

超尖点表現に対する局所 Langlands 対応について

大井 雅雄*

本稿でテーマとしたい話題は、**超尖点表現に対する局所 Langlands 対応**である。局所 Langlands 対応とは、一般に局所体 F 上の連結簡約群 G に対してその存在が期待される（局所 Langlands 予想）,

- $G(F)$ の既約許容表現（の同型類）の集合と,
- G の L パラメータ（の共役類）の集合を,

「自然」に結びつける対応のことである。局所体 F が Archimedes 体の場合には Langlands による構成 ([Lan89]) が知られており、その性質もかなり調べられていると言える。一方で F が非 Archimedes 体の場合には、局所 Langlands 対応の存在は一般にはまだ予想である。

しかし近年では多くの研究者による活発な研究によって、局所 Langlands 予想が「証明」されているケースは着実に広げられ続けていると言える。中でも発展の著しい方向性として、

「表現のクラスを制限することにより、比較的一般の群で対応を構成する」

というものがある。とくに今回扱いたいのは、Kaletha による超尖点表現に対する局所 Langlands 対応の構成 ([Kal19a, Kal19b]) である。Kaletha は DeBacker–Reeder ([DR09]) による「深度 0 局所 Langlands 対応」の構成以来、超尖点表現に対する局所 Langlands 対応の構成を追究し続け、昨年遂にプレプリント [Kal19b] を発表するにいたった。この Kaletha による局所 Langlands 対応は、いくつかの技術的な仮定はつくものの、かなり広いクラスの群・表現をカバーしていると言える。それだけでなく、その構成方法も実簡約群の場合の Langlands によるものとパラレルであり、きわめて明示的なものとなっている。しかしその一方で、構成的に与えられる対応であるが故に、局所 Langlands 対応に通常期待される種々の「自然な」性質を満たしているかどうか、しばしば非自明な問題として現れる。

群や表現のクラスによっては、全く別の手法によって局所 Langlands 対応が既に確立されている場合もあり、たとえば一般線型群の場合には Harris–Taylor ([HT01]) により、準分裂古典群の場合には Arthur ([Art13]) によって、全ての表現に対する完全な局所 Langlands 対応が確立されている。これらの対応はいくつかの抽象的な（「自然な」）性質によって特徴付けられているが、Kaletha による対応がその特徴付けを満たすかどうかは全く明らかではないのである。

本稿ではこの問題、すなわち「Kaletha による局所 Langlands 対応が、（一般線型群や準分裂古典群の場合に特殊化したときに）Harris–Taylor/Arthur による局所 Langlands 対応と一致するか」という問題について、現在までに得られた成果および今後の指針を報告する。

謝辞 今回講演の機会を与えてくださった責任者の先生方、とくにシンポジウム責任者の大野泰生先生、数論分野プログラム責任者の小林真一先生および中筋麻貴先生に心より感謝申し上げます。

* 京都大学大学院理学研究科数学教室（白眉センター）、masaooi@math.kyoto-u.ac.jp

1 馴分岐簡約群の超尖点表現の構成と分類

1.1 Yu 超尖点表現

まずはじめに, Kaletha による局所 Langlands 対応の構成において扱われるクラスの表現である, Yu の超尖点表現について簡単に説明をする.

\mathbf{G} を p 進体 F 上馴分岐 (すなわち, F の馴分岐拡大体上で分裂する) な連結簡約群とする. Yu は [Yu01] において, 「 \mathbf{G} データ^{*1}」と呼ばれるものから $\mathbf{G}(F)$ の超尖点表現を構成する理論を確立した^{*2}. 非常に大雑把には, \mathbf{G} データとは以下のものから成る組であって, 諸々の付加条件をみたまものことである:

- $\mathbf{G}^0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{G}^d = \mathbf{G}$: 馴分岐 Levi 部分群 (ある馴分岐拡大体上で \mathbf{G} の Levi 部分群となるような F 上の部分群) の列.
- $\pi_{-1}: \mathbf{G}^0(F)$ の既約超尖点表現で, 深度が 0 なもの.
- $\{\phi_i: \mathbf{G}^i(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times\}_{i=0}^d$: 「生成的」と呼ばれる条件を満たす指標たち.

すなわち Yu の理論とは, これら \mathbf{G} データの集合から, $\mathbf{G}(F)$ の既約超尖点表現の同型類の集合への写像

$$\{\mathbf{G} \text{ データ}\} \rightarrow \{\mathbf{G}(F) \text{ の既約超尖点表現}\}/\sim$$

を定めるものであると言える. この写像に関する基本的かつ重要な性質として, 以下のことが知られている:

全射性 ([Kim07, Fin18]): p が (\mathbf{G} に対して) 十分大であれば全射となる. 言い換えると, 任意の既約超尖点表現はある \mathbf{G} データから Yu の方法で構成できる.

ファイバーの記述 ([HM08]): 各ファイバーは「 \mathbf{G} 同値」と呼ばれる \mathbf{G} データの同値関係に関する同値類となっている. 言い換えると, 二つの \mathbf{G} データについて, 同型な既約超尖点表現を定めることと, それらが \mathbf{G} 同値であることは同値である.

すなわちこれらの結果を踏まえると, Yu の理論は

$$\{\mathbf{G} \text{ データ}\}/(\mathbf{G} \text{ 同値}) \hookrightarrow \{\mathbf{G}(F) \text{ の既約超尖点表現}\}/\sim$$

という単射 (p が十分大ならば更に全射) な写像を定めていると言える. この像に属する (つまり, ある \mathbf{G} データから構成される) 既約超尖点表現のことを, 「**Yu 超尖点表現**」と呼ぶことにする^{*3}.

^{*1} この「 \mathbf{G} データ」という用語は [HM08] に基づくものである. また, 厳密には「(被約) 生成的尖点的 \mathbf{G} データ」と呼ばれるものである. [HM08, Section 3.1] 参照.

^{*2} なお Yu による超尖点性の証明の中で, 鍵となる結果の一つに誤りがあることが知られている (反例があることも分かっている). Fintzen ([Fin19]) により, その結果を回避するかたちで超尖点性の証明が修正できるということがアナウンスされている.

^{*3} これは本稿内での便宜的な用語である. Yu の論文 [Yu01] 内 (論文タイトル) では「馴超尖点表現 (tame supercuspidal representation)」と名付けられている.

1.2 Kaletha による正則超尖点表現の再分類

Kaletha は [Kal19a] において、 \mathbf{G} データに対する「正則」という概念を導入し、正則な \mathbf{G} データから作られる Yu 超尖点表現を「正則超尖点表現」と名付けた。図式で整理すると以下のようになる：

$$\begin{array}{ccc}
 & & \{\mathbf{G}(F) \text{ の既約超尖点表現}\}/\sim \\
 & & \uparrow \\
 \{\mathbf{G} \text{ データ}\}/(\mathbf{G}\text{-equivalence}) & \xrightarrow{1:1} & \{\mathbf{G}(F) \text{ の Yu 超尖点表現}\}/\sim \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \{\text{正則 } \mathbf{G} \text{ データ}\}/(\mathbf{G}\text{-equivalence}) & \xrightarrow{1:1} & \{\mathbf{G}(F) \text{ の正則超尖点表現}\}/\sim
 \end{array}$$

\mathbf{G} データの正則性とは概ね次のようなものである：一般に、深度 0 超尖点表現は Moy–Prasad の理論 ([MP94, MP96]) によって有限体上の簡約群の尖点表現から構成される。そして更に、有限体上の簡約群の尖点表現は Deligne–Lusztig 理論 ([DL76]) によって、ある極大トーラスとその指標の組から構成することができる。そこでまず深度 0 超尖点表現の正則性を、この有限体上のトーラスの指標についての「正則」性として定義する。そして \mathbf{G} データの正則性を、その \mathbf{G} データに含まれる部分群 \mathbf{G}^0 の深度 0 超尖点表現の正則性として定義する (詳しくは [Kal19a, Sections 3.4 and 3.7] 参照)。

正則な \mathbf{G} データのもつ著しい性質は、それらが \mathbf{G} の「正則対^{*4}」と呼ばれる簡明な対象によって分類できるということである。正則対とは、

- $\mathbf{S} : F$ 上定義された \mathbf{G} の馴分岐楕円の極大トーラス,
- $\eta : \mathbf{S}(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$: 「正則性」をもつ指標,

から成る組のことである (詳しくは [Kal19a, Definition 3.7.5] を参照)。Kaletha は正則 \mathbf{G} データに対して正則対を定める手続きを与え、更にそれが \mathbf{G} データの \mathbf{G} 同値類の集合と、 \mathbf{G} の正則対の $\mathbf{G}(F)$ 共役類の間の全単射

$$\{\mathbf{G} \text{ データ}\}/(\mathbf{G} \text{ 同値}) \xrightarrow{1:1} \{\mathbf{G} \text{ の正則対}\}/\sim$$

を誘導することを証明した ([Kal19a, Proposition 3.7.8])。したがって系として、 $\mathbf{G}(F)$ の正則超尖点表現の正則対による parametrization が得られることになる。以上の対応の下で正則対 (\mathbf{S}, η) に対応する正則超尖点表現を、 $\pi_{(\mathbf{S}, \eta)}$ と表記することにする：

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{正則 } \mathbf{G} \text{ データ}\}/(\mathbf{G} \text{ 同値}) & \xrightarrow{1:1} & \{\mathbf{G}(F) \text{ の正則超尖点表現}\}/\sim \\
 \uparrow & & \nearrow \\
 \{\mathbf{G} \text{ の正則対}\}/\sim & & (\mathbf{S}, \eta) \mapsto \pi_{(\mathbf{S}, \eta)}
 \end{array}$$

1.3 toral 超尖点表現

実際に本稿で扱う表現は、正則超尖点表現の中でも更に特別な **toral 超尖点表現** と呼ばれるものである。toral 超尖点表現とは、以下のような \mathbf{G} データから構成される超尖点表現のことである^{*5}：

^{*4} 正確な用語は「tame elliptic regular pair」である。

^{*5} より一般に、単に \mathbf{G}^0 がトーラスな場合に toral と呼ぶ流儀もある。

- $\mathbf{S} = \mathbf{G}^0 \subsetneq \mathbf{G}^1 = \mathbf{G} : d = 1$ かつ \mathbf{G}^0 が馴分岐楕円の極大トーラス \mathbf{S} であるような列.
- $\pi_{-1} = \mathbb{1}$.
- $\{\phi_i : \mathbf{G}^i(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times\}_{i=0}^1 : \phi_0$ は深度が正 (r とおく) の「 \mathbf{G} 生成的」指標 η , ϕ_1 は自明指標 $\mathbb{1}$.

このような \mathbf{G} データに対応する正則対は, (\mathbf{S}, η) で与えられる. したがって前節の記号を用いると, この \mathbf{G} データおよび正則対から Yu の構成法によって与えられる toral 超尖点表現は, $\pi_{(\mathbf{S}, \eta)}$ と表される.

さて, Yu 超尖点表現の構成法を, この toral 超尖点表現 $\pi_{(\mathbf{S}, \eta)}$ の場合に簡単に思い出しておく.

\mathbf{G} の被約 Bruhat–Tits building を $\mathcal{B}^{\text{red}}(\mathbf{G}, F)$ と表すと, \mathbf{S} のアパートメントの $\mathcal{B}^{\text{red}}(\mathbf{G}, F)$ における像 $\mathcal{A}^{\text{red}}(\mathbf{S}, F)$ は, \mathbf{S} の楕円性によってただ一点から成る. この点を \mathbf{x} と表す. $s := \frac{r}{2}$ とおき, $\mathbf{G}(F)$ のいくつかの部分群を次のように定義する:

$$K := SG_{\mathbf{x}, s} \supset J := (S, G)_{\mathbf{x}, (r, s)} \supset J_+ := (S, G)_{\mathbf{x}, (r, s+)}.$$

ここで S は $\mathbf{S}(F)$ の略記であり, $G_{\mathbf{x}, s}$ は $\mathbf{G}(F)$ の \mathbf{x} に伴う parahoric 部分群の s 番目の Moy–Prasad フィルトレーション, $(S, G)_{\mathbf{x}, (r, s(+))}$ はデータ $((\mathbf{S} \subsetneq \mathbf{G}), \mathbf{x}, (r, s(+)))$ に伴う Yu の部分群 ([Yu01, Sections 1 and 2] 参照) を表す.

S の指標 η は深度 r であることから, 「自明延長」によって J_+ の指標と見なすことができる (これを $\hat{\eta}$ と書く). すると実は $J/\text{Ker}(\hat{\eta})$ には, $J_+/\text{Ker}(\hat{\eta})$ をその中心とするような Heisenberg 群の構造が入る*6. 故に Stone–von Neumann の定理から, $\hat{\eta}$ を中心指標にもつような $J/\text{Ker}(\hat{\eta})$ の既約表現 τ_η が一意に (同型を除いて) 存在する.

S は共役によって Heisenberg 群 $J/\text{Ker}(\hat{\eta})$ および斜交空間 J/J_+ に作用するが, 実はこの作用は斜交構造を保っている. したがって, 再び Stone–von Neumann の定理を用いることで, τ_η の半直積群 $S \ltimes (J/\text{Ker}(\hat{\eta}))$ への延長 ω_η が定義できる.

この表現 ω_η と, η の $S \ltimes (J/\text{Ker}(\hat{\eta})) \rightarrow S$ による引き戻しをテンソルした表現

$$\omega_\eta \otimes \eta$$

は, 実は自然な商写像 $S \ltimes J \rightarrow SJ = K$ を経由する. こうして得られる K の表現を ρ_η とかく. すると, そのコンパクト誘導

$$\text{c-Ind}_K^{\mathbf{G}(F)} \rho_\eta$$

は既約超尖点表現となる. これが $\pi_{(\mathbf{S}, \eta)}$ に他ならない.

例 1.1. Gross–Reeder ([GR10]) によって導入された「単純超尖点表現」や, Reeder–Yu ([RY14]) によって導入された「epipelagic 超尖点表現」などは, toral 超尖点表現の一種である. ただし Gross–Reeder や Reeder–Yu においては, 剰余標数等にはよらない uniform な構成法が与えられていることには注意が必要である. たとえば偶数次分岐直交群や分岐ユニタリ群などは, $p = 2$ の場合には馴分岐でないため, Yu の理論の適用外となる. 一方で Gross–Reeder や Reeder–Yu による超尖点表現の構成はこれらの群に対しても機能する.

*6 厳密にはこの構造の入れ方は一意ではないため, 一つ選ぶ必要がある. [Yu01, Section 10] 参照.

2 Kaletha による局所 Langlands 対応の構成

次に Kaletha による局所 Langlands 対応の構成を、正則超尖点表現の場合に [Kal19a] に則って説明する。冒頭でも説明した通り、この [Kal19a] の結果は、最近新たに Kaletha により発表されたプレプリント [Kal19b] によって更に一般化されているのだが、以下では正則超尖点表現の場合にのみ焦点をあてることにする。これは、のちに本稿の主題である指標関係式を論じる上では、更に特殊な toral 超尖点表現しか扱わないこと、また恥ずかしながら私自身が [Kal19b] を全くフォローできていないことによる。

以下では簡単のために、馴分岐簡約群 \mathbf{G} は準分裂であるという仮定をおく。また剰余標数に関しても然るべき仮定をおく必要があるが、これについては説明しない（詳しくは [Kal19a, Section 2.1] 等を参照）。

まず**正則超尖点 L パッケージデータ**と呼ばれる概念を導入する。 \mathbf{G} の正則超尖点 L パッケージデータとは、以下のようなものからなる四つ組 $(\mathbf{S}, \hat{j}, \chi, \eta)$ である：

- \mathbf{S} は F 上の馴分岐トーラスであって、絶対ランク (\bar{F} 上でのランク) が \mathbf{G} の絶対ランクと同じもの。
- \hat{j} は Langlands 双対群の間の埋め込み $\hat{\mathbf{S}} \hookrightarrow \hat{\mathbf{G}}$ であって、 $\hat{\mathbf{G}}$ 共役類が Galois 群の作用で不変なもの。
- χ は組 (\mathbf{S}, \mathbf{G}) に対する χ データ。
- η は $\mathbf{S}(F)$ の指標。

実際には更にいくつかの付加条件が要請されるが、ここでは紹介しない（詳しくは [Kal19a, Definition 5.2.4] を参照）。

このような正則超尖点 L パッケージデータを一つ取るたびに、 L パラメータおよび正則超尖点表現からなる有限集合 (L パッケージ) をそれぞれ以下のように構成することができる：

L パラメータの構成 ([Kal19a, Proof of Proposition 5.2.7])： まず \mathbf{S} についてトーラスの局所 Langlands 対応 ([Yu09]) を用いることで、指標 η に対応する L パラメータ ϕ_η (W_F から ${}^L\mathbf{S}$ への準同型) が得られる。一方で、**Langlands–Shelstad 構成** ([LS87, Section 2.6]) を χ データ χ について用いることで、埋め込み \hat{j} を L 群の間の埋め込み ${}^L\mathbf{S} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ に延長することができる。これを ${}^Lj_\chi$ と書き、 ϕ_η と ${}^Lj_\chi$ を合成することで L パラメータを構成する：

$$\phi: W_F \xrightarrow{\phi_\eta} {}^L\mathbf{S} \xrightarrow{{}^Lj_\chi} {}^L\mathbf{G}.$$

L パッケージの構成 ([Kal19a, 1153–1154 page])： $\hat{\mathbf{G}}$ は \mathbf{G} の Langlands 双対群であるので、 \mathbf{G} のルートデータの双対と $\hat{\mathbf{G}}$ のルートデータの間には（暗に一つ固定された）同型がある。この同型を介することで、 \mathbf{S} の \mathbf{G} への埋め込みの \mathbf{G} 共役類を \hat{j} から定めることができる。 \mathcal{J} を、この \mathbf{G} 共役類に属しかつ F 上定義された埋め込みたちの $\mathbf{G}(F)$ 共役類の集合とする。 \mathcal{J} の各元 j について、以下のようにして \mathbf{G} の極大トーラスとその指標の組を定めると、実はこれが \mathbf{G} の正則対となる：

$$(j(\mathbf{S}), \eta_j) := (j(\mathbf{S}), \epsilon \cdot (\eta \cdot \zeta_{\mathbf{S}}^{-1}) \circ j^{-1}).$$

ここで ϵ は、後述の Adler–DeBacker–Spice による指標公式の文脈で自然に現れる、符号を値にとる $\mathbf{S}(F)$ の指標である。一方で、 $\zeta_{\mathbf{S}}$ は四つ組 $(\mathbf{S}, \hat{j}, \chi, \eta)$ に属する χ データ χ と「Kaletha の χ データ」のずれを測るような $\mathbf{S}(F)$ の指標である。一般に χ データの取り方には任意性があるが、Kaletha は [Kal19a] において、 \mathbf{S} の χ データの（指標 η の情報を用いた）構成法を一つ与えている ([Kal19a,

Definition 4.7.3] の前段落参照). ここで便宜的に「Kaletha の χ データ」と呼んでいるのがそれである. こうして各 $j \in \mathcal{J}$ から \mathbf{G} の正則対, したがって更にそれに対応する正則超尖点表現が得られるので, それらをまとめたものを L パッケージと定める:

$$\Pi_\phi^{\mathbf{G}} := \{\pi_{(j(\mathbf{S}), \eta_j)} \mid j \in \mathcal{J}\}.$$

このようにして正則超尖点 L パッケージデータから定まる L パラメータ ϕ と L パッケージ $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ が, 「**Kaletha の局所 Langlands 対応**」における対応物である. ところでこの構成的に得られる対応が「局所 Langlands 対応」であると言うためには然るべき根拠が必要である. Kaletha は [Kal19a] の中で, たとえば以下の三性質 (これらはいずれも局所 Langlands 対応について一般的に期待されるものである) が, 正則超尖点表現が toral の場合には成り立っていることを証明している*7:

- L パッケージの安定性.
- L パッケージ内の生成的表現の一意存在性.
- 標準的エンドスコーピーに対する指標関係式.

注意 2.1. 実際には [Kal19a] における L パッケージの構成は, 「リジッド内部形式」のレベルで与えられている. リジッド内部形式とは [Kal16] において提唱された, 全ての内部形式を扱うことのできるような局所 Langlands 対応の定式化の一つである*8. 本稿では簡単のために, \mathbf{G} 自身 (\mathbf{G} の自明なリジッド内部形式) の L パッケージの説明しかしなかったが, 一般のリジッド内部形式についても構成は同様である. リジッド内部形式への各埋め込み毎に正則対が得られるので, それに対応する正則超尖点表現を L パッケージの要素と定める.

さて, 以上説明してきた Kaletha による局所 Langlands 対応の構成は, 連結簡約群 \mathbf{G} がどのような群であるかによらずに機能する (馴分岐である限り), というのが特徴 (特長) の一つであると言える. 一方で古くから, 特定の群に的を絞ることで局所 Langlands 対応を (完全に) 構成する, という試みが様々な研究の中でなされ, 数多くの成果があげられてきた. そこで, これら二つの

- 表現のクラスを特殊なもの (正則超尖点表現) に制限することで, 一般の馴分岐連結簡約群に対して局所 Langlands 対応を構成する
- 連結簡約群 \mathbf{G} を特定のものに絞ることで, 一般の表現に対して局所 Langlands 対応を構成する

というアプローチたちの「共通部分」に属するものについて, 果たして二通りの局所 Langlands 対応が整合的かどうか (同じ対応を与えるかどうか) を考えるのは, 自然な問題であると言える.

この問題の一番基本的なケースは, 連結簡約群の最も典型的な例である**一般線型群**の場合である. 一般線型群は分裂しているため, 馴分岐という仮定は当然満たしている. 一方で Kaletha による構成とは全く別に, Harris–Taylor ([HT01]) によって一般線型群の完全な局所 Langlands 対応が構成されている (**Harris–Taylor の局所 Langlands 対応**). そこで, 一般線型群の正則超尖点表現について, Kaletha および Harris–Taylor の局所 Langlands 対応は一致しているか, ということを問うことができる. これを証明したのが [OT19] の結果である:

*7 これらはいずれも, 後述の Adler–DeBacker–Spice による指標公式を用いて証明されるが, 現段階ではその指標公式で扱える超尖点表現に制約があり, toral の仮定はその制約に引きずられたものとなっている. この制約を外すということについては [Spi18] で考察されているようであり, それを踏まえた non-toral の場合の標準的エンドスコーピー指標関係式の証明等も DeBacker や Kaletha により進められているようではあるが ([Spi18, Section 1.1] の最終段落等を参照), 現時点では論文等は発表されていないように思われる.

*8 日本語の解説文献として [三枝] がある. [三枝, 2.6 節] を参照

定理 2.2 ([OT19]). 連結簡約群 \mathbf{G} が F 上の一般線型群であるとする (更に, p は奇素数であるとする). このとき正則超尖点表現に対して, Kaletha および Harris–Taylor の局所 Langlands 対応は一致する.

Harris–Taylor の局所 Langlands 対応は, 局所因子 (ε 因子や L 因子) と呼ばれる表現論・数論的不変量などに関するいくつかの公理的な性質によって特徴付けられる. したがって定理 2.2 の証明の安直な方針としては, Kaletha の構成した対応がそれらの公理的性質を満たしていることを示す, というものが考えられる. しかし, [OT19] においてはこの方針は採用していない. Harris–Taylor の局所 Langlands 対応を明示的に記述するという問題には多くの蓄積があり, とくに**本質的馴超尖点表現**と呼ばれる超尖点表現については, Bushnell–Henniart による一連の研究 (**本質的馴局所 Langlands 対応の理論**, [BH05a, BH05b, BH10]) によって, 対応する L パラメータは具体的に決定されている. 実は本質的馴超尖点表現とは一般線型群の場合の正則超尖点表現に他ならないので, Harris–Taylor と Kaletha の局所 Langlands 対応の一致を示すには, この Bushnell–Henniart の記述と Kaletha の構成の整合性を確認すればよい. Tam による結果で, Bushnell–Henniart の記述を更に Langlands–Shelstad 構成に則った言語で書き換えるというものがあるので ([Tam16]), それを利用しながら整合性を確認する, というのが [OT19] の方針である.

さて, 一般線型群の次に考えるべき群の候補には色々あるかと思われるが, ここでは**古典群**の場合を考えたい. ただし本稿では古典群とは特殊直交群ないしは斜交群のこととし, 簡単のためにユニタリ群は考えないことにする. 準分裂な古典群に対する局所 Langlands 対応は Arthur ([Art13]) によって確立されているため, この場合にもやはり Kaletha の構成と Arthur の構成が一致するかという問題を論じることができる. 一般線型群の場合と同様, まずそもそも Arthur による局所 Langlands 対応はどのような性質によって特徴付けられているか, ということが重要となるが, これを次節で説明したい.

3 捻られたエンドスコピーと指標関係式

この節では, 古典群の局所 Langlands 対応の特徴付けにおいて鍵となる, 捻られたエンドスコピーとその指標関係式について簡単に説明したい*⁹.

\mathbf{H} を F 上の準分裂古典群とする. このとき, \mathbf{H} は適切なサイズの一般線型群 \mathbf{G} の**捻られたエンドスコピー群**と呼ばれるものになっている. たとえば \mathbf{H} が分裂奇数次直交群 SO_{2n+1} の場合には, $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_{2n}$ の捻られたエンドスコピー群となっている. 捻られたエンドスコピー群の一般的な定義は本稿では説明しないが ([KS99, Section 2] 参照), \mathbf{H} と \mathbf{G} の関係性は, この例 ($\mathbf{H} = \mathrm{SO}_{2n+1}$ と $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_{2n}$) の場合には次のように説明される: $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_{2n}$ は F 上定義された外部自己同型

$$\theta: g \mapsto J_{2n} {}^t g^{-1} J_{2n}^{-1}$$

をもつ (ここで J_{2n} は反対角行列であって, $(i, 2n+1-i)$ 成分が $(-1)^{i-1}$ で与えられるものとする). \mathbf{G} の Langlands 双対群 $\hat{\mathbf{G}}$ は $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ であり, \mathbf{G} の自己同型 θ は, 同じ式で与えられる自己同型 $\hat{\theta}$ を $\hat{\mathbf{G}}$ に誘導する. 一方で $\mathbf{H} = \mathrm{SO}_{2n+1}$ の Langlands 双対群 $\hat{\mathbf{H}}$ は $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ である. このとき, $\hat{\mathbf{H}}$ は $\hat{\mathbf{G}}$ における $\hat{\theta}$ の固定部分群と同一視できる. L 群についても同じく, ${}^L\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} \times W_F$ は ${}^L\mathbf{G} = \hat{\mathbf{G}} \times W_F$ における $\hat{\theta} \times \mathrm{id}$ の固定部分群と同一視できる.

一般にもこのように (ここで扱うのは一般線型群と古典群の場合のみであるが), \mathbf{G} に対する捻られたエンドスコピー群 \mathbf{H} は L 群の間の埋め込み ${}^L\mathbf{H} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ を備えている. すると, \mathbf{H} の各 L パラメータを, この L

*⁹ こちらに関しても [三枝] に完全な解説があるので, 参照されたい ([三枝, 2.2 節]).

群の埋め込みを合成することにより、 \mathbf{G} の L パラメータと見なすことができる。

$$\begin{array}{ccc} W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & {}^L\mathbf{G} \\ & \searrow \phi & \uparrow \\ & & {}^L\mathbf{H} \end{array}$$

さて、 \mathbf{G} は一般線型群であったため、 \mathbf{G} に対する局所 Langlands 対応は利用可能である (Harris–Taylor の局所 Langlands 対応が利用可能であるし、正則超尖点表現に対応する L パラメータを考える場合には Kaletha の局所 Langlands 対応を使用すると思っても良い)。故に ϕ に対応する \mathbf{G} の L パッケージ $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ が得られる (一般線型群の場合は L パッケージは全て一元集合であるので、この L パッケージ $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ に属するただ一つの元を π_ϕ と書くことにする)。

今考えたいことは、準分裂古典群 \mathbf{H} の局所 Langlands 対応をどう特徴付けるか、ということであった。もし \mathbf{H} の局所 Langlands 対応があるとすれば、 ϕ に対応する \mathbf{H} の L パッケージ $\Pi_\phi^{\mathbf{H}}$ も得られることになる。このようにして、 \mathbf{H} と \mathbf{G} の局所 Langlands 対応を仮定することで得られる、 \mathbf{G} とその捻られたエンドスコピー群 \mathbf{H} の間の L パッケージの対応 $\Pi_\phi^{\mathbf{H}} \mapsto \Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ のことを、**捻られたエンドスコピー持ち上げ** と言う。指標関係式とは、この捻られたエンドスコピー持ち上げという操作を、局所 Langlands 対応の言葉を排除して純表現論的に特徴付ける、次のような等式である：

$$\tilde{\Theta}_{\pi_\phi}(\delta) = \sum_{\gamma \in \mathbf{H}(F)/\sim} \frac{D_{\mathbf{H}}(\gamma)}{D_{\tilde{\mathbf{G}}}(\delta)} \Delta_{\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{G}}}(\gamma, \delta) \sum_{\pi \in \Pi_\phi^{\mathbf{H}}} \Theta_\pi(\gamma).$$

ここで、それぞれの記号の意味は以下の通りである。

- 右辺の Θ_π は表現 π の指標である。これは $\mathbf{H}(F)$ 上の汎関数であるが、関数によって表現されるため、 $\mathbf{H}(F)$ 上の関数と見なしている。
- ϕ が元々 \mathbf{H} の L パラメータであったことから、 $\mathbf{G}(F)$ の表現 π_ϕ は θ 安定 (すなわち、 θ 捻り π_ϕ^θ が自身 π_ϕ と同型になる) な表現となる。このことから、 π_ϕ の**捻られた指標**と呼ばれる、通常の指標の変種が定義できる。これが左辺の $\tilde{\Theta}_{\pi_\phi}$ である。これは $\mathbf{G}(F)$ 上の汎関数であるが、関数によって表現されるため、 $\mathbf{G}(F)$ 上の関数と見なしている^{*10}。
- δ は $\mathbf{G}(F)$ の (任意の) 強 θ 正則半単純元である。
- 右辺の和の γ は、 $\mathbf{H}(F)$ の強 \mathbf{G} 正則半単純元たちの安定共役類を走っている。
- $D_{\mathbf{H}}$ および $D_{\tilde{\mathbf{G}}}$ は (θ で捻られた) Weyl 判別式である。
- $\Delta_{\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{G}}}$ は**移送因子**と呼ばれる、各 (γ, δ) について定まるある種の補正項であり、 γ が δ のノルムでない場合は 0 を値にとる。ノルムは安定共役を除くと有限であるので、右辺の和は有限和となっている。

実はこの場合 (\mathbf{G} が一般線型群、 \mathbf{H} が古典群の場合) には、指標関係式によって、指標の和 $\sum_{\pi \in \Pi_\phi^{\mathbf{H}}} \Theta_\pi$ は $\mathbf{H}(F)$ 上の汎関数として一意に定まる。とくに、表現の指標の線型独立性によって、指標関係式を成り立たせるような有限集合 $\Pi_\phi^{\mathbf{H}}$ は、存在するとしたら一意であることが分かる。要約すると、 L パラメータ ϕ に対応すべき L パッケージ $\Pi_\phi^{\mathbf{H}}$ は、 ϕ の定める \mathbf{G} の L パッケージ $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ との間に指標関係式を満たすような表現の有限集合

^{*10} 正確には、捻られた指標を定義するためには π_ϕ^θ と π_ϕ の同型を固定する必要がある。この同型の選び方には \mathbb{C}^\times 倍の不定性があるため、捻られた指標にも \mathbb{C}^\times 倍の不定性が生じる。この不定性に関しては、 \mathbf{G} の θ 安定な Whittaker データというものを用いることで、正規化を一つ定めることができる。なお、右辺の移送因子 $\Delta_{\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{G}}}$ も同様に \mathbb{C}^\times の不定性をもっており、こちらも θ 安定な Whittaker データを用いることで正規化をとることができる。

として特徴付けられる。Arthur が [Art13] において証明したこと (**Arthur の局所 Langlands 対応**) とは、そのような (もし存在するならば一意である) 有限集合 $\Pi_\phi^{\mathbf{H}}$ が実際に存在する、ということであると言える。

注意 3.1. 「この場合には」指標関係式から $\sum_{\pi \in \Pi_\phi^{\mathbf{H}}} \Theta_\pi$ は汎関数として一意に定まる、と書いたが、より正確には以下のいずれかの場合 (いわゆる「単純エンドスコープ」の場合) である：

$$(\mathbf{H}, \mathbf{G}) = \begin{cases} (\mathrm{SO}_{2n+1}, \mathrm{GL}_{2n}) \\ (\mathrm{Sp}_{2n}, \mathrm{GL}_{2n+1}) \\ (\mathrm{SO}_{2n}, \mathrm{GL}_{2n}) \end{cases}$$

また $\mathbf{H} = \mathrm{SO}_{2n}$ の場合には、汎関数 $\sum_{\pi \in \Pi_\phi^{\mathbf{H}}} \Theta_\pi$ は、 O_{2n} 由来の外部自己同型を除いてしか一意に定まらない。つまりこの指標関係式による局所 Langlands 対応の特徴付けは、 $\mathbf{H} = \mathrm{SO}_{2n}$ の場合には原理的に外部自己同型の不定性を排除することができない。Arthur の局所 Langlands 対応も、「up to 外部自己同型の」局所 Langlands 対応となっている。

ということで、準分裂古典群の正則超尖点表現に対して Kaletha と Arthur の局所 Langlands 対応の一致を示そうと思うと、Kaletha の構成した L パッケージについて捻られたエンドスコープ指標関係式が成り立っていることを証明すればよい。これが本稿で重点をおいて説明したい問題である。残念ながら現時点ではまだ細部まで証明が完結していないため、「定理」というかたちで結果を報告することができないが、以下ではこの問題に対する大雑把な方針を紹介させていただきたい。

4 標準的エンドスコープ指標関係式の証明の方針

捻られたエンドスコープに対する指標関係式の証明の方針は、一言でまとめてしまうと、Kaletha による標準的エンドスコープに対する指標関係式の証明を「捻る」ということに尽きる。そこでまずは、その標準的エンドスコープの場合の指標関係式 ([Kal19a, Theorem 6.3.4]) の Kaletha による証明を簡単に紹介したい。

\mathbf{G} を連結簡約群、 \mathbf{H} をその標準的エンドスコープ群とし、双方は馴分岐であると仮定する。 ϕ を \mathbf{G} の toral な L パラメータとし、 L 群の間の埋め込み ${}^L\mathbf{H} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ を経由しているとする (このとき ϕ は \mathbf{H} の L パラメータとしても toral となる)。Kaletha の構成によってこれらの L パラメータに対応する L パッケージを $\Pi_\phi^{\mathbf{H}}$ と $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ とかく。

$\Pi_\phi^{\mathbf{H}}$ と $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ に対する標準的エンドスコープ指標関係式とは次のような等式である：

$$\sum_{\pi \in \Pi_\phi^{\mathbf{G}}} \langle \pi, s \rangle \Theta_\pi(\delta) = \sum_{\gamma \in \mathbf{H}(F)/\sim} \frac{D_{\mathbf{H}}(\gamma)}{D_{\mathbf{G}}(\delta)} \Delta_{\mathbf{H}, \mathbf{G}}(\gamma, \delta) \sum_{\pi_{\mathbf{H}} \in \Pi_\phi^{\mathbf{H}}} \langle \pi_{\mathbf{H}}, 1 \rangle \Theta_{\pi_{\mathbf{H}}}(\gamma).$$

ここで、各項の意味は概ね捻られたエンドスコープ指標関係式の場合と同じであるが、表現の指標に $\langle \pi, s \rangle$ や $\langle \pi_{\mathbf{H}}, 1 \rangle$ という「重み」が付いていることに注意しておく。もう少し詳しく説明しておく、そもそも局所 Langlands 対応は単に L パッケージと L パラメータの対応付けを与えるのみならず、各 L パッケージの内部構造も記述すると期待されている。この L パッケージの内部構造を記述するのに用いられるのが、次のように定義される L パラメータの \mathcal{S} 群と呼ばれる有限群である*11：

$$\mathcal{S}_\phi := \pi_0(\mathrm{Cent}_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathrm{Im} \phi) / \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{G}})^{\Gamma_F}).$$

*11 ここでは準分裂簡約群の L パッケージしか扱わないので \mathcal{S} 群はこのような定義になっているが、局所 Langlands 対応の定式化によっては異なる定義を採用する必要がある。とくに [Kal19a] ではリジッド内部形式のレベルで L パッケージが構成されているので、 \mathcal{S} 群はもっと大きなものとなる。詳しくは [Kal19a, Section 5.3] 参照。

ここで $\text{Cent}_{\hat{\mathbf{G}}}(\text{Im } \phi)$ は ϕ の ${}^L\mathbf{G}$ における像の $\hat{\mathbf{G}}$ 内での中心化群であり、 $\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{G}})^{\Gamma_F}$ は $\hat{\mathbf{G}}$ の中心の Galois 不変部分、 π_0 は連結成分の成す群を表す。各 L パッケージ $\Pi_{\phi}^{\mathbf{G}}$ の要素は、対応する L パラメータの \mathcal{S} 群 \mathcal{S}_{ϕ} の既約有限次元指標と一対一に対応すると期待されており、先ほどの式では要素 π に対応する \mathcal{S}_{ϕ} の指標を $\langle \pi, - \rangle$ と表している。また \mathbf{H} の Langlands 双対群 $\hat{\mathbf{H}}$ は、 \mathbf{G} の Langlands 双対群 $\hat{\mathbf{G}}$ 内のある半単純元 s の連結中心化群と同一視されるが、 L パラメータ ϕ が ${}^L\mathbf{H}$ を経由するという仮定の下では、この s を \mathcal{S}_{ϕ} の元と見なし、 $\langle \pi, - \rangle$ の値を考えることができる。これが $\langle \pi, s \rangle$ の意味である。Kaletha による L パッケージの構成においては、このペアリングの値 $\langle \pi, s \rangle$ も具体的に与えられている ([Kal19a, Section 5.3] 参照)^{*12}。 \mathbf{H} 側における「重み」 $\langle \pi_{\mathbf{H}}, 1 \rangle$ についても同様である^{*13}。

さて、Kaletha による指標関係式の証明において出発点となるのは、Adler–Spice ([AS09]) および DeBacker–Spice ([DS18]) による toral 超尖点表現の指標の明示公式である。これは \mathbf{G} の深度 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ の toral 超尖点表現 π の指標 Θ_{π} について、その $\mathbf{G}(F)$ の強正則半単純元 δ における値を以下のように記述する公式である：

$$\Theta_{\pi}(\delta) = \sum_{\substack{g \in \mathcal{S} \backslash \mathbf{G}/J \\ g\delta_{<r}g^{-1} \in \mathcal{S}}} \Theta_{\sigma}(g\delta_{<r}g^{-1}) \cdot \hat{\mu}_{g^{-1}X^*g}^{\mathbf{J}}(\log(\delta_{\geq r})).$$

この式に現れる記号の意味等を大雑把に説明してゆきたい。以下の説明^{*14}はほとんどいたるところ雑な説明となっているので、正確な定義等は適宜引用する文献を参照されたい。

まずこの式の最大の特徴は、和の中身において、「 δ の頭部分」 $\delta_{<r}$ の寄与と、「 δ の尻尾部分」 $\delta_{\geq r}$ の寄与が分離して現れていることである。ここで δ の頭および尻尾とは、Adler と Spice ([AS08]) による**近似的理論 (良い積展開の理論)** の用語である。一般に馴分岐な簡約群の F 値点に属する元について、その固有値 (ルート値) の付値に注目することで、「**深度 i の良い元**」という概念を、各実数 $i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について定義することができる ([AS08, Definition 6.1])。Adler と Spice が [AS08] において考えたのは、簡約群の元 δ を、各実数 $i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ についての深度 i の良い元 δ_i たちの積で表すことである。彼らはもし δ が各実数 $i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ についての (然るべき条件を満たす) 深度 i の良い元 δ_i たちの積で表されていれば (**正規近似**, [AS08, Definitions 6.4, 6.8]), δ の群論的性質は各 δ_i たちの情報によって統制・記述できるということを示した。 δ の頭および尻尾とは、そのような「良い元」による積展開を、深度が r より小さい部分と r 以上の部分に分けたものである：

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}, \\ \delta_{<r} &:= \prod_{0 \leq i < r} \delta_i, \quad \delta_{\geq r} := \delta \cdot \delta_{<r}^{-1}. \end{aligned}$$

正規近似の正確な定義は本稿では説明しないが、その性質の内きわめて重要なものを一つ述べておく。それは、

尻尾 $\delta_{\geq r}$ は頭 $\delta_{<r}$ の連結中心化群に属する

というものである。すなわち、 $\mathbf{J} := \mathbf{G}_{\delta_{<r}} := \text{Cent}_{\mathbf{G}}(\delta_{<r})^{\circ}$ とおくと、 $\delta_{\leq r} \in J := \mathbf{J}(F)$ となっている。またもう一つの補足として、一般には正規近似はいつでも存在するわけではないが、剰余標数が十分大きければ、超尖点表現の指標の台に含まれる元についてはいつでも存在する^{*15}ということ述べておく。

^{*12} $\pi \mapsto \langle \pi, - \rangle$ で表されるラベル付 $\Pi_{\phi} \leftrightarrow \mathcal{S}_{\phi}^{\vee}$ は自然に定まるものではなく、 \mathbf{G} の Whittaker データの選び方に依存している。一方で、捻られたエンドスコピーのとき同様に、標準的エンドスコピーの場合にも移送因子に \mathbb{C}^{\times} 倍の不定性がある。この不定性に関してもやはり、 \mathbf{G} の Whittaker データを用いて正規化を一つ与えることができる。

^{*13} 実は前節で説明した捻られたエンドスコピー指標関係式にも、この重み $\langle \pi_{\mathbf{H}}, 1 \rangle$ は隠れて存在している。前節では古典群の場合に特化した説明をしたが、古典群の特殊事情として \mathcal{S}_{ϕ} が可換になっており、故に $\langle \pi_{\mathbf{H}}, 1 \rangle$ は常に 1 で与えられている。

^{*14} というより、本稿内の記述全て

^{*15} [AS09, Section 6] の冒頭の文章等参照。

さて、1.3 節で説明したように、toral 超尖点表現は \mathbf{G} のある (toral な) 正則対から構成されるのであった。そこで、深度 r の toral 超尖点表現 π を与える正則対を (\mathbf{S}, η) と書くことにする。 π は、正則対 (\mathbf{S}, η) から定まる部分群 $K = SG_{\mathbf{x}, s}$ とその表現 ρ によって $\text{c-Ind}_K^{\mathbf{G}(F)} \rho$ と与えられるのであったが、この ρ を $SG_{\mathbf{x}, 0}$ まで誘導してできる表現を σ とかく：

$$\sigma := \text{Ind}_{SG_{\mathbf{x}, s}}^{SG_{\mathbf{x}, 0}} \rho.$$

また、 η は S の深度 r の指標であるため、商 $S_{r:r+} := S_r/S_{r+}$ の非自明指標を誘導する。 F の非自明加法指標を固定しておくことで、この $S_{r:r+}$ の指標を「実現」する Lie 環の双対 \mathfrak{s}^* の元を考えることができるので、これを X^* と表す。

これで Adler–DeBacker–Spice 公式の説明ができる：

インデックス集合： 和のインデックス集合は、両側剰余類 $S \backslash G/J = \mathbf{S}(F) \backslash \mathbf{G}(F)/\mathbf{J}(F)$ の元 g であって、 $g\delta_{<r}g^{-1}$ が S に属するようなものたちで与えられる。

頭の寄与： インデックス集合の各元 g について、 δ の頭 $\delta_{<r}$ の寄与は、 σ の指標 Θ_σ の $g\delta_{<r}g^{-1}$ での値として与えられる^{*16}。

尻尾の寄与： インデックス集合の各元 g について、 δ の尻尾 $\delta_{\geq r}$ の寄与は、 $g^{-1}X^*g$ に関する \mathbf{J} の Lie 環の軌道積分の Fourier 変換で与えられる。もうすこし詳しく説明すると、まずインデックス集合の条件と、 \mathbf{J} の Lie 環の双対 \mathfrak{j}^* の \mathbf{S} 作用による分解を合わせて考えることで、 $g^{-1}X^*g$ は \mathfrak{j}^* の元とすることができる。故に、「 $\mathfrak{j}(F)$ 上のテスト関数を Fourier 変換してから $g^{-1}X^*g$ の J 軌道上で積分する」という汎関数を考えることができる。この汎関数は関数で表現されるため、 $\mathfrak{j}(F)$ の元における値を考えることができる。先ほど説明した正規近似の性質から、 $\delta_{\geq r}$ は J に属するため、その「logarithm 写像」による像 $\log(\delta_{\geq r}) \in \mathfrak{j}(F)$ での値を考えることができる。

Kaletha による標準的エンドスコピー指標関係式の証明の方針は、一言で述べると、この Adler–DeBacker–Spice 公式を

G 側：

$$\sum_{\pi \in \Pi_\phi^{\mathbf{G}}} \langle \pi, s \rangle \Theta_\pi(\delta)$$

H 側：

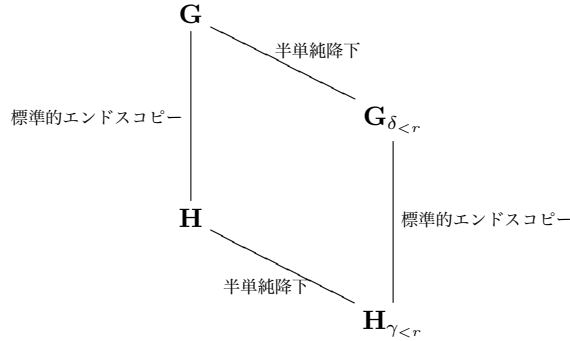
$$\sum_{\gamma \in \mathbf{H}(F)/\sim} \frac{D_{\mathbf{H}}(\gamma)}{D_{\mathbf{G}}(\delta)} \Delta_{\mathbf{H}, \mathbf{G}}(\gamma, \delta) \sum_{\pi_{\mathbf{H}} \in \Pi_\phi^{\mathbf{H}}} \langle \pi_{\mathbf{H}}, 1 \rangle \Theta_{\pi_{\mathbf{H}}}(\gamma)$$

の双方 (各 $\pi \in \Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ と $\pi_{\mathbf{H}} \in \Pi_\phi^{\mathbf{H}}$ の指標) に代入して直接比較するというものである。この比較における核となるのが **Lie 環における移送** である。Adler–DeBacker–Spice 公式における尻尾の寄与は、Lie 環における軌道積分の Fourier 変換として表されるのであったが、これは言わば表現の指標の Lie 環における類似とも呼べるものである。そしてエンドスコピー指標関係式の Lie 環版に相当する、Lie 環における移送 (エンドスコピーの関係にある二つの群の Lie 環における、軌道積分の Fourier 変換たちを比較する等式) は Waldspurger

^{*16} なお、のちに説明するように、指標公式の最大の肝はこの頭の寄与を正確に書き下すところにある。この頭の寄与の明示公式は Adler–Spice ([AS09]) の中でも既に与えられていたが、DeBacker–Spice ([DS18]) によって更に洗練された言語によって書き換えられた。本稿ではこれをもって Adler–DeBacker–Spice 公式と呼んでおり、Adler, DeBacker, Spice の三人による共著論文があるというわけではない。先ほど書いた公式は最終的な Adler–DeBacker–Spice 公式の「first form」に過ぎず、その意味では「Adler–DeBacker–Spice 公式」ではなく単に「Adler–Spice 公式」と呼ぶのが適切かもしれない。

および Ngô によって証明されている ([Wal97, Wal06] および [Ngô10]). これを用いることにより \mathbf{G} 側と \mathbf{H} 側の指標公式を比較しようというのがアイデアである. しかし指標公式をよく見ると分かるように, 尻尾の寄与に現れる Lie 環は, \mathbf{G} ないしは \mathbf{H} の Lie 環ではなく, 尻尾の中心化群の Lie 環となっている. そこで, 標準的エンドスコーピーの半単純降下に関するふるまいを, インデックス集合および頭の寄与の記述とあわせて調べる必要がある.

この「標準的エンドスコーピーの半単純降下」をもう若干具体的に説明してみる. δ を $\mathbf{G}(F)$ の強正則半単純元とし, そのノルム γ ($\mathbf{H}(F)$ の \mathbf{G} 強正則半単純元) を考える. このとき, δ の正規近似 $\delta = \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}$ を「移送」することで, γ の正規近似 $\gamma = \gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}$ をとることができる. すると Langlands–Shelstad の半単純降下の理論 ([LS90]) により, \mathbf{H} 内の中心化群 $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ には \mathbf{G} 内の中心化群 $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ の標準的エンドスコーピー群としての構造を入れることができる (更に (\mathbf{H}, \mathbf{G}) と $(\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}, \mathbf{G}_{\delta_{<r}})$ の移送因子を然るべき意味で比較することができる):



これに注目して $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ と $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ の Lie 環における移送を用いたい. ここで, 元々の目標であったエンドスコーピー指標関係式は, 個々の表現の指標を比較するものではなく, あくまで L パッケージ内の表現をわたる (重み付き) 和同士を比較するものであった, ということ思い出す. Lie 環の移送についてもこの事情は同じであり, Lie 環の移送を適用するためには, まず軌道積分の Fourier 変換たちを然るべきいくつかの軌道に関する和にまとめあげる必要である (とくに \mathbf{H} 側では, 安定軌道積分の Fourier 変換へと安定化する必要がある).

そこで次に考えるのが, インデックス集合の移送である. 目標の指標関係式の \mathbf{G} 側

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\phi}^{\mathbf{G}}} \langle \pi, s \rangle \Theta_{\pi}(\delta)$$

に指標公式

$$\Theta_{\pi}(\delta) = \sum_{\substack{g \in S \backslash G/J \\ g\delta_{<r}g^{-1} \in S}} \Theta_{\sigma}(g\delta_{<r}g^{-1}) \cdot \hat{\mu}_{g^{-1}X^*g}^J(\log(\delta_{\geq r}))$$

を代入して得られる式の, インデックス集合にのみ注目してみる. L パッケージ $\Pi_{\phi}^{\mathbf{G}}$ の要素たちは, ある一つの \mathbf{S} から \mathbf{G} への埋め込みの \mathbf{G} 共役類に属する, F 上定義される埋め込みの $\mathbf{G}(F)$ 共役類たちによって parametrize されるのであった. すなわち, そのような埋め込み $j_0: \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ を一つ固定しておけば, L パッケージの要素を parametrize する集合は,

$$\{j: \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}: \text{defined over } F \mid j \sim_{\mathbf{G}} j_0\} / \sim_{\mathbf{G}}$$

と表せる. ここで, $\sim_{\mathbf{G}}$ は \mathbf{G} 共役, \sim_G は $G = \mathbf{G}(F)$ 共役を表す. 一方で指標公式のインデックス集合は $g \mapsto \text{Int}(g)^{-1} \circ j$ という対応により,

$$\{j': \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}_{\delta_{<r}}: \text{defined over } F \mid j' \sim_G j\} / \sim_{G_{\delta_{<r}}}$$

という集合と見なすことができる。これら二つのインデックス集合に関する和は一纏めにすることで、

$$\{j': \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}_{\delta_{<r}} : \text{defined over } F \mid j' \sim_{\mathbf{G}} j_0\} / \sim_{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}}$$

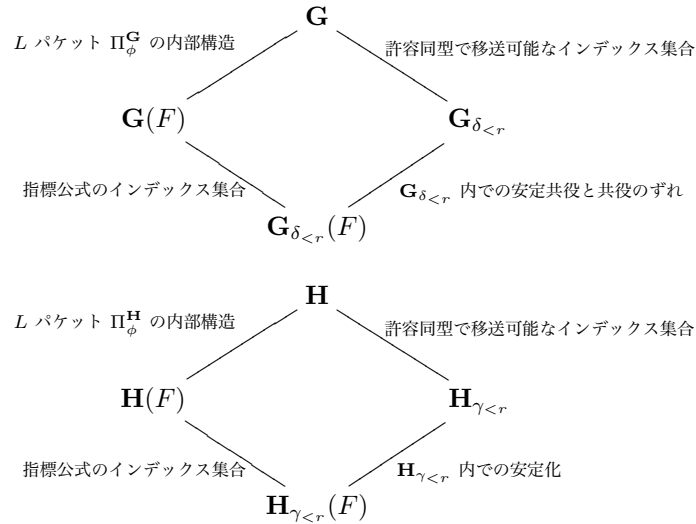
という一つの集合上の和とすることができる。そこでこの集合をあらためて

$$\begin{aligned} & \{j: \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}_{\delta_{<r}} : \text{defined over } F \mid j \sim_{\mathbf{G}} j_0\} / \sim_{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}} \\ & \times \{j': \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}_{\delta_{<r}} : \text{defined over } F \mid j' \sim_{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}} j\} / \sim_{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}} \end{aligned}$$

と分割する。これと全く同様の議論により、指標関係式の \mathbf{H} 側のインデックス集合も

$$\begin{aligned} & \{j_{\mathbf{H}}: \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{H}_{\gamma_{<r}} : \text{defined over } F \mid j_{\mathbf{H}} \sim_{\mathbf{H}} j_{\mathbf{H},0}\} / \sim_{\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}} \\ & \times \{j'_{\mathbf{H}}: \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{H}_{\gamma_{<r}} : \text{defined over } F \mid j'_{\mathbf{H}} \sim_{\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}} j_{\mathbf{H}}\} / \sim_{\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}} \end{aligned}$$

なるもので与えられることが分かる。これらの統合・再分割された集合のうち後者のもの（積の二つ目）はまさに、Lie 環において考えるべき集合（とくに \mathbf{H} 側では $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ 内での安定化の操作に相当）そのものである。一方で前者（積の一つ目）については、Kaletha による補題 [Kal15, Lemma 6.5] によって \mathbf{G} 側と \mathbf{H} 側を比較することができる。 $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ には $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ の標準的エンドスコピー群としての構造が入っていたので、 $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ の各 (F 上定義された) 極大トーラスは、許容同型によって $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ の (F 上定義された) 極大トーラスと見なすことができる^{*17}。ゆえに、 \mathbf{S} の $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ への (F 上定義された) 埋め込みがあると、それは許容同型を介して $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ への (F 上定義された) 埋め込みと見なすことができる。これが Kaletha の補題 [Kal15, Lemma 6.5] における比較の大雑把な説明である。この議論（インデックス集合の統合・再分割）のイメージ図は以下のような具合である：



さて最後に、指標公式の頭の寄与の処理について非常に雑に説明する。先ほどの指標公式

$$\Theta_{\pi}(\delta) = \sum_{\substack{g \in S \backslash G/J \\ g\delta_{<r}g^{-1} \in S}} \Theta_{\sigma}(g\delta_{<r}g^{-1}) \cdot \hat{\mu}_{g^{-1}X^*g}^{\mathbf{J}}(\log(\delta_{\geq r})).$$

^{*17} 正確には、許容同型を一つ固定することが、 $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ に $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ の標準的エンドスコピー群の構造を入れることに他ならない。

においては、頭 $\delta_{<r}$ の寄与は $\Theta_\sigma(g\delta_{<r}g^{-1})$ として現れるとだけ述べた。だが実際には Adler–DeBacker–Spice の指標公式の最大の肝は、この項を明示的に記述することにある。この項の明示的な記述は Adler–Spice の論文 [AS09] において既に与えられていたが、それが DeBacker–Spice ([DS18]) によってより p 進簡約群の構造論的に洗練された言葉によって書き換えられた。 L パケットの構成の際に登場した指標「 ϵ 」などは、これらの Adler–DeBacker–Spice による頭の寄与の記述の一部に自然に現れる符号である。Kaletka の [Kal19a] における重要な発見の一つは、実はその記述を更にエンドスコピー的な不変量（移送因子の一部）等によって解釈することができる、ということである。この考察をふまえることでようやく指標関係式の両辺を、Waldspurger–Ngô による Lie 環の移送が適用可能なかたちまで変形することができ、比較が可能となる。

5 捻られたエンドスコピー指標関係式の証明の方針

最後に、捻られたエンドスコピーの場合の指標関係式の証明の方針について説明する。以下では**捻られた空間**の formalism に則る。すなわち、 \mathbf{G} とその自己同型 θ の半直積群 $\mathbf{G} \rtimes \langle \theta \rangle$ (非連結簡約群) およびその非単位元連結成分 $\tilde{\mathbf{G}} := \mathbf{G} \rtimes \theta$ を考える。後者の空間は両側からの \mathbf{G} 作用

$$g_1 \cdot (g \rtimes \theta) \cdot g_2 = (g_1 g \theta(g_2)) \rtimes \theta$$

についての捻子となっており、これを (\mathbf{G}, θ) に伴う捻られた空間と呼ぶ。Kottwitz–Shelstad ([KS99]) 等で用いられている formalism では、 $\mathbf{G}(F)$ の θ 安定表現や θ 共役類といったものが扱われるが、それらは $\mathbf{G} \rtimes \langle \theta \rangle$ の表現や、捻られた空間 $\mathbf{G} \rtimes \theta$ における共役類を考えることと等価となる。とくに、捻られたエンドスコピー指標関係式に登場する捻られた指標 $\tilde{\Theta}_{\pi_\phi}$ は、捻られた空間 $\mathbf{G}(F) \rtimes \theta$ 上の関数と思える。

標準的エンドスコピー指標関係式の証明の出発点となるのが、Adler–DeBacker–Spice による指標公式であった。捻られたエンドスコピー指標関係式の \mathbf{H} 側には、標準的エンドスコピーの場合と同様に通常の指標が現れるため、Adler–DeBacker–Spice による指標公式がそのまま適用できる。一方で \mathbf{G} 側には捻られた指標が現れるため、まず Adler–DeBacker–Spice による指標公式を「捻る」必要がある。ここで直ちに問題となるのが、Adler–Spice による近似の理論の、捻られた空間における類似である。Adler–DeBacker–Spice 公式は正規近似を用いて記述されるのであったから、その指標公式を「捻ろ」と思うと、まず近似の理論を「捻る」必要がある。

このような**捻られた近似の理論** (あるいは、非連結簡約群に対する近似の理論) は、哲学的には一般の捻られた空間において展開できて然るべきにも思われる。だがここでは、捻られたエンドスコピー指標関係式への応用のみを見据え、 \mathbf{G} が捻られたエンドスコピー群 \mathbf{H} をもつことに注目した、以下のようなアドホックな方法を考える： δ を $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}(F) \rtimes \theta$ の強正則半単純元とし、 γ をそのノルム ($\mathbf{H}(F)$ の \mathbf{G} 強正則半単純元) とする。捻られたエンドスコピー指標関係式を証明する上では、 γ が正規近似を持つ場合のみ考えれば十分であるので、 γ の正規近似

$$\gamma = \gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r} = \prod_{0 \leq i < r} \gamma_i \cdot \gamma_{\geq r}$$

をとる。そこで、 γ を含む \mathbf{H} の極大トーラスと δ を含む \mathbf{G} の極大トーラス (正確には、 $\tilde{\mathbf{G}}$ 内の「捻られた」極大トーラス) の間の許容同型によって、各項 γ_i を \mathbf{G} に「移送」することで δ_i を定義する^{*18}。このように

^{*18} 後述のように、捻られたエンドスコピーの場合の許容同型とは、 \mathbf{G} の極大トーラスの余不変部分と \mathbf{H} の極大トーラスの同型である。したがって各 γ_i が移送によって定めるのは、あくまで \mathbf{G} の極大トーラスの余不変部分の元となる。しかし、不変部分と余不変部分が Lie 環のレベルでは同型となることと、深度正の部分については exponential/logarithm 写像で行き来できることに注

して (アドホックな) 「捻られた」正規近似 $\delta = \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}$ を定めると, 通常正規近似と同様に

尻尾 $\delta_{\geq r}$ は頭 $\delta_{<r}$ の連結中心化群に属する

ということが分かる^{*19}. この分解の下で, Adler–Spice による指標公式の証明を全て捻られた設定下でトレースすることにより (とくに Harish-Chandra ([HC70]) による超尖点表現の指標の積分公式を, Lemaire ([LH17]) による捻られた指標の積分公式によって置換する), 次の公式が得られる:

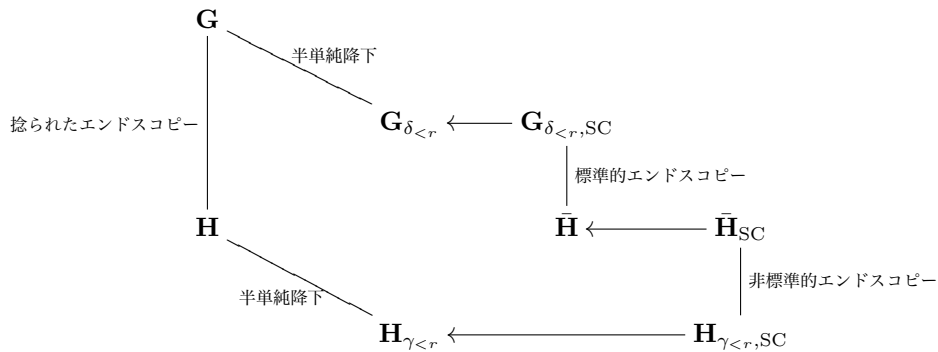
$$\tilde{\Theta}_{\pi_\phi}(\delta) = \sum_{\substack{g \in S \backslash G/J \\ g\delta_{<r}g^{-1} \in \tilde{S}}} \tilde{\Theta}_\sigma(g\delta_{<r}g^{-1}) \cdot \hat{\mu}_{g^{-1}X^*g}^{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}}(\log(\delta_{\geq r}))$$

各記号の正確な意味はこれ以上説明しないが, 重要なのは, この公式が通常指標公式と全く平行なかたちをとっているということである. すなわち, インデックス集合の移送・頭の寄与の計算 (エンドスコピー的な量による書き換え) を適切に行うことで, 標準的エンドスコピーの場合と同様に, Lie 環の移送を用いて指標関係式が証明できるのではないかと, という期待がもてる.

そこでまず, Langlands–Shelstad の半単純降下の理論を, 捻られたエンドスコピーの設定下で展開する必要がある. これを可能にさせるのが Waldspurger による「L’endoscopie tordue n’est pas si tordue (Twisted endoscopy is not so twisted)」の哲学 ([Wal08]) である. 捻られたエンドスコピーの場合には, 標準的エンドスコピーのときほど状況は単純ではなく, 一般には $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ に $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ の標準的エンドスコピー群の構造が入るとは限らない^{*20}. しかしそれでもなお, **非標準的エンドスコピー**と呼ばれる概念を導入することで ([Wal08, Section 1.7]), $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ を $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ の標準的エンドスコピーと非標準的エンドスコピーの組み合わせとして実現でき, Lie 環における移送や Langlands–Shelstad の理論の類似の結果を証明できる, というのが [Wal08] の非常に大雑把な内容である. $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ と $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ の間に (Waldspurger が) 見つけることのできる関係性をもう少しだけ詳しく説明すると, 以下の通りである: ある F 上の準分裂連結簡約群 $\bar{\mathbf{H}}$ であって,

- $\bar{\mathbf{H}}$ は $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ の導来群の単連結被覆群 $\mathbf{G}_{\delta_{<r}, \text{SC}}$ の標準的エンドスコピー群となり,
- $\bar{\mathbf{H}}$ の導来群の単連結被覆群 $\bar{\mathbf{H}}_{\text{SC}}$ と, $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}$ の導来群の単連結被覆群 $\mathbf{H}_{\gamma_{<r}, \text{SC}}$ は, 非標準的エンドスコピーの関係にある,

ようなものが存在する (具体的に構成できる).



これによって, 捻られたエンドスコピー指標関係式を示すには, あとは先ほど同様の

目すると, $i > 0$ に対する γ_i の移送については, \mathbf{G} の極大トーラスの不変部分の元として自然に定めることができる. すると δ_0 についても, δ と δ の深度正部分の比と定めることができる.

^{*19} とくに, $\delta_{<r}$ は捻られた空間 \tilde{G} に属しているが, $\delta_{\geq r}$ は降下によって「捻り」のなくなった空間 $G_{\delta_{<r}}$ に属している.

^{*20} 元々の \mathbf{G} は捻られた空間であったが, $\delta_{<r}$ について半単純降下した先の群 $\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ では「捻り」がなくなっていることに注意.

- インデックス集合の移送
- 頭の寄与のエンドスコピー的な量による書き換え

の類似を、捻られた設定下で確立すればよいということになる。それぞれについての方針を簡単に説明する。

インデックス集合の移送： インデックス集合の書き換え（和の結合と再分割）自体は概ね同じであるが、トーラスの埋め込みを捻られたトーラスとしての埋め込みに置き換えて論じる必要がある。またインデックス集合を書き換えた後の移送方法について、単に許容同型を用いるだけでは、 \mathbf{H} へのトーラスの埋め込みから \mathbf{G} への（捻られた）トーラスの埋め込みを構成することはできない。この原因は、Kottwitz–Shelstad による許容同型の定義にある。ここで考える必要のある操作は概ね、

- F 上のトーラス \mathbf{S} とその自己同型 $\theta_{\mathbf{S}}$ 、
- \mathbf{S} の $\theta_{\mathbf{S}}$ 余不変部分の \mathbf{H} への F 上の埋め込み

が与えられた状況で、 \mathbf{S} の \mathbf{G} への F 上の埋め込みを構成する、ということである。Kottwitz–Shelstad による許容同型とは、 \mathbf{H} の (F 上定義された) 極大トーラス $\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$ と、 \mathbf{G} の (F 上定義された) θ 不変極大トーラス $\mathbf{T}_{\mathbf{G},\theta}$ についての、 $\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$ と $\mathbf{T}_{\mathbf{G},\theta}$ (余不変部分) の間の F 上定義された同型のことであった。したがって、許容同型によって \mathbf{S} の余不変部分から、 \mathbf{G} のある極大トーラス $\mathbf{T}_{\mathbf{G}}$ の余不変部分への同型写像は得られるが、これが \mathbf{S} から \mathbf{T} への同型に延長できるか、という問題が残るのである。

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{S} & \xrightarrow{?} & \mathbf{T}_{\mathbf{G}} & \hookrightarrow & \mathbf{G} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathbf{T}_{\mathbf{G},\theta} & & \\
 & & \downarrow \cong & & \\
 \mathbf{S}_{\theta_{\mathbf{S}}} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{T}_{\mathbf{H}} & \hookrightarrow & \mathbf{H}
 \end{array}$$

この問題を解消するために、Waldspurger による**図式**の概念 ([Wal08, Section 3.2]) を利用する。図式の定義は説明しないが、 (γ, δ) に対する図式とはいくつかのトーラスを含む7つ組

$$(\mathbf{T}^{\flat}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}^{\diamond}, \mathbf{T}^{\natural}, h, g_0, g_1)$$

のことである。とくに \mathbf{T}^{\flat} は \mathbf{H} の F 上定義された極大トーラス、 \mathbf{T}_0 は \mathbf{G} の F 上定義された θ 不変極大トーラスであり、この7つ組は許容同型 $\mathbf{T}^{\flat} \cong \mathbf{T}_{0,\theta}$ をデータとして含んでいる。言わば Waldspurger の図式とは、Kottwitz–Shelstad による許容同型の概念を、同型の与え方等を細かく指定することによって「剛化」したものである。標準的エンドスコピーの場合に許容同型を用いて議論していた箇所を、この図式によって置き換えることで、Kaletha の補題 [Kal15, Lemma 6.5] の捻られた類似が証明できる。

頭の寄与の書き換え： まず頭の寄与 $\tilde{\Theta}_{\sigma}(g\delta_{<r}g^{-1})$ の計算そのものについては、Adler–DeBacker–Spice の証明を捻るということに尽きる。最終的には有限体上の Heisenberg 群の Weil 表現の指標に関する Gérardin の古典的な結果 ([Gér77]) を捻ることに帰着されるが、これは初等的な線型代数によって理解できる。また、得られた記述のエンドスコピー的な書き換えに関しては、Kaletha による標準的エンドスコピーの場合と同様に、Langlands 定数や ε 因子の特殊値 (ルート数) に関する Kottwitz–Kaletha の公式を使いながら、指標関係式の \mathbf{H} 側とも見比べながら進める。標準的エンドスコピーの場合との決定的な違いとして、移送因子の定義において、Kottwitz–Shelstad による**制限ルート**の分類 (1 型, 2

型, 3 型) が必要となる. したがって頭の寄与を移送因子と関連づけて書き換える上で, ルートに関する場合分けに基づいたしらみ潰しの計算をすることとなる.

注意 5.1. Langlands によって構成された実簡約群の局所 Langlands 対応についてエンドスコピー指標関係式を示す, というのもやはり大変非自明な問題となる. だがこれは, 標準的エンドスコピーの場合は Shelstad ([She82, She10]) により, 捻られたエンドスコピーの場合には Mezo ([Mez13, Mez16]) によって既に証明されている. 指標の明示公式を代入して直接比較するという意味では, 本稿で説明した非 Archimedes 体の場合と基本方針は同じであり, Harish–Chandra による離散系列表現の指標公式 ([Var77]), あるいは Bouaziz による捻られた指標公式 ([Bou87]) が出発点となる. これらの証明の中では, たとえば Harish–Chandra の一意性定理や coherent continuation などのような実簡約群特有の技術がいくつも使われているが, その大筋自体には非 Archimedes 体の場合と平行に展開できる箇所を見つけることもできる. そもそも正則超尖点表現が正則対によって分類できるというのも, 実簡約群の離散系列表現の分類と平行な現象であり, 更には Adler–DeBacker–Spice 指標公式を「浅い」元に特殊化することで Harish–Chandra の指標公式と完全に「同じかたちの」式が得られる, というのは [Kal19a] において最も強調されていることの一つでもあった. このようにして平行に話が進むのは不思議で興味深いことだと感じている.

参考文献

- [Art13] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: Orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [AS08] J. D. Adler and L. Spice, *Good product expansions for tame elements of p -adic groups*, Int. Math. Res. Pap. IMRP (2008), no. 1, Art. ID rp. 003, 95.
- [AS09] ———, *Supercuspidal characters of reductive p -adic groups*, Amer. J. Math. **131** (2009), no. 4, 1137–1210.
- [BH05a] C. J. Bushnell and G. Henniart, *The essentially tame local Langlands correspondence. I*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 3, 685–710.
- [BH05b] ———, *The essentially tame local Langlands correspondence. II. Totally ramified representations*, Compos. Math. **141** (2005), no. 4, 979–1011.
- [BH10] ———, *The essentially tame local Langlands correspondence, III: the general case*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **101** (2010), no. 2, 497–553.
- [Bou87] A. Bouaziz, *Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes*, J. Funct. Anal. **70** (1987), no. 1, 1–79.
- [DL76] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. (2) **103** (1976), no. 1, 103–161.
- [DR09] S. DeBacker and M. Reeder, *Depth-zero supercuspidal L -packets and their stability*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 795–901.
- [DS18] S. DeBacker and L. Spice, *Stability of character sums for positive-depth, supercuspidal representations*, J. Reine Angew. Math. **742** (2018), 47–78.
- [Fin18] J. Fintzen, *Types for tame p -adic groups*, preprint, arXiv:1810.04198, 2018.

- [Fin19] ———, *On the construction of tame supercuspidal representations*, preprint, [arXiv:1908.09819](#), 2019.
- [Gér77] P. Gérardin, *Weil representations associated to finite fields*, *J. Algebra* **46** (1977), no. 1, 54–101.
- [GR10] B. H. Gross and M. Reeder, *Arithmetic invariants of discrete Langlands parameters*, *Duke Math. J.* **154** (2010), no. 3, 431–508.
- [HC70] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on reductive p -adic groups*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 162, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970, Notes by G. van Dijk.
- [HM08] J. Hakim and F. Murnaghan, *Distinguished tame supercuspidal representations*, *Int. Math. Res. Pap. IMRP* (2008), no. 2, Art. ID rpn005, 166.
- [HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, *Annals of Mathematics Studies*, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.
- [Kal15] T. Kaletha, *Epipelagic L -packets and rectifying characters*, *Invent. Math.* **202** (2015), no. 1, 1–89.
- [Kal16] ———, *Rigid inner forms of real and p -adic groups*, *Ann. of Math. (2)* **184** (2016), no. 2, 559–632.
- [Kal19a] ———, *Regular supercuspidal representations*, *J. Amer. Math. Soc.* **32** (2019), no. 4, 1071–1170.
- [Kal19b] ———, *Supercuspidal L -packets*, preprint, [arXiv:1912.03274](#), 2019.
- [Kim07] J.-L. Kim, *Supercuspidal representations: an exhaustion theorem*, *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), no. 2, 273–320.
- [KS99] R. E. Kottwitz and D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, *Astérisque* (1999), no. 255, vi+190.
- [Lan89] R. P. Langlands, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, *Math. Surveys Monogr.*, vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 101–170.
- [LH17] B. Lemaire and G. Henniart, *Représentations des espaces tordus sur un groupe réductif connexe p -adique*, *Astérisque* (2017), no. 386, ix+366.
- [LS87] R. P. Langlands and D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, *Math. Ann.* **278** (1987), no. 1-4, 219–271.
- [LS90] R. Langlands and D. Shelstad, *Descent for transfer factors*, *The Grothendieck Festschrift*, Vol. II, *Progr. Math.*, vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 485–563.
- [Mez13] P. Mezo, *Character identities in the twisted endoscopy of real reductive groups*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **222** (2013), no. 1042, vi+94.
- [Mez16] ———, *Tempered spectral transfer in the twisted endoscopy of real groups*, *J. Inst. Math. Jussieu* **15** (2016), no. 3, 569–612.
- [MP94] A. Moy and G. Prasad, *Unrefined minimal K -types for p -adic groups*, *Invent. Math.* **116** (1994), no. 1-3, 393–408.
- [MP96] ———, *Jacquet functors and unrefined minimal K -types*, *Comment. Math. Helv.* **71** (1996), no. 1, 98–121.

- [Ngô10] B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2010), no. 111, 1–169.
- [OT19] M. Oi and K. Tokimoto, *Local Langlands correspondence for regular supercuspidal representations of $GL(n)$* , preprint, [arXiv:1912.07851](https://arxiv.org/abs/1912.07851), to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN, 2019.
- [RY14] M. Reeder and J.-K. Yu, *Eipelagic representations and invariant theory*, J. Amer. Math. Soc. **27** (2014), no. 2, 437–477.
- [She82] D. Shelstad, *L -indistinguishability for real groups*, Math. Ann. **259** (1982), no. 3, 385–430.
- [She10] ———, *Tempered endoscopy for real groups. II. Spectral transfer factors*, Automorphic forms and the Langlands program, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 9, Int. Press, Somerville, MA, 2010, pp. 236–276.
- [Spi18] L. Spice, *Explicit asymptotic expansions for tame supercuspidal characters*, Compos. Math. **154** (2018), no. 11, 2305–2378.
- [Tam16] K.-F. Tam, *Admissible embeddings of L -tori and the essentially tame local Langlands correspondence*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2016), no. 6, 1695–1775.
- [Var77] V. S. Varadarajan, *Harmonic analysis on real reductive groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 576, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [Wal97] J.-L. Waldspurger, *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. **105** (1997), no. 2, 153–236.
- [Wal06] ———, *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), no. 3, 423–525.
- [Wal08] ———, *L’endoscopie tordue n’est pas si tordue*, Mem. Amer. Math. Soc. **194** (2008), no. 908, x+261.
- [Yu01] J.-K. Yu, *Construction of tame supercuspidal representations*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 579–622.
- [Yu09] ———, *On the local Langlands correspondence for tori*, Ottawa lectures on admissible representations of reductive p -adic groups, Fields Inst. Monogr., vol. 26, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 177–183.
- [三枝] 三枝 洋一, *Arthur 分類とその応用*, RIMS 講究録別冊「代数的整数論とその周辺 2016」より出版予定, <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mieda/pdf/Arthur-classification.pdf>.