Space monomial curve の定義イデアルのシンボリックリース環
(Symbolic Rees rings of defining ideals of space monomial curves)

藏野 和彦

明治大学理工学部

1　シンボリック冪とは？

可換環 A の素イデアル P に対して、イデアル $P^nA_P \cap A$ を P の n 階のシンボリック冪といい $P^{(n)}$ と書くことにする。n 階のシンボリック冪は、A が体上の多項式環であっても、通常の冪 P^n と一致するとは限らない。Zariski-永田の定理 ([30], [27]) によると、ある条件の下で $\operatorname{Spec} A$ の閉部分多様体 $V(P)$ 上のすべての閉点で n 重に消える関数全体が $P^{(n)}$ である。イデアルのシンボリック冪は、fat point の解析 (ヒルベルトの第 14 問題との関係を含む)、Eisenbud-Mazur 予想 [6] との関係、組み合わせ論に関連したイデアルの研究など、可換環論の多方面から研究されている。シンボリック冪に関して近年どのような問題が研究されているかに関しては、2017 年にバンフ研究所で開催されたシンボリック冪に関する研究集会のまとめ [7] を見てほしい。シンボリック冪のリース環 (シンボリックリース環) はネーター環になるとは限らないが、そのことがシンボリック冪の研究を困難にしている。シンボリックリース環は、代数多様体の Cox 環あるいは多重切断環と一致することが多く、したがってその有限生成性は双有理幾何にとって非常に重要な問題になる。本講演では、主としてスペースモノミアル曲線の定義イデアルのシンボリックリース環の有限生成性を扱う。このシンボリックリース環はある曲面 Y の Cox 環になる。Huneke [17] の判定法、Cutkosky [3] の結果、後藤-西田-渡辺 [14] の例から始めて、近年の GonzálezAnaya-González-Karu [10], 藏野-西田 [23] の結果などを紹介する。有限生成性は Y 上の negative curve の性質で決まるのだが、negative curve に関する最近の結果にも触れる。有限生成性は永田予想 ($\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ の一般な N 点をそれぞれ r 重で通る曲線の次数に関するある予想) とも深い関係がある。

これまで代数学シンポジウムでは、ヒルベルトの第 14 問題関係 (第 45 回向井茂氏、第 52, 61 回黒田茂氏)、不変式環関係 (第 53, 57 回橋本光靖氏)、シンボリックリース環や永田型の環 (第 63 回

西田康二氏)、組み合わせ論関係 (第 62 回寺井直樹氏) など、シンボリック冪に関連したテーマで非常に素晴らしい講演が行われてきた。今回は、それらと多少かぶるところもあるが、自分の流儀で自分の言葉でこのテーマに関して解説したい。

この講演の機会を与えていただき、代数学シンポジウムの世話人・プログラム責任者の先生方に、深く感謝します。

2 スペースモノミアル曲線の定義イデアルのシンボリックリース環

可換ネーター環 A と素イデアル Q に対して、

$$R_s(Q) = \oplus_{n\geq 0} Q^{(n)}t^n \subset A[t]$$
$$R'_s(Q) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} Q^{(n)}t^n \subset A[t^{\pm 1}]$$

をそれぞれシンボリックリース環、拡張シンボリックリース環という*1。シンボリックリース環 $R_s(P)$ がネーター環 (A 上有限生成であることと同値) になるかどうかを議論したい。$R_s(Q)$ がネーター環であることと、$R'_s(Q)$ がネーター環であることは同値である。

何故、このようなものを考えるのか？

可換環論では、ヒルベルトの第 14 問題、クロネッカーの問題 (アフィン曲線は集合論的完全交叉か？) との関連からシンボリックリース環の有限生成性が議論され始めたようである。イデアルのシンボリック冪、冪の saturation、冪の整閉包、 冪の tight closure などの漸近挙動を調べるには、そのリース環や随伴次数環を考えるというのは可換環論の常套手段である。代数多様体の Cox 環や多重切断環が、ある環とあるイデアルの (拡張) シンボリックリース環になるということがよく起こる。Cox 環や多重切断環の有限生成性は、双有理幾何にとって重要な問題である。

極大イデアル Q に対しては、任意の $n>0$ に対して $Q^{(n)} = Q^n$ が成立する。素イデアル Q が正則列で生成されているときも、任意の $n>0$ に対して $Q^{(n)} = Q^n$ が成立する。これらのケースでは、$R_s(Q)$ は普通のリース環と一致するので係数環上有限生成である。

UFD 上の素イデアル Q に対して、Q の高さが 1 あるいは Q が極大イデアルである場合、$R_s(Q)$ は普通のリース環と一致するのでネーター環である。よって、体上の多項式環の素イデアル Q に対する $R_s(Q)$ のネーター性を調べる際、最初に考えるべきものは、三変数多項式環の (2 元では生成されない) 高さ 2 の素イデアルである。

三変数多項式環 S 上の (2 元では生成されない) 高さ 2 の素イデアルでもっともシンプルなものが、次のスペースモノミアル曲線 (t^a, t^b, t^c) の定義イデアルである。

定義 2.1 k は体、$S = k[x,y,z]$ は次数付きの多項式環で、$\deg(x) = a$, $\deg(y) = b$, $\deg(z) = c$ とする。ただし、a, b, c は pairwise coprime な自然数とする。t は変数とし、$\varphi(x) = t^a$, $\varphi(y) = t^b$, $\varphi(z) = t^c$ で定まる k-代数射

$$\varphi : k[x,y,z] \longrightarrow k[t]$$

*1 $Q^{(n)}Q^{(m)} \subset Q^{(n+m)}$ であるので、$R_s(Q)$, $R'_s(Q)$ はそれぞれ $A[t]$, $A[t^{\pm 1}]$ の部分環になる。

の核を P とする。P は S の高さ 2 の素イデアルである。k が無限体なら、P はスペースモノミアル曲線 $\{(t^a, t^b, t^c) \in k^3 \mid t \in k\}$ の定義イデアルである。

S, P は定義 2.1 のものとしよう。Herzog [16] により、P の極小生成系の元数は 2 または 3 であることがわかっている。極小生成系の元数が 2 のときは、P は正則列で生成されるので、$R_s(P)$ は普通のリース環と一致する。よって、$R'_s(P)$ はネーター環になる。極小生成系の元数が 3 のときは、後藤-西田-下田 [13] によって $P^{(2)}$ が決定されているが、それを見れば $P^{(2)} \neq P^2$ となっている。

後で述べるが、Cutkosky [3] は $R_s(P)$ に関して素晴らしい仕事をしている。そのキーとなったことは、次の $R_s(P)$ の幾何学的な意味付けである。

注意 2.2 $X = \operatorname{Proj} S$ の点 $V_+(P)$ でのブローアップを Y とおく。例外曲線を E、$\mathcal{O}_X(1)$ の引き戻しを H とおく[*2]。このとき、自然な同一視

$$H^0(Y, dH - rE) \simeq [P^{(r)}]_d$$

が存在する。ただし、$r < 0$ のときは、$P^{(r)} = S$ と定める。これによって、拡張シンボリックリース環 $R'_s(P)$ は、Y の Cox 環

$$\mathrm{Cox}(Y) = \oplus_{d,r \in \mathbb{Z}} H^0(Y, dH - rE)$$

と同型になる。

ここで、上の同型の拡張 [21] を与える。

定理 2.3 $n > d > 1$ は整数とし、

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z}^{n-d} \overset{(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_n)}{\longleftarrow} \mathbb{Z}^n \overset{\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\longleftarrow} \mathbb{Z}^d \longleftarrow 0 \tag{2.1}$$

は完全列であるとする。ここで、$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\mathbf{a}_i$ の d 個の成分の最大公約数は 1 と仮定する。$m_1, \ldots, m_n$ は自然数とし、

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid <\mathbf{a}_i, \mathbf{x}> \geq -m_i\ (i = 1, \ldots, n)\}$$

は $\dim \Sigma = d$ であり ($<\mathbf{a}_i, \mathbf{x}>$ は $\mathbf{a}_i$ と $\mathbf{x}$ の内積)、n 個の facet

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid <\mathbf{a}_i, \mathbf{x}> = -m_i\}$$

$(i = 1, \ldots, n)$ を持つ simplicial な凸多面体であると仮定する。

[*2] $\mathcal{O}_X(1)$ は X 上の Weil 因子だが、ほとんどの場合 Cartier 因子ではない。しかし、$V_+(P)$ は X の特異点ではないので、X 上の Weil 因子を Y に引き戻すことができる。

エルハールト環

$$E(\Sigma,t)=\bigoplus_{n\geq 0}\left(\bigoplus_{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in n\Sigma\cap\mathbb{Z}^d} kv_1^{\alpha_1}\cdots v_d^{\alpha_d}\right)t^n\subset k[v_1^{\pm 1},\dots,v_d^{\pm 1},t]$$

とその素イデアル $\mathbf{p}=E(\Sigma,t)\cap(v_1-1,\dots,v_d-1)k[v_1^{\pm 1},\dots,v_d^{\pm 1},t]$ を考える。(v_1, …, v_d, t は k 上代数的独立な元とする。) W は $V=\mathrm{Proj}(E(\Sigma,t))$ の $V_+(\mathbf{p})$ でのブローアップとする。$\mathbb{Z}^{n-d+1}$-次数環 $\mathrm{Cox}(W)$ を考える[*3]。

$\deg(x_i)=\mathbf{b}_i\in\mathbb{Z}^{n-d}$ とし、$T=k[x_1,x_2,\dots,x_n]$ は $\mathbb{Z}^{n-d}$-次数付きの多項式環であるとする。$x_i\mapsto\mathbf{b}_i\in\mathbb{Z}^{n-d}$ によって定まる $\mathbb{Z}^{n-d}$-次数付き k-代数射 $T\to k[\mathbb{Z}^{n-d}]$ の核を $\mathbf{q}$ とする。$\mathbb{Z}^{n-d+1}$-次数環 $R'_s(\mathbf{q})$ を考える。

(1) $\mathbb{Z}^{n-d+1}$-次数環の同型 $\mathrm{Cox}(W)\simeq R'_s(\mathbf{q})$ がある。

(2) $\mathcal{O}_V(1)$ の W への引き戻しを H とする。例外因子を E とする。このとき、多重切断環

$$R(W;H,-E)=\oplus_{d,r\in\mathbb{Z}}H^0(W,dH-rE)$$

は $R'_s(\mathbf{p})$ と同型である。

定理 2.3 で $(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_n)=(a\ b\ c)$ の場合、注意 2.2 の $\mathrm{Cox}(Y)=R'_s(P)$ を得る。

シンボリックリース環の有限生成性に関して、Huneke の判定法 [17] と呼ばれる必要充分条件がある。下の定理は、Huneke の判定法の Morales [25], 後藤 [11] による拡張である。

定理 2.4（Huneke の判定法） $(A,\mathbf{m})$ はネーター局所環で unmixed、$\dim A=d>0$ とする。$\mathbf{p}$ は A の素イデアルで、$\dim A/\mathbf{p}=1$ とする。このとき、次は同値である。

(1) $R'_s(\mathbf{p})$ はネーター環である。

(2) 自然数 $r_1,\dots,r_{d-1}$ と $f_i\in\mathbf{p}^{(r_i)}$ $(i=1,\dots,d-1)$ が存在して、ある (“任意の” にしてもよい) $x\in\mathbf{m}\setminus\mathbf{p}$ に対して、

$$\mathrm{e}((x,f_1,\dots,f_{d-1}),A)=\mathrm{e}(\mathbf{p}A_{\mathbf{p}},A_{\mathbf{p}})\cdot\ell_A(A/xA+\mathbf{p})\cdot r_1r_2\cdots r_{d-1}$$

を充たす。(e( ) は、重複度とする。)

注意 2.5 S, P を定義 2.1 のものとしよう。$A=S_{(x,y,z)}$, $\mathbf{m}=(x,y,z)A$, $\mathbf{p}=PA$ とおく。定理 2.4 により、$R'_s(\mathbf{p})$ がネーター環であるための必要充分条件は、

(H) 自然数 r_1, r_2 と $f\in\mathbf{p}^{(r_1)}$, $g\in\mathbf{p}^{(r_2)}$, $x\in\mathbf{m}\setminus\mathbf{p}$ で、$\ell_A(A/(x,f,g))=r_1r_2\ell_A(A/xA+\mathbf{p})$ を充たすものが存在する (これが元々の Huneke の判定法 [17] である)

となる。

[*3] (2.1) の完全性により、$\mathrm{Cl}(V)\simeq\mathbb{Z}^{n-d}$、$\mathrm{Cl}(W)\simeq\mathbb{Z}^{n-d+1}$ である。

注意 2.6　$R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ は d 次元の次数付き整閉整域で、$R_0 = k$ は体、$R = k[R_1]$ であると仮定する。$M = R_+$ とおく。Q は R の斉次素イデアルで、$\dim R/Q = 1$ であり、R_Q は正則局所環とする。$V = \operatorname{Proj} R$ の点 $V_+(Q)$ でのブローアップを W とおく。H は $\mathcal{O}_V(1)$ の W への引き戻し、例外因子を E とおく。このとき、注意 2.2 と同様にして、同型

$$R(W; H, -E) \simeq R'_s(Q) \tag{2.2}$$

がある。ここで、$R'_s(QR_M) = R'_s(Q) \otimes_R R_M$ であり、$R'_s(QR_M)$ がネーターであることと $R'_s(Q)$ がネーターであることは同値になる。よって、定理 2.4 によって次が同値であることがわかった。

(1)　多重切断環 $R(W; H, -E)$ が k 上有限生成。

(2)　自然数 $r_1, \ldots, r_{d-1}$ と $f_i \in Q^{(r_i)} R_M$ $(i = 1, \ldots, d-1)$ が存在して、ある (“任意の” にしてもよい) $x \in MR_M \setminus QR_M$ に対して、

$$\mathrm{e}((x, f_1, \ldots, f_{d-1}), R_M) = \ell_{R_M}(R_M/xR_M + QR_M) \cdot r_1 r_2 \cdots r_{d-1}$$

を充たす。

注意 2.7　定義 2.1 と注意 2.2 の S, P, X, Y の場合、式 (2.2) によって $\mathrm{Cox}(Y) = R'_s(P)$ である。Cutkosky [3] によると、$\mathrm{Cox}(Y)$ がネーターであることと、

(C)　$D_1 \neq E$ かつ $D_2 \neq E$ を充たす Y 上の既約曲線 D_1, D_2 で、$D_1 \cap D_2 = \emptyset$ を充たすものが存在する

ことは同値である。また、$\mathrm{Cox}(Y)$ がネーターであることと、注意 2.5 の $R'_s(\mathbf{p})$ がネーターであることは同値である。

S 上の同伴ではない既約斉次多項式 f, g に対して、f, g が Huneke の判定法 (H) を充たすことと、X 上の曲線 $V_+(f)$ と $V_+(g)$ の Y における proper transform が上の条件 (C) を充たすことは同値であることが証明できる。

以上をつなぎ合わせると、Huneke の判定法 (H) が A, $\mathbf{p}$ 上で成立すれば、f, g は S の既約斉次式でとれることになる。

P が完全交叉である場合、P の斉次な極小生成系は、Huneke の判定法を充たしている。

注意 2.8　注意 2.6 の状況で考える。

ここで、R は UFD と仮定する。このとき、$\mathrm{Cl}(W) = \mathbb{Z}H + \mathbb{Z}E \simeq \mathbb{Z}^2$ となり、$\mathrm{Cox}(W) = R(W; H, -E)$ である。よって、注意 2.6 の (1) は、W が森夢空間 (つまり、$\mathrm{Cox}(W)$ が k 上有限生成) であることとと同値である。

ところで、因子類群が $\mathbb{Z}^2$ となる正規射影代数体 W に関しては、伊藤 [18] により、それが森夢空間になるための充分条件が与えられている。実は、注意 2.6 で R が UFD であるとき、伊藤の充分条件は、注意 2.6 (2) で $f_1, \ldots, f_{d-1}$ が R の斉次元でとれることと同値である[*4]。注意 2.6

[*4] 伊藤の充分条件は、定義 2.1 と注意 2.2 の状況では、注意 2.7 の条件 (C) に他ならない。

(2) が成立するときは、いつも $f_1, \dots, f_{d-1}$ は R の斉次元でとれるのだろうか？注意 2.7 によると、定義 2.1 と注意 2.2 の S, P, X, Y の場合は可能である。

R は、5 次交代行列に対応する 10 変数多項式環を 5 個の 4×4-pfaffian で生成された素イデアルで割った次数環 (UFD になる) とする。R の余高度 1 の斉次素イデアル Q をとって、$V_+(Q)$ での $V = \operatorname{Proj} R$ のブローアップを W とすると、$\mathrm{Cox}(W)$ はネーター環になるが、伊藤の充分条件は充たされないことが [19] で示されている。つまり、このケースでは、注意 2.6 の条件 (2) は成立するが、$f_1, \dots, f_{d-1}$ は R の斉次元では取れないことを意味している。W が森夢空間であることを示す際に、V の斉次座標環 R の非斉次元が使われるわけである。

$d = 3$ で R が UFD のケースは、注意 2.6 の条件 (2) が成立すれば f_1, f_2 は斉次元でとれる。(定義 2.1 の S, P の場合と同様にして証明できる。)

$R = k[x, y, z]$ の場合、素イデアルとは限らない高さ 2 の斉次イデアルに対しても、Huneke の判定法は成立する [23]。甲斐-西田 [20] によると、このケースでは注意 2.6 の (2) が成立しても f_1, f_2 は斉次でとれるとは限らない。そのことは、シンボリックリース環の chamber [1] の様子を見れば理由が説明できる。

S, P を定義 2.1 のものとしよう。$R'_s(P)$ の Cohen-Macaulay (あるいは有理特異点) 性などの環論的性質に関しては、後藤-西田-下田 [12]、後藤 [11]、權業-大川-三内-高木 [8] を参照。

注意 2.9 既約斉次式 $f \in [P^{(r)}]_d$ が $d/r < \sqrt{abc}$ を充たすとき*5、f は negative curve という。ブローアップ $Y \to X$ において $V_+(f)$ の proper transform は、Y の自己交点数が負の曲線になる。このような f は、存在すれば同伴を除いて一意的である。

$f \in [P^{(r_1)}]_{d_1}$, $g \in [P^{(r_2)}]_{d_2}$ が Huneke の判定法 (H) を充たすとする。一般性を失わずに、$d_1/r_1 \le d_2/r_2$ が成立するとしてよい。Cutkosky の議論により、比 d_1/r_1, d_2/r_2 は f, g の取り方に依らず決まる。このとき、$d_1 d_2 / r_1 r_2 = abc$ が成立する*6。$d_1/r_1 < d_2/r_2$ の場合、negative curve は存在して、f は negative curve のある冪と同伴である。このとき、negative curve の任意の冪と g も Huneke の判定法を充たす。

Cutkosky [3] の結果を述べる。

定理 2.10（Cutkosky） S, P は定義 2.1 のものとする。

(1) k の標数は正とする。このとき、negative curve が存在すれば、$R'_s(P)$ はネーター環である*7。

(2) $-K_Y$ が big なら、$R'_s(P)$ はネーター環である。特に、$(a+b+c)^2 > abc$ であれば (この

*5 このとき、r は $f \in P^{(r)} \setminus P^{(r+1)}$ を充たす自然数として一意的に決まる。

*6 $\sqrt{abc} \notin \mathbb{Z}$ の場合、$R'_s(P)$ がネーターであるとき、$d_1/r_1 \neq d_2/r_2$ であるので negative curve は存在する。

*7 $\sqrt{abc} \notin \mathbb{Z}$ の場合、脚注 *6 で見たように逆も成立する。標数 0 の場合は、定理 2.11 の中の例がそうであるが、negative curve が存在しても $R'_s(P)$ はネーター環であるとは限らない。$R'_s(P)$ はネーター環で negative curve が存在しない例は $(a, b, c) = (1, 1, c)$ 以外知らない。$(a, b, c) = (1, 1, c)$ のケースは、Y 上に自己交点数が 0 で交わらない二つの曲線があって、注意 2.7 の (C) を充たす。

条件は、$(-K_Y)^2 > 0$ と同値である)、$R'_s(P)$ はネーター環である。

$-K_Y$ が big である必要充分条件は、「$(a+b+c)^2 > abc$」または「negative curve $f \in [P^{(r)}]_d$ が存在して $a+b+c > d/r$ になる」が成立することである。このことを用いれば、$\min\{a,b,c\} \le 4$ または $\min\{a,b,c\} = 6$ の場合は、ネーター環になることが証明できる [28]。$\min\{a,b,c\} = 5, 8$ の場合は、$R'_s(P)$ がネーターでない例はない。このケースでは、$R'_s(P)$ はネーターになりやすいようだが、ネーターであることの証明はされていない [5], [29]。

定理 2.10 の (1) は、正標数 p の素体上の非特異曲線上で数値的 0 な直線束はピカール群のねじれであること、正標数の素体上の曲線の特異点解消でのピカール群の間の射の核がねじれであること、連接層の切断の元が p 倍で消えることを用いて証明できる。

$-K_Y$ は big としよう。もし $(a+b+c)^2 > abc$ であるなら、negative curve が存在する (例えば、[22] の定理 4.3)。Y 上に E 以外の自己交点数負の曲線 C が存在し、その方程式 $f \in [P^{(r)}]_d$ が $a+b+c > d/r$ を充たすとき、任意の $n > 0$ に対して $H^0(Y, K_Y + nC) = 0$ がいえて、Y から C をつぶす射影代数多様体の間の射が作れる。これを用いて、Y 上に C と交わらない曲線の存在が証明できて、注意 2.7 の条件 (C) が充たされる。

L/k が体の拡大であるとき、$R'_s(P) \otimes_k L = R'_s(P_L)$ が成立する。ただし、P_L は L-代数の射 $L[x,y,z] \to L[t]$ ($x \mapsto t^a$, $y \mapsto t^b$, $z \mapsto t^c$) の核である。これによって、$R'_s(P)$ と $R'_s(P_L)$ は様々な性質 (ネーター性か？、Cohen-Macaulay 環か？ negative curve があるか？など) を共有する。つまり、$R'_s(P)$ の性質は、係数体 k の標数のみで決まる。k がどのくらい大きいかには依らない。

$R'_s(P)$ がネーターになる (a,b,c) は、P が完全交叉の場合・$-K_Y$ が big な場合など多くの例がある。ネーターでない例は、後藤-西田-渡辺 [14] によってはじめて発見された。

定理 2.11（後藤-西田-渡辺） S, P は定義 2.1 のものとする。ここで、k は標数 0 の体とする。(a,b,c) が次のいずれかの場合、$R'_s(P)$ はネーターでない。

- $(a,b,c) = (7n-3, (5n-2)n, 8n-3)$。ただし、$n \ge 4$ で $n \not\equiv 0 \bmod 3$.
- $(a,b,c) = (7n-10, 5n^2-7n+1, 8n-3)$。ただし、$n \ge 5$ で $3 \nmid 7n-10$ かつ $n \not\equiv -7 \bmod 59$.

例えば、上のケースで $n = 4$ とすると、$(a,b,c) = (25, 72, 29)$ である。k の標数が正の場合は、$R'_s(P)$ がネーターでない例は見つかっていない (命題 4.2 参照)。

証明では、まず上の (a,b,c) の場合、P の極小生成系のある一元 f が、体の標数に関係なく negative curve になることを示す。すると、Cutkosky の定理 (定理 2.10 の (1)) により k の標数が $p > 0$ のときは $R'_s(P)$ はネーター環になるが、 Huneke の判定法を充たす元 $f \in P$, $g_p \in P^{(s_p)}$ を具体的に求める (f は標数によらないが、g_p は標数 p による)。仮に k の標数が 0 のときに、$R'_s(P)$ はネーター環になるとしよう。すると、標数 0 で Huneke の判定法を充たす $f \in P$, $g_0 \in P^{(s_0)}$ がとれる。このとき、有限個の素数 p を除けば、f, g_0 は標数 $p > 0$ でも Huneke の判定法を充たす。$s'_p = \mathrm{GCD}(s_0, s_p)$ とおくと、標数 p で Huneke の判定法を充たすような $f \in P$, $g'_p \in P^{(s'_p)}$ がとれる。ところが、有限個の素数を除けば、s'_p は p に依らない自然数になってしまう (それを s' とする)。正標数還元を考えると、標数 0 で Huneke の判定法を充たす

$f \in P$, $g' \in P^{(s')}$ が存在することになる。ここで、標数 0 でイデアル $P^{(s')}$ を決定して、そのような g' は存在しないことを示し矛盾を導くのである。

Castravet-Tevelev [2] は、モジュライ空間 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ の Cox 環の研究で、後藤-西田-渡辺の上の例を用いている。

González-Karu [9] により、この問題にトーリックの技術が導入された。これによって、後藤-西田-渡辺の手法とは異なり、正標数還元の議論を用いず標数 0 の議論のみで同様の例の構成が可能になった。また、$R'_s(P)$ がネーターにならないためのシンプルな充分条件を見つけている。

S, P は定義 2.1 のものとする。P は完全交叉ではないと仮定すると、

$$P = I_2 \begin{pmatrix} x^{s_2} & y^{t_3} & z^{u_1} \\ y^{t_1} & z^{u_2} & x^{s_3} \end{pmatrix} = (x^{s_2+s_3} - y^{t_1}z^{u_1}, y^{t_1+t_3} - x^{s_2}z^{u_2}, z^{u_1+u_2} - x^{s_3}y^{t_3})$$

である。$i_0a + j_0b = 1$ なる整数 i_0, j_0 をとる。このとき、三角形

$$\Sigma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} y \geq -\frac{s_2}{s_3}x - \frac{i_0}{s_3} \\ y \geq \frac{t_1+t_3}{t_3}x - \frac{j_0}{t_3} \\ y \leq \frac{u_2}{u_1+u_2}x \end{array} \right\}$$

を考えると、エルハールト環

$$E(\Sigma, t) = \bigoplus_{d \geq 0} \left(\bigoplus_{(\alpha,\beta) \in d\Sigma \cap \mathbb{Z}^2} kv^\alpha w^\beta \right) t^d \subset k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}, t]$$

は S と k-次数環として同型である。つまり、同一視

$$\cdots \subset [P^{(2)}]_d \subset P_d \subset S_d = \left(\bigoplus_{(\alpha,\beta) \in d\Sigma \cap \mathbb{Z}^2} kv^\alpha w^\beta \right) t^d \subset k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]t^d \tag{2.3}$$

がある。このとき、

$$P = E(\Sigma, t) \cap (v - 1, w - 1)k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}, t]$$

である。

注意 2.12 S, P は定義 2.1 のものとする。体 k の標数は 0 と仮定する。以下この注意の中では、P は完全交叉ではないと仮定して、P の極小生成系の一元が negative curve であると仮定する。後藤-西田-渡辺の例 [14] や González-Karu [9] の例は、この条件を充たしている。必要なら a, b, c を入れ替えて、

$$f = z^{u_1+u_2} - x^{s_3}y^{t_3} \text{ が negative curve} \tag{2.4}$$

としよう。藏野-西田 [23] では、k の標数が 0 であるとき、定理 2.11 の証明のアウトラインで出てきた s' は $u_1 + u_2$ とできることが示されている。このことから、k の標数は 0 のとき条件 (2.4) の下で、$R'_s(P)$ がネーター環であることと

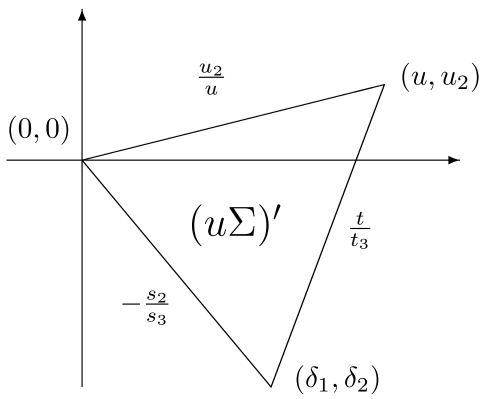
$$\dim_k [P^{(u_1+u_2-1)}]_{ab-(u_1+u_2)c} < \dim_k [P^{(u_1+u_2)}]_{ab}$$

が同値であることがわかる。シンポリック冪の斉次成分 $[P^{(r)}]_d$ の次元は、r と d が具体的に与えられたならコンピューターで計算できる。よって、P の極小生成系の一元が negative curve である場合は、$R'_s(P)$ がネーター環かどうかは、ほぼ “コンピューターを用いて決定できる” と言ってよい。

ここで、$t = t_1 + t_3$, $u = u_1 + u_2$ とおく。このとき、三角形 $u\Sigma$ は整数ベクトルの平行移動によって、

$$
\begin{aligned}
y &= -(s_2/s_3)x \\
y &= (t/t_3)(x-u) + u_2 \\
y &= (u_2/u)x.
\end{aligned}
$$

によって定まる三角形 ($(u\Sigma)'$ としよう) の周および内部になる。



ここで、δ_1, δ_2 は有理数である ($c \neq 1$ であるときは、(δ_1, δ_2) は格子点にはならない)。このとき、$R'_s(P)$ がネーターになる必要充分条件は、

$$
(v-1, w-1)^u k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \cap \left(\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in(u\Sigma)'\cap\mathbb{Z}^2} k v^\alpha w^\beta \right) \tag{2.5}
$$

の中に定数項 (あるいは $v^u w^{u_2}$ の係数) が 0 でないローラン多項式があることである。

ここで、

$$
\ell_i = {}^{\#}\{(\alpha, \beta) \in (u\Sigma)' \cap \mathbb{Z}^2 \mid \alpha = i\}
$$

とおく。$i = 1, 2, \ldots, u$ に対して、$\ell_i \geq 1$ である。列 ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_u を昇順に並べ替えたものを、

$$
\ell'_1 \leq \ell'_2 \leq \cdots \leq \ell'_u
$$

としよう。ここで、

$$
i = 1, 2, \ldots, u \text{ に対して、} \ell'_i \geq i
$$

が成立するとき、条件 EU が成立するということにする[*8]。条件 EU が成立すれば、(2.5) の中に定数項が 0 でないローラン多項式があることが証明できる [23]。つまり、条件 EU は、仮定 (2.4)

*8 この条件は、海老名智治氏 [5]、内澤京也氏 [29] の修士論文で議論されている。

のもと、$R'_s(P)$ がネーター環になるための充分条件である。これは必要充分条件ではないかと予想しているのだが、現在のところ証明も反例もない。He [15] は、仮定 (2.4) のもと $u \leq 10$ であれば、条件 (EU) は $R'_s(P)$ がネーター環になるための必要充分条件であることを示している。

注意 2.13 S, P は定義 2.1 のものとする。P の極小生成系の中から negative curve がとれる場合、それに対応する Y 上の自己交点数負の曲線は $\mathbb{P}^1_k$ と同型になる。[23] の中でそのことが使われた。藏野が 2017 年にミズーリー大のセミナーで講演した時、Cutkosky 氏から「Y 上の自己交点数負の曲線はいつも有理曲線になるのか？」という質問を受けた*9。その問題については次節で議論するが、結論から言うと、標数 0 では (藏野が持っている) すべての例で Y 上の自己交点数負の曲線は、有理曲線になっている*10。

[21] では、次のことが示されている。

k は標数 0 の代数閉体とする。negative curve $f \in [P^{(r_1)}]_{d_1}$ が存在し、それに対応する Y 上の自己交点数負の曲線は $\mathbb{P}^1_k$ と同型であるとする。自然数 r_2, d_2 は、「(i) $d_1 d_2 = abcr_1 r_2$、(ii) a は d_1 と d_2 のどちらかを割り切る、(iii) b は d_1 と d_2 のどちらかを割り切る、(iv) c は d_1 と d_2 のどちらかを割り切る、(v) r_2 は r_1 を法として 0 か -1 である」を充たすとする。このとき、$R'_s(P)$ がネーターであるための必要充分条件は、 f, g が Huneke の判定法を充たすような $g \in [P^{(r_2)}]_{d_2}$ が存在することである。

k は標数 0 の代数閉体とする。negative curve $f \in [P^{(r_1)}]_{d_1}$ が存在し、それに対応する Y 上の自己交点数負の曲線は特異有理曲線 C とする。このときは、$h^1(\mathcal{O}_C)$ に対応して上の r_2, d_2 を何倍かすれば、上と同じような判定法を作ることは可能である [21]。(ただし、r_2 が大きくなりすぎて、コンピューター実験では役に立たないが。)

注意 2.14 S, P は定義 2.1 のものとする。k の標数は 0 としよう。P の極小生成系の中から negative curve がとれると仮定する。

$\min\{a, b, c\}$ が 7 または 9 以上であれば、$R'_s(P)$ がネーターでない例があるようである*11。海老名 [5] では、$\min\{a, b, c\} = 5$ の場合、 $R'_s(P)$ がネーターになることが示されている。内澤 [29] では、$\min\{a, b, c\} = 8$ の場合、 $R'_s(P)$ がネーターになることが示されている。

negative curve に対応した Y 上の自己交点数負の曲線を C とする。このとき、$h^1(\mathcal{O}_{nC}) = h^2(-nC) = h^0(K_Y + nC)$ である。k が代数閉体と仮定する。C が $\mathbb{P}^1_k$ と同型であるので、$h^0(K_Y + C) = 0$ である。$-K_Y$ が big であるとき、

$$\text{任意の } n > 0 \text{ に対して } h^0(K_Y + nC) = 0 \tag{2.6}$$

である。このとき、Y から C をつぶす正規射影代数多様体の射が存在し、このことから $R'_s(P)$

*9 $\mathbb{P}^2$ の有限個の閉点でのブローアップのようなケースでは、有理曲線でない自己交点数負の曲線が出てくることは明らかであろう。

*10 標数 2 で、判定できない例が一つある。それ以外の正標数の (藏野が持っている) 例では、Y 上の自己交点数負の曲線は、いつも有理曲線である。

*11 きちんと証明したわけではない。コンピューターを用いた計算によると、$\min\{a, b, c\}$ が 100 までなら正しい。

はネーターになる。つまり、

$$-K_Y \text{ は big} \Longrightarrow \text{条件 (2.6) が成立} \Longrightarrow R'_s(P) \text{ はネーター} \tag{2.7}$$

が成立する。松浦 [24] では、$\min\{a,b,c\}=5$ の場合、条件 (2.6) が成立するための必要充分条件を与えている。$\min\{a,b,c\}=5$ の場合、海老名 [5] により $R'_s(P)$ はネーターになるのだが、上の (2.7) の二つの矢印の逆は両方とも成立しない。松浦 [24] では、$\min\{a,b,c\}=5$ の場合、$R_s(P)$ が Cohan-Macaulay 環になることが示されている。

3 トーリック曲面の一点ブローアップの Cox 環

藏野-西田 [23] 以前のネーター環でない $R'_s(P)$ の例では、P の極小生成系の一元が negative curve になっている。[23] では、$P^{(2)}$ から negative curve の方程式が出現して $R'_s(P)$ がネーター環にならない例を与えている (例えば、$(a,b,c)=(16,97,683)$)。

その後、GonzálezAnaya-González-Karu [10] は、彼らのトーリックの手法と 藏野-西田 [23] の正標数還元の方法を組み合わせて、任意の $r>0$ に対して、negative curve が $P^{(r)}$ から出現しながら $R'_s(P)$ がネーター環でない例を構成している。[10] 以前は、(a,b,c) を与えてからシンボリック冪 $P^{(r)}$ を考えていたのであるが、[10] では逆方向から考えるのである。つまり、

$$[P^{(r)}]_d=(v-1,w-1)^r k[v^{\pm1},w^{\pm1}]t^d\cap\left(\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in d\Sigma\cap\mathbb{Z}^2} kv^\alpha w^\beta\right)t^d\subset(v-1,w-1)^r k[v^{\pm1},w^{\pm1}]t^d \tag{3.1}$$

に注目して、まず negative curve $f\in[P^{(r)}]_d$ になる可能性のある元 $\varphi\in(v-1,w-1)^r k[v^{\pm1},w^{\pm1}]$ を与え、それが実際に negative curve になるように Σ を構成するのである*12。negative curve の様々な性質を調べる際、この方法は有効であるに違いない。

$[P^{(r)}]_d$ の中の negative curve になる可能性のある $(v-1,w-1)^r k[v^{\pm1},w^{\pm1}]$ の元を定義しよう。この節に書いてあることに関しては、[21] を参照する。

定義 3.1 r は自然数とする。$\varphi\in k[v^{\pm1},w^{\pm1}]$ が次を充たすとき、φ は k 上の equation of a negative curve of the blow-up of a toric surface with multiplicity r (以下、k 上の r-nct と略す) という。

(1) φ は $k[v^{\pm1},w^{\pm1}]$ の既約元で、$\varphi\in(v-1,w-1)^r k[v^{\pm1},w^{\pm1}]$ を充たす。

(2)
$$N_\varphi=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2 \mid \varphi \text{ の } v^\alpha w^\beta \text{ の係数は } 0 \text{ でない }\}$$

とし、$\Delta_\varphi=\mathrm{conv}(N_\varphi)$ としたとき $2|\Delta_\varphi|<r^2$ が成立する。

*12 $k[v^{\pm1},w^{\pm1}]$ の元 φ が与えられたとき、それが $(v-1,w-1)^r k[v^{\pm1},w^{\pm1}]$ に入るかどうかは、φ の係数に関する整数係数の $r(r+1)/2$ 個の線形連立方程式の解になるかどうかで決まる。よって、$k[v^{\pm1},w^{\pm1}]$ の $r(r+1)/2$ より多くの単項式が与えられたとき、その非自明な k-線型結合で $(v-1,w-1)^r k[v^{\pm1},w^{\pm1}]$ の元が存在する。

上で conv( ) は凸閉包、$|\Delta_\varphi|$ は凸多角形 Δ_φ の面積とする。事実 3.4 で見るが、r-nct は k の標数には影響を受けるが、k がどのくらい大きな体であるかには無関係である。

命題 3.2 S, P は定義 2.1 のものとする。(2.3) の同一視で、$f \in S_d$ に対応する元は $\varphi t^d \in k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]t^d$ とする。$f \in P^{(r)} \setminus P^{(r+1)}$ としよう。このとき、f が negative curve である必要充分条件は、

(1) φ は $k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ の既約元。
(2) $d\Sigma$ の各辺上に N_φ の元がある (頂点上に N_φ の元がある場合、その頂点から出る二辺上には N_φ の点があるとみなす)。
(3) $2|d\Sigma| < r^2$ が成立する。

上の条件が充たされたとき、$\varphi \in (v-1, w-1)^r k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ であり (式 (3.1) を見よ)、$\Delta_\varphi \subset d\Sigma$ であるので $2|\Delta_\varphi| < r^2$ である。よって、φ は r-nct である。

逆に r-nct φ が与えられたとする。N_φ に外接する ($N_\varphi \subset \Delta$ であり、Δ の各辺上に N_φ の元がある) 有理三角形 (三頂点の座標が有理数の三角形) Δ をとる。このとき、φt は $E(\Delta, t)$ の素元である。$v \mapsto 1$, $w \mapsto 1$ によって誘導される k-代数射 $E(\Delta, t) \to k[t]$ の核でのブローアップを $Y_\Delta \to X_\Delta := \operatorname{Proj} E(\Delta, t)$ とおく*13。$2|\Delta| < r^2$ であれば、$V_+(\varphi t)$ の proper tranform は Y_Δ の自己交点数が負の曲線になる。

GonzálezAnaya-González-Karu [10] では、まず、与えられた自然数 r に対して r-nct を構成している。([10] では、各 r に対して二種類の r-nct を構成している。それらは、$r \geq 3$ のときは異なる r-nct である。) 各 r-nct に対して、それに外接する有理三角形を考える。r-nct に外接させながら、有理三角形 Δ の辺の傾きを変えてゆく。$|\Delta| < r^2/2$ の場合、r-nct から Y_Δ の自己交点数負の曲線ができる。更に藏野-西田 [23] の正標数還元の方法を改良して、$\mathrm{Cox}(Y_\Delta)$ がネーター環にならない Δ を見つけている。

r-nct φ をとる。Δ は、N_φ に外接する有理三角形とする。このとき、$\Delta_\varphi \subset \Delta$ である。φ が Y_Δ 上の自己交点数負の曲線を与えると仮定すると、$|\Delta_\varphi| \leq |\Delta| < r^2/2$ である。$v \mapsto 1$, $w \mapsto 1$ によって誘導される k-代数射 $E(\Delta, t) \to k[t]$ (resp. $E(\Delta_\varphi, t) \to k[t]$) の核 $\mathbf{p}$ (resp. $\mathbf{p}_\varphi$) でのブローアップを $Y_\Delta \to X_\Delta := \operatorname{Proj} E(\Delta, t)$ (resp. $Y_{\Delta_\varphi} \to X_{\Delta_\varphi} := \operatorname{Proj} E(\Delta_\varphi, t)$) とおく。GonzálezAnaya-González-Karu [10] の結果を見ると、$|\Delta|$ が $|\Delta_\varphi|$ に近い場合は $R'_s(\mathbf{p})$ がネーター環になり、$|\Delta|$ が $r^2/2$ に近い場合は $R'_s(\mathbf{p})$ はネーター環ならないように見える。よって、

疑問 3.3 $R'_s(\mathbf{p}_\varphi)$ あるいは $\mathrm{Cox}(Y_{\Delta_\varphi})$ はネーター環になるか？

という問題を考えたくなる。

---

*13 平面上に任意に有理三角形 Δ を与えたとき、X_Δ はいつも $\operatorname{Proj} S$ と書けるわけではない。$\mathrm{Cl}(X_\Delta)$ は階数 1 の有限生成アーベル群であるが、$X_\Delta \simeq \operatorname{Proj} S$ となる a, b, c が存在する必要充分条件は $\mathrm{Cl}(X_\Delta) \simeq \mathbb{Z}$ である。

三辺の傾きが γ_1, γ_2, γ_3 の有理三角形 Δ が与えられたとき、三辺の傾きが γ_1, γ_2, γ'_3 (ただし、γ'_3 は γ_3 に十分近い有理数) の有理三角形 Δ' で $\mathrm{Cl}(X_{\Delta'}) \simeq \mathbb{Z}$ となるものが存在する。言葉の使い方はよくないが、$\mathrm{Cl}(X_\Delta) \simeq \mathbb{Z}$ を充たす有理三角形 Δ 全体は、有理三角形全体の集合の中に dense に入っている。

事実 3.4 ここで、r-nct に関する基本的な事実を述べておく。

環 $k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ の単元 u は、$k^\times$ の元と v と w の単項式の積である。u が $k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ の単元、φ が r-nct なら、$u\varphi$ も r-nct である。(格子上の平行移動)

$\zeta : k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \to k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ は、イデアル $(v-1, w-1)k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ を保つ k-自己同型とする。このとき、$\zeta(v) = v^{a_{11}}w^{a_{12}}$, $\zeta(w) = v^{a_{21}}w^{a_{22}}$ と書け、$(a_{ij}) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ である。φ が r-nct なら、$\zeta(\varphi)$ も r-nct である。(格子への $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ の作用)

φ が r-nct なら、ある $k^\times$ の元をかけて、係数をすべて素体からとることができる。

$\varphi \in k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ は r-nct とする。L/k を体拡大としたとき、$\varphi \otimes 1$ は $L[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ で既約である。特に、$\varphi \otimes 1 \in L[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ は L 上の r-nct である。つまり、r-nct を議論するときは、体の大きさには関係が無い。体の標数には影響を受ける。

φ が r-nct とする。このとき、

$$(v-1, w-1)^r k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \cap \left(\bigoplus_{(\alpha,\beta) \in \Delta_\varphi \cap \mathbb{Z}^2} k v^\alpha v^\beta \right) = k\varphi \tag{3.2}$$

が成立する[*14]。

自然数 r を固定する。$k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ の単元の積や $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ の作用で移りあうものを同一視すれば、r-nct の個数は有限であることが示される。

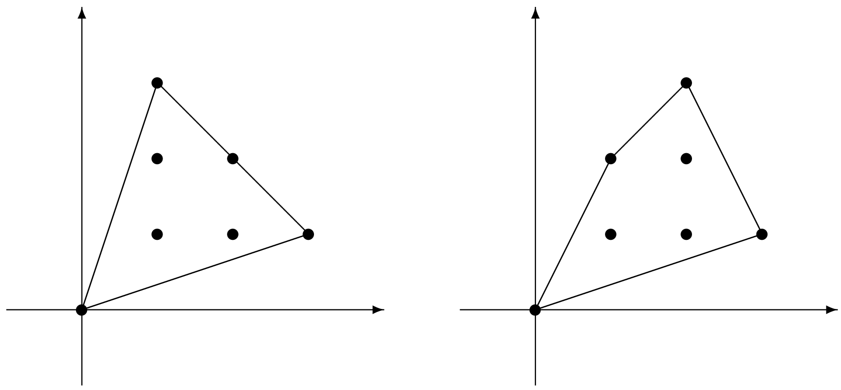
事実 3.5 以下、$k[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ の単元の積や $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ の作用で移りあう r-nct は同一視する。

1-nct は $v-1$ のみである (任意の体で)。

2-nct は $v^2w + vw^2 - 3vw + 1$ のみである (任意の体で)。

$r = 3$ のときは、r-nct は体 k の標数による。

k の標数が 0 の場合は、3-nct は GonzálezAnaya-González-Karu [10] の論文に出てくるもの 2 個である。それぞれの Δ_φ は下の二つの図形になる。(3.2) により、頂点が格子点である凸多角形 Δ に対して、$\Delta = \Delta_\varphi$ となる r-nct φ は (存在すれば) $k^\times$ の元の積を除いて一意的である (r も決まる)。



(3.3)

[*14] 脚注 *12 で見たことと上の (3.2) により、$^{\#}(\Delta_\varphi \cap \mathbb{Z}^2) \leq \frac{r(r+1)}{2} + 1$ であることがわかる。

ここで、右の 3-nct の係数を整数 (係数全体の最大公約数は 1 になるようにしておく) でとったとき、vw^2 の係数は 2 の倍数になる。そのため、上の右図で点 $(1,2)$ を除いたような標数 2 特有の 3-nct が存在する。その標数 2 特有の 3-nct によって、$(a,b,c)=(9,10,13)$ のとき、(標数 0 では negative curve が存在するのかどうか不明だが、) 標数 2 ならば $P^{(3)}$ から negative curve がとれる[*15]。標数 0 では $[P^{(r)}]_d$ からは negative curve は出ないのに、ある標数 $p>0$ で $[P^{(r)}]_d$ から negative curve が出るとすると、そこには標数 p 特有の r-nct が存在することになる。

$r\le 2$ なら、r-nct は標数に依らない。よって、$r\le 2$ なら、$P^{(r)}$ に negative curve があるかどうかは標数に依らない。

r-nct を構成するある方法を与える。

命題 3.6 k は標数 0 の体とする。$r>s$ は互いに素な自然数とする。自然数、a_1, a_2, ..., a_{r-1} は次の二条件を充たすとする。

1. $b_i=a_i-[is/r]$ $(i=1,2,\ldots,r-1)$ とおいたとき、$\{b_1,b_2,\ldots,b_{r-1}\}=\{2,3,\ldots,r\}$ が成立する。(ただし、$[\alpha]$ は α を超えない最大の整数とする。)
2. $\Delta=\mathrm{conv}\{(0,0),(r,s),(1,a_1),(2,a_2),\ldots,(r-1,a_{r-1})\}$ としたとき、点 $(0,0)$, (r,s), $(1,a_1)$, $(2,a_2)$, ..., $(r-1,a_{r-1})$ は Δ の境界に含まれる。

このとき、

$$\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\Delta\cap\mathbb{Z}^2} kv^\alpha w^\beta$$

の中に、(定数倍を除いてただ一つの) r-nct が存在する。($\Delta_\varphi\subset\Delta$ であるが、実際に一致しない例があるのかどうかわからない。)

(3.3) の左のものは、$r=3$, $s=1$, $a_1=3$, $a_2=2$ とおいて命題 3.6 を適用して得られる。(3.3) の右のものは、$r=3$, $s=1$, $a_1=2$, $a_2=3$ とおいて命題 3.6 を適用して得られる。事実 3.5 で見たが、(3.3) の右の Δ に対しては、標数 2 のときには $\Delta_\varphi\subsetneq\Delta$ となる r-nct φ が存在する。

以下、問題 3.3 について考える。

エルハールト環 $A_\varphi=E(\Delta_\varphi,t)$ に対して、

$$\mathfrak{p}_\varphi=A_\varphi\cap(v-1,w-1)k[v^{\pm1},w^{\pm1},t]$$

とおく。Δ_φ は凸 n 角形とすると、Y_{Δ_φ} のピカール数は $n-2$ である。また、$\mathrm{Cl}(Y_{\Delta_\varphi})$ にはねじれがある可能性もある。$Y_{\Delta_\varphi}\to X_{\Delta_\varphi}$ における $\mathcal{O}_{X_{\Delta_\varphi}}(1)$ の引き戻しを H とし、例外因子を E とおく。このとき、拡張シンボリックリース環 $R'_s(\mathfrak{p}_\varphi)$ は、多重切断環

$$R(Y_{\Delta_\varphi};H,-E)=\oplus_{d,r\in\mathbb{Z}}H^0(Y_{\Delta_\varphi},dH-rE)$$

[*15] $(a,b,c)=(9,10,13)$ としよう。コンピューターを用いて計算したところ、標数 0 のときは、$r\le 30$ のとき $P^{(r)}$ には negative curve は存在しないようである。しかし、標数 2 では $[P^{(3)}]_{100}$ に、標数 3 では $[P^{(4)}]_{130}$ に、標数 7 では $[P^{(8)}]_{270}$ に、標数 23 では $[P^{(15)}]_{513}$ に negative curve が存在するようである。他の標数では、不明である。

と同型である。$R(Y_{\Delta_\varphi}; H, -E)$ は $\mathrm{Cox}(Y_{\Delta_\varphi})$ の純部分環であるので、$\mathrm{Cox}(Y_{\Delta_\varphi})$ がネーター環であれば $R(Y_{\Delta_\varphi}; H, -E)$ はネーター環である。

定理 3.7 k は体とし、φ は k 上の r-nct とする。凸多角形 Δ_φ の内部の格子点の個数を I_φ、境界上の格子点の個数を B_φ とおく。X_{Δ_φ} 上の曲線 $V_+(\varphi t)$ の $Y_{\Delta_\varphi} \to X_{\Delta_\varphi}$ での proper transform を C_φ とおく。($V_+(\varphi t)$ や C_φ は既約曲線である。) 次の条件を考える。

(1) $-K_{Y_{\Delta_\varphi}}$ は nef かつ big.

(2) $(-K_{Y_{\Delta_\varphi}})^2 > 0$.

(3) トーリック多様体 X_{Δ_φ} に対応する fan の 1 次元の face に対応する最短の整数ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ とし、

$$P_{-K_{X_{\Delta_\varphi}}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid <\mathbf{x}, \mathbf{a}_i> \geq -1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

とおいたとき、$|P_{-K_{X_{\Delta_\varphi}}}| > 1/2$ が成立。

(4) $-K_{Y_{\Delta_\varphi}}$ は big.

(5) $\mathrm{Cox}(Y_{\Delta_\varphi})$ がネーター環。

(6) $B_\varphi \geq r$.

(7) $I_\varphi = \frac{r(r-1)}{2}$.

(8) 任意の $n > 0$ に対して $H^0(Y_{\Delta_\varphi}, K_{Y_{\Delta_\varphi}} + nC_\varphi) = 0$ が成立。

(9) 拡張シンボリックリース環 $R'_s(\mathfrak{p}_\varphi)$ はネーター環。

(10) $C_\varphi \simeq \mathbb{P}^1_k$.

このとき、

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(1) & & & \Longrightarrow & & & (6) & & & & \\
\Downarrow & & & & & & \Downarrow & & & & \\
(2) & \Longrightarrow & (3) & \Longrightarrow & (4) & \Longrightarrow & (7) & \Longleftrightarrow & (8) & \Longleftarrow & (10) \\
 & & & & \Downarrow & & & & \Downarrow & & \\
 & & & & (5) & & \Longrightarrow & & (9) & &
\end{array}$$

が成立する[*16]。

k が無限体であるとき、(8) と (10) は同値である。

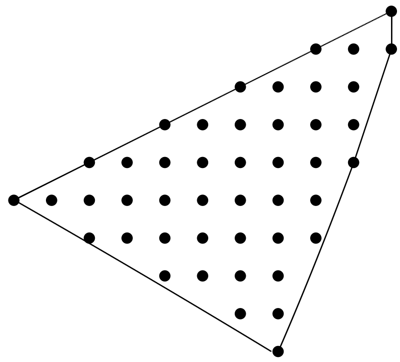
k は正標数の体であるとき、(9) は常に成立する。

例 3.8 (1) GonzálezAnaya-González-Karu [10] では、二つのタイプの r-nct を構成している。これらの r-nct は、k の標数が 0 のときは、定理 3.7 の (1) を充たしている。

(2) 命題 3.6 の方法で構成した r-nct φ が $\Delta = \Delta_\varphi$ を充たしているならば ([10] で扱っている r-nct は、標数 0 ではそうなっている)、定理 3.7 の (1) が充たされる。

[*16] このケースでは、$H^0(Y_{\Delta_\varphi}, K_{Y_{\Delta_\varphi}} + C_\varphi) = 0$ が成立することと、上の条件 (8) とは同値である。
S, P は定義 2.1 のものとし、C は Y 上の自己交点数負の曲線とする。このケースでは、$H^0(Y, K_Y + C) = 0$ であることと、任意の $n > 0$ に対して $H^0(Y, K_Y + nC) = 0$ であることは同値ではない。

(3) 脚注 *14 で見たように、$B_\varphi + I_\varphi \leq \frac{r(r+1)}{2} + 1$ である。Pick の定理により、$2|\Delta_\varphi| = 2(B_\varphi + \frac{I_\varphi}{2} - 1) < r^2$ である。
非常に多くの場合、$B_\varphi + I_\varphi = \frac{r(r+1)}{2} + 1$ が成立しているのだが、これは $B_\varphi = r+1$ と同値である。よってこのとき、定理 3.7 の (6) が成立する。しかし、 $B_\varphi = r+1$ はいつも成立しているわけではない。
コンピューターによる計算では、$(a,b,c) = (8,15,43)$ のとき、標数 0 で negative curve $f \in [P^{(9)}]_{645}$ が存在する。このとき、対応する 9-nct φ の Δ_φ は、



となる。このとき、$B_\varphi + I_\varphi = \frac{r(r+1)}{2} = 45$、$B_\varphi = r = 9$, $I_\varphi = \frac{r(r-1)}{2} = 36$ となっている。$-K_{Y_{\Delta_\varphi}}$ は big でないので、$\mathrm{Cox}(Y_{\Delta_\varphi})$ がネーター環かどうかわからない。ただし、条件 (6) が成立しているので、拡張シンボリックリース環 $R'_s(\mathfrak{p}_\varphi)$ はネーター環である。
コンピューターによる計算では、$(a,b,c) = (5,33,49)$ のとき、標数 0 で negative curve $f \in [P^{(18)}]_{1617}$ が存在する。この例では、$B_\varphi + I_\varphi = \frac{r(r+1)}{2} = 171$、$B_\varphi = r = 18$, $I_\varphi = \frac{r(r-1)}{2} = 153$ となっている。$-K_{Y_{\Delta_\varphi}}$ は big でないので、$\mathrm{Cox}(Y_{\Delta_\varphi})$ がネーター環かどうかわからない。条件 (6) により、拡張シンボリックリース環 $R'_s(\mathfrak{p}_\varphi)$ はネーター環である。
標数 0 では、(藏野が持っている) 全ての r-nct の例は定理 3.7 の (6) を充たしている。よって現在ある全ての例では、拡張シンボリックリース環 $R'_s(\mathfrak{p}_\varphi)$ はネーター環であり、k が無限体なら $C_\varphi \simeq \mathbb{P}^1_k$ が成立する。
S, P は定義 2.1 のものとする。negative curve $f \in [P^{(r)}]_d$ が存在すると仮定し、それに対応する r-nct を φ とする。f に対応する Y 上の自己交点数負の曲線を C とする。このとき、C は C_φ と双有理である。よって、定理 3.7 の (7) が成立しているならば[*17]、k が無限体と仮定すれば、C は有理曲線になる。 ($r \geq 2$ では、C が特異点を持つことはよく起こる。)

注意 3.9 S, P は定義 2.1 のものとする。このとき、自然数 d, r に対して、

$$\dim_k [P^{(r)}]_d - \dim_k H^1(Y, \mathcal{O}_Y(dH - rE)) = \dim_k S_d - \frac{r(r+1)}{2}$$

*17 $r \leq 4$ であるときは、常に (6) が成立する。$r = 5$ なら (7) が成立する。標数 0 のときは、現在あるすべての例で条件 (6) が充たされている。

が成立する。(3.1) により、$[P^{(r)}]_d$ は S_d の中で、$\frac{r(r+1)}{2}$ 個の整数係数の連立線型方程式の解空間となっている。よって、上の式により、

$$\begin{aligned}&\dim_k H^1(Y, \mathcal{O}_Y(dH - rE)) \\ =\ &\frac{r(r+1)}{2} - \left(\tfrac{r(r+1)}{2}\text{ 個の連立線型方程式に対応した }\tfrac{r(r+1)}{2} \times \dim_k S_d\text{-行列の階数}\right)\end{aligned}$$

になることがわかる。つまり、$\dim_k H^1(Y, \mathcal{O}_Y(dH - rE))$ は、$\frac{r(r+1)}{2}$ 個の連立線型方程式の線形従属性を表す数である。$H^1(Y, \mathcal{O}_Y(dH - rE))$ は、局所コホモロジー

$$H^2_{(x,y,z)}(P^{(r)})_d = H^1_{(x,y,z)}(S/P^{(r)})_d = H^1_{(x,y,z)}(S/P^r)_d = H^2_{(x,y,z)}(P^r)_d$$

と同型である。

4 Negative curve と永田予想

$(a_{i1} : a_{i2} : a_{i3})$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ は $\mathbb{P}^2_k$ の N 点とする。$Z \to \mathbb{P}^2_k$ は、この N 点でのブローアップとする。$i = 1, 2, \ldots, N$ に対して、

$$P_i = I_2 \begin{pmatrix} u & v & w \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix}$$

は、点 $(a_{i1} : a_{i2} : a_{i3})$ の $\mathbb{P}^2_k$ での定義イデアルである。(u, v, w は変数とする。) このとき、Cox 環 $\mathrm{Cox}(Z)$ は拡張シンボリックリース環

$$R'_s(P_1, P_2, \ldots, P_N) = \bigoplus_{r_1, r_2, \ldots, r_N \in \mathbb{Z}} (P_1^{r_1} \cap P_2^{r_2} \cap \cdots \cap P_N^{r_N}) t_1^{r_1} t_2^{r_2} \cdots t_N^{r_N} \subset k[u, v, w, t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, \ldots, t_N^{\pm 1}]$$

に一致する。ただし、$r_i < 0$ の場合は $P_i^{r_i} = k[u, v, w]$ と定める。

点 $(a_{i1} : a_{i2} : a_{i3})$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ に若干の条件を仮定すると、$\mathrm{Cox}(Z)$ はある多項式環にある群を線型作用させたときの不変式環と同型になる (永田同型)。よって、ネーター環でない $R'_s(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ の例を見つければ、ヒルベルトの第 14 問題の反例になるわけである。

ここで、

$$R'_\Delta(P_1, P_2, \ldots, P_N) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} (P_1^r \cap P_2^r \cap \cdots \cap P_N^r) t^r \subset k[u, v, w, t^{\pm 1}]$$

を考える。(Δ は、ダイアゴナルを意味する。) $R'_\Delta(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ は $R'_s(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ の純部分環であるので、$R'_\Delta(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ がネーター環でなければ $R'_s(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ はネーター環ではなく、ヒルベルトの第 14 問題の反例ができたことになる。

予想 4.1（永田予想） $N \geq 10$ とし、d, r は $d \leq \sqrt{N} r$ を充たす自然数とする。

このとき、$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ の一般的な N 点 $(a_{i1} : a_{i2} : a_{i3})$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ をとると、

$$[P_1^r \cap P_2^r \cap \cdots \cap P_N^r]_d = 0 \tag{4.1}$$

が成立する。(ただし、u, v, w はすべて次数 1 とみることにより、$k[u, v, w]$ は次数環、P_i は斉次イデアルと考える。)

永田は、N が平方数のときに上が正しいことを証明している [26]。ある固定した $N \geq 10$ に対して予想 4.1 が正しいと仮定すると、$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ の super general な N 点 $(a_{i1} : a_{i2} : a_{i3})$ $(i = 1, 2, \dots, N)$[*18] をとれば、$d \leq \sqrt{N}r$ を充たす任意の自然数 d, r に対して式 (4.1) が成立する。これを用いれば、$R'_{\Delta}(P_1, P_2, \dots, P_N)$ がネーター環でないことがわかる。

ここで、S, P は定義 2.1 のものとする。k は標数 0 の代数閉体とする。k-代数の射 $S \to A = k[u, v, w]$ を、$x \mapsto u^a$, $y \mapsto v^b$, $z \mapsto w^c$ によって定義する。ζ_n を 1 の原始 n 乗根とする。

$$Q_{n_1,n_2,n_3} = I_2 \begin{pmatrix} u & v & w \\ \zeta_a^{n_1} & \zeta_b^{n_2} & \zeta_c^{n_3} \end{pmatrix}$$

とおくと、任意の $r > 0$ に対して、

$$P^{(r)} \otimes_S A = \bigcap_{n_1=0}^{a-1} \bigcap_{n_2=0}^{b-1} \bigcap_{n_3=0}^{c-1} Q^r_{n_1,n_2,n_3}$$

が成立するので、

$$R'_s(P) \otimes_S A = R'_{\Delta}(\{Q_{n_1,n_2,n_3} \mid n_1 = 0, 1, \dots, a-1; n_2 = 0, 1, \dots, b-1; n_3 = 0, 1, \dots, c-1\})$$

となる。これによって、S, P において negative curve が存在しないことと、$d \leq \sqrt{abc}r$ を充たす任意の自然数 d, r に対して

$$\left[\bigcap_{n_1=0}^{a-1} \bigcap_{n_2=0}^{b-1} \bigcap_{n_3=0}^{c-1} Q^r_{n_1,n_2,n_3} \right]_d = 0 \tag{4.2}$$

となることは同値になる。(4.2) が成立すれば、特殊な abc 個の点で式 (4.1) が成立していることになるので、一般的な abc 点でも (4.1) が成立する。よって、(4.2) が成立すれば、$N = abc$ に対しては永田予想が正しいことになる。

S, P は定義 2.1 のものであるとき、標数 0 で negative curve が存在すれば、任意の正標数の体上で negative curve が存在する。以上をまとめると、次のことが成立する [4]。

命題 4.2　a, b, c は pairwise coprime な自然数で $\sqrt{abc} \notin \mathbb{Z}$ とする。k, S, P は定義 2.1 のものとする。次の条件 (1), (2), (3) を考える。

(1) ある正標数の体 k 上で、$R'_s(P)$ はネーター環でない (negative curve が存在しないことと同値)。
(2) k が標数 0 の体であるとき、この a, b, c に対して negative curve が存在しない。
(3) $N = abc$ に対して、($\mathbb{C}$ 上で) 永田予想は正しい。

このとき、(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) が成立する。

[*18] このケースでは、$3N$ 個の複素数 a_{ij} を $\mathbb{Q}$ 上代数的独立に取っておけば充分である。

よって、negative curve の存在性は非常に面白い応用がある。

コンピューターによる計算では、例えば $(a,b,c)=(9,10,13)$ では、k の標数が 0 のとき $r\leq 30$ の範囲には negative curve は存在しない。この時、次が成立する。

命題 4.3 k は標数 0 の体とする。$(a,b,c)=(9,10,13)$ で negative curve は存在すると仮定すると、それに対応する r-nct φ は $B_\varphi < r$ を充たす。

標数 0 のとき、現在あるすべての例では r-nct φ に対して $B_\varphi \geq r$ (つまり、定理 3.7 の条件 (6)) が成立している。もし仮に標数 0 のとき任意の r-nct φ に対して $B_\varphi \geq r$ が成立したとすれば、$N=1170=9\times 10\times 13$ のときは永田予想が正しいことになる。

参考文献

[1] Y. Arai, A. Echizenya and K. Kurano, *Demazure construction for $\mathbb{Z}^n$-graded Krull domains*, Acta Math. Vietnam **44** (2019), 173–205.

[2] A.-M. Castravet and J. Tevelev, *$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ is not a Mori dream space*, Duke Math. J. **164**, No. 8 (2015), 1641–1667.

[3] S. D. Cutkosky, *Symbolic algebras of monomial primes*, J. Reine Angew. Math. **416** (1991), 71–89.

[4] S D. Cutkosky and K. Kurano, *Asymptotic regularity of powers of ideals of points in a weighted projective plane*, Kyoto J. Math. **51** (2011), 25–45.

[5] T. Ebina, Master theses, Meiji University 2017 (Japanese).

[6] D. Eisenbud and B. Mazur, *Evolutions, symbolic squares, and Fitting ideals*, J. Reine Angew. Math. **488** (1997), 189–201.

[7] C. Francisco, H. T. Hà and A. V. Tuyl, *Ordinary and symbolic powers of ideals*, https://www.birs.ca/cmo-workshops/2017/17w5027/report17w5027.pdf

[8] Y. Gongyo, S. Okawa, A. Sannai and S. Takagi, *Characterization of varieties of Fano type via singularities of Cox rings*, J. Algebraic Geom. **24** (2015), 159–182.

[9] J. L. González and K. Karu, *Some non-finitely generated Cox rings*, Compos. Math. **152** (2016), 984–996.

[10] J. González-Anaya, J. L. González and K. Karu *Constructing non-Mori Dream Spaces from negative curves*, J, Algebra **539** (2019), 118–137.

[11] S. Goto, *The Cohen-Macaulay symbolic Rees algebras for curve singularities*, Memoirs of Amer. Math. Soc. **526** (1994), 1–68.

[12] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves*, J. Math. Soc. Japan **43** (1991), 465–481.

[13] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, *Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves*, Nagoya Math. J. **124** (1991), 99–132.

[14] S. Goto, K, Nishida and K.-i. Watanabe, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 383–392.

[15] Z. He, *New examples and non-examples of Mori dream spaces when blowing up toric surfaces*, arXiv1703.00819.

[16] J. Herzog, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. **3** (1970), 175–193.

[17] C. Huneke, *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J. **34** (1987), 293–318.

[18] A. Ito, *Examples of Mori dream spaces with Picard number two*, Manuscripta Math. **145** (2014), 243–254.

[19] A. Ito, *Examples of Mori dream spaces with Picard number two*, 第 26 回可換環論セミナー報告集.

[20] K. Kai and K. Nishida, *Finitely generated symbolic Rees rings of ideals defining certain finite sets of points in $\mathbb{P}^2$*, preprint.

[21] K. Kurano, *Equations of negative curves of the blow-ups of Ehrhart rings of rational convex polygons*, in preparation.

[22] K. Kurano and N. Matsuoka, *On finite generation of symbolic Rees rings of space monomial curves and existence of negative curves*, J. Algebra **322** (2009), 3268-3290.

[23] K. Kurano and K. Nishida, *Infinitely generated symbolic Rees rings of space monomial curves having negative curves*, Michigan Math. J. **68** (2019), 405–445.

[24] M. Matsuura, Master theses, Meiji University 2019 (Japanese).

[25] M. Morales, *Noetherian symbolic blow-ups*, J. Algebra **140** (1991), 12–25.

[26] M. Nagata, *On the 14-th Problem of Hilbert*, Amer. J. Math. **81** (1959) 766–772.

[27] M. Nagata, *Local rings*, Interscience, 1962.

[28] H. Srinivasan, *On finite generation of symbolic algebras of monomial primes*, Comm. in Alg. **9** (1991), 2557–2564.

[29] K. Uchisawa, Master theses, Meiji University 2017 (Japanese).

[30] O. Zariski, *A fundamental lemma from the theory of holomorphic functions on an algebraic variety*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **29** (1949), 187–198.

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Meiji University

`kurano@meiji.ac.jp`

`http://www.isc.meiji.ac.jp/~kurano`