楕円ルート系とそれに関連して現れる代数系

斉藤義久（立教大学理学部）

Abstract. この小論の目的は，古典的なルート系の拡張概念である『楕円ルート系』に対して，対応するリー代数（elliptic Lie algebra (ELA)），およびその普遍包絡環の q-変形（quantum elliptic algebra (QEA)）を考え，その構造を詳しく調べることにある．特に，楕円ルート系の特徴である『modular 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用を自然にもつ』ことの帰結として，ELA や QEA にも modular 群（の中心拡大）が作用することを紹介したい．

1. 楕円ルート系とは？(Introduction に替えて)

大雑把に言えば，楕円ルート系とは

null root の方向が 2 つあるようなルート系（の拡張概念）

を指す．この概念は，特異点理論（単純楕円型特異点の研究）を動機として，1980 年代齋藤恭司 [S1] によって導入された．今回はこうした幾何学的背景には触れず，代数的側面にのみ着目して話を始める．

1.1. 定義.

まず，楕円ルート系の定義を正確に与えよう．

Definition 1.1.1. (1) 有限次元実ベクトル空間 F と対称双線形形式 $I : F \times F \to \mathbb{R}$ が与えられた時，F の non-isotropic[1]なベクトルからなる集合 R が以下の条件を満たす時，(F, I) に属する**一般化されたルート系（generalized root system）**という．

(i) R が生成する $\mathbb{Z}$-加群を $Q(R)$ と書く時，$Q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong F$.

(ii) 任意の $\alpha \in R$ に対して，$r_\alpha(R) = R$．ただし，$\alpha^\vee := 2\alpha/I(\alpha, \alpha)$ として，

$$r_\alpha(u) := u - I(u, \alpha^\vee)\alpha \quad (u \in F). \tag{1.1.1}$$

(iii) 任意の $\alpha, \beta \in R$ に対して，$I(\beta, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$.

(2) 特に I が半正定値で，かつ I の radical $\mathrm{rad}(I)$ の次元が 2 であるとき，(F, I) に属する一般化されたルート系 R を**楕円ルート系（elliptic root system）**という．

(3) R を (F, I) に属する楕円ルート系とするとき，r_α $(\alpha \in R)$ が生成する $\mathrm{GL}(F)$ の部分群を $W(R)$ と書き，**楕円 Weyl 群（elliptic Weyl group）**と呼ぶ．

この定義は，I の（対称形式としての）符号を除けば，既存のルート系の定義と全く同じである．実際，I が正定値であれば，得られる R は有限ルート系（単純リー代数の分類に現れるもの）であり，I が半正定値かつ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{rad}(I)) = 1$ であれば，得られる R はアフィンルート系となる[2]．言い方を変えれば，

[1] $\alpha \in F$ が non-isotropic であるとは，$I(\alpha, \alpha) \neq 0$ であることを言う．

[2] 正確には『アフィンルート系の実ルートの全体』と言うべき．この定義だと，虚ルートは R に含まれない．

radicalの次元（null rootの方向）が0 : 有限ルート系
radicalの次元（null rootの方向）が1 : アフィンルート系
radicalの次元（null rootの方向）が2 : 楕円ルート系

というルート系の系列が存在していることになる．この意味で，楕円ルート系は既存の理論の自然な拡張になっている．

Example 1.1.2 ($X_l^{(1,1)}$ **型ルート系**). F_f を l 次元実ベクトル空間，I_f をその上の正定値対称双線形形式として，R_f を (F_f, I_f) に属するルート系（有限ルート系）とする．よく知られているように，R_f は A 型から G 型までの7系列に分類されるが，ここでは X_l 型（$X = A \sim G$）であるとする．そこで，$l+2$ 次元実ベクトル空間 F を

$$F := F_f \oplus (\mathbb{R}\delta_b \oplus \mathbb{R}\delta_a)$$

とし，F 上の対称双線型形式 $I : F \times F \to \mathbb{R}$ を

$$I|_{F_f \times F_f} = I_f, \quad \mathrm{rad}(I) = \mathbb{R}\delta_b \oplus \mathbb{R}\delta_a$$

で定める．このとき，I は半正定値で $\dim(\mathrm{rad}(I)) = 2$ となる．F の部分集合 R を

$$R := \{\alpha_f + m\delta_b + n\delta_a \,|\, \alpha_f \in R_f, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

とおくと，R は (F, I) に属する一般化されたルート系（楕円ルート系）になる．こうして定まる楕円ルート系 R を $X_l^{(1,1)}$ **型ルート系**と呼ぶ.

1.2. **楕円ルート系の性質**. 既に述べたように，楕円ルート系はnull rootの方向が2つあるようなルート系を指し，有限型・アフィン型ルート系の自然な拡張となっている．ところが，少し真面目に考えようとすると，

null rootの方向が $0, 1$ 個の場合と，
2 個（以上）の場合では，話が全く異なる

ということに気づく．以下，このことをもう少し詳しく見ていこう.

(a) 楕円ルート系はKac-Moody理論に由来しない

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を一般化Cartan行列 $A = (a_{i,j})$ から定まるKac-Moodyリー代数，$\mathfrak{h}$ をそのCartan部分代数とする．$\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ には A から定まる対称双線型形式が存在するが，これをルート全体が張る実部分空間に制限したものを I と書く．I の半正定値性を仮定すると，対応するルート系は有限型（$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{rad}(I) = 0$ の場合）か，アフィン型（$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{rad}(I) = 1$ の場合）に限られてしまう.

他方，楕円ルート系が属する (F, I) においては，$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{rad}(I) = 2$ であり，こういう状況はKac-Moody理論では絶対に実現出来ない.

(b) 自己同型群の構造が異なる

有限型ルート系 R_f では，ルート系の自己同型群 $\mathrm{Aut}(R_f)$ は対応するWeyl群 $W(R_f)$ にほぼ等しい．より正確には，Dynkin図形の自己同型から生成される有限群を除いて，両者は等しい．事情はアフィンルート系 R_a でも同様である.

$$W(R_f) \fallingdotseq \mathrm{Aut}(R_f), \qquad W(R_a) \fallingdotseq \mathrm{Aut}(R_a) \qquad (\text{up to 有限群}).$$

言い換えれば,

有限型・アフィン型のルート系においては，
ルート系の対称性はWeyl群によって（ほぼ）記述される

ということになっている.

他方，楕円ルート系では，事情が全く異なる．例えば上に紹介した $X_l^{(1,1)}$ 型ルート系の場合，ルート系 R は

$$R = \{\alpha_f + m\delta_b + n\delta_a \,|\, \alpha_f \in R_f, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

と定義されているであった．$g := \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して，

$$\phi_g : \alpha_f + m\delta_b + n\delta_a \mapsto \alpha_f + (pm+qn)\delta_b + (rm+sn)\delta_a \tag{1.2.1}$$

とおけば，これは F の１次変換に自然に拡張され，$\mathrm{Aut}(R)$ の元を定める．しかしながら，このような変換は楕円 Weyl 群 $W(R)$ の元によって作り出すことは出来ない．

一般の楕円ルート系では対称性がもう少し崩れているために，modular 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ はフルに作用出来ないが，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群（合同部分群）が作用することになる．いずれにせよ，

楕円ルート系 R の対称性は Weyl 群だけでは記述することが出来ず，
R は合同部分群という無限離散群の作用も同時に持っている

ということになっている．この事実の帰結として，楕円ルート系の理論には，楕円曲線や保型形式の理論が自然に現れる．これは有限型・アフィン型のルート系にはない，楕円ルート系に特有の著しい性質である．

1.3. **Marking と楕円図形．** 楕円ルート系が **null root を２方向を持つ**ことは既に述べたが，これらを一度に制御するのは難しい．解決策として，楕円ルート系の理論では『２次元空間 $\mathrm{rad}(I)$ の中に１次元の方向を手で指定する』という方法を取る．

Definition 1.3.1. R を (F, I) に属する楕円ルート系とする．$\mathrm{rad}(I)$ の１次元部分空間 G が $Q(R) \cap G \neq \{0\}$ となる時，G を R の **marking** という．また，組 (R, G) を **marked elliptic roots system（MERS）**という．

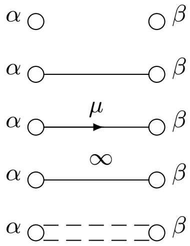
marking G が指定されると，自然な射影 $\pi_G : F \to F/G$ が定まる．この時 $R_a := \pi_G(R)$ はアフィンルート系になり，既存の理論（構造論・分類等）が使用可能になる，というストーリーになっている．実際，原論文 [S1] では，このアイデアを用いて MERS の構造解析と分類を行なっている[3]．

最後に**楕円図形（elliptic diagram）**について簡単に説明しておきたい．これは与えられた MERS (R, G) から定まる（２階建ての）有限有向グラフで，MERS の分類や構造解析に用いられる．作り方の概略は以下の通り．

1. rank 1 の自由 $\mathbb{Z}$-加群 $Q(R) \cap G$ の生成元を指定し，これを δ_a と書く．
2. R の部分集合
$$\Pi_a = \{\alpha_0, \cdots, \alpha_l\}$$
を，$\pi_G(\Pi_a)$ がアフィンルート系 R_a の simple roots を与えるように取り[4]，Π_a を頂点集合とする R_a の Dynkin 図形を描く（これがグラフの１階部分になる）．
3. 各 $0 \leq i \leq l$ に対して，$k_{\alpha_i} := \max\{k \in \mathbb{Z}_{>0} \,|\, \alpha_i + k\delta_a \in R\}$ と定め，
$$\alpha_i^* := \alpha_i + k_{\alpha_i}\delta_a$$
とおく．さらに “あるルール” に従って，$\alpha_0, \cdots, \alpha_l$ の中から頂点を選び，選ばれた頂点たちに対してのみ，α_i^* を “2 階部分” としてグラフに書き加える．

[3]正確には『R_a が被約』との仮定が必要．
[4]『simple roots が存在する』という部分に，既存の理論が使われていることに注意されたい．

4. 構成した頂点集合を $\Pi(R,G)$ とし，$\alpha,\beta\in\Pi(R,G)$ を以下のルールで結ぶ：



if $I(\alpha,\beta)=I(\beta,\alpha)=0$,

if $I(\alpha,\beta^\vee)=I(\beta,\alpha^\vee)=-1$,

if $I(\alpha,\beta^\vee)=-\mu$ and $I(\beta,\alpha^\vee)=-1$ for $\mu=2,3,4$,

if $I(\alpha,\beta^\vee)=I(\beta,\alpha^\vee)=-2$,

if $I(\alpha,\beta^\vee)=I(\beta,\alpha^\vee)=2$.

Definition 1.3.2. 上のようにして定まるグラフを $\Gamma(R,G)$ と書き，MERS (R,G) に付随する**楕円図形 (elliptic diagram)** と呼ぶ.

Remark 1.3.3. (1) 今回は $X_l^{(1,1)}$ 型（Example 1.1.2 参照）の場合のみに話を限定し，一般の MERS は基本的に扱わない．$X_l^{(1,1)}$ 型については，$\Gamma(R,G)$ の具体形を Appendix に書いたので，そちらを参照して頂きたい.

(2) 素朴に考えて『なぜ特定の頂点だけを 2 階建てにするのか？』というのは疑問に感じられる方もいることと思う．楕円図形の概念は齋藤恭司 [S1] によるが，齋藤は『Coxeter 変換の理論』を作るためにこの図形を導入している．したがって『Coxeter 変換の理論とは何か？』まで説明しないと,『なぜ特定の頂点だけを 2 階建てにするのか？』という問いに答えるのは難しい[5]．今回は紙数の都合もあり，この点は割愛する．詳しくは [S1], [S2] などを参照して頂きたい.

2. 楕円ルート系をルート系に持つリー代数

ルート系は，複素半単純リー代数の分類を目的に１９世紀末に Killing によって導入された概念である．今回はこの歴史に倣って，リー代数から議論を始めてみたい.

2.1. **トロイダルリー代数と楕円リー代数**. $\mathfrak{g}$ を複素単純リー代数，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分リー代数とする．また $\mathbb{A}:=\mathbb{C}[s_b^{\pm1},s_a^{\pm1}]$ を $\mathbb{C}$ 上の 2 変数 Laurent 多項式環とし[6]，$\Omega^1_{\mathbb{A}}$ を $\mathbb{A}$ 上の 1-form 全体，$d:\mathbb{A}\to\Omega^1_{\mathbb{A}}$ を外微分，$d\mathbb{A}$ を exact form の全体とする.

Definition 2.1.1. (1) ベクトル空間

$$\mathfrak{g}_{tor}:=(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{A})\oplus\Omega^1_{\mathbb{A}}/d\mathbb{A} \tag{2.1.1}$$

に，リー代数の構造を以下で定める：

(L1) $[x\otimes f,y\otimes g]:=[x,y]\otimes fg+(x|y)\overline{(df)g}\quad(x,y\in\mathfrak{g},\ f,g\in\mathbb{A})$;

(L2) $\Omega^1_{\mathbb{A}}/d\mathbb{A}$ は central.

これを（$\mathfrak{g}$ に付随する）**トロイダルリー代数（toroidal Lie algebra，TLA）**と呼ぶ．ただし，$(\ |\ )$ は $\mathfrak{g}$ の Killing form，$\overline{\cdot}:\Omega^1_{\mathbb{A}}\to\Omega^1_{\mathbb{A}}/d\mathbb{A}$ は自然な射影.

(2) $\mathfrak{g}_{tor}$ に degree operators $d_b:=s_b\partial_{s_b},d_a:=s_a\partial_{s_a}$ を添加して

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}:=\mathfrak{g}_{tor}\oplus\mathbb{C}d_b\oplus\mathbb{C}d_a$$

とおく．さらに，リー代数の構造は以下で定める：

(L3) $[d_\sharp,x\otimes f]:=x\otimes(s_\sharp\partial_{s_\sharp}f)\quad(\sharp=b,a)$;

[5] さらに言えば，この話には特異点理論に起因する幾何学的背景もある.

[6] $\mathbb{A}$ の変数の足を b,a としていることに疑問を感じる方もいることと思う．これは楕円曲線の１次のホモロジー群の生成元に用いられる用語 “a-cycle”, “b-cycle” に由来する．また，並べる順序を敢えて s_b,s_a としているのにも幾何学的な説明（多様体の向きづけの問題）があるが，今回は割愛する.

(L4) $[d_\sharp, \overline{f d\log s_\natural}] := \overline{(s_\sharp \partial_{s_\sharp} f) d\log s_\natural}$ $\quad (\sharp, \natural = b, a)$;

(L5) $[d_b, d_a] = 0$.

これを**楕円リー代数（elliptic Lie algebra）**と呼ぶ．ただし，$\overline{d\log s_\sharp} := \overline{s_\sharp^{-1} ds_\sharp}$.

Remark 2.1.2. 上の定義の (1) で $\mathbb{A}$ を１変数 Laurent 多項式式環 $\mathbb{C}[s^{\pm 1}]$ に取り替えると，アフィンリー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ が得られる．さらに，(2) のように degree operator を添加すると，対応するアフィン Kac-Moody リー代数が得られる．すなわち，この定義はアフィンリー代数の定義の自然な一般化になっている[7].

$\mathfrak{g}_{el}$ の部分リー代数 $\mathfrak{h}_{el}$ を

$$\mathfrak{h}_{el} := \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c_b \oplus \mathbb{C}c_a \oplus \mathbb{C}d_b \oplus \mathbb{C}d_a \quad \text{（ただし，} c_\sharp := \overline{d\log s_\sharp},\ \sharp = b, a\text{）}$$

と定めると，これは可換な部分リー代数になる．さらに，次が成り立つ．

Lemma 2.1.3. $\mathfrak{h}_{el}$ は $\mathfrak{g}_{el}$ の Cartan 部分リー代数である[8].

Cartan 部分リー代数 $\mathfrak{h}_{el}$ を用いると，$\mathfrak{g}_{el}$ のルート空間分解を定めることが出来る：

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}} = \mathfrak{h}_{el} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^* \setminus \{0\}} (\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})_\alpha \Big)$$

ただし $(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})_\alpha := \big\{ x \in \mathfrak{g}_{\mathrm{el}} \,\big|\, [h, x] = \alpha(h)x \text{ for } {}^\forall h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{el}} \big\}$.

Definition 2.1.4.

$$R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}) := \big\{ \alpha \in \mathfrak{h}_{el}^* \setminus \{0\} \,\big|\, (\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})_\alpha \neq \{0\} \big\}$$

を $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の**ルートの集合**，$\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ を $\mathfrak{g}_{el}$ の**ルート**と呼ぶ．

$\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}$ 上の非退化な対称双線型形式 $(\ |\ )_{\mathrm{el}} : \mathfrak{h}_{el} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{el}} \to \mathbb{C}$ を

$$\begin{array}{ccc} (\ |\ )_{\mathrm{el}}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} := (\ |\ ), & (\mathfrak{h}|c_\sharp)_{\mathrm{el}} = 0, & (\mathfrak{h}|d_\sharp)_{\mathrm{el}} = 0, \\ (c_\sharp|c_\natural)_{\mathrm{el}} = 0, & (d_\sharp|d_\natural)_{\mathrm{el}} = 0, & (c_\sharp|d_\natural)_{\mathrm{el}} = \delta_{\sharp,\natural} \end{array}$$

で定める．同型 $\nu : \mathfrak{h}_{\mathrm{el}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*$ を

$$\big\langle h, \nu(h') \big\rangle = (h|h')_{el} \quad h, h' \in \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}$$

と定める．ただし，$\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{h}_{\mathrm{el}} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^* \to \mathbb{C}$ は canonical pairing．この同型を通じて $\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*$ 上の非退化対称双線型形式 I_Λ を

$$I_\Lambda(\mu, \mu') := \big(\nu^{-1}(\mu) \big| \nu^{-1}(\mu') \big) \quad (\mu.\mu' \in \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*)$$

と定義する．また，

$$\delta_\sharp := \nu(c_\sharp), \quad \lambda_\sharp := \nu(d_\sharp) \quad (\sharp = b, a)$$

とし，$\nu(\mathfrak{h})$ を $\mathfrak{h}^*$ と同一視すると，次の分解が得られる：

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^* = \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\delta_b \oplus \mathbb{C}\delta_a \oplus \mathbb{C}\lambda_b \oplus \mathbb{C}\lambda_a. \tag{2.1.2}$$

---

[7]より intrinsic な言い方として，universal central extension という概念がある．これを用いれば『$\Omega_{\mathbb{A}}^1/d\mathbb{A}$ が現れる理由』を説明出来るが，今回は扱わないことにする．詳しくは Garland [G] などを参照されたい．

[8]一般に，L をリー代数とするとき，L の部分リー代数 H が以下の２条件を満たす時，Cartan 部分リー代数であると言う：(i) H べき零である．(ii) H の normalizer $N_L(H)$ が H 自身と一致する．

Definition 2.1.5. $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ が $I_\Lambda(\alpha,\alpha) \in \mathbb{R}_{>0}$ を満たす時 **real root**，そうでない時 **imaginary root** と呼ぶ．real root の全体を $R^{re}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$，imaginary root の全体を $R^{im}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ と書く．

定義から

$$R(\mathfrak{g}_{el}) = R^{re}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}) \sqcup R^{im}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}) \quad \text{(disjoint union)}$$

と分解出来るのは明らかだが，より詳細に次がわかる．

Lemma 2.1.6. $R^{re}(\mathfrak{g}_{el})$，$R^{im}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ は以下の具体的表示を持つ．

$$R^{re}(\mathfrak{g}_{el}) = \{\alpha_f + m\delta_b + n\delta_a \,|\, \alpha_f \in R(\mathfrak{g}),\, m, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$R^{im}(\mathfrak{g}_{el}) = \{m\delta_b + n\delta_a \,|\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}\}.$$

ただし，$R(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ のルート全体の集合．

このLemmaから次が従うことは明らかであろう．

Corollary 2.1.7. $\mathfrak{g}$ を X_l 型の単純リー代数とする．real root の全体 $R^{re}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ で張られる $\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*$ の部分実ベクトル空間を F，F 上の対称双線型形式 $I := I_\Lambda|_{F\times F}$ とするとき，$R := R^{re}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ は (F, I) に属する $X_l^{(1,1)}$ 型の楕円ルート系である．

すなわち，

楕円リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ は，楕円ルート系をルート系に持つ

ことがわかった．

2.2. 楕円リー代数の Weyl 群.

まず，言葉を準備する．

Definition 2.2.1. $\mathfrak{g}_{el}$ を楕円リー代数とする．$\alpha \in R^{re}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ に対し，これに付随する鏡映 $s_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h}_{el}^*)$ を

$$s_\alpha(h) := h - I_\Lambda(h, \alpha^\vee)\alpha \quad (h \in \mathfrak{h}_{el}^*) \tag{2.2.1}$$

で定める．この時，$s_\alpha \in (\alpha \in R^{re}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}))$ で生成される群

$$W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}) := \langle s_\alpha \,|\, \alpha \in R^{re}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})\rangle$$

を $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の **Weyl 群**と呼ぶ．

前節に倣い $R = R^{re}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ と書く．この時，対応 $s_\alpha \mapsto r_\alpha$ によって，全射準同型

$$W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}) \to W(R) \tag{2.2.2}$$

が定まる．s_α と r_α は定義は似ているが，作用する空間の違いから微妙な差異が生じ，$W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ と $W(R)$ は同型にはならない．以下，このことを詳しく見ていこう．

以下，$\mathfrak{g}$ のルート系 $R(\mathfrak{g})$ を R_f と書く．
(a) $W(R)$ の場合：アフィンルート系の場合，Weyl 群が $W(R_f) \ltimes Q(R_f^\vee)$ という構造を持つことはよく知られている[9]（ただし $Q(R_f^\vee)$ を coroot lattice）．楕円ルート系では **null root の方向が２つある**ことの反映として，次が成り立つ．

$$W(R) \cong W(R_f) \ltimes Q(R_f^\vee)^{\oplus 2}.$$

[9]正確には untwisted 型のアフィンルート系（$X_l^{(1)}$ 型）に限った話．

(b) $W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ の場合：$\sharp=b,a$，$\mu\in Q(R_f^\vee)$ として，$t^\mu_{\delta_\sharp}\in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ を

$$t^\mu_{\delta_\sharp}(h):=h+I_\Lambda(\delta_\sharp,h)\mu-\left\{I_\Lambda(\mu,h)+\frac{1}{2}I_\Lambda(\mu,\mu)I_\Lambda(h,\delta_\sharp)\right\}\delta_\sharp\quad(h\in\mathfrak{h}^*_{\mathrm{el}})$$

と定めると，(i) $t^\mu_{\delta_\sharp}\in W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$; (ii) $t^\mu_{\delta_\sharp}t^{\mu'}_{\delta_\sharp}=t^{\mu+\mu'}_{\delta_\sharp}=t^{\mu'}_{\delta_\sharp}t^\mu_{\delta_\sharp}$ が成り立つ．特に，(ii) から

$$\{t^\mu_{\delta_\sharp}\mid \mu\in Q(R_f^\vee)\}\cong Q(R_f^\vee)\quad \text{for each } \sharp=b,a$$

が従う．しかし，この 2 つの $Q(R_f^\vee)$ は可換ではない．実際,

$$\mathrm{Heis}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}):=\left\langle t^\mu_{\delta_b},t^{\mu'}_{\delta_a}\,\middle|\,\mu,\mu'\in Q(R_f^\vee)\right\rangle$$

とおくと，$\mathrm{Heis}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ は $Q(R_f^\vee)^{\oplus 2}$ の $\mathbb{Z}$ による中心拡大に同型となる[10]．さらに,

$$W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})\cong W(R_f)\ltimes \mathrm{Heis}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$$

が成り立つ．すなわち，$W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ と $W(R)$ の差は，$\mathrm{Heis}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ と $Q(R_f^\vee)^{\oplus 2}$ の差に他ならない．帰結として，全射準同型 (2.2.2) は完全系列（中心拡大）

$$1\to\mathbb{Z}\to W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})\to W(R)\to 1 \tag{2.2.3}$$

に延長される．

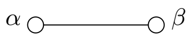
2.3. $W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ **の生成元と関係式による表示**. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の X_l 型単純リー代数とする．この時，$(R,G):=\big(R^{re}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}),\mathbb{R}\delta_a\big)$ は $X_l^{(1,1)}$ 型 MERS となる．これに付随する楕円図形 $\Gamma(R,G)$ によって，$W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ の生成元と基本関係式による表示が与えられる．

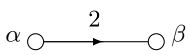
Theorem 2.3.1 (c.f. [ST],[SS])**.** $\Gamma(R,G)$ を上で定めた楕円図形，$\Pi(R,G)\subset R$ をその頂点集合とする．この時，Weyl 群 $W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ は s_α $(\alpha\in\Pi(R,G))$ で生成され，その基本関係式は次のように記述される．

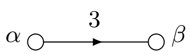
(1) $l\geq 2$ の時：以下のリストにある subdiagram が $\Gamma(R,G)$ の中に現れる毎に，右の関係式を仮定する．

(W0)  $s_\alpha^2=1,$

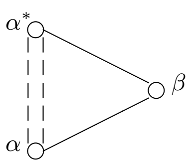
$(\mathrm{C1})_0$  $s_\alpha s_\beta=s_\beta s_\alpha,$

$(\mathrm{C1})_1$  $s_\alpha s_\beta s_\alpha=s_\beta s_\alpha s_\beta,$

$(\mathrm{C1})_2$  $s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta=s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha,$

$(\mathrm{C1})_3$  $s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta=s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha,$

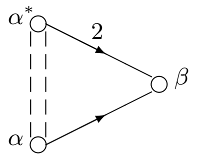
以下の diagrams においては，α,β,γ は Γ_a の頂点集合 Π_a に属すると仮定する．

$(\mathrm{EC2})_1$  $s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*}s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*}=s_\alpha s_{\alpha^*}s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*}s_\beta.$

---

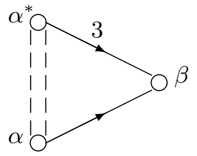
[10] $\mathrm{Heis}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ は **Heisenberg 群**と呼ばれる．これは，Theta 関数を定義する時に現れるそれと同一である（cf. [Mum]）．言い換えると，$W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ の不変式論を展開すると，その中に Theta 関数が自然に現れる．

$(\mathrm{EC2})_2$



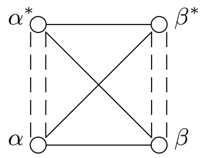
$$s_\alpha s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta = s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha,$$

$(\mathrm{EC2})_3$



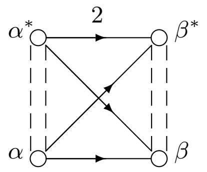
$$s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta \quad \text{and}$$
$$s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha = s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta.$$

$(\mathrm{EC3})_1$



$$s_{\beta^*} s_\alpha s_{\alpha^*} = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta \text{ and } \ s_{\alpha^*} s_\beta s_{\beta^*} = s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha.$$

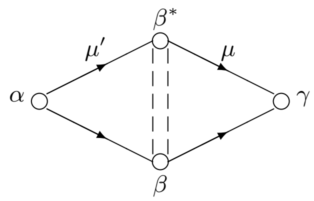
$(\mathrm{EC3})_2$



$$s_{\beta^*} s_\alpha s_{\alpha^*} = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta.$$

次の diagram においては，α, γ は 2 重点線で繋がる頂点を持たず，かつ $\Gamma(R,G)$ の中で繋がっていないと仮定する．

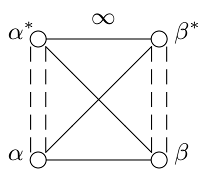
(EC4)



$$s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha s_\gamma s_\beta s_{\beta^*} s_\gamma = s_\gamma s_\beta s_{\beta^*} s_\gamma s_\alpha s_\beta s_{\beta^*} \text{ and}$$
$$s_\beta s_{\beta^*} s_\gamma s_\alpha s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha = s_\alpha s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha s_\gamma s_\beta s_{\beta^*}.$$

(2) $l = 1$ の時：上の (W0)，および次の diagram に対して右の関係式を仮定する．

$(\mathrm{EC3})_\infty$



$$s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha s_{\alpha^*} = s_{\beta^*} s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_{\beta^*} = s_{\alpha^*} s_\beta s_{\beta^*} s_\alpha.$$

関係式 $(\mathrm{C1})_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ は，古典的によく知られた Coxeter relations に他ならない．他方，$(\mathrm{EC2})_\mu$, $(\mathrm{EC3})_\mu$ $(\mu = 1, 2, 3, \infty)$ と (EC4) は既存の理論には現れない関係式で **elliptic Coxeter relations** と呼ばれる．

Remark 2.3.2. $l = 1$ の場合，通常の Coxeter relations は現れない．

2.4. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$**-action.** 楕円ルート系の大きな特徴の１つは『合同部分群の作用を持つ』ことであった．本節では，この事実の反映として，楕円リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ も $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用を持つことを見ていこう．

2 変数 Laurent 多項式環 $\mathbb{A} = \mathbb{C}[s_b^{\pm 1}, s_a^{\pm 1}]$ への $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用を

$$\varphi_g : s_b^m s_a^n \ \mapsto \ s_b^{pm+qn} s_a^{rm+sn} \qquad \left(g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right)$$

によって定める．この時，次が簡単にわかる．

Lemma 2.4.1. (1) 自己同型 $\varphi_g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ は

$$\begin{cases} \varphi_g(x \otimes f) & := x \otimes \varphi_g(f), \\ \varphi_g\big(\overline{f d\log s_\sharp}\big) & := \overline{\varphi_g(f)\, d\log \varphi(s_\sharp)}, \\ \varphi_g(s_\sharp \partial_{s_\sharp}) & := \varphi_g(s_\sharp)\partial_{\varphi_g(s_\sharp)}, \end{cases} \qquad (x \in \mathfrak{g},\, f \in \mathbb{A},\, \sharp = b, a) \tag{2.4.1}$$

によって $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の自己同型に拡張される．さらに，

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}), \quad g \mapsto \varphi_g \tag{2.4.2}$$

は群の準同型を与える．すなわち，(2.4.1) によって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ への作用が定まる．
(2) 上で与えた $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ への作用は $\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}$ を保ち，その具体形は以下で与えられる．

$$\varphi_g|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}},$$
$$\big(\varphi_g(c_b), \varphi_g(c_a)\big) = (c_b, c_a)\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad \big(\varphi_g(d_b), \varphi_g(d_a)\big) = (d_b, d_a)\begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

(3) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}$ への作用から，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathfrak{h}^*_{\mathrm{el}}$ への作用が誘導される（contragradient action）．その具体形は以下で与えられる．

$$\varphi_g|_{\mathfrak{h}^*} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^*},$$
$$\big(\varphi_g(\delta_b), \varphi_g(\delta_a)\big) = (\delta_b, \delta_a)\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad \big(\varphi_g(\lambda_b), \varphi_g(\lambda_a)\big) = (\lambda_b, \lambda_a)\begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

Remark 2.4.2. (3) で与えられる $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathfrak{h}^*_{\mathrm{el}}$ への作用 φ^*_g と書くとき，φ^*_g の F への制限は (1.2.1) の ϕ_g と一致する．すなわち，$\varphi_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ は $\phi_g \in \mathrm{Aut}(R)$ の自然な拡張になっている．

2.5. **$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ および $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の生成元と関係式による表示．** $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ を $X_l^{(1)}$ 型のアフィン Kac-Moody リー代数，$\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}$ をその Cartan 部分リー代数，α_i $(0 \le i \le l) \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{aff}}$ を単純ルート，I_{aff} を $\mathfrak{h}^*_{\mathrm{aff}}$ 上の標準的な非退化対称双線型形式とする．

Definition 2.5.1. $\widehat{A} = (a_{i,j})_{0 \le i,j \le l}$ を $X_l^{(1)}$ 型のアフィン Cartan 行列とする．この時，以下の生成元と基本関係式で定義されるリー代数を $\mathfrak{t}(\widehat{A})$ と記す．
- 生成元：$c,\, e_{i,k},\, f_{i,k},\, h_{i,k}\, (0 \le i \le l,\, k \in \mathbb{Z})$.
- 基本関係式：

(TL1) c は central.
(TL2) $[h_{i,k}, h_{j,m}] = kI_{\mathrm{aff}}(\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee)c$.
(TL3) $[h_{i,k}, e_{j,m}] = a_{i,j}e_{j,m}$, $[h_{i,k}, f_{j,m}] = -a_{i,j}f_{j,m}$.
(TL4) $[e_{i,k}, f_{j,m}] = \delta_{i,j}\left\{h_{i,k+l} + \dfrac{2k\delta_{k+m,0}}{I_{\mathrm{aff}}(\alpha_i, \alpha_i)}c\right\}$.
(TL5) $[e_{i,k}, e_{i,m}] = 0$, $[f_{i,k}, f_{i,m}] = 0$.
(TL6) $(ad\, e_{i,0})^{-a_{i,j}+1}(e_{j,m}) = 0$, $(ad\, f_{i,0})^{-a_{i,j}+1}(f_{j,m}) = 0$ for $i \ne j$.

この時，次の結果が知られている．

Theorem 2.5.2 ([MEY]). $\mathfrak{t}(\widehat{A})$ は $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ と同型である．すなわち，(TL1)$\sim$ (TL6) は $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の生成元と基本関係式による表示を与える．

Sketch of proof. $\mathfrak{g}$ の Chevally 型生成元を e_i, f_i, h_i $(1 \le i \le l)$ とする．この時，$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の部分リー代数

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{s_b} := \big(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[s_b^{\pm 1}]\big) \oplus \mathbb{C}c_b \tag{2.5.1}$$

は $X_l^{(1)}$ 型のアフィンリー代数になる．θ を $\mathfrak{g}$ の最高ルートとする時，θ に対応する $\mathfrak{sl}_2$-triple $e_\theta, f_\theta, h_\theta$ をとり，

$$x_i := x_i \otimes 1 \quad (x = e, f, h\,;\, 1 \le i \le l),$$
$$e_0 := f_\theta \otimes s_b, \qquad f_0 := e_\theta \otimes s_b^{-1}, \qquad h_0 := [e_0, f_0]$$

とおくと，e_i, f_i, h_i $(0 \le i \le l)$ は $\widehat{\mathfrak{g}}_{s_b}$ の Chevalley 型生成元を与える．このことに注意して，$\mathfrak{t}(\widehat{A})$ から $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ への写像 Φ を

$$\Phi : \begin{array}{c} c \mapsto c_a, \qquad x_{i,k} \mapsto x_i \otimes s_a^k \quad (x = e, f, h\,;\, 1 \le i \le l) \\ e_{0,k} \mapsto f_\theta \otimes s_b s_a^k, \qquad f_{0,k} \mapsto e_\theta \otimes s_b^{-1} s_a^k, \qquad h_{0,k} \mapsto h_0 \otimes s_a^k \end{array} \tag{2.5.2}$$

で定めると，$\mathfrak{t}(\widehat{A})$ から $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ への同型を与える． □

Remark 2.5.3. (1) 証明からもわかる通り，この構成は

$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ をアフィンリー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_{s_b}$ のループ化とみなす

という着想に基づいている[11]．この考え方は今後も重要な役割を果たすことになる．
(2) ただし，ループ化のタネになるアフィンリー代数を $\widehat{\mathfrak{g}}_{s_b}$ に選ぶ必然性はどこにも無く，同時にループ化するときの 1 変数 Laurent 多項式環の生成元を s_a に選ぶ必然性も無い．実際，これらは $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の自己同型 φ_g $(g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ によって[12]いかようにも動かすことが出来る．すなわち，

(TL1)〜(TL6) は $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の基本関係式を与えているが，具体的な同型対応 Φ を指定するには，$\mathbb{A} = \mathbb{C}[s_b^{\pm 1}, s_a^{\pm 1}]$ の生成元の選択[13]を行わなければならない

ことに注意して頂きたい．この選択を，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ がコントロールしている訳である．
(3) 話を楕円リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ に拡張するには，degree operators を添加すれば良い．この部分は易しいので省略する．

3. $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の自己同型

3.1. **群** $\mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big)$．楕円リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ を調べる上で，その自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ の決定が重要であることは言うまでもないであろう．しかし，この問題にはまだまだ未解明な部分が多く『解決には程遠い』というのが現状である．今回は『楕円ルート系との関係に注目したい』ということもあり，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ 全体を考えるのではなく，次のような部分群に限って議論を進めることにする．

Definition 3.1.1.

$$\mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big) := \left\{ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}) \subset \mathfrak{h}_{\mathrm{el}} \text{ and} \\ \varphi|_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}} \in \mathrm{O}\big(\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big) \end{array} \right\}.$$

$\varphi \in \mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big)$ とすると，$\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}$ への制限 $\varphi|_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}}$ は双対空間 $\mathfrak{h}_{el}^*$ の自己同型 $(\varphi|_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}})^*$ を自然に誘導する．特に，$\varphi|_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}}$ は $\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}$ の非退化対称双線型形式 $(\,|\,)_{\mathrm{el}}$ を保つので，$(\varphi|_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}})^* \in \mathrm{O}(\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*, I_\Lambda)$ となっている．この時，次が成り立つ．

[11]この考え方をルート系レベルで行なっているのが，marking である．

[12]前節では，φ_g を $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の自己同型として導入したが，これが $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の自己同型にもなっていることは明らかであろう．

Lemma 3.1.2 ([Sa2]). $(\varphi|_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}})^* \in \mathrm{O}(\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*, I_\Lambda)$ は $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ のルートの集合 $R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ を保つ.

$$\mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*}(R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})) := \left\{\psi \in \mathrm{O}(\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*, I_\Lambda) \,\middle|\, \psi(R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})) \subset R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})\right\}$$

とおくと，Lemma 3.1.2 より，写像

$$\Phi : \mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big) \to \mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*}(R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})), \quad \varphi \mapsto (\varphi|_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}})^*$$

が定まる.

Theorem 3.1.3 ([Sa2]). (1) $\Phi : \mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big) \to \mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*}(R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}))$ は全射である.
(2) 次の完全系列が存在する：

$$1 \to \mathrm{Hom}(Q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}), \mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*}(R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})) \to 1. \tag{3.1.1}$$

ただし，$Q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ は $R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ で生成される lattice，$\eta \in \mathrm{Hom}(Q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}), \mathbb{C}^\times)$ に対し $\Psi(\eta)$ は

$$\Psi(\eta) : x \mapsto \eta(\alpha)x \quad \text{for } x \in (\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})_\alpha$$

で定まる $\mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big)$ の元.

Theorem 3.1.3 は

- 『各 root space 毎にベクトルをスカラー倍する操作（Ψ の像）』を modulo にすると，$\mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big)$ はルートの自己同型で尽きる

と主張している．他方，ルートの自己同型群 $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*}(R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}))$ については，

- up to 有限群で，$\mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*}(R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}))$ は半直積 $W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}) \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と等しい[14]

ことが知られている．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ 全体に作用することは 2.4 節で既に見た．したがって，残る問題は

$W(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ の部分をどうやって $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の自己同型に拡張するか？

であり，ここが解決出来れば $\mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big)$ を，大筋で理解できたと言って良いだろう[15]．この点については次節で考察する.

Remark 3.1.4. 単純リー代数の場合には，次の完全系列が存在することが知られている（see [Bo]）：

$$1 \to \mathrm{Hom}(Q(\mathfrak{g}), \mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}^*}(R(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})) \to 1.$$

Theorem 3.1.3 は，この結果の楕円リー代数版である[16].

---

[14]『up to 有限群』の有限群の構造も完全の分かっているが，正確に述べようとすると長くなってしまうので，今回は敢えて曖昧な説明に留めた．詳しくは [SS] を参照されたい.

[15]『up to 有限群』の有限群の部分も『$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の自己同型への拡張の方法』は分かっているので，$\mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big)$ はその構造が完全に分かっている.

[16]文献 [Bo] は，有名な Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6 の続きである．あまり知られていないが結構色々なことが書いてあるので，目を通されると意外な発見があるかも知れない.

3.2. **Artin group action.** まず，言葉を１つ準備する．

Definition 3.2.1. 楕円リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ に対し，$(R,G) = (R^{re}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}), \mathbb{R}\delta_a)$ を付随するMERS，$\Gamma(R,G)$ をその楕円図形とする．この時，以下の生成元と基本関係式によって定義される群を**楕円 Artin 群（elliptic Artin group）**と呼び，$A(R,G)$ と記す．

- 生成元：a_α $(\alpha \in \Pi(R,G))$．ただし $\Pi(R,G)$ は $\Gamma(R,G)$ の頂点集合．
- 基本関係式：楕円図形 $\Gamma(R,G)$ に付随する Coxeter relations $(\mathrm{C1})_0 \sim (\mathrm{C1})_2$ と elliptic Coxeter relations $(\mathrm{EC2})_1 \sim (\mathrm{EC4})$ の全て．

Remark 3.2.2. 楕円 Artin 群 $A(R,G)$ は，“楕円正則軌道空間” の基本群として，幾何学的に定義する方法もある（その場合，上の定義は『定理』になる）．“Artin 群” の本来の意味[17]からして，こちらの方が正統な定義と言えるが，今回は割愛する．

Definition 3.2.3. $0 \le i \le l,\ n \in \mathbb{Z}$ に対して，$S_{i,n} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ を次で定める．

$$S_{i,n} := \exp(\mathrm{ad}(e_{i,n}))\exp(\mathrm{ad}(-f_{i,-n}))\exp(\mathrm{ad}(e_{i,n})).$$

この形の自己同型は，単純リー代数や Kac-Moody リー代数の場合でもよく用いられる[18]．上の定義は，その楕円版である．この時，次が成り立つ．

Proposition 3.2.4 ([Sa2])**.** (1) 任意の $0 \le i \le l,\ n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\Phi(S_{i,n}) = (S_{i,n}|_{\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}})^* = s_{\alpha_i + n\delta_a}.$$

すなわち，$S_{i,n} \in \mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big)$ である．

(2) 楕円図形 $\Gamma(R,G)$ の頂点集合 $\Pi(R,G)$ に含まれるような α_i, α_j^* $(0 \le i,j \le l)$ に対し，$S_{\alpha_i}\, S_{\alpha_j^*} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ を次で定める．

$$S_{\alpha_i} := S_{i,0}, \qquad S_{\alpha_j^*} := S_{j,1}. \tag{3.2.1}$$

(i) $\{S_\alpha \,|\, \alpha \in \Pi(R,G)\}$ は，Coxeter relations $(\mathrm{C1})_0 \sim (\mathrm{C1})_2$ を全て満たす．

(ii) $\{S_\alpha \,|\, \alpha \in \Pi(R,G)\}$ は，elliptic Coxeter relations のうち，$(\mathrm{EC3})_1$, $(\mathrm{EC3})_2$ 以外を全て満たす．

Proposition 3.2.4 により，(3.2.1) は “ほぼ楕円 Artin 群の作用を定めているが，ちょっとだけズレている” ことがわかる．さらに考察を続けると，いくつかの例外を除いて『楕円 Artin 群の作用になるように補正できる』ことがわかる．いくつか概念を準備する．

Definition 3.2.5. Γ_a を楕円図形 $\Gamma(R,G)$ の 1 階部分に現れるアフィン型の Dynkin 図形，$\Pi_a = \{\alpha_0, \cdots, \alpha_l\}$ をその頂点集合とする．写像 $o : \Pi_a \to \{\pm 1\}$ がグラフ Γ_a の **orientation** であるとは，次の条件が満たされることを言う：

（条件）Γ_a の中で辺で繋がる任意の 2 頂点 α_i, α_j に対し，$o(\alpha_i)o(\alpha_j) = -1$.

定義から次はすぐわかる．

- Γ_a が $A_{2l}^{(1)}$ の時，Γ_a は orientation を持たない．
- それ以外の場合には，必ず orientation が存在する．

[17]古典的な場合，$\mathfrak{h}^*$ から各鏡映 s_α $(\alpha \in R(\mathfrak{g}))$ の鏡映面を除いた補集合を Weyl 群の作用で割った空間を正則軌道空間と呼び，その基本群を **Artin 群**と呼ぶ（[Br],[BS]）．A 型の場合は **braid 群**と呼ばれる場合もある．楕円の場合も考え方はほぼ同じだが，$\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*$ 全体ではなく，ある部分複素領域（楕円周期領域と呼ばれる）に制限して話をする必要がある（[SS]）．

[18]いわゆる “braid 群の作用” を定める自己同型

Γ_a の形状によって，orientation を持つ場合と持たない場合がある．
以上の準備の元に次を示すことが出来る．

Proposition 3.2.6 ([Sa2])**.** Γ_a は orientation o を持つと仮定する．また $0 \le i \le l$ に対して，$\eta_i \in \mathrm{Hom}(Q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}), \mathbb{C}^\times)$ を

$$\eta_i(\alpha) := (-1)^{\langle h_i, \alpha\rangle} \quad (\alpha \in Q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}))$$

と定める．この時，$S_{\alpha_j^*}$ $(\alpha_j^* \in \Pi(R,G))$ を改めて

$$S_{\alpha_j^*} := \Psi(\eta_j)^{o(\alpha_j)} S_{j,1}$$

とおくと，$\{S_\alpha \,|\, \alpha \in \Pi(R,G)\}$ は，全て Coxeter relations $(\mathrm{C1})_0 \sim (\mathrm{C1})_2$ と，全ての elliptic Coxeter relations $(\mathrm{EC2})_1 \sim (\mathrm{EC4})$ を満たす．すなわち，対応

$$a_\alpha \;\mapsto\; S_\alpha \quad (\alpha \in \Pi(R,G)) \tag{3.2.2}$$

は楕円 Artin 群 $A(R,G)$ から $\mathrm{Aut}\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}, (\,|\,)_{\mathrm{el}}\big)$ への準同型写像を与える．言い換えると，(4.3.1) によって，$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ への $A(R,G)$ の作用が定まる．

Remark 3.2.7. 同様の問題はアフィンリー代数の場合でも生じ得る．しかし，この場合は『有限ルート系の Dinkin 図形は常に orientation を持つ』という特殊事情のために上のような問題は起きず，リー代数には常に Artin 群が作用する．

4. Quantum elliptic algebras (QEA)

4.1. **定義.** Quantum affine algebra (QAA) には,

(a) Chevalley 型生成元による，有限個の生成元と関係式による表示

(b) Drinfeld 型生成元による，無限個の生成元と関係式による表示

の２つの定義の方法がある．(a) は QAA を『アフィン Kac-Moody リー代数の（普遍包絡環の）q-変形』と見る考え方で，多くの文献ではこちらを定義として採用している．他方，(b) は QAA を『単純リー代数 $\mathfrak{g}$ のループ化の中心拡大 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の（普遍包絡環の）q-変形』と見る考え方である．可解格子模型への応用や，QAA の有限次元表現を考える場合など，問題によってはこちらの表示の方が扱い易い場合もある．
量子群研究の黎明期において『(a), (b) ２つの表示が本当に同じ代数を与えるか？』は大きな問題であったが[19]，Beck ([B], 1994) は QAA に対する braid 群（Artin 群）の作用を用いることで，この問題を肯定的に解決した．

楕円リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の場合には, 対応するルート系が楕円ルート系であり, Kac-Moody 理論の外側に位置するものであることはすでに述べた．したがって，(a) の方法で q-変形を定義するのは無理である．他方，(b) の方法ならば，うまく定義できる可能性がある．実際，Theorem 2.5.2 は『$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ をアフィン Kac-moody リー代数の１変数ループ化とみなす』ものであり，この発想を量子化（q-変形）することで，Quantum elliptic algebras (QEA) の定義に至る．

Definition 4.1.1. $l \ge 2$ とし，$\mathfrak{g}$ を X_l 型単純リー代数とする．この時，以下の生成元と基本関係式によって定まる $\mathbb{Q}(q)$ 上の unital associative algebra を **Quantum elliptic algebra (QEA)** と呼び，$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ と書く：

• 生成元：$E_{i,k},\, F_{i,k},\, H_{i,r},\, K_i^{\pm 1},\, q^{\pm c},\, q^{\pm d_\sharp} \quad (0 \le i \le l,\, k \in \mathbb{Z},\, r \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\, \sharp = b, a)$,

[19] QAA の (b) の表示（Drinfeld realization）は Drinfeld ([D], 1998) による．この論文は結果だけしか書いていない短いもので，当時（多分，Drinfeld 本人以外の）誰にも解読出来なかった．

- 基本関係式：

(Q0) $q^{\pm c}$ は central，かつ $q^{\pm c}q^{\mp c}=1$.

(Q1) $K_i^{\pm 1}K_i^{\mp 1}=1$，かつ $K_i^{\pm 1}K_j^{\pm 1}=K_j^{\pm 1}K_i^{\pm 1}$.

(Q2) $q^{d_b}E_{i,k}q^{-d_b}=q^{\delta_{i,0}}E_{i,k}$，$q^{d_b}F_{i,k}q^{-d_b}=q^{-\delta_{i,0}}F_{i,k}$，$[q^{d_b},H_{i,r}]=0$,
$q^{d_a}X_{i,k}q^{-d_a}=q^kX_{i,k}$ $(X=E,F,H)$,
$[q^{d_b},q^{d_a}]=0$，$[q^{d_\sharp},K_i^{\pm 1}]=0$，$q^{\pm d_\sharp}q^{\mp d_\sharp}=1$ $(\sharp=b,a)$.

(Q3) $[K_i^{\pm 1},H_{j,r}]=0$.

(Q4) $[H_{i,r},H_{j,s}]=\delta_{r+s,0}\dfrac{[r\langle h_i,\alpha_j\rangle]_i}{r}\dfrac{q^{rc}-q^{-rc}}{q_j-q_j^{-1}}$.

(Q5) $K_iE_{j,k}K_i^{-1}=q_i^{\langle h_i,\alpha_j\rangle}E_{j,k}$，$K_iF_{j,k}K_i^{-1}=q_i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}F_{j,k}$.

(Q6) $[H_{i,r},E_{j,k}]=\dfrac{[r\langle h_i,\alpha_j\rangle]_i}{r}q^{\frac{r-|r|}{2}c}E_{j,k+r}$,

$[H_{i,r},F_{j,k}]=-\dfrac{[r\langle h_i,\alpha_j\rangle]_i}{r}q^{\frac{r+|r|}{2}c}F_{j,k+r}$.

(Q7) $[E_{i,k},F_{j,l}]=\dfrac{\delta_{i,j}}{q_i-q_i^{-1}}\bigl\{q^{-lc}K^+_{i,k+l}-q^{-kc}K^-_{i,k+l}\bigr\}$.
ただし，

$$K_i^{\pm}(z):=\sum_{k\geq 0}K^{\pm}_{i,\pm k}z^{\mp k}=K_i^{\pm 1}\exp\bigl(\pm(q_i-q_i^{-1})\sum_{r>0}H_{i,\pm r}z^{\mp r}\bigr).$$

(Q8) $[E_{i,k+1},E_{j,l}]_{q_i^{\langle h_i,\alpha_j\rangle}}+[E_{j,l+1},E_{i,k}]_{q_i^{\langle h_i,\alpha_j\rangle}}=0$,
$[F_{i,k+1},F_{j,l}]_{q_i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}}+[F_{j,l+1},F_{i,k}]_{q_i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}}=0$.

(Q9) $i\neq j$ とする．$n:=1-\langle h_i,\alpha_j\rangle$ とおくとき，

$$\mathrm{Sym}_{k_1,\cdots,k_n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}_i X_{i,k_1}\cdots X_{i,k_r}X_{j,m}X_{i,k_{r+1}}\cdots X_{i,k_n}=0\quad(X=E,F).$$

ただし，$q_i:=q^{I_\Lambda(\alpha_i,\alpha_i)/2}$，$[k]_i:=\dfrac{q_i^k-q_i^{-k}}{q_i-q_i^{-1}}$，$[r]_i!:=\prod_{k=1}^r[k]_i$，$\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}_i:=\dfrac{[n]_i!}{[n-r]_i![r]_i!}$.
また，$I_\Lambda:\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*\times\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*\to\mathbb{C}$ は，short root の長さが $\sqrt{2}$ になるように正規化しておく．

Remark 4.1.2. (1) $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ には２つの部分代数

$$U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_{s_b}):=\bigl\langle E_{i,0},\ F_{i,0},\ K_i^{\pm 1}\,\big|\,0\leq i\leq l\bigr\rangle,$$
$$U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_{s_a}):=\bigl\langle E_{i,n},\ F_{i,n},\ H_{i,r},\ K_i^{\pm 1},\ q^{\pm c}\,\big|\,1\leq i\leq l,\ n\in\mathbb{Z},\ r\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\bigr\rangle$$

を含む（それぞれに degree operators $q^{\pm d_\sharp}$ $(\sharp=b,a)$ を付け加えても良い）．両者は共に量子アフィン代数に同型であるが，前者は Chevalley 型生成元，後者は Drinfeld 型生成元で書かれており,（少なくとも見た目には）両者は対等ではない[20].

(2)$\mathfrak{g}$ が A 型の場合には，中心元 $\kappa^{\pm 1}$ をさらに添加する場合もある．その場合，(Q4), (Q6), (Q8) は以下のような変更を受ける：

[20]実際には『この２つの量子アフィン代数を取り替える $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ の自己同型が存在する』ので，両者は対等であると言える．このことには後でもう一度触れる（4.4 節）.

(Q4) $[H_{i,r}, H_{j,s}] = \delta_{r+s,0} \dfrac{[r\langle h_i, \alpha_j\rangle]_i}{r} \dfrac{q^{rc}-q^{-rc}}{q_j - q_j^{-1}} \kappa^{-rm_{i,j}}$.

(Q6) $[H_{i,r}, E_{j,k}] = \dfrac{[r\langle h_i, \alpha_j\rangle]_i}{r} q^{\frac{r-|r|}{2}c} E_{j,k+r} \kappa^{-rm_{i,j}}$,

$[H_{i,r}, F_{j,k}] = -\dfrac{[r\langle h_i, \alpha_j\rangle]_i}{r} q^{\frac{r+|r|}{2}c} F_{j,k+r} \kappa^{-rm_{i,j}}$.

(Q8) $\kappa^{m_{i,j}} [E_{i,k+1}, E_{j,l}]_{q_i^{\langle h_i,\alpha_j\rangle}} + [E_{j,l+1}, E_{i,k}]_{q_i^{\langle h_i,\alpha_j\rangle}} = 0$,

$\kappa^{m_{i,j}} [F_{i,k+1}, F_{j,l}]_{q_i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}} + [F_{j,l+1}, F_{i,k}]_{q_i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}} = 0$.

ただし，$M = (m_{i,j})_{0\le i,j\le l}$ は以下で定まる整数係数の $l+1$ 次歪対称行列とする：

$$m_{i,j} = \begin{cases} +1 & \text{if } j \equiv i-1 \,(\mathrm{mod}\,(l+1)), \\ -1 & \text{if } j \equiv i+1 \,(\mathrm{mod}\,(l+1)), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

こうして定義される代数を $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \kappa)$ と書く．$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \kappa)$ から degree operators $q^{\pm d_\sharp}$ ($\sharp = b, a$) を除いたものは **quantum toroidal** $\mathfrak{gl}_{l+1}$ とも呼ばれている（[FJMM]）．筆者らによる [Sa1], [STU]，あるいは [VV] で扱われているのもこちらの代数である．また，[M1] で扱われている代数は定義は異なるが，生成元の取り替えによって，quantum toroidal $\mathfrak{gl}_{l+1}$ に（本質的に）一致する．今後本節で述べる内容は,（多少の修正の元に）quantum toroidal $\mathfrak{gl}_{l+1}$ でも成り立つが，いたずらに記述が複雑になってしまうので割愛する．

(3) (2) で行なった操作（中心元 $\kappa^{\pm1}$ を添加する操作) を仮に κ-deformation と呼ぶことにしよう．A 型以外の QEA に対しても形式的には κ-deformation $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \kappa)$ を考えることが出来るが，その場合，生成元をうまく取り替えることで，同型

$$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \kappa) \cong U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}) \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathbb{Q}(q)[\kappa^{\pm1}]$$

が証明できてしまう．すなわち，κ-deformation は “自明化” 出来てしまい，意味をなさない．この事実には『A 型以外だとアフィンの Dynkin 図形が tree になる』という事実が効いている．逆に言えば『A 型のアフィンの Dynkin 図形は loop を持っているために，この場合に限って非自明な κ-deformation が存在する』というカラクリになっている．

4.2. **楕円図形と有限個の基本関係式による表示**. 楕円リー代数の場合に倣い，QEA に対しても『Artin group action』,『$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ action』等の自己同型を考えたいのだが, $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ は無限個の生成元と基本関係式で定義されているため,『自己同型であること（well-definedness）のチェックが非常に大変になる』という技術的な困難が生じる．

他方，$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ の基本関係式をよく見ると，

$$E_{i,0},\ F_{i,0},\ E_{i,1},\ F_{i,-1}, K_i^{\pm1}\,(0 \le i \le l) \quad \text{と} \quad q^{\pm c},\ q^{\pm d_\sharp}\,(\sharp = b, a)$$

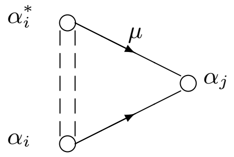
という有限個の元で生成されれていることが容易にわかる．問題は『どれだけの関係式を仮定すれば $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ が復元できるか？』ということなのだが，この問題に対して現時点で得られている回答は，次の通り．

Theorem 4.2.1. $\mathfrak{g}$ を X_l 型単純リー代数（$l \geq 2$），$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ を付随する楕円リー代数，(R, G) を対応する MERS とする．楕円図形 $\Gamma(R, G)$ の各頂点 $\alpha \in \Pi(R, G)$ に対して

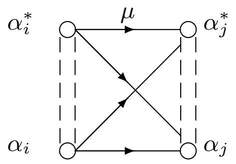
$$E_\alpha := \begin{cases} E_{i,0} & \text{if } \alpha = \alpha_i, \\ E_{j,1} & \text{if } \alpha = \alpha_j^*, \end{cases} \quad F_\alpha := \begin{cases} F_{i,0} & \text{if } \alpha = \alpha_i, \\ F_{j,-1} & \text{if } \alpha = \alpha_j^*, \end{cases} \quad K_\alpha := \begin{cases} K_i & \text{if } \alpha = \alpha_i, \\ q^c K_j & \text{if } \alpha = \alpha_j^* \end{cases}$$

とおく．この時，$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ は以下のような生成元と基本関係式による表示を持つ．

- 生成元：E_α, F_α $(\alpha \in \Pi(R, G))$，$K_{\alpha_i}^{\pm 1}$ $(0 \leq i \leq l)$，$q^{\pm c}$, $q^{\pm d_\sharp}$ $(\sharp = b, a)$.
- 基本関係式：
  1. $q^{\pm c}$, $q^{\pm d_\sharp}$ $(\sharp = b, a)$ に関連する関係式（$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ の定義関係式からそのまま借用）
  2. 各頂点 $\overset{\alpha}{\circ}$ ごとの $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha^{\pm 1}$ に対する $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の関係式
  3. $\Pi(R, G)$ 内の各辺に対する q-Serre relations.
  4. 以下のような $\Pi(R, G)$ 内の subdiagram に対して仮定される新しい関係式：

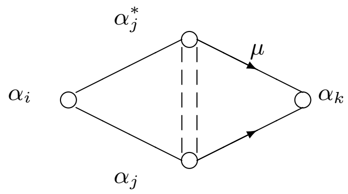
(E1) 

$$[[E_{\alpha_i^*}, E_{\alpha_j}]_{q_i^{-1}}, E_{\alpha_i}]_{q_i} = 0,$$
$$[F_{\alpha_i}, [F_{\alpha_j}, F_{\alpha_i^*}]_{q_i}]_{q_i^{-1}} = 0,$$
where $\mu = 1, 2, 3$.

(E2) 

$$E_{\alpha_j^*} = K_i^{-1}[[F_{\alpha_i}, E_{\alpha_i^*}], E_{\alpha_j}]_{q_i^{-1}},$$
$$F_{\alpha_j^*} = [F_{\alpha_j}, [F_{\alpha_i^*}, E_{\alpha_i}]]_{q_i} K_i.$$
where $\mu = 1, 2$.

次の関係式は $B_3, D_4, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ 型の場合のみ仮定する．

(E3) 

$$[[[E_{\alpha_j^*}, F_{\alpha_j}], E_{\alpha_i}]_{q_j^{-1}}, E_{\alpha_k}]_{q_j^{-1}} = 0,$$
$$[F_{\alpha_k}, [F_{\alpha_i}, [E_{\alpha_j}, F_{\alpha_j^*}]]_{q_j}]_{q_j} = 0,$$
where $\mu = 1, 2, 3$.

次の関係式は D_4, E_6, E_7, E_8 の場合にのみ仮定する．

(E4) $[[[F_{\alpha_i}, E_{\alpha_i^*}], E_{\alpha_i^*}]_{q_i^2}, E_{\alpha_i^*}]_{q_i^4} = 0$, $[F_{\alpha_i^*}, [F_{\alpha_i^*}, [F_{\alpha_i^*}, E_{\alpha_i}]]_{q_i^{-2}}]_{q_i^{-4}} = 0$.

ただし，$[X, Y]_q := XY - qYX$.

Remark 4.2.2. (1) (E3) に現れるルート系の型に関する仮定は，**楕円図形の中に２重点線が１箇所しか現れない場合**を意味している．それ以外の場合でもこの subdiagram は現れるが，その場合，関係式 (E3) は他の関係式から証明することが出来るので，“不要” となる．したがって仮定したとしても何ら影響はない．

(2) (E4) は『１つの２重点線が現れるごとに仮定される関係式』であるが，(i) ２重点線が $\Gamma(R, G)$ の中に２箇所以上ある or (ii) １箇所であっても，その頂点が $\mu = 2, 3$ で他とつながっている，という場合には他の関係式から証明できるので，やはり “不要” となる．(E3) 同様，全ての２重点線に対して仮定しても，定義に影響は与えない．このタイプの subdiagram は Weyl 群の基本関係式には現れないし，また『simply laced の場合だけ』という仮定も些か不自然であるので,『本当は他から証明できるのでは？』と疑っているが，今のところ成功していない．

(3) 証明は，Beck[B] が，量子アフィン代数（QAA）の場合に Chevalley 型生成元による定義と Drinfeld 型生成元による定義の同値性を証明した際に用いいた方法を，今の場合に適用出来るように拡張することで，なされれる．

4.3. **Artin group action.** 本節の内容は，3.2 節の q-変形版に当たる．

Definition 4.3.1. $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ に作用する operators T_{α_i}, $\overline{T}_{\alpha_i^*}$ $(0 \le i \le l)$ を次で定める．

$$T_{\alpha_i}(E_{j,0}) := \begin{cases} -F_{i,0}K_i & \text{if } j = i, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{-a_{i,j}} (-1)^r q_i^{-r} E_{i,0}^{(-a_{i,j}-r)} E_{j,0} E_{i,0}^{(r)} & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

$$T_{\alpha_i}(F_{j,0}) := \begin{cases} -K_i^{-1}E_{i,0} & \text{if } j = i, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{-a_{i,j}} (-1)^r q_i^{r} F_{i,0}^{(r)} F_{j,0} F_{i,0}^{(-a_{i,j}-r)} & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

$$T_{\alpha_i}(E_{j,1}) := \begin{cases} -q^c K_i^{-1}F_{i,1} & \text{if } j = i, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{-a_{i,j}} (-1)^r q_i^{-r} E_{i,0}^{(-a_{i,j}-r)} E_{j,1} E_{i,0}^{(r)} & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

$$T_{\alpha_i}(F_{j,-1}) := \begin{cases} -q^{-c} E_{i,-1}K_i & \text{if } j = i, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{-a_{i,j}} (-1)^r q_i^{r} F_{i,0}^{(r)} F_{j,-1} F_{i,0}^{(-a_{i,j}-r)} & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

$$T_{\alpha_i}(K_j) := K_j K_i^{-a_{i,j}}, \quad T_{\alpha_i}(q^c) := q^c, \quad T_{\alpha_i}(q^{d_b}) := q^{d_b} \quad T_{\alpha_i}(q^{d_a}) := q^{d_a};$$

$$\overline{T}_{\alpha_i^*}(E_{j,0}) = \begin{cases} \dfrac{q^{2c}}{[2]_i}\bigl\{q_i^{-4}E_{i,0}F_{i,-1}^2 - (1+q_i^{-2})F_{i,-1}E_{i,0}F_{i,-1} + q_i^2 F_{i,-1}^2 E_{i,0}\bigr\}K_i^2 & \text{if } j = i, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{-a_{i,j}} (-1)^r q^{-r} E_{i,1}^{(-a_{i,j}-r)} E_{j,0} E_{i,1}^{(r)} & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

$$\overline{T}_{\alpha_i^*}(F_{j,0}) = \begin{cases} \dfrac{q^{-2c}}{[2]_i}K_i^{-2}\bigl\{q_i^{4}E_{i,1}^2F_{i,0} - (1+q_i^{2})E_{i,1}F_{i,0}E_{i,1} + q_i^{-2} F_{i,0} E_{i,1}^2\bigr\} & \text{if } j = i, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{-a_{i,j}} (-1)^r q_i^{r} F_{i,-1}^{(r)} F_{j,0} F_{i,-1}^{(-a_{i,j}-r)} & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

$$\overline{T}_{\alpha_i^*}(E_{j,1}) = \begin{cases} -q^c F_{i,-1}K_i & \text{if } j = i, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{-a_{i,j}} (-1)^r q_i^{-r} E_{i,1}^{(-a_{i,j}-r)} E_{j,1} E_{i,1}^{(r)} & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

$$\overline{T}_{\alpha_i^*}(F_{j,-1}) = \begin{cases} -q^{-c} K_i^{-1}E_{i,1} & \text{if } j = i, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{-a_{i,j}} (-1)^r q_i^{r} F_{i,-1}^{(r)} F_{j,-1} F_{i,-1}^{(-a_{i,j}-r)} & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

$$\overline{T}_{\alpha_i^*}(K_j^{\pm 1}) = q^{\mp I_\Lambda(\alpha_i,\alpha_j)c} K_j^{\pm 1} K_i^{\mp a_{i,j}},$$

$$\overline{T}_{\alpha_i^*}(q^{\pm c}) := q^{\pm c}, \quad \overline{T}_{\alpha_i^*}\big(q^{d_b}\big) := q^{d_b}\big(q^{-c}K_i^{-1}\big)^{\delta_{i,0}}, \quad \overline{T}_{\alpha_i^*}\big(q^{d_a}\big) := q^{d_a} q^{-c} K_i^{-1}.$$

ただし，$a_{i,j} := \langle h_i, \alpha_j \rangle$．また $X_{i,k}$ $(X = E, F)$ に対し，$X_{i,k}^{(r)} := X_{i,k}^r/[r]_i!$.

Remark 4.3.2. 定義だけを見ていると,『なぜこんなモノを考えるのか？』という疑問を感じられる方もいると思うが，実はそれほど唐突なものではない．実際，$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の場合の楕円 Artin 群の作用（(3.2.1); exponential map と adjoint で定義されるもの）が，$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の生成元に具体的にどう当たっているか？をサボらずに真面目に書き下してみると，上の定義が (3.2.1) の自然な拡張になっていることが分かる．

Theorem 4.3.3. (1) $T_{\alpha_i}, \overline{T}_{\alpha_i^*}$ は well-defined で，共に $\mathrm{Aut}\big(U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})\big)$ の元.

(2) $\Pi(R, G)$ を楕円図形の頂点集合とする．この時 $\{T_{\alpha_i}, \overline{T}_{\alpha_j^*} \,|\, \alpha_i, \alpha_j^* \in \Pi(R, G)\}$ は Coxeter relations $(\mathrm{C1})_0 \sim (\mathrm{C1})_2$ を全て満たす．さらに，elliptic Coxeter relations のうち，$(\mathrm{EC3})_1$, $(\mathrm{EC3})_2$ 以外を全て満たす.

(3) Γ_a は orientation o を持つとする．$\eta_i \in \mathrm{Hom}(Q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}), \mathbb{Q}(q)^\times)$ をリー代数の場合と同様に $\eta_i(\alpha) := (-1)^{\langle h_i, \alpha\rangle}$ $(\alpha \in Q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}))$ と定め，$T_{\alpha_j^*}$ $(\alpha_j^* \in \Pi(R, G))$ を

$$T_{\alpha_j^*} := \Psi(\eta_j)^{o(\alpha_j)} \overline{T}_{\alpha_j^*}$$

とおくと，$\{T_\alpha \,|\, \alpha \in \Pi(R, G)\}$ は，全て Coxeter relations $(\mathrm{C1})_0 \sim (\mathrm{C1})_2$ と，全ての elliptic Coxeter relations $(\mathrm{EC2})_1 \sim (\mathrm{EC4})$ を満たす．すなわち，対応

$$a_\alpha \;\mapsto\; T_\alpha \quad (\alpha \in \Pi(R, G)) \tag{4.3.1}$$

は楕円 Artin 群 $A(R, G)$ から $\mathrm{Aut}\big(U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})\big)$ への準同型写像を与える．言い換えると，(4.3.1) によって，$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ への $A(R, G)$ の作用が定まる．

4.4. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$**-action.** はじめに，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ についての基本事項をおさらいしておく．

(i) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって生成される．

(ii) その場合の基本関係式は $S^2 = (ST)^3 = (TS)^3$, $S^4 = 1$ である．

(iii) $A(A_2) := \big\langle a_1, a_2 \,\big|\, a_1a_2a_1 = a_2a_1a_2 \big\rangle$ を A_2 型の Artin (braid) 群とする時，次の完全系列（中心拡大）が存在する．ただし，$c := (a_1a_2)^3 = (a_2a_1)^3$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \langle c^2 \rangle \cong \mathbb{Z} & \to & A(A_2) & \to & SL_2(\mathbb{Z}) & \to & 1. \\ & & & & \cup & & \cup & & \\ & & & & a_1 & \mapsto & T & & \\ & & & & a_2 & \mapsto & (TST)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & & \end{array}$$

Remark 4.4.1. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の生成元として上の S, T を取るのが最もスタンダードだと思うが，今回はすぐ後に述べる Theorem の都合で，

$${}^tS = S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tT = TST = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を生成系に取っておく．このように取り換えた場合の基本関係式は

$$({}^tS)^2 = ({}^tS{}^tT)^3 = ({}^tT{}^tS)^3, \quad ({}^tS)^4 = 1$$

であり，本質的な影響を受けない．

Theorem 4.4.2. 以下の性質を満たす自己同型 $\Phi_{{}^tS},\ \Phi_{{}^tT} \in \mathrm{Aut}\big(U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})\big)$ が存在する．
(1) $\Phi_{{}^tS}$ と $\Phi_{{}^tT}$ は $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ の部分代数 $\big\langle E_{i,0},\ F_{i,0},\ K_i^{\pm1} \,|\, 1 \le i \le l \big\rangle \cong U_q(\mathfrak{g})$ を element wise に固定する．
(2) $\Phi_{{}^tS}$ は $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ 2 つの部分代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_{s_b})$ と $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_{s_a})$ を取り替える．
(3) $\Phi_{{}^tS}^2 = (\Phi_{{}^tS}\Phi_{{}^tT})^3 = (\Phi_{{}^tT}\Phi_{{}^tS})^3$.

特に，(3) の系として，次が容易に従う．

Corollary 4.4.3. (1) $\mathcal{G} := \big\langle \Phi_{{}^tS}, \Phi_{{}^tT} \big\rangle \subset \mathrm{Aut}\big(U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})\big)$ とする時，$\Phi_{{}^tS}^4 \in Z(\mathcal{G})$.
(2) 対応 $a_1 \mapsto \Phi_{{}^tT},\ a_2 \mapsto (\Phi_{{}^tT}\Phi_{{}^tS}\Phi_{{}^tT})^{-1}$ は，群準同型 $A(A_2) \to \mathrm{Aut}\big(U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})\big)$ を定める．すなわち，$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の中心拡大が作用する．

Remark 4.4.4. (1) Theorem 4.4.2 では自己同型の具体形を明記していないが，$\Phi_{{}^tT}$ の方は比較的容易で，次のように与えられる．

$$\Phi_{{}^tT}(E_{i,l}) := E_{i,l+\delta_{i,0}}, \quad \Phi_{{}^tT}(F_{i,l}) := F_{i,l-\delta_{i,0}}, \quad \Phi_{{}^tT}(H_{i,r}) := H_{i,r},$$
$$\Phi_{{}^tT}(K_i^{\pm1}) := q^{\pm\delta_{i,0}c}K_i^{\pm1}, \quad \Phi_{{}^tT}(q^{\pm c}) := q^{\pm c},$$
$$\Phi_{{}^tT}(q^{\pm d_b}) := q^{\pm d_b}, \quad \Phi_{{}^tT}(q^{\pm d_a}) := q^{\mp d_b}q^{\pm d_a}.$$

(2) 他方，$\Phi_{{}^tS}$ の方は各ルート系毎の個性に依存せざるを得ない部分があって，universal な定義は現状与えられていない．全ての場合の定義を与えると長くなってしまうので，今回は A 型の場合の具体形のみ与えておく．

Example 4.4.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{l+1}$ $(l \ge 2)$ の時，κ-deformation $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}, \kappa)$ の自己同型 $\Phi_{{}^tS}$ が次のように与えられる[21]．

$\Phi_{{}^tS}(E_{j,0}) := E_{j,0},\ \Phi_{{}^tS}(F_{j,0}) := F_{j,0},\ \Phi_{{}^tS}(K_j) := K_j,$

$\Phi_{{}^tS}(E_{j,1}) := (-1)^{l-j}\kappa^{m_{0,1}-\sum_{k=j}^{l} m_{k,k+1}}(T_{j-1}\cdots T_2T_1)(T_{j+1}\cdots T_{l-1}T_l)T_0^{-1}(E_{0,0}),$

$\Phi_{{}^tS}(F_{j,-1}) := (-1)^{l-j}\kappa^{-m_{0,1}+\sum_{k=j}^{l} m_{k,k+1}}(T_{j-1}\cdots T_2T_1)(T_{j+1}\cdots T_{n-1}T_n)T_0^{-1}(F_{0,0})$

$\Phi_{{}^tS}(E_{0,0}) := T_l\cdots T_1(E_{1,1}),\ \Phi_{{}^tS}(F_{0,0}) := T_l\cdots T_1(F_{1,-1}),$

$\Phi_{{}^tS}(K_0) := q^cK_1^{-1}\cdots K_l^{-1},\ \Phi_{{}^tS}(q^c) := (K_0K_1\cdots K_l)^{-1},$

$\Phi_{{}^tS}(q^{d_b}) := q^{-d_a},\ \Phi_{{}^tS}(q^{d_a}) := q^{d_b},$

（ただし，$1 \le j \le l$．また $T_j := T_{\alpha_j}$，$T_0 := T_{\alpha_0}$ と略記した.）

$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})$ に対しては，上の定義で形式的に $\kappa = 1$ を代入すれば良い．

5. 結び

今回は主に楕円ルート系に関連して現れるリー代数，およびその（普遍包絡環の）q-変形に着目して，その構造論のいくつかを代数的なレベルで紹介した．特に modular 群（乃至その中心拡大）の作用は，楕円ルート系に関連して現れる代数系に共通する性質で，既存の理論には無かった新しい視点であると筆者は考えている．

表現論に関しては今回全く触れることが出来なかったが，量子アフィン代数のレベル 0 表現の toroidal 版と呼べる話が Miki [M2] や，前出の [FJMM] やそれに続く一連の論文にある．また，現れる表現のうちのいくつかは Nakajima [N] によって箙多

[21] ここで与える $\Phi_{{}^tS}$ の逆写像は，Miki が [M1] で与えた $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_{s_b})$ と $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_{s_a})$ を入れ替える自己同型 ψ と，$\mathrm{Hom}(Q(\mathfrak{g}), \{\pm1\})$ と κ のベキを modulo にして一致する．

様体を用いた幾何学的構成も知られている．ただし，“量子アフィン代数のレベル 0 表現の toroidal 版” の範疇を超える話はほとんど聞いたことがない．組織的かつ本格的な研究はまだされていないと言って良いのでは無いだろうか．また，今回強調した modular 群の作用に関しても，本格的に表現論に応用した話はまだ無い．強いて言えば，最近の Tymbaliuk による [T] は[22]．応用例の一つと思えなくも無いが,『本格的に使った』とは言い難い面がある．少なくとも『問題は山積している』という状況にあることだけは，間違いがない．

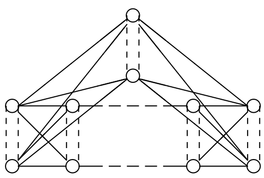
他方，楕円ルート系に関連して現れる代数系の重要な例として，楕円 Artin 群がある．本文中の説明では，これを “楕円図形から定まる抽象的な群” として定めたが,（少しだけ触れたように）本来これは『楕円正則軌道空間の基本群』として定義される幾何学的対象である．今回は紙数の都合で割愛したが，楕円 Artin 群の幾何学的性質に関しては，[Sa3] に解説記事を書いたので，こちらも併せて参照して頂ければ幸いである．

さらに，楕円 Artin 群の（適当な Laurent 多項式環を係数環とする）群話を考え，これを “Hecke relations” と呼ばれる生成元２次の関係式で割ると楕円 Hecke 代数が得られる（[SShi]）が，これは double affine Hecke algebra (DAHA) に本質的に一致する．楕円 Artin 群が modular 群の作用を持つことの帰結として，楕円 Hecke 代数（=DAHA）にも modular 群の作用が誘導される．現在までの DAHA の文献（基本文献として [C],[Mac] などがある）には modular 群との関係はあまり現れていないので，今後の研究が待たれるところである[23].

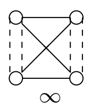
Appendix A

○ List of elliptic diagrams of type $X_l^{(1,1)}$

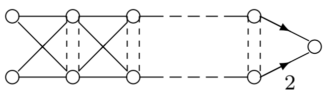
$A_l^{(1,1)}$ $(l \geq 2)$



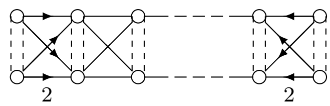
$A_1^{(1,1)}$ $(l = 1)$



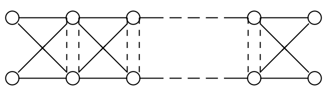
$B_1^{(1,1)}$



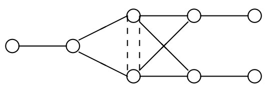
$C_n^{(1,1)}$



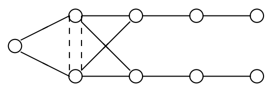
$D_n^{(1,1)}$



$E_6^{(1,1)}$

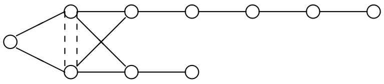


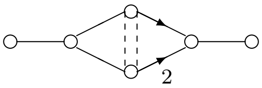
$E_7^{(1,1)}$

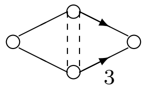


[22]既存の QTA のいくつかの表現が，QTA の自己同型（modular 群の作用うち S 変換）を用いて同一視出来ることを示した，という結果.

[23][C] には少しだけ記述がある．その場合，modular 群の作用はある種の積分変換として現れる.

$E_8^{(1,1)}$ 

$F_4^{(1,1)}$ 

$G_2^{(1,1)}$ 

References

[B] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 555–568.

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8*, Éléments de Mathématique, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. **1364**, Hermann Paris, 1975.

[Br] E. Brieskorn, *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe*, Invent. Math., **12**, 57-61(1971).

[BS] E. Brieskorn and K. Saito, *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent. Math., **17**, 245-271, (1972).

[C] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series **319**, Cambridge University Press (2005).

[D] V. G. Drinfeld, *A new realization of Yangians and Quantized Affine Algebras*, Sov. Math. Dokl. **36** (1998), 212-216.

[FJMM] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, *Representations of quantum toroidal* $\mathfrak{gl}_n$, J. Alg. **380** (2013), 78-108.

[G] H. Garland, *The arithmetic theory of loop groups*, Publ. IHES **52** (1980), 5–136.

[Mac] I. G. Macdonald, *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, Cambridge Tracts in Math. **157** (2003).

[M1] K. Miki, *Toroidal braid group action and an automorphism of toroidal algebra* $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1,tor})\,(n \geq 2)$, LMP. **47** (1999), 365-378.

[M2] K. Miki, *Representations of quantum toroidal algebra* $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1,tor})\,(n \geq 2)$, J. Math. Phys. **41** (2000), 7079-7098.

[MEY] R. Moody, S. Eswara Rao and T. Yokonuma, *Toroidal Lie algebras and vertex representations*. Geom. Ded. **35** (1990), 283-307.

[Mum] D. Mumford, *Tata Lectures on theta I*, Progr. in Math. **28**, Birkhäuser (1983).

[N] H. Nakajima, *Geometric construction of representations of affine algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002). Higher Ed. Press, Beijing, pp. 423-438.

[S1] K. Saito, *Extended affine root systems I*, Publ. RIMS **21**, No.1 (1985), 75–179.

[S2] K. Saito, *Extended affine root systems II*, Publ. RIMS **26**, No.1 (1990), 15–78.

[SS] K. Saito, and Y. Saito, *Elliptic Artin groups*, in preparation.

[ST] K. Saito, and T. Takebayashi, *Extended affine root systems III*, Publ. RIMS **33** (1997), 301–329.

[Sa1] Y. Saito, *Quantum toroidal algebras and their vertex representations*, Publ. RIMS. **34** (1998), 155-177.

[Sa2] Y. Saito, *On Automorphisms of Lie algebras associated with untwisted elliptic root systems*, in preparation.

[Sa3] Y. Saito, 楕円 Artin 群について, 2020 年度 日本数学会秋季総合分科会 無限可積分系セッション特別公演アブストラクト

[SShi] Y. Saito, and M. Shiota, *On Hecke algebras associated to and the Double Affine Hecke Algebras"*, Publ. RIMS. 45 (2009), 845-905.

[STU] Y. Saito, K. Takemura and D. Ugliv, *Toroidal actions on level 1 modules of* $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$, Transformation Groups **1** (1998), 177-209.

[T] A. Tymbaliuk, *Several realizations of Fock modules for toroidal* $\ddot{U}_{q,d}(n)$, Algebras and Representation Theory **22** (2019), 75-102.

[VV] E. Vasserot and M. Varagnolo, *Double-loop algebras and the Fock space*, Inv. Math. **133** (1998), 133–159.

Department of Mathematics,
Rikkyo University,
Tokyo 171-8501,Japan
E-mail address: yoshihisa@rikkyo.ac.jp, yosihisa@ms.u-tokyo.ac.jp