The Weisfeiler-Leman stabilization revisited from the viewpoint of Terwilliger algebras

伊藤達郎
安徽大学

1 Introduction

本稿においては, 有限集合 X 上の組合せ構造を

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(A_i | i \in \Lambda) \tag{1}$$

で表す. ここで, Λ は添数 i が亘る集合であり, A_i は X の元により行と列が index 付けされた複素数行列である:

$$A_i \in \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$$

($\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ は, X の元により行と列が index 付けされた複素数行列全体からなる全行列代数を表す). 添数 $i \in \Lambda$ ごとに X 上の或る関係（組合せ構造）が与えられており, (x, y), $(x', y') \in X \times X$ が同じ関係にあるのは, $A_i(x, y) = A_i(x', y')$ のとき、かつそのときに限ると解釈するのである ($A_i(x, y)$ は行列 A_i の (x, y) 成分を表す).

以下 X の元の $\mathbb{C}$ 上の形式的線形和 $\sum_{x \in X} c_x x$ ($c_x \in \mathbb{C}$) の全体を V で表す. V は自然な仕方で X を基底とする $\mathbb{C}$ 上の線形空間となる. このことを

$$V = \mathbb{C}X$$

と書く. 更に V を, X を正規直交基底とする positive definite Hermitian space とみなす. 本稿では、X 上の組合せ構造を考察の対象とするゆえに、V の基底は特に断らない限り, (正規直交基底として) X に固定されているものとする. 従って、V の endomorphism algebra $\mathrm{End}(V)$ は, 行列表記を通して $\mathrm{Mat}_X(\mathcal{C})$ と同一視される:

$$\mathrm{End}(V) \simeq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C}). \tag{2}$$

X の置換 (X から X への全単射) の全体を $\mathrm{Sym}(X)$ で表す (X 上の対称群). X の置換を置換行列で表し

$$\mathrm{Sym}(X) \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$$

とみなす．X 上の組合せ構造 $\mathcal{C}$ の自己同型群 G を

$$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{C}) = \{P \in \mathrm{Sym}(X) \mid P^{-1}A_iP = A_i \text{ for all } i \in \Lambda\} \tag{3}$$

により定義する．条件 $P^{-1}A_iP = A_i$ は

$$A_i(Px, Py) = A_i(x, y) \text{ for all } (x, y) \in X \times X \tag{4}$$

と同値であることに注意する（厳密にいえば，Px, Py は (2) を介して定義されるが，この類のことはいちいち断る必要はないであろう)．すなわち G は, 組合せ構造 $\mathcal{C}$ の symmetry の総体がなす群である.

組合せ構造 $\mathcal{C}$ が与えられたとき，$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ を求めるための優れた algorithm を見つけるという問題は古くから研究されてきており，その重要性は論を俟たないが，未解決の大問題であることもよく知られているところである．一つの方向として容易に想像できるアイデアは, はじめに与えられた組合せ構造 $\mathcal{C}$ の refinement $\mathcal{C}'$ であって $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{C}')$ が成り立つものを沢山用意しておいて，その中から一番良いものを選んで $\mathcal{C}$ の代わりに用いるということである. ここで refinement という用語を用いたが，同型群を論じる限りでは組合せ構造とはいくつかの関係の集まりとみなすことができるから，関係の refinement という意味で用いている．

$\mathcal{C}$ の refinement $\mathcal{C}'$ の中で $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{C}')$ が成り立つ最も universal なものは，(4) を考慮に入れれば，次のようにして得られることが容易に分かる．X 上の置換群 G は自然に X の直積 $X \times X$ に働く．G を $X \times X$ 上の置換群とみなした場合の軌道の全体を $\mathrm{Orb}(G, X \times X)$ で表し，軌道 $\alpha \in \mathrm{Orb}(G, X \times X)$ 対して行列 A_α を

$$A_\alpha(x, y) = 1 \text{ if } (x, y) \in \alpha, \ \ 0 \text{ otherwise} \tag{5}$$

と定めれば，求める最も universal な組合せ構造は

$$\mathcal{C}(A_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Orb}(G, X \times X)) \tag{6}$$

となる．置換群 (G, X) の centralizer algebra を $\mathrm{End}_G(V)$ で表す．すなわち

$$\mathrm{End}_G(V) = \{A \in \mathrm{End}(V) \mid P^{-1}AP = A \text{ for all } P \in G\} \tag{7}$$

とすれば，$\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Orb}(G, X \times X)\}$ は $\mathrm{End}_G(V)$ の線形空間としての基底をなすことに注意する．

しかしながら，我々の立場では G は未知のものであり，G から定まる組合せ構造 (6) も未知のものとして扱わなければならない．すなわち，はじめに与えられた組合せ構造 $\mathcal{C}$ の refinement $\mathcal{C}'$ であって $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{C}')$ が成り立つものの中で， $\mathcal{C}$ から組合せ論的に構成可能なもののみが $\mathcal{C}$ の代用品として使えるのである．実際，その中に最も universal なものがあり，それを coherent closure と呼ぶ. Weisfeiler-Leman stabilization とは, coherent closure を求める algorithm である. 詳細は節を改めて説明する．但し coherent closure を実際に具体的に求めることは通常困難であり，これはまた別の問題と考えるべきである．

以上は有限集合 X 上の組合せ構造 $\mathcal{C}$ の global symmetry $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ に関する考察であったが，以下 X の一点 $x_0 \in X$ をはじめに選んでおき，x_0 を固定する $\mathcal{C}$ の自己同型群を考える．すなわち x_0 に関する local symmetry $H = G_{x_0}$ を問題とする:

$$H = G_{x_0} = \{P \in G \mid Px_0 = x_0\}. \tag{8}$$

はじめに選んだ点 $x_0 \in X$ に対し，$V_0^* = \mathbb{C}x_0$ とおき（X は V の正規直交基底であったことを思い出そう），V から V_0^* への直交射影を E_0^* で表す．$\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ の元としては

$$E_0^*(x, y) = 1 \text{ if } (x, y) = (x_0, x_0), \quad 0 \text{ otherwise} \tag{9}$$

である（なぜ V や E の肩に $*$ をつけるのかという記号に関する疑問が当然生じるであろうが，これは Terwilliger algebra の伝統的記号を踏襲しているからである）．組合せ構造 (1) に対して

$$\mathcal{C}^{(x_0)} = \mathcal{C}(E_0^*, A_i | i \in \Lambda) \tag{10}$$

とおく．すると

$$H = G_{x_0} = \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^{(x_0)}) \tag{11}$$

が成り立つ．従って組合せ構造 $\mathcal{C}$ の local symmetry $H = G_{x_0}$ の問題は，組合せ構造 $\mathcal{C}^{(x_0)}$ の global symmetry $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}^{(x_0)})$ の問題に帰着し， $\mathcal{C}^{(x_0)}$ に Weisfeiler-Leman stabilization の algorithm を適用すればよいことになる． $\mathcal{C}^{(x_0)}$ を $\mathcal{C}$ の local な組合せ構造と呼ぶことにする．

しかしながら，前にも述べたように coherent closure を実際に具体的に求めることは通常困難であり，ここに，$\mathcal{C}^{(x_0)}$ の coherent closure を近似し，かつより取扱やすい代数として Terwilliger algebra が登場する．実際には Terwilliger algebra はこの文

脈で現れたのではなく，距離正則グラフ，特に Q-polymonial property を有する距離正則グラフの表現論的研究のために考案されたものであるが [5, 6, 7, 8] ，本稿では Weisfeiler-Leman stabilization の観点から位置づけし直す．そうしてひとつの応用として tree の Weisfeiler-Leman stabilization が具体的にどのように進行するのかを明らかにする．また，Terwilliger algebra が導入された本来の目的である Q-polymonial property を有する距離正則グラフの表現論的研究の現状について簡単な説明を行うとともに [3, 4]，その文脈を広げて，有限単純群の分類と深くかかわるかもしれないと私が思う問題にも触れてみたい．

私が初めて Weisfeiler-Leman stabilization に出会ったのは，研究集会 Symmetry vs Regularity: The first 50 years since Weisfeiler-Leman stabilization, July 1 - July 7, 2018, Pilsen, Czech Republic (home page: https://www.iti.zcu.cz/wl2018/) の場であった．そこで Weisfeiler-Leman stabilization 成立の歴史的経緯

> Igor Faradjev, "Symmetry vs Regularity". How it started and what it led to; slides: https://www.iti.zcu.cz/wl2018/slides.html

と Weisfeiler が辿った数奇な運命

> Lev Weisfeiler, Boris Weisfeiler (1941-1985?). Life of mathematician, adventurer, and uncle; slides: https://www.iti.zcu.cz/wl2018/slides.html

について知った．その後 Terwilliger algebra の視点から Weisfeiler-Leman stabilization を私なりに考えてみたことが本稿のもととなっている．本稿は，Terwilliger algebra の視点から Weisfeiler-Leman stabilization を再訪する意図のもとに書き始めたが，出来上がったものを眺めてみると，図らずも Weisfeiler-Leman stabilization の視点から Terwilliger algebra を再訪する結末となってしまった．文献については， Terwilliger algebra 関係で本稿のテーマに特に関係するもののみを挙げた．唯一の例外は [2] であるが，上記の Igor Faradjev の講演録と合わせて読めば，西側にはあまり知られることのなかった旧ソ連の数学に触れることができる．文献が不十分なのは，筆者が Weisfeiler-Leman stabilization の素人であり最先端の研究に通じていないことに加えて，コロナ騒動で自宅に閉じ籠められ文献探索が難しい環境にあったからである．

2 The Weisfeiler-Leman stabilization

以下第一節の記号を踏襲する．行列 $A, B \in \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ の成分ごとの積を $A \circ B$ で表し Hadamard 積と呼ぶ:

$$(A \circ B)(x, y) = A(x, y)B(x, y) \quad \text{for } x, y \in X.$$

$\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ の零でない線形部分空間 $\mathcal{A}$ が (i) 通常の行列積，(ii) Hadamard 積, (iii) 転置行列をとる操作 のいずれに関しても閉じているとき， $\mathcal{A}$ を *coherent algebra* と呼ぶ．特に $\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ 自身は coherent algebra であり，これを Hadamard 積に関する algebra とみなす場合は $\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})^\circ$ と書き，通常の行列積に関する全行列代数 $\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ と区別する．$\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})^\circ$ の（Hadamard 積に関する）単位元を J で表す．J は各成分が 1 の行列である．全行列代数 $\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ の単位元を I で表す．I は単位行列である．J と I で張られる 2 次元線形部分空間 $\mathrm{Span}\{J, I\}$ は coherent algebra をなし，あらゆる coherent algebra に含まれる（行列の零冪は，通常の行列積に関しては I, Hadamard 積に関しては J であることに注意)．この意味で最小の coherent algebra は $\mathrm{Span}\{J, I\}$ である．

$\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ を coherent algebra とする．$\mathcal{A}$ は通常の行列積に関して (可換とは限らない) 半単純代数となる．$\mathcal{A}$ は Hadamard 積 に関しては可換な半単純代数となり，原始冪等元 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ で生成される:

$$\mathcal{A} = \mathrm{Span}\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}, \tag{12}$$

$$J = \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha, \quad A_\alpha \circ A_\beta = \delta_{\alpha,\beta} A_\alpha \ \text{ for } \alpha, \beta \in \Lambda. \tag{13}$$

ここで $\delta_{\alpha,\beta} = 1$ if $\alpha = \beta$, 0 otherwise. 原始冪等元 A_α の行列成分は 0 か 1 であることに注意する．また原始冪等元の集合 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ は転置行列をとる操作に関して閉じており，$\mathcal{A} = \mathrm{Span}\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ は通常の行列積に関して閉じているから

$${}^tA_\alpha = A_\beta \text{ for some } \beta \in \Lambda \ \ (\text{all } \alpha \in \Lambda), \tag{14}$$

$$A_\alpha A_\beta = \sum_{\gamma \in \Lambda} p_{\alpha,\beta}^\gamma A_\gamma \text{ for some } p_{\alpha,\beta}^\gamma \in \mathbb{C} \ \ (\text{all } \alpha, \beta \in \Lambda) \tag{15}$$

が成り立つ．逆に (12), (13), (14), (15) が成り立てば，$\mathcal{A}$ は coherent algebra となる．(12), (13), (14), (15) を満たす組合せ構造 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A_\alpha | \alpha \in \Lambda)$ を *coherent configuration* と呼ぶ．coherent algebra から coherent configuration が得られ，coherent configuration から coherent algebra が得られ，その対応は 1 対 1 である．この意味で，coherent algebra と coherent configuration は しばしば同一視される．本稿では，coherent algebra $\mathcal{A}$ に対応する coherent configuration を $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ で表す． coherent configuration は組合せ構造の中で特別な位置を占めるので，一目で coherent configuration と分かる記号を用いるのである．

以上の準備のもとに Weisfeiler-Leman stabilization の説明をする．(1) のように，有限集合 X 上の組合せ構造 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A_i | i \in \Lambda)$ が与えられているとする．すなわち行列の集合 $\{A_i \in \mathrm{Math}_X\mathbb{C}) \mid i \in \Lambda\}$ が与えられている．$\{A_i \in \mathrm{Math}_X\mathbb{C}) \mid i \in \Lambda\}$ を含

むあらゆる coherent algebra の交わりを $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$ で表し，$\mathcal{C}$ の *coherent closure* と呼ぶ．$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$ は $\mathrm{Span}\{J, I\}$ を含むから空集合ではない．また，coherent algebra 達の交わりは coherent algebra となるから，$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$ は coherent algebra である．すなわち $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$ は $\{A_i \in \mathrm{Math}_X\mathbb{C}) \mid i \in \Lambda\}$ 含む最小の coherent algebra である．

以下は coherent closure $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$ を構成的に求める algorithm である．これを Weisfeiler-Leman stabilization と言う．まず，$\{A_i,\ {}^tA_i \mid i \in \Lambda\}$ が Hadamard 積に関して生成する $\mathrm{Mat}_X(\mathcal{C})^\circ$ の部分代数を $\mathcal{A}_0$ おく．このことを

$$\mathcal{A}_0 = \langle A_i,\ {}^tA_i \mid i \in \Lambda\rangle^\circ \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})^\circ$$

と書く．$\mathcal{A}_0$ は転置行列をとる操作に関して閉じていることに注意する．また $\mathcal{A}_0$ は Hadamard 積に関して可換な半単純代数になることに注意する．したがって Hadamard 積に関する原始冪等元によって線形空間として張られ，特に複素共役行列をとる操作（各行列成分をその複素共役で置き換える操作）によっても閉じている．故に $\mathcal{A}_0$ は随伴行列をとる操作に関して閉じている．

次に $\mathcal{A}_0$ を全行列代数 $\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ の部分集合とみなし，通常の行列積に関して $\mathcal{A}_0$ が生成する $\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ の部分代数を $\mathcal{A}_1$ とおく．このことを

$$\mathcal{A}_1 = \langle \mathcal{A}_0 \rangle \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$$

と書く．$\mathcal{A}_1$ は転置行列をとる操作に関しても随伴行列をとる操作に関しても閉じていることに注意する．$\mathcal{A}_1$ は通常の行列積に関して半単純代数になる．

以下帰納的に，$\mathrm{Mat}_X(\mathcal{C})^\circ$ の部分代数の増大列および $\mathrm{Mat}_X(\mathcal{C})$ の部分代数の増大列

$$\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_4 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})^\circ, \tag{16}$$

$$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_3 \subseteq \mathcal{A}_5 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C}) \tag{17}$$

が定義される:

$$\mathcal{A}_{2i} = \langle \mathcal{A}_{2i-1} \rangle^\circ \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})^\circ, \tag{18}$$

$$\mathcal{A}_{2i+1} = \langle \mathcal{A}_{2i} \rangle \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C}). \tag{19}$$

いずれの部分代数も，転置行列をとる操作に関しても随伴行列をとる操作に関しても閉じている．部分代数 $\mathcal{A}_{2i}$ は Hadamard 積に関して可換な半単純代数であり，部分代数 $\mathcal{A}_{2i+1}$ は通常の行列積に関して半単純代数である．

これらの部分代数たちを $\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ 部分空間の列とみなせば， $\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ は有限次元であるから，ある添数 r が存在して

$$\cdots \subset \mathcal{A}_{r-1} \subset \mathcal{A}_r = \mathcal{A}_{r+1} = \mathcal{A}_{r+2} = \cdots \tag{20}$$

が成り立つ．このような添数 r を組合せ構造 $\mathcal{C}$ の *coherent length* と呼ぶ．構成の仕方から，$\mathcal{C}$ の coherent closure $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ は $\mathcal{A}_r$ と一致する:

$$\mathcal{A}_r = \mathcal{A}(\mathcal{C}). \tag{21}$$

$\mathcal{C}$ の coherent closure $\mathcal{A}_r$ は coherent algebra であるから，はじめに注意しておいたように，Hadamard 積に関する原始冪等元を介して coherent configuration $\mathfrak{X}(\mathcal{A}_r)$ と同一視することができる．言葉の乱用を許して，$\mathfrak{X}(\mathcal{A}_r)$ も $\mathcal{C}$ の coherent closure と呼ぶことにする．次の補題は，(3) における組合せ構造の自己同型群は，$\mathcal{C}$ をその coherent closure $\mathfrak{X}(\mathcal{A}_r)$ で置き換えても変わらないことを主張するもので，Weisfeiler-Leman stabilization の Key Lemma である．

Lemma 1 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{X}(\mathcal{A}_r))$.

$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ とおく．(7) における centralizer algebra $\mathrm{End}_G(V)$ は coherent algebra であって，coherent closure $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}(\mathcal{C})$ 含む．対応する coherent confuguration $\mathfrak{X}(\mathrm{End}_G(V))$ は (6) により与えられる．一般には coherent closure $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}(\mathcal{C})$ は $\mathrm{End}_G(V)$ と一致するとは限らない:

$$\mathcal{A}_r = \mathcal{A}(\mathcal{C}) \subseteq \mathrm{End}_G(V). \tag{22}$$

(22) において等号が成立する時，coherent configuration $\mathfrak{X}(\mathcal{A}_r)$ を *Schurian* という．言葉を流用して，coherent algebra $\mathcal{A}_r$ を Schurian といったり，当初の組合せ構造 $\mathcal{C}$ を Schurian といったりすることもある．$\mathcal{C}$ から始めて組み合わせ論的に構成的に到達できるのは $\mathfrak{X}(\mathcal{A}_r)$ までであるから，coherent closure $\mathcal{A}_r$ と centralizer algebra $\mathrm{End}_G(V)$ との隔たりが大きくなればなるほど自己同型群を組合せ論的に捉えることが難しくなると言える．

Lemma 1 の証明は以下の事実を踏まえれば容易である．行列 $A \in \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ と置換 $P \in \mathrm{Sym}(X)$ が $P^{-1}AP = A$ をみたすとき A は P-inv であるということにする．すると，行列 A, B が P-inv ならば，A, B の線形和，行列積，Hadamard 積，転置行列のいずれも P-inv である．

3 Terwilliger algebras

Terwilliger が Terwilliger algebra という概念を創出したのは (P and Q)-polymonial scheme 研究のためであった [5, 6, 7]．そこでは，現在われわれが Terwilliger algebra と呼ぶものが subconstituent algebra という名前で呼ばれており，可換な association scheme（coherent configuration の一種）という組合せ構造に対して定義されている [5].

そして (P and Q)-polymonial scheme という特別なクラスをなす可換な association scheme を対象として，非常に深い表現論が展開されている [6, 7]．また Terwilliger は未刊行のレクチャーノート [8] において，グラフに対して subconstituent algebra を定義し，主に距離正則グラフの研究のためにその表現論を開発した．現在我々は，グラフに対する subconstituent algebra も Terwilliger algebra と呼んでいる．

本節では，いったん組合せ論的対象を離れて，純粋に代数的に Terwilliger algebra をまず定義する．可換な association scheme に対応すると同時にグラフにも対応できるような枠組みを作るためである

V を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元線形空間とする．更に V には positive definite Hermitian form による計量が入っているとする． V の部分空間 V_i $(0 \leq i \leq D^*)$ への直交和分解 $V = \bigoplus_{i=0}^{D^*} V_i$ が与えられており，また別の部分空間 V_j^* $(0 \leq j \leq D)$ への直交和分解 $V = \bigoplus_{j=0}^{D} V_j^*$ が別にもう一つ与えられている．E_i を V から V_i への直交射影とし，E_j^* を V から V_j^* への直交射影とする．$\{E_i\ , E_j^* \mid 0 \leq i \leq D^*,\ 0 \leq j \leq D\}$ によって生成される $\mathrm{End}(V)$ の部分代数を T で表し，この T を *Terwilliger algebra* と呼ぶ. 略して *T-algebra* という．

$$T = \langle E_i\ , E_j^* \mid 0 \leq i \leq D^*,\ 0 \leq j \leq D \rangle\ \subseteq \mathrm{End}(V). \tag{23}$$

T は半単純代数となる． T は V の正規変換で生成されており， T の V 上の作用は忠実だからである．

もう一つの T-algebra を

$$\tilde{T} = \langle \tilde{E}_i\ , \tilde{E}_j^* \mid 0 \leq i \leq \tilde{D}^*,\ 0 \leq j \leq \tilde{D} \rangle\ \subseteq \mathrm{End}(V)$$

とする．T と $\tilde{T}$ が同型であるとは，$D^* = \tilde{D}^*$, $D = \tilde{D}$ であって，E_i を $\tilde{E}_i$ $(0 \leq i \leq D^*)$ に，E_i^* を $\tilde{E}_i^*$ $(0 \leq i \leq D)$ に対応させるような T から $\tilde{T}$ への algebra としての同型写像があるときをいう．このとき $T \simeq \tilde{T}$ と書く．この T-algebra としての同型の定義は，生成元 $E_i, \tilde{E}_i; E_i^*, \tilde{E}_i^*$ たちの添数のつけ方に依存している．したがって T-algebra の概念には，生成元 $E_i, \tilde{E}_i$ たちの添数のつけ方が含まれており，それは始めに与えられていると解釈する．生成元たちが集合として同じでも，添数のつけ方が異なれば別の T-algebra と考えるのである．

$\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ を coherent algebra とする．(12), (13), (14), (15) によって coherent configuration $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathcal{A})$ が定まる．或る $\alpha \in \Lambda$ があって $A_\alpha = I$ が成り立つとき，coherent configuration $\mathfrak{X}$ を association scheme と呼ぶ．更に $\mathcal{A}$ が通常の行列積に関して可換なとき，可換な association scheme という．可換な association scheme があったとする．すると $\mathcal{A}$ の (通常の行列積に関する) 原始冪等元 $\{E_i \mid 0 \leq i \leq D\}$ が定まる: $I = \sum_{i=0}^{D} E_i$, $E_i E_j = \delta_{i,J} E_i$. ここで $V_i = E_i V$ とおけは，1 番目の直交和分解

$V=\bigoplus_{i=0}^{D} V_i$ が定まる．X の 1 点 $x_0 \in X$ を選び基点として固定する．$X_\alpha = A_\alpha x_0$ おく．(13) より，$X=\cup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha,\ X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset\ (\alpha \neq \beta)$ が成り立つ．X は $V=\mathbb{C}X$ の正規直交基底だから，$V_\alpha^* = \mathbb{C}X_\alpha$ とおけば，2 番目の直交和分解 $V=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha^*$ が定まる．$D+1=|\Lambda|=\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{A}$ に注意する．これら 2 つの直交和分解から定まる Terwilliger algebra $T^{(x_0)}$ は (はじめに選んだ基点 x_0 に依存するので $T^{(x_0)}$ という記号で表す)，Terwilliger が創案したオリジナルなもの (subconstituent algebra) と一致する．

Γ を finite connected simple graph とする (simple graph の意味は，no direct edges, no loops, no multiple edges)．X で Γ の頂点集合を表す．$A \in \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ を Γ の隣接行列とする: $A(x,y)=1$ if x and y are adjacent, 0 otherwise. A は正規行列だから，$V=\mathbb{C}X$ は A の固有空間の直交和に分解する．これが 1 番目の直交和分解である．この直交和分解には，A の固有値という添数が自然についていることに注意する．頂点 $x_0 \in X$ を選び基点として固定する．基点 x_0 から距離 i にある頂点の集合を X_i であらわす: $X_i=\{x\in X \mid \partial(x_0,x)=i\}$, ここで $\partial(x_0,x)$ は x_0, x 間の距離，すなわち x_0 と x を結ぶ最短の path の長さを表す．$X=\cup_{i=0}^{D} X_i,\ X_i\cap X_j=\emptyset$, $(i\neq j)$ が成り立つ．ここで $V_i^*=\mathbb{C}X_i$ とおけば，2 番目の直交和分解 $V=\bigoplus_{i=0}^{D} V_i^*$ が定まる．この 2 番目の直交和分解には基点 x_0 からの距離という添数がついていることに注意する．これら二つの直交和分解から定まる Terwilliger algebra も基点 x_0 に依存するので $T^{(x_0)}$ という記号で表す．A の 固有空間への直交射影は A の 多項式で書けるから

$$T^{(x_0)} = \langle A,\ E_i^* \mid 0\le i\le D\rangle \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C}) \tag{24}$$

が成り立つ．ここで E_i^* は V から V_i^* への直交射影である．

以下 Γ を finite connected simple graph，X をその頂点集合，A をその隣接行列とする．基点 $x_0\in X$ を固定し，E_0^* を $V=\mathbb{C}X$ から $V_0^*=\mathbb{C}x_0$ への直交射影とする．組合せ構造 $\mathcal{C}=\mathcal{C}(A)$ およびその local な組合せ構造 $\mathcal{C}^{(x_0)}=\mathcal{C}(E_0^*,A)$ の coherent closure を考察する．これらの組合せ構造は (1), (10) の特別な場合である．

まず $\mathcal{C}=\mathcal{C}(A)$ に Weisfeiler-Leman stabilization (16), (17), (18), (19), (20), (21) を適用する:

$$\mathcal{A}_0 = \langle A\rangle^\circ = \mathrm{Span}\{J,\ A\} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})^\circ, \tag{25}$$

$$\mathcal{A}_1 = \langle J,\ A\rangle \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C}), \tag{26}$$

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_{r-1} \subset \mathcal{A}_r = \mathcal{A}_{r+1} = \cdots. \tag{27}$$

ここで r は coherent length である．Γ の 隣接代数 $\langle A\rangle \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ は $\mathcal{A}_0$ を含み $\mathcal{A}_1$ に含まれる．$\mathcal{A}_1$ は generalized adjacency algebra と呼ばれている．隣接代数 $\langle A\rangle$

が $\mathcal{A}_1$ に一致するのは，Γ が正則グラフ (regular graph) のとき，かつそのときに限る． $\mathcal{A}_1$ は spectral graph theory の分野で重要な役割をはたす．$\mathcal{A}_i$ $(i \geq 2)$ については取扱が複雑すぎるためか，私の知る限りではまだほとんど個別の研究はなされていない．現在のところ，組合せ構造 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$ の coherent closure $\mathcal{A}_r$ の代わりになるもので $\mathcal{A}_1$ を超えるものはないように見える． coherent length r の大きさについては，高々頂点数 $|X|$ のオーダーであることが分かっている．

Γ が距離正則グラフならば，coherent length $r = 1$ が成り立つ．しかし $r = 1$ だからといって距離正則になるわけではない．coherent length $r = 1$ が成り立つようなグラフの範疇がどれほど大きなものなのか，その対称性はどのように特徴づけられるのか，まだよく研究されていないと思われる．また Γ が有効グラフのとき，これらの問題が既存の研究との対比においてどのような意味を持つのかも分かっていない．

次に local な組合せ構造 $\mathcal{C}^{(x_0)} = \mathcal{C}(E_0^*, A)$ に Weisfeiler-Leman stabilization を適用する:

$$\mathcal{A}_0^{(x_0)} = \langle E_0^*,\ A\rangle^\circ = \mathrm{Span}\{E_0^*,\ J,\ A\} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})^\circ, \tag{28}$$

$$\mathcal{A}_1^{(x_0)} = \langle E_0^*,\ J,\ A\rangle \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C}), \tag{29}$$

$$\mathcal{A}_0^{(x_0)} \subset \mathcal{A}_1^{(x_0)} \subset \cdots \subset \mathcal{A}_{r-1}^{(x_0)} \subset \mathcal{A}_r^{(x_0)} = \mathcal{A}_{r+1}^{(x_0)} = \cdots \tag{30}$$

基点 x_0 に関する Γ の Terwilliger algebra $T^{(x_0)}$ は (24) で与えられていることに注意する．

Proposition 2 $E_i^* \in \mathcal{A}_2^{(x_0)}$ *for all* i*.* 特に $T^{(x_0)} \subseteq \mathcal{A}_3^{(x_0)}$.

finite connected simple graphs の範疇で, local な組合せ構造 $\mathcal{C}^{(x_0)} = \mathcal{C}(E_0^*, A)$ の corehent length r はどれほど大きくなり得るのか，私は知りたいと思うが，どのような先行研究があるのか知らない．Terwilliger algebra の研究者の間では，$T^{(x_0)}$ は Hadamard 積で閉じている場合が多いとなんとなく信じられていたように思う．実際，個々の例について $T^{(x_0)}$ が Hadamard 積で閉じていないのを確かめるのは容易ではない．$T^{(x_0)}$ が Hadamard 積で閉じていれば，Proposition 2 により $T^{(x_0)}$ は coherent closure $\mathcal{A}_r^{(x_0)}$ に一致し，coherent length $r \leq 3$ が成立する．一般には coherent length はもっと大きいだろうから，$T^{(x_0)}$ は Hadamard 積で閉じていないことが多いのではないか.

しかしながら距離正則グラフの範疇では，$T^{(x_0)}$ は Hadamard 積で閉じていると信じていいように私は思う．一つの根拠は，実例ではそうなっていることである．もう一つの根拠は，距離正則グラフに対して $T^{(x_0)}$ の表現論が近年深化しつつあり，それが証明に使える期待を抱かせることである．証明できたとしても，距離正則グラフの分類問題と深くかかわるから，遠い将来のことになるであろうが.

$G = \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$, $H = G_{x_0} = \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^{(x_0)})$ とおくと，local な組合せ構造 $\mathcal{C}^{(x_0)}$ の Terwilliger algebra $T^{(x_0)} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{End}(V)$ $(V = \mathbb{C}X)$ は，G と H の centralizer algebra たちの中間にあるのだろうか:

$$\mathrm{End}_G(V) \subseteq T^{(x_0)} \subseteq \mathrm{End}_H(V)\ ? \tag{31}$$

しかしながら，$T^{(x_0)} \subseteq \mathcal{A}_r^{(x_0)} \subseteq \mathrm{End}_H(V)$ は Proposition 2 から明らかだが，$\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subseteq T^{(x_0)}$ がいつ成立するのか，ましてや $\mathrm{End}_G(V) \subseteq T^{(x_0)}$ がいつ成立するのか分かっていない．これを (22) と比較せよ．(22) が global approach であるのに対して, こちらは local approach である．たとえば $T^{(x_0)}$ の既約表現がすべて分かり，$T^{(x_0)}$-module V の既約分解が分かったとすると，$T^{(x_0)}$ が coherent closure $\mathcal{A}_r^{(x_0)} = \mathcal{A}(\mathcal{C}^{(x_0)})$ に一致するかどうかとか，$\mathrm{End}_H(V)$ に一致するかどうかとかを調べることが可能になる．

最後に Terwilliger algebra と自己同型群の可移性について述べる．Γ を finite connected simple graph，X をその頂点集合，G をその自己同型群，$T^{(x)}$ を基点 $x \in X$ に関する Terwilliger algebra とする．G が X 上可移ならば，$T^{(x)} \simeq T^{(y)}$ for all $x,\ y \in X$ が成り立つ．われわれの立場では自己同型群は未知のものとしていたから，この条件をもって Γ の可移性の定義とすることを提案する．

Definition 3 $T^{(x)} \simeq T^{(y)}$ for all $x,\ y \in X$ が成り立つとき，Γ を *quasi-transitive* という．

グラフ Γ の性質として quasi-transitive であるかどうかは非常に重要なことである．

3.1 The case of trees

Γ を finite connected simple graph, X をその頂点集合，$A \in X$ をその隣接行列とする．組合せ構造 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$ に Weisfeiler-Leman stabilization algorithm を施し，その coherent length を $r = r(\Gamma)$ とおく．

Theorem 4 (李双東-徐静-TI)　Γ が *tree* ならば $r = r(\Gamma) \leq 8$ が成り立つ．

tree Γ の coherent length を求める問題は，global approach に属するように見えるが，実は local approach に属する問題であり，それゆえ Terwilliger algebra とその表現が使える．

以下 Γ を tree とする．頂点 $x \in X$ に対し，$\mathrm{D}(x) = \mathrm{Max}\{\partial(x,y) \mid y \in X\}$ とおく．更に $\mathrm{D} = \mathrm{Min}\{\mathrm{D}(x) \mid x \in X\}$ おく．集合 $X_0 = \{x \in X \mid \mathrm{D}(x) = D\}$ を Γ の center という．Γ は tree なので，center X_0 はただ 1 点からなるか，または隣接する 2 点からなることがよく知られている．Γ の自己同型群を G とすれば，G は center X_0 を集合と

して不変にする．従って G によって固定される元 x_0 が center の中に存在するか，あるいはそのような元は存在せず center X_0 の隣接する 2 点が G で互換されるかのいずれかの場合が生じる．後者の場合は Γ の外部に 1 点 x_0 を補い，(G によって互換される) 隣接する center の 2 点に接続しその 2 点間の辺を消去すれば，拡張された tree が得られる．その拡張された tree の自己同型群は G に一致し，x_0 は G によって固定される．それ故，後者は前者の場合に帰着され，はじめから自己同型群 G は固定点 x_0 を持つとして一般性を失わない．

すなわち tree に対しては第一節の local symmetry (8)∼(11) において $H = G_{x_0} = G$ となる基点 x_0 を選べると仮定してよい．以下このような基点 x_0 を選び，global な Wiefeiler-Leman stabilization (25), (26), (27) と local な Wiefeiler-Leman stabilization (28), (29), (30) を同時に考える．

Lemma 5 $E_0^* \in \mathcal{A}_5$, $E_i^* \in \mathcal{A}_6$ for all i が成り立つ. 特に $T^{(x_0)} \subseteq \mathcal{A}_7$.

Theorem 6 $T^{(x_0)} \circ T^{(x_0)} := \{a \circ b \mid a, b \in T^{(x_0)}\} = \mathrm{End}_H(V)$ が成り立つ．ここで $\circ$ は Hadamard 積をあらわす．特に tree Γ の coherent closure は $\mathrm{End}_H(V)$ と一致し, Γ は Schurian である．

Lemma 5 と Theorem 6 から Theorem 4 が従う．Theorem 6 の証明は $T^{(x_0)}$ および $\mathrm{End}_H(V)$ の既約表現を決定し，半単純代数としての構造をそれぞれについて具体的に書き下すことによって行われる．この方法を用いると，$T^{(x_0)} = \mathrm{End}_H(V)$ となる条件を Γ の組合せ論的言葉で具体的に述べることもできる．

基点 x_0 を含む最小の $T^{(x_0)}$-module は既約であり，principal T-module と呼ばれる．tree がグラフとして同型であれば principal T-module が同型となることは明らかであるが，実はその逆が成立する．この事実を principal T-module は tree を *recognize* 出来るという．principal T-module が tree を recognize 出来るというこの事実が，Terwilliger algebra $T^{(x_0)}$ の既約表現を決定するうえで重要な役割を果たす．adjacency algebra は tree を recognize 出来ない．実際 tree には多くの cospectral mate が存在している．

3.2 The case of distance-regular graphs

距離正則グラフの coherent length は 1 である．coherent length が 1 であるようなグラフの中で距離正則グラフがどのような位置を占めるのかまず調べる．次に距離正則グラフに対して，特に Q-polynomial property を持つ距離正則グラフに対して Terwilliger algebra の表現論研究の現状を概観する．

Γ を finite connected simple graph, X を Γ の頂点集合, A を Γ の隣接行列とする．更に Γ は正則グラフであると仮定する: $JA = AJ = kJ$, J は all 1 matrix, k は valency.

組合せ構造 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A)$ に対する Weisfeiler-Leman stabilization algorithm を考える．(25), (26), (27) において

$$\mathcal{A}_1 = \langle A \rangle = \mathrm{Span}\{A^i \mid 0 \leq i \leq D\} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C}), \tag{32}$$

$$\mathcal{A}_2 = \langle \mathcal{A}_1 \rangle^\circ = \langle A^i \mid 0 \leq i \leq D \rangle^\circ \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})^\circ \tag{33}$$

が成り立つ．ここで $D + 1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_1$．$A$ の最小多項式の次数は $D + 1$ である．従って Γ の直径を $\mathrm{diam}(\Gamma)$ で表せば

$$\mathrm{diam}(\Gamma) \leq D \tag{34}$$

が成り立つ．Γ の距離 i 行列を Δ_i とおく:

$$\Delta_i(x, y) = 1 \text{ if } \partial(x, y) = i, \ 0 \text{ otherwise} \ \ (x, y \in X). \tag{35}$$

ここで $\partial(x, y)$ は x, y 間の距離，すなわち x, y を結ぶ最短 path の長さを表す．

$$A = \Delta_1 \tag{36}$$

に注意する．

Lemma 7 $\Delta_i \in \mathcal{A}_2 \ \ (0 \leq i \leq \mathrm{diam}(\Gamma))$. 特に

$$\mathrm{Span}\{\Delta_i \mid 0 \leq i \leq \mathrm{diam}(\Gamma)\} \subseteq \mathcal{A}_2 \tag{37}$$

が成り立つ．

Proposition 8 以下の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_2 = \mathrm{diam}(\Gamma) + 1$.

(ii) $\mathcal{A}_2 = \mathrm{Span}\{\Delta_i \mid 0 \leq i \leq \mathrm{diam}(\Gamma)\}$.

(iii) $D = \mathrm{diam}(\Gamma)$ かつ $\Delta_i = v_i(A)$ for some poynomial v_i of degree i $(0 \leq i \leq D)$.

このときは $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ が成り立つ．

Definition 9 上の Proposition 8 の同値な条件がみたされるとき，グラフ Γ は距離正則であるという．また $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ とおき，$\mathcal{A}$ を *P-polynomial scheme* と呼ぶ．このとき $\mathcal{A}$ は Γ の coherent closure になることに注意する．

Γ の corehent length を $r = r(\Gamma)$ おく．完全グラフは $r = 0$ によって特徴づけられる．以下 $r = r(\Gamma) = 1$ を仮定する．すなわち

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \tag{38}$$

を仮定する．次元を比べ，$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_0 = 2 < D + 1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_2$ だから

$$D \geq 2 \tag{39}$$

を得る．$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ とおけば，$\mathcal{A}$ は Γ の coherent closure だから当然 coherent algebra であるが，もっと強く symmetric association scheme (転置行列をとる操作によって閉じている association scheme) になる．従って

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \mathrm{Span}\{E_i \mid 0 \leq i \leq D\} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C}), \tag{40}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 = \mathrm{Span}\{A_i \mid 0 \leq i \leq D\} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})^\circ \tag{41}$$

を得る．ここで $\{E_i \mid 0 \leq i \leq D\}$ は可換な半単純代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ の原始冪等元の集合，$\{A_i \mid 0 \leq i \leq D\}$ は可換な半単純代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})^\circ$ の原始冪等元の集合である．添数づけを変えて

$$E_0 = \frac{1}{|X|} J, \quad A_0 = I, \tag{42}$$

として一般性を失わない．

$\mathcal{A}$ が通常の symmetric association scheme と異なる点は A_i が A の多項式になることである:

$$A_i = v_i(A) \ \text{ for some poynomial } v_i \ (0 \leq i \leq D). \tag{43}$$

なぜなら $\mathcal{A}$ が通常の行列積に関して A によって生成されているからである．A の最小多項式の次数は $D + 1$ だから，(43) において

$$\deg\, v_i \leq D \tag{44}$$

として一般性を失わない ($\deg\, v_i$ は多項式 v_i の次数)．

ここで，不等式 (34) において等号 $\mathrm{diam}(\Gamma) = D$ が成立する場合が距離正則グラフである．これは Proposition 8 の条件 (i) に他ならない．すなわち距離正則グラフは，$r(\Gamma) = 1$ なる finite connected simple regular graph Γ の範疇において，隣接行列の最小多項式の次数が $\mathrm{diam}(\Gamma) + 1$ であるものとして特徴付けることができる．Γ が距離

正則のときは, (41) における行列の集合 $\{A_i \mid 0 \le i \le D\}$ は $\{\Delta_i \mid 0 \le i \le \mathrm{diam}(\Gamma)\}$ と一致し，適当に番号を付け替えれば

$$A_i = \Delta_i \quad (0 \le i \le D = \mathrm{diam}(\Gamma)) \tag{45}$$

としてよい．どちらの集合も $\mathcal{A}_2$ の (Hadamard 積に関する) 原始冪等元の集合であり，原始冪等元の集合は一意的に決まるからである．

また symmetric association から出発すれば，距離正則グラフは次のように特徴づけることができる．$\mathcal{A}$ を symmetric association とする．$\mathcal{A}$ は 2 種類の特別な基底 (40), (41) を持つ．$\mathcal{A}$ が Hadamard 積に関するある冪等元 A によって，通常の行列積に関する代数として生成されるとき，$\mathcal{A}$ を *polynomial scheme* と呼び，A を *generator* と呼ぶ（この呼び方はここだけのもので広く使われているものではない). すると基底 (41) に関して (43) が成り立つ．polynomial scheme $\mathcal{A}$ とその generator A があれば，A を隣接行列とするグラフ Γ が定まる (A の行列成分は 0 か 1 であることに注意)．このグラフ Γ は finite connected simple regular graph であり, coherent length $r = r(\Gamma)$ は, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \ge 3$ なら $r = 1$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = 2$ なら $r = 0$. 逆に coherent length が 0 か 1 の finite connected simple regular graph はすべてこのようにして求まる．この構成法で Γ が距離正則になるのは $\mathcal{A}$ が P-polynomial scheme であるとき，すなわち A_i たちの適当な並べ変えがあって

$$A_i = v_i(A) \ \text{ for some poynomial } v_i \text{ of degree } i \ (0 \le i \le D) \tag{46}$$

のとき ($\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = D + 1$), かつそのときに限る．

P-polynomial scheme の双対概念として，Q-polynomial scheme を導入する．$\mathcal{A}$ を symmetric association とする．$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = D + 1$ とおく．$\mathcal{A}$ が通常の行列積に関するある冪等元 E によって，Hadamard 積に関する代数として生成されるとき，$\mathcal{A}$ を *co-polynomial scheme* と呼び，E を *co-generator* と呼ぶ（この呼び方はここだけのもので広く使われているものではない). このとき (40) の基底 E_i は Hadamard 積に関して E の polynomial になる:

$$|X| E_i = v_i^*(|X| E) \ \text{ for some poynomial } v_i^* \ (0 \le i \le D). \tag{47}$$

Q-polynomial scheme を次のように定義する．

Definition 10 co-polynomial scheme $\mathcal{A}$ は (47) において

$$\deg v_i^* = i \quad (0 \le i \le D) \tag{48}$$

が成り立つとき *Q-polynomial scheme* と呼ぶ．

$\mathcal{A}$ を symmetric association scheme とする．(41) のように Hadamard 積に関する代数 $\mathcal{A}$ の原始冪等元を $\{A_i \mid 0 \le i \le D\}$ とする．A_i は行列成分が 1 か 0 である対称行列なので，A_i を隣接行列とするグラフが定まり，それを $\Gamma(A_i)$ で表す．

Definition 11 symmetric association scheme $\mathcal{A}$ は，すべての i $(i \neq 0)$ について $\Gamma(A_i)$ が連結グラフとなるとき，*primitive* という．

次の予想がある [1].

Conjecture 12 (Bannai-Ito Conjecture)
primitive な symmetric association scheme $\mathcal{A}$ は，$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{A}$ が十分大きいとき，P-polynomial scheme ならば Q-polynomial scheme であり，逆に Q-polynomial scheme ならば P-polynomial scheme である．

P- and Q-polynomial scheme は特別に良いクラスの association scheme であり，Johnson scheme, q-Johnson scheme, dual polar scheme, Hamming scheme, bilinear forms scheme, classical forms scheme など豊富な実例が知られている [1]．有限単純群の主要系列はこれらの実例のいずれかに自己同型として働く．P- and Q-polynomial scheme の分類に向けて (それは遠い将来に実現するのかも知れないが) 様々の試みがなされている．最も強力な道具の一つとして Terwilliger algebra の表現がある．

P- and Q-polynomial scheme の Terwilliger algebra の表現について，今わかっていることの要点のみを以下に概説する．$\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ を P- and Q-polynomial scheme とする．$\mathcal{A}$ の二種類の基底を (40), (41) に従ってとる．

(1) (41) で選んだ基底の元 A_i の行和は一定であり，それを k_i とおく．(40) で選んだ基底の元 E_i の rank を m_i とおく．(46) における多項式 v_i から直交多項式系 $\{v_i/k_i\}_{i=0}^D$ が生じる．(47) における多項式 v_i^* から直交多項式系 $\{v_i^*/m_i\}_{i=0}^D$ が生じる．どちらの直交多項式系も Askey-Wilson polynomials であり，互いに双対の関係にある (Leonard 's Theorem)[1].

(2) 基点 $x_0 \in X$ を固定し x_0 に関する Terwilliger algebra を $T = T^{(x_0)}$ とおく．$W \subset V = X$ を既約 T-加群とする．T の W への制限を $T|_W$ とすると, generic case においては, $T|_W$ は quantum affine algebra $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の homomorphic image となる． すなわち generic case においては, Terwilliger algebra の既約表現は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の (有限次元既約) 表現に持ち上がる (Ito-Terwilliger による q-Onsager algebra の表現論) [3, 4]．$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の有限次元既約表現は決定されている (Chari-Pressley) ことに注意する.

(3) T-加群 $V=\mathbb{C}X$ の既約部分加群 W は，任意の i に対し $\dim_{\mathbb{C}} E_iW \le 1$ が成り立つとき *thin* という (E_i は (40) で選んだ基底の元)．thin な既約 T-部分加群には互いに双対な二組の Askey-Wilson polynomials(またはその極限) が対応し，既約 T 加群としての同型類はこれらの Askey-Wilson polynomials(その極限を含む) により決まる [5, 6, 7]．T-加群 V が *thin* であるとは，任意の既約 T-部分加群が thin なときをいう．

Definition 13 P- and Q-polynomial scheme $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ は, 任意の $x, y \in X$ に対して $T^{(x)} \simeq T^{(y)}$ が成り立つとき，*quasi-distance transitive,* 略して *quasi-DT* という．

P- and Q-polynomial scheme $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ は特に P-polynomial scheme であるから，$A=A_1$ を隣接行列とするグラフ Γ は距離正則である．Γ の自己同型群が Γ 上に距離可移 (distance transitive) ならば，$\mathcal{A}$ は quasi-DT である．quasi-DT は概念 DT(distance transitive) の組合せ版である．

Problem 14 (Ito-Koolen)　quasi-DT かつ thin な P- and Q-polymonial scheme を分類せよ．次元 D+1 は十分大と仮定してよい．

現在ある道具を総動員すればこの問題は解ける範囲にあると思う．この問題が重要と思う理由は，Johnson scheme, q-Johnson scheme, dual polar scheme など豊富な実例があり，有限単純群の主要系列がこれらの実例の上に自己同型として働くからである．またこの問題の解決は non-thin かつ quasi-DT な P- and Q-polymonial scheme の分類問題攻略のために何が必要なのかを示唆してくれると思う．

最後にもう一つ有限単純群に関連した問題を提出したい．G を有限群，特に有限単純群あるいはそれに近いものとする．G の共役類の全体を $\{C_i \mid 0 \le i \le D\}$ とする．$X=G$ とおき，$A_i \in \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ を

$$A(x,y) = 1 \text{ if} x^{-1}y \in C_i,\ 0 \text{ otherwise} \tag{49}$$

とおく．組合せ構造 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A_i|0 \le i \le D)$ の coherent closure を $\mathcal{A}$ とする．このとき $\mathcal{A} = \mathrm{Span}\{A_i \mid 0 \le i \le D\}$ が成り立つ．すなわち $\mathcal{C}$ の coherent length は 0 であり，coherent closure $\mathcal{A}$ は可換な association scheme となる．この $\mathcal{A}=\mathcal{A}(G)$ を G の group scheme という．group scheme $\mathcal{A}=\mathcal{A}(G)$ が primitive であることと群 G が単純群であることは同値である．G の character table が持つ情報量と group scheme $\mathcal{A}=\mathcal{A}(G)$ が持つ情報量は等しい．

$\mathcal{A}(G)$ の自己同型群は $X=G$ 上可移なので，基点の選び方で Terwilliger algebra の同型類は変わらない．基点 $x_0 \in X=G$ として G の単位元をえらぶ．基点 x_0 に関す

る Terwilliger algebra を $T = T^{(x_0)}$ とおき，Tx_0 を主 T-加群という．主 T-加群は既約であり，group scheme $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$ と等しい情報量をもつ．したがって G の character table とみなすことができる．他の既約 T-加群は G のいかなる情報を含むかが問題である．

Problem 15 有限単純群 G に対して，あるいはほぼ単純な有限群 G に対して group scheme $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$ の Terwilliger algebra $T^{(x_0)}$ の既約表現を決定せよ．

References

[1] E. Bannai and T. Ito. *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes.*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, (1984).

[2] I. A. Faradjev, M. H. Klin and A. A. Ivanov, Galois correspondence between permutation groups and cellular rings (assocation schemes), *Graphs and Combin.*, 6 (1990), 303-332.

[3] T. Ito, TD-pairs and the q-Onsager algebra, *Sugaku Expositions*, 32 (2019), 205-232.

[4] T. Ito and P. Terwilliger, The augmented tridiagonal algebra, *Kyushu J. Math.*, 64 (2010), 81-144.

[5] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme I. *J. Algebraic Combin.*, 1 (1992), 363-388.

[6] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme II. *J. Algebraic Combin.*, 2 (1993), 73-103.

[7] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme III. *J. Algebraic Combin.*, 2 (1993), 177-210.

[8] P. Terwilliger, Algebraic Graph Theory, unpublished lecture notes taken by H. Suzuki.