sp(2;\mathbf{R})$. II. Tohoku Math. J. (2) **50** (1998), no. 2, 243–260. Errata: Tohoku Math. J. (2) **54** (2002), no. 1, 161–162.

[20] Moriyama, Tomonori, Spherical functions with respect to the semisimple symmetric pair $(Sp(2,\mathbf{R}), SL(2,\mathbf{R})\times\ SL(2,\mathbf{R}))$. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **6** (1999), no. 1, 127–179.

[21] Moriyama, Tomonori, Spherical functions for the semisimple symmetry pair $(Sp(2,\mathbf{R}), SL(2,\mathbf{C}))$. Canad. J. Math. **54** (2002), no. 4, 828–865.

[22] Moriyama, Tomonori, A remark on Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), 627–635.

[23] Moriyama, Tomonori, Entireness of the spinor L-functions for certain generic cusp forms on $GSp(2)$. Amer. J. Math. **126** (2004), no. 4, 899–920.

[24] Moriyama, Tomonori, L-functions for GSp(2) $\times$ GL(2): Archimedean theory and applications, Canad. J. Math. **61** (2009), 395–426.

[25] Moriyama, Tomonori, Generalized Whittaker functions on $GSp(2,\mathbf{R})$ associated with indefinite quadratic forms, J. Math. Soc. Japan **63** (2011), 1203–1262.

[26] Narita, Hiro-aki, Fourier expansion of holomorphic Siegel modular forms with respect to the minimal parabolic subgroup. Math. Z. **231** (1999), no. 3, 557–588.

[27] Novodvorsky, Mark E., Automorphic L-functions for symplectic group GSp(4). Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 87–95, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[28] Niwa, Shinji, On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2. Nagoya Math. J. **121** (1991), 171–184.

[29] Niwa, Shinji, Commutation relations of differential operators and Whittaker functions on

$\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R})$. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **71** (1995), no. 8, 189–191.

[30] Oda, Takayuki, An explicit integral representation of Whittaker functions on $Sp(2;\mathbf{R})$ for the large discrete series representations. Tohoku Math. J. (2) **46** (1994), no. 2, 261–279.

[31] Oda, Takayuki, Matrix coefficients of the large discrete series representations of $Sp(2,\mathbf{R})$ as hypergeometric series of two variables, 数理解析研究所講究録 909 (1995), 90–101.

[32] Oda, Takayuki, Matrix coefficients of the large discrete series representations of $Sp(2,\mathbf{R})$ as hypergeometric series of two variables II, 数理解析研究所講究録 1094 (1999), 60–82.

[33] Piatetski-Shapiro, I. I., L-functions for GSp_4. Olga Taussky-Todd: in memoriam. Pacific J. Math. 1997, Special Issue, 259–275.

[34] Takloo-Bighash, Ramin, L-functions for the p-adic group GSp(4). Amer. J. Math. **122** (2000), no. 6, 1085–1120.

[35] Vogan, David A., Jr., Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules. Invent. Math. **48** (1978), no. 1, 75–98.