エッジイデアルの不変量

木村杏子 (静岡大学)

1 はじめに

本報告書は, 日比孝之氏, 松田一徳氏との共同研究 [12], 日比孝之氏, 松田一徳氏, 土谷昭善氏との共同研究 [13], 日比孝之氏, 松田一徳氏, Adam Van Tuyl 氏との共同研究 [14], および日比孝之氏, 菅野裕樹氏, 松田一徳氏, Adam Van Tuyl 氏との共同研究 [10] に基づく.

R を体 K 上の多項式環とする. R には標準的な次数付が入っているものとする. すなわち, R の各変数の次数を 1 とする. I を R の斉次イデアルとする. このとき, R/I の次数付極小自由分解が同型を除いて一意的に定まる:

$$0 \to \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{p,j}} \to \cdots \to \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{1,j}} \to R \to R/I \to 0.$$

極小自由分解により, R-加群が自由 R-加群からどのくらい離れているかを調べることができる. よって R/I の極小自由分解は R/I の R-加群としての複雑さをはかるものとみることができる. 今 R は多項式環であるから, Hilbert の syzygy 定理から, その長さは有限である. 極小自由分解の長さ p を R/I の射影次元といい, $\mathrm{pd}_R(R/I)$ で表わす. R/I の射影次元と I の高度 $\mathrm{height}\, I$ が等しいとき, R/I は Cohen–Macaulay である. また, Auslander–Buchsbaum の公式 ([3, Theorem 1.3.3]) から, $\mathrm{pd}_R(R/I) + \mathrm{depth}(R/I) = \mathrm{depth}\, R$ が成り立つ. (R が n 変数の多項式環であれば, $\mathrm{pd}_R(R/I) + \mathrm{depth}(R/I) = n$ である.) ここで $\mathrm{depth}(R/I)$ は R/I の深度を表す. したがって, $\mathrm{pd}_R(R/I)$ と $\mathrm{depth}(R/I)$ のいずれか一方が分かればもう一方も分かる. ($\dim R/I = \mathrm{depth}(R/I)$ なるとき, R/I を Cohen–Macaulay というのであった. ここで, $\dim R/I$ は R/I の Krull 次元を表す.) このような可換環論の一般論については, Bruns–Herzog [3] を参照されたい.

一般に, 与えられたイデアルの極小自由分解を具体的に構成することは難しい. そこで, $\beta_{i,j}(R/I) = \beta_{i,j}(= [\dim_K \mathrm{Tor}_i^R(K, R/I)]_j))$ に注目する. これを R/I の第 (i,j) ベッチ数というが, ベッチ数が分かれば極小自由分解の概形が分かる. 特に, $\beta_{i,i+j}(R/I) \neq 0$ は, 任意の $k \geq i$, $\ell \geq j$ で $(k,\ell) \neq (i,j)$ なるものについて $\beta_{k,k+\ell}(R/I) = 0$ なるとき, extremal ベッチ数といわれる. extremal ベッチ数を与える (i,j) が分かれば, 極小自由分解のざっくりとした概形を知ることができる. また,

$$\mathrm{reg}(R/I) := \max\{j - i \ : \ \beta_{i,j}(R/I) \neq 0\}$$

も重要な不変量である. これは, (Castelnuovo–Mumford) regularity と呼ばれる.

さて, 与えられたイデアルの極小自由分解を具体的に構成することは難しいと述べたが, それはイデアルが単項式で生成されたものであっても一般に困難である.

(極小でない自由分解であれば, Taylor resolution ([6, Exercise 17.11]) や Lyubeznik resolution ([21]) など具体的なものは構成されている.) そこで, 相異なる 2 つの変数の積で生成されたイデアルの場合を考えよう. このようなイデアルは, 有限単純グラフと対応する.

G を有限単純グラフとする. G の頂点集合を $V(G)$ で表わし, G の辺集合を $E(G)$ で表わす. このとき, G の**エッジイデアル**は

$$I(G) = (uv \ : \ \{u, v\} \in E(G))$$

で定義される $K[V(G)] := K[u : u \in V(G)]$ のイデアルである. エッジイデアルは, グラフから生ずるイデアルであるため, グラフの組合せ論と, エッジイデアルの環論的性質との間の関係に注目することができる. そのような関係を調べることも魅力的な問題である. これに関しては第 2 節に少し述べる.

簡単のため $R = K[V(G)]$ とおく. 本報告書の主目的は, $\dim R/I(G)$, $\operatorname{depth}(R/I(G))$, $\operatorname{reg}(R/I(G))$ および $\deg h(R/I(G), \lambda)$ の関係を調べることである. ここで, $h(R/I(G), \lambda)$ は $R/I(G)$ の h-多項式を表す. h-多項式の定義は第 3 節で述べる. 一般に,

$$\deg h(R/I(G), \lambda) - \operatorname{reg}(R/I(G)) \leq \dim R/I(G) - \operatorname{depth}(R/I(G)) \tag{1.1}$$

が成り立ち, 等号は $R/I(G)$ の extremal ベッチ数がただ一つであるときにのみ成り立つ. この不等式を研究の動機とし, (1.1) において等号が成立するときはいつか, また $\dim R/I(G)$, $\operatorname{depth}(R/I(G))$, $\operatorname{reg}(R/I(G))$, $\deg h(R/I(G), \lambda)$ の不変量の関係性について考察した結果得られたことを紹介する.

本報告書の構成は次のとおりである. まず, 第 2 節でグラフの言葉を準備し, エッジイデアルの不変量について, 既知の結果をいくつか紹介する. また, 第 5 節で現れる Cameron–Walker グラフを紹介する (定義 2.10). 第 3 節で, 研究の背景を詳しく述べ, extremal ベッチ数に関して得られた結果を紹介する. 次に, 第 4 節で, $\dim R/I(G)$, $\operatorname{depth}(R/I(G))$, $\operatorname{reg}(R/I(G))$, $\deg h(R/I(G), \lambda)$ の不変量の関係について考察した結果得られたことを紹介する. 最後に, 第 5 節で, Cameron–Walker グラフに考察対象を限定して得られた結果を紹介する.

2 エッジイデアルの不変量

この節では, エッジイデアルの不変量について知られている結果を紹介する.

2.1 グラフからの準備

まず, グラフの言葉を準備する.

G を有限単純グラフとし, $V = V(G)$ を G の頂点集合, $E(G)$ を G の辺集合とする.

定義 2.1. $S \subset V$ が G の**独立集合**であるとは, 任意の $v_1, v_2 \in S$ $(v_1 \neq v_2)$ について $\{v_1, v_2\} \notin E(G)$ なるときにいう.

便宜上, 空集合 $\emptyset \subset V$ も G の独立集合であるとする.

定義 2.2. $C \subset V$ が G の **vertex cover** であるとは, 任意の $e \in E(G)$ に対して $e \cap C \neq \emptyset$ なるときにいう.

S が G の独立集合であることと $V \setminus S$ が G の vertex cover であることは同値である.

W を V の (空でない) 部分集合とする. このとき頂点集合を W とし, 辺集合を

$$\{e \in E(G) \ : \ e \subset W\}$$

とする G の部分グラフを考えることができる. これを G の W 上の**誘導部分グラフ**といい, G_W で表わす. $v \in V$ に対して, $N_G(v)$ で v に隣接する頂点の集合を表す:

$$N_G(v) = \{u \in V \ : \ \{v, u\} \in E(G)\}.$$

また $W \subset V$ に対して, $N_G(W) = \bigcup_{w \in W} N_G(w) \setminus W$ とおく.

定義 2.3. (1) $\mathcal{M} \subset E(G)$ が G の**マッチング**であるとは, 任意の $e_1, e_2 \in \mathcal{M}$ $(e_1 \neq e_2)$ に対して $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ なるときにいう.

(2) G のマッチング $\mathcal{M}$ が**誘導マッチング**であるとは, 任意の $e_1, e_2 \in \mathcal{M}$ $(e_1 \neq e_2)$ と任意の $e \in E(G)$ について, $e \cap e_1 = \emptyset$ または $e \cap e_2 = \emptyset$ なるときにいう.

G のマッチングの最大濃度を $\mathrm{match}(G)$ で表わし, G の誘導マッチングの最大濃度を $\mathrm{ind\text{-}match}(G)$ で表わす.

定義から, 明らかに $\mathrm{ind\text{-}match}(G) \leq \mathrm{match}(G)$ が成り立つ.

次に, 特殊なグラフに名前を付ける.

定義 2.4.

(1) サイクルをもたないグラフを **forest** といい, 連結な forest を **tree** という.

(2) グラフ G が**弦グラフ**であるとは, G の任意の誘導部分サイクルの長さが 3 であるときにいう.

特に, forest は弦グラフである.

G が**二部グラフ**であるとは, G の頂点集合 V の分割 $V = V_1 \sqcup V_2$ で, V_1, V_2 がともに G の独立集合となっているものが存在するときにいう. また, このときの分割 $V = V_1 \sqcup V_2$ を二部グラフ G の bipartition という. グラフ G が二部グラフであることと, G が奇サイクルを部分グラフとして含まないことは同値である. したがって特に forest は二部グラフである. bipartition $V = V_1 \sqcup V_2$ をもつ二部グラフ G が**完全二部グラフ**であるとは, 任意の $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ について $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ なるときにいう.

2.2 エッジイデアルの不変量

さて G のエッジイデアルは,

$$I(G) = (uv \ : \ \{u, v\} \in E(G)) \subset K[V]$$

で定義されるのであった. ここでは $K[V(G)]/I(G)$ の次元や $I(G)$ の高度, $K[V(G)]/I(G)$ の深度 (射影次元), regularity について, 知られている結果をいくつか紹介する. これらの不変量を考える際には, G が連結であるときが本質的であるので, 以下, G は連結であるとする.

まず, 次元と高度について次が成り立つ.

命題 2.5. G を有限単純グラフとする.

(1) $\dim K[V(G)]/I(G) = \max\{|S| \ : \ S$ は G の独立集合 $\}$.

(2) $\operatorname{height} I(G) = \min\{|C| \ : \ C$ は G の vertex cover$\}$.

また, $I(G)$ が unmixed であることと G の極小な vertex cover の濃度が一定であることは同値である.

$K[V(G)]/I(G)$ の深度 (射影次元) に関する評価については, Dao and Schweig [5] による結果がある. それを紹介するために, もう少し言葉と記号を準備する. $E \subset E(G)$ が edgewise dominant であるとは, 孤立点でない任意の $v \in V(G)$ について, ある $\{x, y\} \in E$ が存在して $\{x, v\} \in E(G)$ となるときにいう.

$$i(G) = \min\{|S| \ : \ S \subset V(G) \text{ は } G \text{ の独立集合}, \ S \cup N_G(S) = V(G)\},$$
$$\epsilon(G) = \min\{|E| \ : \ E \subset E(G) \text{ は edgewise dominant}\}$$

とおく.

定理 2.6 (Dao and Schweig [5, Corollary 4.2, Corollary 5.6, Remark 5.7])**.**

(1) 任意のグラフ G に対して

$$\epsilon(G) \leq \operatorname{depth}(K[V(G)]/I(G)) \leq i(G).$$

(2) $K[V(G)]/I(G)$ が sequentially Cohen–Macaulay であるとき

$$\operatorname{depth}(K[V(G)]/I(G)) = i(G).$$

(3) 特に, G が弦グラフのとき $\operatorname{depth}(K[V(G)]/I(G)) = i(G)$.

注意 2.7. (1) ここでは触れないが, Dao and Schweig [5, Corollary 4.2] では $\operatorname{depth}(K[V(G)]/I(G))$ の別の下限も与えられている.

(2) 弦グラフ G について, $K[V(G)]/I(G)$ は sequentially Cohen–Macaulay である (Francisco and Van Tuyl [7]).

regularity については, 次が成り立つ.

定理 2.8 ([8], [16], [20], [26], [27])**.**

(1) (Katzman [16, Lemma 2.2], Hà and Van Tuyl [8, Theorem 6.7])
任意のグラフ G に対して

$$\text{ind-match}(G) \le \text{reg}(K[V(G)]/I(G)) \le \text{match}(G).$$

(2) G が次のいずれかのとき

$$\text{reg}(K[V(G)]/I(G)) = \text{ind-match}(G)$$

が成り立つ:

(i) (Hà and Van Tuyl [8, Theorem 6.8]; see also [27]) G が弦グラフであるとき;

(ii) (Kummini [20, Theorem 1.1]) G が二部グラフでありかつ $I(G)$ が unmixed なるとき;

(iii) (Van Tuyl [26, Theorem 3.3]) G が二部グラフでありかつ $K[V(G)]/I(G)$ が sequentially Cohen–Macaulay であるとき;

(iv) G が star graph のとき;

(v) G が star triangle のとき;

(vi) G が Cameron–Walker graph のとき.

注意 2.9. (1) 定理 2.8 (2) (ii), (iii) より, 特に G が二部グラフでありかつ $K[V(G)]/I(G)$ が Cohen–Macaulay であるとき $\text{reg}(K[V(G)]/I(G)) = \text{ind-match}(G)$ であることが従う.

(2) 定理 2.8 (2) (ii) は Mahmoudi, Mousivand, Crupi, Rinaldo, Terai, and Yassemi [22, Theorem 1.3] により, very well-covered graph に対して拡張された.

さて, 定理 2.8 の (2) (iv), (v), (vi) のグラフについて説明する. 定理 2.8 (1) より, G が $\text{ind-match}(G) = \text{match}(G)$ をみたせば, 必然的に $\text{reg}(K[V(G)]/I(G)) = \text{ind-match}(G)$ がみたされる. 条件 $\text{ind-match}(G) = \text{match}(G)$ はグラフの組合せ論の条件であり, そのような連結グラフの分類は Cameron and Walker によりなされた ([4, Theorem 1]; see also [9, Remark 0.1]). そしてそのような連結グラフが, 定理 2.8 の (2) (iv), (v), (vi) である.

star graph とは, ある頂点の番号付け $v_0, v_1, \ldots, v_n$ があって, 辺集合が

$$\{\{v_0, v_i\} : i = 1, \ldots, n\}$$

となるグラフである. **star triangle** とは, ある頂点の番号付け $v_0, v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{n1}, v_{n2}$ があって, 辺集合が

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{\{v_0, v_{i1}\}, \{v_0, v_{i2}\}, \{v_{i1}, v_{i2}\}\}$$

となるグラフである. すなわち, star graph は中心となる頂点があって, そこにいくつかの lead edge がついているグラフ, star triangle は中心となる頂点があって, そこにいくつかの pendant triangle がついているグラフである. ここで, G の辺 $\{u, v\}$ が leaf edge とは, $N_G(u) = \{v\}$ または $N_G(v) = \{u\}$ なるときにいい, u, v, w を頂点とする (G の) 誘導三角形が pendant triangle であるとは, $N_G(u) = \{v, w\}$, $N_G(v) = \{u, w\}$, $N_G(w) = \{u, v\}$ のうち (少なくとも) 二つがみたされるときにいう.

Cameron–Walker グラフは次のように定義される.

定義 2.10. 次のような頂点の番号付をもつ連結グラフ G を **Cameron–Walker グラフ** という:

$$\begin{aligned} V(G) = &\{v_1, \ldots, v_m\} \cup \{w_1, \ldots, w_p\} \\ &\cup \bigcup_{i=1}^{m} \{x_1^{(i)}, \ldots, x_{s_i}^{(i)}\} \cup \bigcup_{j=1}^{m} \{y_{1,1}^{(j)}, y_{1,2}^{(j)}, \ldots, y_{t_j,1}^{(j)}, y_{t_j,2}^{(j)}\}, \end{aligned}$$

ただし $m, p \geq 1$, $s_i \geq 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, $t_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, p)$ で,

- G の $\{v_1, \ldots, v_m\} \cup \{w_1, \ldots, w_p\}$ への誘導部分グラフは連結二部グラフ;
- 任意の $i = 1, \ldots, m$, $\ell = 1, \ldots, s_i$ に対し, $N_G(x_\ell^{(i)}) = \{v_i\}$;
- 任意の $j = 1, \ldots, p, k = 1, \ldots, t_j$ に対し, $N_G(y_{k1}^{(j)}) = \{w_i, y_{k2}^{(j)}\}$ かつ $N_G(y_{k2}^{(j)}) = \{w_i, y_{k1}^{(j)}\}$.

$G_{\{v_1,\ldots,v_m\}\cup\{w_1,\ldots,w_p\}}$ を G_{bip} で表す.

すなわち, Cameron–Walker グラフとは, 連結二部グラフに, (二部グラフの) 頂点集合の片方の bipartition に 1 個以上の leaf edge をつけ, もう片方の biparition に 0 個以上の pendant triangle をつけたものである. Cameron–Walker グラフのエッジイデアルの不変量に関しては, より詳しいことが分かっているが, それは第 5 節で述べる.

さて, エッジイデアルのベッチ数については何がいえるか. これについてはここでは深入りしないことにするが, 弦グラフについては, ベッチ数の非消滅性の必要十分条件がグラフの言葉で与えられており, 特に forest に関してはベッチ数がグラフの言葉で与えられている ([17, Theorem 4.1]). また, [18, Theorem 1.1] に, ベッチ数の非消滅性のグラフの言葉による十分条件もある.

3　研究の背景と extremal ベッチ数

まず, 本研究の背景から述べる. そのために, h-**多項式** を定義する.

一般論に戻り, R を体 K 上の多項式環とする. R には標準的な次数付が入っているものとする. I を R の斉次イデアルとし, $\dim R/I = d$ とする. このとき R/I の Hilbert 級数は

$$H(R/I, \lambda) = \frac{h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \cdots + h_s\lambda^s}{(1-\lambda)^d}, \quad h_i \in \mathbb{Z}$$

と表せる ([3, Proposition 4.4.1]). $h_s \neq 0$ なるとき,

$$h(R/I, \lambda) := h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \cdots + h_s\lambda^s$$

は R/I の h-多項式とよばれる. また, $\deg h(R/I, \lambda) - \dim R/I$ を a-**invariant** といい, $a(R/I)$ で表わす ([3, Definition 4.4.4]). I が squarefree monomial ideal のときには $a(R/I) \leq 0$ なることが知られている.

次の不等式が, 本研究の出発点である.

補題 3.1. I を K 上の多項式環 R の斉次イデアルとするとき,

$$\deg h(R/I, \lambda) - \mathrm{reg}(R/I) \leq \dim R/I - \mathrm{depth}(R/I). \tag{3.1}$$

Proof. R を n 変数多項式環とする. また, $p = \mathrm{pd}_R(R/I)$ とする. このとき [3, Lemma 4.1.13] より

$$H(R/I, \lambda) = \frac{\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_{i,i+j}(R/I)\lambda^{i+j}}{(1-\lambda)^n}$$

が成り立つ.

$$H(R/I, \lambda) = \frac{h(R/I, \lambda)(1-\lambda)^{n-\dim R/I}}{(1-\lambda)^n}$$

であるから,

$$\deg h(R/I, \lambda) \leq p + \mathrm{reg}(R/I) - n + \dim R/I$$

が従う. Auslander–Buchsbaum の公式から $n - p = \mathrm{depth}(R/I)$ が従うので, 望む不等式を得る. □

補題 3.1 の証明から, 次の系を得る.

系 3.2. I を K 上の多項式環 R の斉次イデアルとし, $p = \mathrm{pd}_R(R/I)$, $r = \mathrm{reg}(R/I)$ とする. 不等式 (3.1) において等号が成り立つのは, $\beta_{p,p+r}(R/I) \neq 0$ なるとき, またそのときに限る.

$\beta_{p,p+r}(R/I) \neq 0$ の条件は, R/I の extremal ベッチ数の個数が 1 であることと同値である. したがって, I が pure resolution [3, p. 153] をもつ場合, (3.1) において等号が成立する. また, Bigdeli and Herzog [2, Lemma 3] により R/I が Cohen–Macaulay である場合にも等号が成立することがわかる.

ここでエッジイデアルに話を限定し, 次の問題を考える.

問題 3.3. G を有限単純連結グラフとする. また, $R = K[V(G)]$ とおく.

(1) 不等式 (3.1) において等号

$$\deg h(R/I(G), \lambda) - \mathrm{reg}(R/I(G)) = \dim R/I(G) - \mathrm{depth}(R/I(G)) \quad (3.2)$$

が成り立つのはいつか. すなわち $R/I(G)$ の extremal ベッチ数が 1 個であるものを特徴づけよ.

(2) G の頂点数を固定したとき,

$$\dim R/I(G),\ \mathrm{depth}(R/I(G)),\ \mathrm{reg}(R/I(G)),\ \deg h(R/I(G), \lambda)$$

の取りうる値を決定せよ. また, これらの不変量の間の関係を見つけよ.

G を有限単純連結グラフとする. 以下, 特に断らない限り $R = K[V(G)]$ とする. まず, $R/I(G)$ の extremal ベッチ数に着目する. ベッチ数 $\beta_{i,i+j}(R/I(G)) \neq 0$ が extremal であるとは, 任意の組 $(k,l) \neq (i,j)$, $k \geq i$, $l \geq j$ に対して $\beta_{k,k+l}(R/I(G)) = 0$ なるときにいうのであった. extremal ベッチ数の個数を b とすると, $\mathrm{reg}(R/I(G)) \geq b$ かつ $\mathrm{pd}_R(R/I(G)) \geq b$ が成り立つので, 次の問が自然に生ずる.

問題 3.4. $b \geq 1$ を整数とする. また, p, r をそれぞれ b 以上の整数とする. このとき, 有限単純連結グラフ $G_{p,r,b}$ で次の 3 つを満たすものは存在するか:

(1) $\mathrm{reg}(K[V(G_{p,r,b})]/I(G_{p,r,b})) = r$;

(2) $\mathrm{pd}(K[V(G_{p,r,b})]/I(G_{p,r,b})) = p$;

(3) $K[V(G_{p,r,b})]/I(G_{p,r,b})$ の extremal ベッチ数の個数は b である.

もともと考えたかった問題 3.3 (1) とは少し離れるが, 問題 3.4 に関連して, 次の結果を得た (日比孝之氏, 松田一徳氏との共同研究 [12]).

定理 3.5 ([12, Theorem 1])**.** r, b を $1 \leq b \leq r$ なる整数とする. このとき, 有限単純連結な弦グラフ $G_{r,b}$ で $\mathrm{reg}(K[V(G_{r,b})]/I(G_{r,b})) = r$ かつ $K[V(G_{r,b})]/I(G_{r,b})$ の extremal ベッチ数の個数が b であるものが存在する.

また問題 3.4 において, $b = 1$ かつ $r < p$ のときも望む性質をもつグラフが存在することがわかった.

命題 3.6 ([12, Example 7])**.** $b = 1$ とし, p, r を $1 = b \leq r < p$ なる整数とする. このとき, tree $G_{p,r,1}$ で問題 3.4 の (1), (2), (3) を満たすものが存在する.

4　問題 3.3 (2) に関する結果

この節では問題 3.3 (2) について考察する．まず,

$$\dim R/I(G),\ \mathrm{depth}(R/I(G)),\ \mathrm{reg}(R/I(G)),\ \deg h(R/I(G),\lambda)$$

の間の関係に注目する．これらの不変量の間の関係は, [11, 15, 19, 23, 24] などで研究されている．中でも, Kumar, Kumar, and Sarkar [19] は $\mathrm{depth}(R/I(G))$ と $\mathrm{reg}(R/I(G))$, $\mathrm{depth}(R/I(G))$ と $\deg h(R/I(G),\lambda)$ との間には関係がないことを示した.

4.1　$\mathrm{reg}(R/I(G))$ と $\deg h(R/I(G),\lambda)$ の関係

Hibi, Matsuda, and Van Tuyl [15] は次を示した.

定理 4.1 (Hibi, Matsuda, and Van Tuyl [15, Theorem 13])**.** G を有限単純グラフとする．G の頂点数を n とするとき

$$\mathrm{reg}(R/I(G)) + \deg h(R/I(G),\lambda) \le n. \tag{4.1}$$

そこで, まず $\mathrm{reg}(R/I(G))$ と $\deg h(R/I(G),\lambda)$ の関係を調べよう．本部分節の内容は, 日比孝之氏, 松田一徳氏, Adam Van Tuyl 氏との共同研究 [14] に基づく.

頂点数が n の有限単純連結グラフ全体の集合を $\mathrm{Graph}(n)$ とおく．また

$$\mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n) := \{(\mathrm{reg}(R/I(G)), \deg h(R/I(G),\lambda)) \ :\ G \in \mathrm{Graph}(n)\}$$

とおく．定理 4.1 より, $(r,d) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n)$ ならば $r+d \le n$ である．また, 定理 2.8 (1) および [25, Theorem 11] より, $r \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ であることに注意する (補題 4.7 (3) (iii))．$\mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n)$ に関して次を得た.

定理 4.2 ([14, Theorem 3.4])**.** r, d を 1 以上の整数, n を 3 以上の整数とする．$r \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, $r+d \le n$ を仮定すると, 次が成り立つ.

(1) $r < d$ ならば $(r,d) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n)$.

(2) $r = d \ge 2$ かつ $r+d = r+r < n$ ならば $(r,d) = (r,r) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n)$.

(3) $r = d+1$ かつ $r \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ ならば $(r,d) = (r,r-1) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n)$.

また, 正整数 n に対して

$$A(n) = \left\{(r,d) \in \mathbb{N}^2 \ :\ 1 \le r < \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,\ 1 \le d \le n-r,\ r-d \le 1\right\},$$
$$B(n) = \left\{(r,d) \in \mathbb{N}^2 \ :\ 1 \le r < \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,\ 1 \le d \le n-r\right\}$$

とする．$A(n)$, $B(n)$ はともに格子凸多面体の整数点の集合であることに注意する．定理 4.2 から次が従う.

定理 4.3 ([14, Theorem 3.5])**.** $n \geq 3$ のとき

$$A(n) \subseteq \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n) \subseteq B(n).$$

定理 4.2 の証明においては, 望む有限単純連結グラフを構成する必要がある. その際に重要な役割を果たすのが, Hibi, Kanno, and Matsuda [11] により導入された S-suspension を用いた構成法である. それを紹介する.

定義 4.4 (Hibi, Kannno and Matsuda [11, p. 313])**.** G を有限単純グラフとし, S を G の独立集合とする. v' を新しい頂点とするとき, $V(G) \cup \{v'\}$ を頂点集合とし, $E(G) \cup \{\{v, v'\} : v \in V(G) \setminus S\}$ を辺集合とするグラフが構成できる. これを G の S**-suspension** とよび, G^S で表わす.

すなわち G^S とは, G に新しい頂点 v' を加え, S に属さない G の頂点すべてを v' と辺でつなぐことにより得られるグラフである.

$I(G)$ と $I(G^S)$ の不変量の関係については, 次が成り立つ.

補題 4.5 (Hibi, Kanno and Matsuda [11, Lemma 1.5])**.** G を有限単純グラフとし, S を G の独立集合とする. $R = K[V(G)]$, $R' = K[V(G^S)]$ とするとき, 次が成り立つ:

(1) $|S| \leq \dim R/I(G) - 1$ のとき $\dim R'/I(G^S) = \dim R/I(G)$.

(2) G が孤立点をもたないとき, $\mathrm{reg}(R'/I(G^S)) = \mathrm{reg}(R/I(G))$.

(3)
$$H(R'/I(G^S), \lambda) = H(R/I(G), \lambda) + \frac{\lambda}{(1-\lambda)^{|S|+1}}.$$
特に, $|S| = \dim R/I(G) - 1$ のとき $\deg h(R'/I(G^S), \lambda) = \deg h(R/I(G), \lambda)$.

また, 深度に関しては, 次が成り立つ.

補題 4.6 ([10, Lemma 1.2])**.** G を有限単純グラフとし, S を G の独立集合とする. $R = K[V(G)]$, $R' = K[V(G^S)]$ とするとき, 次が成り立つ:

(1) $|S| = \mathrm{depth}(R/I(G)) - 1$ のとき $\mathrm{depth}(R'/I(G^S)) = \mathrm{depth}(R/I(G))$.

(2) $S = \emptyset$ のとき $\mathrm{depth}(R'/I(G^S)) = 1$.

S-suspension を用いることで, $\mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n)$ に関して次が示される. 次の補題の (1) に関しては, Hibi, Matsuda and Van Tuyl [15] による結果である.

補題 4.7 ([15, Lemma 12], [14, Lemmas 3.1, 3.2, 3.3])**.**

(1) 任意の整数 $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n) \subset \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n+1)$.

(2) $n_1, \ldots, n_p \geq 2$ を整数とする．$(r_i, d_i) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$ であるとき

$$(r_1 + \cdots + r_p, d_1 + \cdots + d_p) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg h}(n_1 + \cdots + n_p + 1).$$

(3) $r \geq 1$, $d \geq 1$ を整数とするとき, 次が成り立つ.

(i) $(r, 1) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg},\deg \mathrm{h}}(2^r + r - 1)$.

(ii) $r < d$ のとき $(r, d) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg}\deg h}(r + d)$.

(iii) $r \geq 2$ のとき $(r, d) \notin \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg}\deg h}(2r)$．特に $(r, d) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg}\deg h}(n)$ ならば $r \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

(iv) $r = d \geq 2$ のとき $(r, d) = (r, r) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg}\deg h}(2r + 1)$.

(v) $r = d + 1$ かつ r が偶数 (resp. r が奇数) ならば, $(r, d) = (r, r-1) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg}\deg h}(2r + 1)$ (resp. $(r, d) = (r, r-1) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg}\deg h}(2r + 2)$).

(vi) $c \geq 1$ を整数とする．$r \geq d + 2$ かつ $cd < r \leq (c+1)d$ とすると $(r, d) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{reg}\deg h}((2^c + 1)r - ((c-1)2^c + 1)d + 1)$.

定理 4.2 は補題 4.7 から従う.

4.2 $\dim R/I(G)$ と $\mathrm{depth}(R/I(G))$ の関係

次に, $\dim R/I(G)$ と $\mathrm{depth}(R/I(G))$ の関係を調べよう．本部分節の内容は, 日比孝之氏, 菅野裕樹氏, 松田一徳氏, Adam Van Tuyl 氏との共同研究 [10] に基づく.

$$\mathrm{Graph}_{\mathrm{depth},\dim}(n) := \{(\mathrm{depth}(R/I(G)), \dim R/I(G)) \ : \ G \in \mathrm{Graph}(n)\}$$

とおく．一般に $1 \leq \mathrm{depth}(R/I(G)) \leq \dim R/I(G) \leq n$ が成り立つから, $(a, b) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{depth},\dim}(n)$ ならば $1 \leq a \leq b \leq n$ である．$\mathrm{Graph}_{\mathrm{depth},\dim}(n)$ は次の基本的な性質をもつ.

補題 4.8 ([10, Lemmas 2.2, 2.3, 2.4])**.**

(1) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して $(1, n-1) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{depth},\dim}(n)$.

(2) 任意の $n \geq 1$ に対して $\mathrm{Graph}_{\mathrm{depth},\dim}(n) \subset \mathrm{Graph}_{\mathrm{depth},\dim}(n+1)$.

(3) (a, b) を $1 \leq a \leq b$ なる整数とするとき $(a, b) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{depth},\dim}(a + b)$.

補題 4.8 から, $1 \leq a \leq b$ なる任意の $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ について, 十分大きな n をとれば $(a, b) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{depth},\dim}(n)$ となることが従う．グラフの頂点数 n を固定したときに関しては, 次が成り立つ．ここで, $G \in \mathrm{Graph}(n)$ が辺をもつとき $n \geq 2$ かつ $\dim R/I(G) \leq n - 1$ であることに注意する.

定理 4.9 ([10, Theorem 2.8]). a, b を $1 \le a \le b$ なる整数とし, n を 2 以上の整数とする. $b \le n-1$ を仮定する. このとき, $a \le b + 1 - \lceil b/(n-b) \rceil$ ならば $(a, b) \in \mathrm{Graph}_{\mathrm{depth},\dim}(n)$ となる.

さらに次が成り立つ.

定理 4.10 ([10, Theorem 2.9]). $n \ge 3$ のとき $C^-(n) \subset \mathrm{Graph}_{\mathrm{depth},\dim}(n) \subset C^+(n)$, ただし

$$\begin{aligned} C^-(n) &:= \{(1, n-1)\} \\ &\quad \cup \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \;:\; a \le b,\, 1 \le a \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\, 1 \le b \le n-2 \right\}, \\ C^+(n) &:= \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \;:\; 1 \le a \le b \le n-1 \right\}. \end{aligned}$$

5 Cameron–Walker グラフ

これまでは, 一般のエッジイデアルについて考察した. 考えるグラフを Cameron–Walker グラフに限定すると, さらに詳しいことが分かる. この節では, Cameron–Walker グラフに関する種々の結果を紹介する. Cameron–Walker グラフの定義は, 定義 2.10 にある通りである. 以下, 特に断らない限り, 定義 2.10 の頂点の番号付けを用いる. 本節の内容は, 日比孝之氏, 松田一徳氏, 土谷昭善氏との共同研究 [13], 日比孝之氏, 松田一徳氏, Adam Van Tuyl 氏との共同研究 [14], および日比孝之氏, 菅野裕樹氏, 松田一徳氏, Adam Van Tuyl 氏との共同研究 [10] との共同研究に基づく.

5.1 Cameron–Walker グラフのエッジイデアルの不変量

Cameron–Walker グラフのエッジイデアルの不変量について, 次が成り立つ.

定理 5.1 ([9, 13, 14]). G を Cameron–Walker グラフとする. 定義 2.10 の頂点の番号付けを用いると, 次が成り立つ.

(1) $|V(G)| = m + p + \sum_{i=1}^{m} s_i + 2\sum_{j=1}^{p} t_j$.

(2) ([13, Theorem 1.1, Proposition 1.3])

$$\dim R/I(G) = \deg h(R/I(G)) = \sum_{i=1}^{m} s_i + \sum_{j=1}^{p} t_j + |\{j : t_j = 0\}|.$$

特に $a(R/I(G)) = 0$.

(3) ([9, Corollary 3.7]) $\mathrm{depth}(R/I(G)) = i(G)$.

(4) ([13, Lemma 2.1])

$$m + |\{j \ : \ t_j > 0\}| \leq \mathrm{depth}(R/I(G)) \leq \min \left\{ p + \sum_{i=1}^{m} s_i,\ m + \sum_{j=1}^{p} t_j \right\}.$$

さらに G_{bip} が完全二部グラフのとき,

$$\mathrm{depth}(R/I(G)) = \min \left\{ p + \sum_{i=1}^{m} s_i, m + \sum_{j=1}^{p} t_j \right\}.$$

(5) $\mathrm{reg}(R/I(G)) = m + \sum_{j=1}^{p} t_j$. 特に $\mathrm{depth}(R/I(G)) \leq \mathrm{reg}(R/I(G))$.

Cameron–Walker グラフ G について, $R/I(G)$ は sequentially Cohen–Macaulay である ([9, Theorem 3.1]). よって Dao and Schweig [5, Remark 5.7] (定理 2.6) から定理 5.1 (3) $\mathrm{depth}(R/I(G)) = i(G)$ が得られる. これは, $\mathrm{depth}(R/I(G)$ の組合せ論的記述の一つであるが, Cameron–Walker グラフの構造により, より詳しく次のように述べることができる.

定理 5.2 ([10, Theorem 3.3]). G を Cameron–Walker グラフとする (頂点の番号付けは定義 2.10 にあるとおりである). $\{v_1, \ldots, v_m\}$ の各部分集合 V に対して

$$f(V) = \sum_{v_i \in V} s_i + m - |V| + \sum_{N_{G_{\mathrm{bip}}}(w_j) \not\subset V} t_j + \left| \left\{ j : N_{G_{\mathrm{bip}}}(w_j) \subset V \right\} \right|$$

とおく. このとき, $i(G) = \min_{V \subset \{v_1, \ldots, v_m\}} \{f(V)\}$ である. 特に

$$\mathrm{depth}(R/I(G)) = \min_{V \subset \{v_1, \ldots, v_m\}} \{f(V)\}.$$

5.2 Cameron–Walker グラフに関する問題 3.3 の解答

本部文節では, Cameron–Walker グラフに対して, 問題 3.3 の解答を与える. 問題 3.3 (1) の解答は次のとおりである.

定理 5.3 ([13, Theorem 2.2]). G を Cameron–Walker グラフとする (頂点の番号付けは定義 2.10 にあるとおりである). $R/I(G)$ が等式 (3.2) をみたすための必要十分条件は, 任意の $V \subset \{v_1, \ldots, v_m\}$ に対して

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ v_i \in V}} s_i \ + \ \left| \left\{ j : N_{G_{\mathrm{bip}}}(w_j) \subset V \right\} \right| \geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ N_{G_{\mathrm{bip}}}(w_j) \subset V}} t_j \ + \ |V|$$

なることである.

問題 3.3 (2) の解答のため, 次のように記号を定める. $\mathrm{CW}(n)$ を n 頂点の Cameron–Walker グラフ全体の集合とする. $n < 5$ のとき $\mathrm{CW}(n) = \emptyset$ であることを注意しておく. また,

$$\mathrm{CW}_{\mathrm{reg},\deg h} := \{(\mathrm{reg}(R/I(G)), \deg h(R/I(G),\lambda)) \ : \ G \in \mathrm{CW}(n)\},$$

$$\mathrm{CW}_{\mathrm{depth},\dim} := \{(\mathrm{depth}(R/I(G)), \dim R/I(G)) \ : \ G \in \mathrm{CW}(n)\},$$

$$\mathrm{CW}_{\mathrm{depth},\mathrm{reg},\dim,\deg h}$$
$$:= \{(\mathrm{depth}(R/I(G)), reg(R/I(G)), \dim R/I(G), \deg h(R/I(G),\lambda)) \ : \ G \in \mathrm{CW}(n)\}$$

とおく. これらの集合は次のように記述される.

定理 5.4 ([14, Theorem 5.1])**.** n を 5 以上の整数とする. このとき

$$\mathrm{CW}_{\mathrm{reg},\deg h}(n) = \left\{(r,d) \in \mathbb{N}^2 \ : \ 2 \le r \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \max\{r, -2r+n+1\} \le d \le n-r \right\}.$$

定理 5.5 ([10, Theorem 3.15])**.** n を 5 以上の整数とする. このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{CW}_{\mathrm{depth},\dim}(n) = \mathrm{CW}_{2,\dim}(n) &\cup \left\{(b,b) \in \mathbb{N}^2 \ \mid \ \frac{n}{3} < b < \frac{n}{2}\right\} \\ &\cup \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \ \middle| \ 3 \le a \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \ \max\left\{a, \frac{n-a}{2}\right\} < b \le n-a \right\},\end{aligned}$$

ただし

$$\mathrm{CW}_{2,\dim}(n) = \begin{cases} \{(2,n-2),(2,n-3)\}, & n\text{: 偶数}, \\ \left\{(2,n-2),(2,n-3),(2,\dfrac{n-1}{2})\right\}, & n\text{: 奇数}. \end{cases}$$

さて, $\mathbb{N}^2$ の部分集合 $\mathcal{M}$ は次の二つをみたすとき, **凸** といわれる:

- $(a,b_1),(a,b_2) \in \mathcal{M}$, $b_1 < b_2$ ならば $b_1 < b < b_2$ なる任意の b に対して $(a,b) \in \mathcal{M}$;
- $(a_1,b),(a_2,b) \in \mathcal{M}$, $a_1 < a_2$ ならば $a_1 < a < a_2$ なる任意の a に対して $(a,b) \in \mathcal{M}$.

定理 5.4, 定理 5.5 から次の系が得られる.

系 5.6. (1) $\mathrm{CW}_{\mathrm{reg},\deg h}$ は凸である.

(2) $\mathrm{CW}_{\mathrm{depth},\dim}(n)$ が凸であるための必要十分条件は, $n = 5,7$ または n が偶数であることである.

集合 $\mathrm{CW}_{\mathrm{depth},\mathrm{reg},\dim,\deg h}$ は次のように記述される.

定理 5.7. n を 5 以上の整数とする．このとき

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{CW}_{\mathrm{depth},\mathrm{reg},\mathrm{dim},\deg h}(n) \\
&= \mathrm{CW}_{2,\mathrm{reg},\mathrm{dim},\deg h}(n) \\
&\cup \left\{ (a,d,d,d) \in \mathbb{N}^4 \;\middle|\; 3 \le a \le d \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,\ n < a+2d \right\} \\
&\cup \left\{ (a,a,d,d) \in \mathbb{N}^4 \;\middle|\; 3 \le a < d \le n-a,\ n \le 2a+d-1 \right\} \\
&\cup \left\{ (a,r,d,d) \in \mathbb{N}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} 3 \le a < r < d < n-r, \\ n+2 \le a+r+d \end{array} \right\},
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{CW}_{2,\mathrm{reg},\mathrm{dim},\deg h}(n) \\
&= \begin{cases} \{(2,2,n-2,n-2),(2,2,n-3,n-3)\}, & n\text{: 奇数}, \\ \left\{ (2,2,n-2,n-2),(2,2,n-3,n-3),(2,\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}) \right\}, & n\text{: 偶数}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

定理 5.5 の証明においては, Cameron–Walker グラフ G について, $\mathrm{depth}(R/I(G))$ と $\dim R/I(G)$ に関する次の関係があることを用いた.

補題 5.8 ([10, Lemma 3.5])**.** G を Cameron–Walker グラフとするとき, 次が成り立つ.

(1) $2 \le \mathrm{depth}(R/I(G)) \le \lfloor (|V(G)|-1)/2 \rfloor$.

(2) $\mathrm{depth}(R/I(G)) + \dim R/I(G) \le |V(G)|$.

(3) $|V(G)| < \mathrm{depth}(R/I(G)) + 2\dim R/I(G)$.

これらは, 一般のエッジイデアルに対しては成立しないことを注意しておく.

定理 5.7 の証明においては, 次も用いた.

補題 5.9 ([10, Lemma 4.2])**.** G を Cameron–Walker グラフとするとき, 次が成り立つ.

(1) $|V(G)|+1 \le \mathrm{depth}(R/I(G)) + \mathrm{reg}(R/I(G)) + \dim R/I(G)$.

(2) $|V(G)|+1 = \mathrm{depth}(R/I(G))+\mathrm{reg}(R/I(G))+\dim R/I(G)$ かつ $\mathrm{depth}(R/I(G)) < \mathrm{reg}(R/I(G))$ なるとき, $\mathrm{reg}(R/I(G)) = \dim R/I(G)$.

参考文献

[1] D. Bayer, H. Charalambous and S. Popescu, *Extremal Betti numbers and applications to monomial ideals*, J. algebra **221** (1999), 497–512.

[2] M. Bigdeli and J. Herzog, *Betti diagrams with special shape*, In: Homological and Computational Methods in Commutative Algebra, Vol. **20**m pp. 33–52, Springer INdAM Series, Cham (2017).

[3] W. Bruns and J. Herzog, Cohen–Macaulay rings (Revised Edition), Cambridge University Press, 1998.

[4] K. Cameron and T. Walker, *The graphs with maximum induced matching and maximum matching the same size*, Discrete Math. **299** (2005), 49–55.

[5] H. Dao and J. Schweig, *Projective dimension, graph domination parameters, and independence complex homology*, J. Combin. Theory, Ser. A **120** (2013), 453–469.

[6] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[7] C. Francisco and A. Van Tuyl, *Sequentially Cohen–Macaulay edge ideals*, Proc. Amer. Math. Soc **135** (2007), 2327–2337.

[8] H. T. Hà and A. Van Tuyl, *Monomial ideals, edge ideals of hypergraphs, and their graded Betti numbers*, J. Algebraic Combin. **27** (2008), 215–245.

[9] T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura and A. B. O'Keefe, *Algebraic study on Cameron–Walker graphs*, J. Algebra **422** (2015), 257–269.

[10] T. Hibi, H. Kanno, K. Kimura, K. Matsuda and A. Van Tuyl, *Homological invariants of Cameron–Walker graphs*, preprint, `arXiv:2007.14176`.

[11] T. Hibi, H. Kanno and K. Matsuda, *Induced matching numbers of finite graphs and edge ideals*, J. Algebra **532** (2019), 311–322.

[12] T. Hibi, K. Kimura and K. Matsuda, *Extremal Betti numbers of edge ideals*, Arch. Math. (Basel) **113** (2019), 149–155.

[13] T. Hibi, K. Kimura, K. Matsuda and A. Tsuchiya, *Regularity and a-invariant of Cameron–Walker graphs*, preprint, `arXiv:1901.01509`.

[14] T. Hibi, K. Kimura, K. Matsuda and A. Van Tuyl, *The regularity and h-polynomial of Cameron–Walker graphs*, preprint, `arXiv:2003.07416`.

[15] T. Hibi, K. Matsuda and A. Van Tuyl, *Regularity and h-polynomials of edge ideals*, Electron. J. Combin. **26** (2019) # P1.22.

[16] M. Katzuman, *Characteristic-independence of Betti numbers of graph ideals*, J. Combin. Theory, Ser. A **113** (2006), 435–454.

[17] K. Kimura, *Non-vanishingness of Betti numbers of edge ideals*, in: T. Hibi (ed.) Harmony of Gröbner Bases and the Modern Industrial Society, pp. 153–168, World Sci. Publ., Hackensack (2012).

[18] K. Kimura, *Nonvanishing of Betti numbers of edge ideals and complete bipartite subgraphs*, Comm. Algebra **44** (2016), 710–730.

[19] A. Kumar, R. Kumar and R. Sarkar, *Certain algebraic invariants of edge ideals of join graphs*, preprint, `arXiv:1904.11480`.

[20] M. Kummini, *Regularity, depth and arithmetic rank of bipartite edge ideals*, J. Algebraic Combin. **30** (2009), 429–445.

[21] G. Lyubeznik, *A new explicit finite free resolution of ideals generated by monomials in an R-sequence*, J. Pure Appl. Algebra **51** (1988), 193–195.

[22] M. Mahmoudi, A, Mousivand, M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai and S. Yassemi, *Vertex decomposability and regularity of very well-covered graphs*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 2473–2480.

[23] G. Rinaldo, *Some algebraic invariants of edge ideal of circulant graphs*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **61 (109)** (2018), 95–105.

[24] S. A. Seyed Fakhari and S. Yassemi, *Improved bounds for the regularity of edge ideals of graphs*, Collect. Math. **69** (2018), 249–262.

[25] T. N. Trung, *Regularity, matchings and Cameron–Walker graphs*, Collect. Math. **71** (2020), 83–91.

[26] A. Van Tuyl, *sequentially Cohen–Macaulay bipartite graphs: vertex decomposability and regularity*, Arch. Math. (Basel) **93** (2009), 451–459.

[27] X. Zheng, *Resolutions of facet ideals*, Comm. Algebra **32** (2004), 2301–2324.

〒 422-8529
静岡市駿河区大谷 836
静岡大学理学部数学科
E-mail: `kimura.kyoko.a@shizuoka.ac.jp`