F 純閾値の極限

佐藤 謙太 *

1　はじめに

代数幾何学や可換環論を研究する上で，特異点はしばしば自然に現れ，多くの困難をもたらす．そのような困難を克服し，更には活用していくことを一つの目標に，特異点論は発展してきた．

数学のどの分野においてもそうであるように，特異点論においても不変量の果たす役割は大きい．本稿では，F 純閾値と呼ばれる，正標数の超曲面特異点の悪さをはかる不変量の性質を考察する．

まず F 純閾値の定義の前に，特異点の不変量の中でも代表的なものである「重複度」を復習する．

1.1　重複度

定義 1.1. k を体，X を k 上の代数多様体，$x \in X$ をその上の点とする．この時，$x \in X$ の重複度 $\mathrm{mult}_x(X)$ とは，その局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}_{X,x}$ に関する Hilbert-Sammuel multiplicity $\mathrm{e}(\mathcal{O}_{X,x})$ のことである．つまり，$d = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ としたとき，

$$\mathrm{mult}_x(X) = \mathrm{e}(\mathcal{O}_{X,x}) := \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\dim(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^n)}{n^d/d!}.$$

重複度はよく知られているように次の性質を満たす．

命題 1.2. X を k 上の代数多様体，$x \in X$ を点とする．この時次が成立．

(1.2.1) (一様な下限) $\mathrm{mult}_x(X) \geqslant 1$.

(1.2.2) (幾何的性質) $\mathrm{mult}_x(X) = 1 \Leftrightarrow x \in X$ が非特異.

(1.2.3) (半連続性) ([Ben70]) 写像 $X \ni x \longmapsto \mathrm{mult}_x(X) \in \mathbb{R}$ は上半連続.

(1.2.4) (値域の有限性) $\{\mathrm{mult}_y(Y) \mid Y$ は代数多様体$, y \in Y\} \subseteq \mathbb{R}$ は自然数全体の集合に一致．特に降鎖条件を満たす．

一般に重複度だけでなく，代数幾何学に現れる様々な不変量に対し，これら 4 つの性質が確認もしくは期待されている．実際，これら 4 つの基本性質を組み合わせることで，幾何学的な応用を得る事例は多々ある．その一例として，やや初等的だが，次の例を挙げておく．

例 1.3 (cf. [Cut04, Theorem 3.11])**.** X を $\mathbb{C}$ 上の 1 次元代数多様体であって，非特異な曲面に埋め込まれているものとする．この時，重複度に注目しながら blowing-up を繰り返すことで特異点の embedded resolution が得られる．

まず上半連続性 (1.2.3) から $n(X) := \sup\{\mathrm{mult}_x(X) \mid x \in X\}$ は有限の値になり，なおかつ $Z := \{x \mid \mathrm{mult}_x(X) = n(X)\} \subseteq X$ は閉集合である．(1.2.1) と (1.2.2) から，もし X が特異点を持て

* 理化学研究所 数理創造プログラム, kenta.sato.gz@riken.jp

ば $Z \neq X$ なので Z は有限集合である．$X_1 \longrightarrow X$ を Z を中心にした爆発とすると，$n(X_1) \leqslant n(X)$ であることが簡単にわかる．この操作を繰り返すと $n(X) \geqslant n(X_1) \geqslant n(X_2) \geqslant \ldots$ という列を得るが，これは高々有限回ごとに真に小さくなる，ということが計算される ([Cut04, Theorem 3.11])．したがって，mult の下降列を得るが，(1.2.4) よりこの操作は有限回で終わり，最終的に特異点解消が得られる．

1.2　F 純閾値

ここでは，正則局所環の場合に限定して，その上の有効因子の F 純閾値を定義する．より一般の場合の定義は 2 章で行う．

定義 1.4. $(A, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の正則局所環とする．

(1) 各 $q = p^e$ に対し，イデアル $\mathfrak{m}^{[q]} \subseteq A$ を，$\{f^q \mid f \in \mathfrak{m}\}$ の生成するイデアルとして定める．
(2) 各 $q = p^e$ と $f \in A$ に対して，$\nu_q(f) := \max\{m \geqslant 0 \mid f^m \notin \mathfrak{m}^{[q]}\}$.
(3) f の F 純閾値を，$\mathrm{fpt}(A; f) := \lim_{q \longrightarrow \infty} \nu_q(f)/q$ で定める．

各 $q = p^e$ に対し， $F^e : A \ni a \longmapsto a^q \in A$ をフロベニウス写像とすると，$m^{[q]}$ はこの環準同型による極大イデアル $\mathfrak{m}$ の拡大に他ならず，この意味で $\mathfrak{m}^{[q]}$ はフロベニウス写像に付随する概念とみなせる．

Y を正標数の代数閉体上の非特異多様体，$D \geqslant 0$ を Y 上の有効因子，$f \in \mathcal{O}_{Y,x}$ を点 $x \in \mathrm{Supp}(D)$ での D の定義式すると，D の x における F 純閾値が

$$\mathrm{fpt}_x(Y; D) := \mathrm{fpt}(\mathcal{O}_{Y,x}; f)$$

により定まる．一般に

$$\frac{1}{\mathrm{mult}_x(D)} \leqslant \mathrm{fpt}_x(Y; D) \leqslant \frac{\dim Y}{\mathrm{mult}_x(D)}.$$

であることが知られており ([TW04])，この意味で D の F 純閾値と D の重複度の逆数は似た挙動をしていると言える．一方で，以下の例のように，F 純閾値は重複度よりも精密に特異点を見分けられることがしばしばある．

例 1.5. k を標数 $p > 0$ の代数閉体，$P = (0,0) \in Y = \mathbb{A}^2_k$ とする．この時，次が成立する．

1. $\mathrm{fpt}_P(Y; Z(y^2)) = 1/2$.
2. $\mathrm{fpt}_P(Y; Z(y^2 + x^2)) = \begin{cases} 1/2 & (p = 2) \\ 1 & (p > 2) \end{cases}$.
3. $\mathrm{fpt}_P(Y; Z(y^2 + x^3)) = \begin{cases} 1/2 & (p = 2) \\ 2/3 & (p = 3) \\ 5/6 & (p \equiv 1 (\bmod 3)) \\ 5/6 - 1/6p & (p \equiv 2 (\bmod 3), p \neq 2) \end{cases}$.

よく知られているように，命題 1.2 の (1),(2),(3) は F 純閾値に関しても以下のように成立している．

命題 1.6. Y を正標数の代数閉体 k 上の非特異多様体，D を Y 上の有効因子，$x \in \mathrm{Supp}(D)$ を点，d を自然数とする．この時次が成立．

(1) (一様な上限) $\mathrm{fpt}_x(Y; D) \leqslant 1$.

(2) (幾何的意味) D 自身も正規多様体とする．この時，$\mathrm{fpt}_x(Y;D)=1 \Leftrightarrow x \in D$ が高々 F 純特異点 (定義 2.6) しか持たない．
(3) (半連続性) 写像 $D \ni x \longmapsto \mathrm{fpt}_x(Y;D) \in \mathbb{R}$ は下半連続．

命題 1.2(4) に相当する，F 純閾値の昇鎖条件はこれまで未解決であった．例 1.3 で簡単に見たように，不変量の取りうる値全体の集合に対して昇鎖条件や降鎖条件が成り立つことは，その不変量を用いた帰納法を考える上で重要である．また，2 章でも述べるように，F 純閾値の標数 0 版である「対数的標準閾値」の昇鎖条件は，flip の終結や Fano 多様体の有界性といった双有理幾何学の重要な問題に応用されていた．このことから，F 純閾値の値域が昇鎖条件を満たすかどうかを検証することは，自然かつ重要な問題である．本稿の主定理は，この問題に対する肯定的な解を与える．

主定理 (= 定理 3.1)**.** Y を正標数の代数閉体上の非特異代数多様体とすると，

$$\{\mathrm{fpt}_x(Y;D) \mid D \text{ は有効因子}, x \in \mathrm{Supp}(D)\} \subseteq \mathbb{R}$$

は昇鎖条件を満たす．すなわち，F 純閾値の無限上昇列は存在しない．

2 背景

この章では，上述の主定理の背景として，まず標数 0 における「対数的標準閾値の昇鎖条件」及び関連する結果について記述し，その後正標数の背景を述べる．

2.1 極小モデル理論に現れる特異点

まず，極小モデル理論に現れる種々の特異点の定義から復習する．(X,Δ) を $\mathbb{C}$ 上の対とする．つまり，X は $\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体であり，Δ はその上の $\mathbb{R}$-因子であって $K_X+\Delta$ が $\mathbb{R}$-Cartier となるようなものとする．ここで，K_X は X の標準因子とする．$f: Y \longrightarrow X$ を (X,Δ) の対数的特異点解消とし，Y 上の $\mathbb{R}$-因子 Δ_Y を

$$\Delta_Y := f^*(K_X+\Delta) - K_Y$$

により定める．ただし，K_Y は，Y 上の標準因子であって，f が同型な部分では K_X と一致するように定めておく．

定義 2.1. 対 (X,Δ) が *kawamata log terminal* (以下 klt) (resp. *log canonical* (以下 lc)) であるとは，Δ_Y のすべての係数が 1 未満 (resp. 1 以下) であることを言う．$\Delta=0$ の時には，単に，X が klt (resp. lc) と言う．

この定義は対数的特異点解消の取り方によらない ([KM08, Corollary 2.31 (3)])．また，定義から，klt ならば lc である．klt や lc といった特異点のクラスは，極小モデルプログラムを遂行する際に自然と現れるクラスであり，また一方で 小平型の消滅定理をはじめとする多くの良い性質を有しており，幾何的にも非常に重要な特異点のクラスである．

双有理幾何学では，与えられた klt(resp. lc) 対 (X,Δ) に対し klt (resp. lc) という性質を保ったままで Δ を摂動して種々の議論を行うことがしばしばある．このような議論をする際に，特異点のクラスが保たれる閾値を考えるのは自然である．

定義 2.2. (X,Δ) を lc 対，$D \neq 0$ を X 上の有効 $\mathbb{R}$-Cartier 因子とする．この時，D の (X,Δ) に対

する *log canonical threshold* $\mathrm{lct}(X,\Delta;D)$ が以下で定まる：

$$\mathrm{lct}(X,\Delta;D) := \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid (X,\Delta + tD) \text{ は lc}\} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

Shokurov は，対数的標準閾値のなす集合が昇鎖条件をなすだろうと予想し ([Sho92])，約 20 年の時を経て，de Fernex, Ein, Mustaţă らによって部分的に解決され ([dFEM10], [dFEM11])，最終的に Hacon, M$^{\mathrm{c}}$Kernan, Xu ([HMX14]) らによって解決された．ここでは簡単の為，[dFEM10] の非特異の場合の結果を記述する．

定理 2.3 ([dFEM10])**.** d を自然数とする．この時，次の集合

$$\mathrm{LCT}_d := \{\mathrm{lct}(X;D) \mid X \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上の } d \text{ 次元非特異多様体，} D \text{ は有効因子 }\}$$

が昇鎖条件を満たす．

対数的標準閾値の昇鎖条件は，特異点論的に面白いばかりでなく，幾何的にも重要であった．実際，flip の終結 ([Bir07]) や，Fano 多様体の有界性 ([Bir16]) といった，双有理幾何学における重要な問題と関係が深く，この昇鎖条件は，近年の双有理幾何学の爆発的発展の一つに数えられるだろう．

次に，対数的標準閾値の降鎖列を考えよう．残念ながら，LCT_d は降鎖条件を満たさず，無限下降列は存在する．しかし，Kollár は，下降列の収束先に関して以下のような興味深い予想をし ([Kol97])，[dFEM10] 及び [HMX14] で解決された：

定理 2.4 ([dFEM10])**.** $a_1 > a_2 > \dots$ を，LCT_d 内の下降列 $\{a_n\}_n \subseteq \mathrm{LCT}_d$ とすると，

$$\lim_n a_n \in \mathrm{LCT}_{d-1}.$$

2.2 正標数の特異点

正標数において双有理幾何を行うことは非常に難しいため，フロベニウス写像を中心に理論を展開していくことが一般的である．特に，lc, klt, lct を考える代わりに，下で定義される「鋭 F 純」,「強 F 正則」, fpt といったフロベニウス写像により定義される概念で置き換えていくことで，良い理論が構築できることが多い．

R を標数 $p > 0$ の環，$F : R \longrightarrow R$ をフロベニウス写像とする．任意の R-加群 M と任意の自然数 $e \geqslant 0$ について，M に F の e 回合成 $F^e : R \longrightarrow R$ を通して R 加群構造を入れたものを F^e_*M とかく．$\mathbb{Z}$-加群としては $M = F^e_*M$ であるので，この対応によって $m \in M$ に対応する元を $F^e_*m \in F^e_*M$ と書く．R が F-**有限**とは，F_*R が R 加群として有限生成となることである．

以下，R は常に標数 $p > 0$ の F-有限ネーター正規整域とする．

注意 2.5. F-有限という仮定は，多くの場合で成立している．実際，次の二つの場合には R は F-有限であることが簡単にわかる．

1. R が完全体上本質的有限型の時
2. R がネーター完備局所環でその剰余体が F-有限の時

定義 2.6. R が，F 純 (もしくは F 分裂) であるとは，次の R 加群としての単射

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow F_*R \\ r &\longmapsto F_*(r^p) \quad = r(F_*1) \end{aligned}$$

が R 加群として分裂することを言う．

例 2.7. k を標数 p の代数閉体とし，$R = k[[x]]$ とする．この時，

$$F_*R = \bigoplus_{i=0}^{p-1} R \cdot F_*x^i$$

であり，$R \longrightarrow F_*R$ は $i = 0$ 成分への埋め込みなので分裂する．

klt や lc の時と同じように，R だけでなく，因子との対に定義を拡張することは有意義である．本稿では，更に一般化して，三つ組の場合を考える．

定義 2.8. Δ を $\operatorname{Spec} R$ 上の有効 $\mathbb{R}$-因子，$\mathfrak{a} \subseteq R$ をイデアル，$t \geqslant 0$ を実数とする．

1. 三つ組 $(R, \Delta, \mathfrak{a}^t)$ が鋭 F 純であるとは，ある自然数 $e \geqslant 1$ と $a \in \mathfrak{a}^{\lceil t(p^e-1) \rceil}$ があって，R 加群としての単射

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow F^e_*(R(\lceil (p^e-1)\Delta \rceil)) \\ r &\longmapsto r(F^e_*a) \end{aligned}$$

が分裂することをいう．

2. 三つ組 $(R, \Delta, \mathfrak{a}^t)$ が強 F 正則であるとは，任意の元 $c \neq 0 \in R$ に対し，ある自然数 $e \geqslant 1$ と $a \in \mathfrak{a}^{\lceil t(p^e-1) \rceil}$ があって，R 加群としての単射

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow F^e_*(R(\lceil (p^e-1)\Delta \rceil)) \\ r &\longmapsto r(F^e_*ac) \end{aligned}$$

が分裂することをいう．

$\mathfrak{a} = R$ の時，単に「(R, Δ) が強 F 正則」や「(R, Δ) が鋭 F 純」と呼ぶ．定義から，強 F 正則ならば鋭 F 純である．
一般に，klt と強 F 正則は，mod p 還元の意味で対応していることが知られている ([Tak04])．lc と鋭 F 純についても、mod p 還元の意味で対応しているだろうと予想されている．

定義 2.9. (R, Δ) を鋭 F 純とし，$\mathfrak{a} \subseteq R$ をイデアルとする．この時，$\mathfrak{a}$ の (R, Δ) に関する F 純閾値を

$$\operatorname{fpt}(R, \Delta; \mathfrak{a}) := \sup\{t \geqslant 0 \mid (R, \Delta, \mathfrak{a}^t) \text{ は鋭 } F \text{ 純 }\}$$

により定める．

R が正則局所環で，$\Delta = 0$, $\mathfrak{a} = (f)$ の場合を考えると，$\operatorname{fpt}(R; (f))$ は，1.2 節で定義された $\operatorname{fpt}(R; f)$ と一致することが知られている．Blickle, Mustaţă, Smith らは，「対数的標準閾値の昇鎖条件」の正標数化として，次のような予想をした：

予想 2.10 ([BMS09])**.** p を素数，d を自然数とする．

(1) 次の集合

$$\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{d,p} := \{\operatorname{fpt}(R; (f)) \mid R \text{ は標数 } p \text{ の } d \text{ 次元 } F \text{ 有限正則局所環 }\} \cup \{0\}$$

は昇鎖条件を満たす．

(2) $a_1 > a_2 > \ldots$ を $\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{d,p}$ 内の降鎖列とすると，

$$\lim_n a_n \in \mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{d-1,p}.$$

注意 2.11. $d=1$ の時，任意の素数 p で，

$$\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{1,p}=\{0\}\cup\{1/m \mid m\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$$

であり，特に予想 2.10 (1) は 1 次元では自明に成立している．

F 純閾値は，正標数還元の意味では対数的標準閾値と対応しているが，固定された p の上で考えるとその挙動は大きく異なっている．特に，対数的標準閾値と違い，F 純閾値は双有理射のもとで保たれないことが知られており，標数 0 の先行研究における，双有理幾何学を駆使する手法は通用しない．このような事情もあり，この予想は 2 次元の場合ですら未解決であった．

3　主結果

この章では，本稿の主結果を記述する．3.1 節では，予想 2.10 に関連する結果を紹介する．3.2 節ではその応用として，正則局所環上の F 純閾値が，いつ多項式環上の F 純閾値として記述されるかという問題 (予想 3.5) を考える．

3.1　F 純閾値の極限に関する結果

定理 3.1 ([Sat19])**.** $d\geqslant 1$ を自然数，p を素数とすると，集合

$$\mathrm{FPT}_{d,p}:=\{\mathrm{fpt}(R;\mathfrak{a}) \mid R \text{ は標数 } p \text{ の } d \text{ 次元 } F \text{ 有限正則局所環，} \mathfrak{a}\subsetneq R \text{ はイデアル }\}\cup\{0\}$$

は昇鎖条件を満たす．特に $\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{d,p}\subseteq\mathrm{FPT}_{d,p}$ なので，予想 2.10(1) は正しい．

定理 3.2 ([Sat20])**.** 予想 2.10(2) は $d=2$ で成立しない．すなわち，任意の素数 p に対し，$\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{2,p}$ 内の下降列 $\{a_n\}$ であって，$\lim_n a_n\notin\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{1,p}$ であるものが存在する．

例 3.3 ([Sat20])**.** k を標数 2 の代数閉体とし，$f(x,y):=xy(x^4+x^2y+y^2)\in k[[x,y]]$ を考える．この時，ある monomial の列 $\{m_e(x,y)\}_{e\in\mathbb{N}}\subseteq k[x,y]$ が存在して，$\lim_{e\longrightarrow\infty}\mathrm{fpt}(f^5+m_e)=3/40$ となる．特に，注意 2.11 より，$\lim_e \mathrm{fpt}(f^5+m_e)\notin\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{1,2}$.

この反例の構成の鍵は，$\lim_n a_n$ の分母が p で割り切れることにある．実際，分母が p で割り切れない場合に限定すれば，以下のように予想 2.10(2) に対する肯定的な結果を得ることができる．

定理 3.4. $d\geqslant 2$ を自然数，p を素数，$\{a_n\}_n\subseteq\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{d,p}$ を狭義下降列とする．

(1) ([BMS09], [Sat19]) $\lim_m a_m\in\mathbb{Q}$.
(2) ([Sat20]) もし $\lim_m a_m\in\mathbb{Z}_{(p)}$ であれば，$\lim_m a_m\in\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{d-1,p}$.

3.2　応用

d を自然数，k を標数 $p>0$ の代数閉体，$A:=k[x_1,\ldots,x_d]_{(x_1,\ldots,x_d)}$ を k 上の d 変数多項式環の局所化とする．この時，集合

$$\mathcal{T}_d(k):=\{\mathrm{fpt}(A;(f)) \mid (f)\subsetneq R \text{ は単項イデアル }\}\cup\{0\}$$

を考える．定義より $\mathcal{T}_d(k)\subseteq\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{d,p}$ であるが，実は等号が成り立つだろうと予想されている．

予想 3.5 ([BMS09])**.** $\mathcal{T}_d(k)=\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{d,p}$.

上述の定理 3.1 と 3.4 を組み合わせることで，この予想が $\mathbb{Z}_{(p)}$ に制限すると正しいことがわかる：

定理 3.6 ([Sat20])**.** $d \geqslant 1$ を自然数，k を標数 p の代数閉体とすると，

$$\mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{d,p} \cap \mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathcal{T}_d(k).$$

Proof. 標数 p の d 次元 F 有限正則局所環 R と $0 \neq f \in R$ であって，$\mathrm{fpt}(R; f) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ となるものをとる．R を完備化で取り換えて，$R = K[[x_1, \ldots, x_d]]$ と仮定してよい．$f_M := f_{<M} \in K[x_1, \ldots, x_d]$ を，f の M 次以上の項を切り捨てて得られる多項式とする．この時，$\lim_M \mathrm{fpt}(R; f_M) = \mathrm{fpt}(R; f)$ であることがわかり，部分列でとりかえることで次のいずれかを仮定してよい：

(1) 十分大きい M で $\mathrm{fpt}(R; f_M) = \mathrm{fpt}(R; f)$.
(2) $\{\mathrm{fpt}(R; f_M)\}_M$ が狭義上昇列.
(3) $\{\mathrm{fpt}(R; f_M)\}_M$ が狭義下降列.

(1) の場合は，f_M は多項式なので，$\mathrm{fpt}(R; f) \in \mathcal{T}_d(K)$. 一方 [BMS09] より，$\mathcal{T}_d(K) \subseteq \mathcal{T}_d(k)$ なので，合わせると $\mathrm{fpt}(R; f) \in \mathcal{T}_d(k)$ が従う．(2) は，定理 3.1 より起こりえない．(3) の場合は定理 3.4 より $\mathrm{fpt}(R; f) \in \mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{d-1,p}$ となる為，帰納法が使える． □

定理 3.2 の反例があるため，$\mathbb{Z}_{(p)}$ に制限しないとこの手法は使えない．しかし，2 次元の場合には別の手法により予想 3.5 を解決することができる．

定理 3.7 ([Sat20])**.** k を標数 $p > 0$ の代数閉体とすると，$\mathcal{T}_2(k) = \mathrm{FPT}^{\mathrm{pr}}_{2,p}$.

4 Ultraproduct を用いた手法

この章では，主定理の証明で重要な役割を果たす ultraproduct(超積) について論じる．これは，モデル理論や解析学でしばしば扱われる概念であるが，近年では，可換環論や代数幾何学への応用も見出されている．典型的な応用方法として，次の二つが挙げられる：

(1) 複素数体 $\mathbb{C}$ が，$\{\overline{\mathbb{F}_p}\}_p$ の超積と同型になる (例 4.6) ことを利用する手法.
(2) べき級数の列 (あるいは，固定された局所環の元の列) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，f_n の振る舞いの " 極限" と，$\{f_n\}_n$ の " 極限" $[f_n]_n$ (cf. 例 4.10) の振る舞いを比較する手法.

前者の例としては，標数 0 における Big Cohen Macaulay algebra の存在 ([Scho04]) や，klt 特異点が pure subring に遺伝すること ([Scho08]) 等がある．

後者に関して，[dFM09] や [BMS09] では，対数的標準閾値及び F 純閾値の極限における振舞いを，超積を用いてうまく記述していた．本稿の主結果 (定理 3.1, 3.4) の証明の基本方針も，この流れを踏襲している．本章では，主定理 3.4 (1) に限定して，その証明に超積がどう使われるかを概観する．

4.1 Ultraproduct の定義

定義 4.1. $\mathbb{N}$ のべき集合を $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ とする．$\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が次の性質をすべて満たすとき，*non-principal ultrafilter* と呼ぶ.

1. 任意の有限集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ について $A \notin \mathfrak{U}$.
2. $A \in \mathfrak{U}$, $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ ならば $B \in \mathfrak{U}$.

3. $A, B \in \mathfrak{U}$ ならば $A \cap B \in \mathfrak{U}$.
4. 任意の $A \subseteq \mathbb{N}$ について $A \in \mathfrak{U}$ もしくは $\mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{U}$.

Zorn の補題により，non-principal ultrafilter は存在する．以下このような $\mathfrak{U}$ を一つ固定する．

定義 4.2. $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を集合の族とする．この時，直積集合 $\prod_m T_m$ に同値関係 $\sim_{\mathfrak{U}}$ が次で入る：

$$(a_m)_m \sim_{\mathfrak{U}} (b_m)_m \Leftrightarrow \{m \in \mathbb{N} \mid a_m = b_m\} \in \mathfrak{U}.$$

族 $\{T_m\}_m$ の *ultraproduct* $\mathrm{ulim}_m T_m$ を

$$\mathrm{ulim}_m T_m := (\prod_m T_m)/\sim_{\mathfrak{U}} .$$

により定義する．

$(a_m)_m \in \prod T_m$ の定めるクラスを $\mathrm{ulim}\, a_m \in \mathrm{ulim}_m T_m$ と書くことにする．各 $m \in \mathbb{N}$ で集合の写像 $f_m : T_m \longrightarrow S_m$ が与えられたとき，写像 $\mathrm{ulim}_m f_m : \mathrm{ulim}_m T_m \longrightarrow \mathrm{ulim}_m S_m$ が，$\mathrm{ulim}_m a_m \longmapsto \mathrm{ulim}_m f_m(a_m)$ により定まる．T を集合として，全ての m で $T_m := T$ とした時，$\mathrm{ulim}_m T_m$ のことを ${}^*T$ と書き，T の *ultrapower* と呼ぶ．

命題-定義 4.3 ([Gol98, Theorem 5.6.1])**.** $w = \mathrm{ulim}_m a_m \in {}^*\mathbb{R}$ が，$\sup_m a_m < \infty$ 及び $\inf_m a_m > -\infty$ を満たすと仮定する．この時，次を満たす実数 $w_0 \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在する：

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } \{m \in \mathbb{N} \mid |a_m - w_0| < \varepsilon\} \in \mathfrak{U}.$$

この w_0 を w の *shadow* と呼び，$\mathrm{sh}(w)$ とかく．

注意 4.4. 上で，ある部分列 $\{a_{m_n}\}_n$ が存在して，$\lim_n a_{m_n} = \mathrm{sh}(w)$ である．特に，もしも $\lim_m a_m$ が存在するならば，$\mathrm{sh}(\mathrm{ulim}_m a_m) = \lim_m a_m$ である．

4.2 Ultraproduct の代数構造

Ultraproduct は多くの代数構造を保つことが知られている．例えば次が簡単に確認できる．

命題 4.5. 全ての m で T_m が環 とすると，$\ker(\prod_m T_m \longrightarrow \mathrm{ulim}_m T_m)$ は直積環 $\prod_m T_m$ のイデアルであり，$\mathrm{ulim}_m T_m$ には $\prod_m T_m$ の剰余環として環構造が入る．更に，全ての m で T_m が体 *(resp.* 被約，整域, 代数閉体，正規整域*)* とすると，$\mathrm{ulim}\, T_m$ もそうである．

例 4.6 ([Scho10, Theorem 1.4.3])**.** p_m を m 番目の素数とする．この時，(non-canonical な) 同型写像 $\mathbb{C} \cong \mathrm{ulim}_m \overline{\mathbb{F}}_{p_m}$ が存在する．

各 m で R_m を環，M_m を R_m 加群とすると，$\mathrm{ulim}_m M_m$ は自然に $\mathrm{ulim}_m R_m$ 加群である．特に，$\mathfrak{a}_m \subseteq R_m$ に対し，$\mathrm{ulim}_m \mathfrak{a}_m$ は自然に $\mathrm{ulim}_m R_m$ のイデアルである．更に，$(R_m, \mathfrak{m}_m, k_m)$ が局所環の時，$(\mathrm{ulim}_m R_m, \mathrm{ulim}_m \mathfrak{m}_m, \mathrm{ulim}_m k_m)$ は再び局所環となる．

注意 4.7. ultraproduct は，多くの場合ネーター性は保たない．たとえば，$R = k[[x]]$ とした時，局所環 $({}^*R, {}^*\mathfrak{m}, {}^*k)$ を考えたとき，$\mathrm{ulim}_m(x^m) \in \cap_m({}^*\mathfrak{m})^m$ なので $\cap_m({}^*\mathfrak{m})^m \neq 0$ である．Krull の交差定理より ${}^*R$ はネーターでない．

定義 4.8. $(R, \mathfrak{m}, k)$ をネーター局所環とした時，その *catapower* を ${}^*R$ の剰余環

$$R_\# := {}^*R/(\cap_m({}^*\mathfrak{m}^m))$$

で定める．また，${}^*\mathfrak{m}$ の像を $\mathfrak{m}_\#$ と書く．$(R_\#, \mathfrak{m}_\#, {}^*k)$ は局所環である．

次の定理により，$R_\#$ はネーター環になる．

定理 4.9 ([Scho10, 8.1.19])**.** $(R, \mathfrak{m}, k)$ を等標数ネーター局所環として，$\widehat{R}$ の係数体 $k \longrightarrow \widehat{R}$ を固定する．この時，次の同型が成立する；

$$R_\# \cong \widehat{R}\ \widehat{\otimes}_k ({}^*k).$$

特に，$R_\#$ は完備ネーター局所環である．

$\mathrm{ulim}_m f_m \in {}^*R$ の像を $[f_m]_m \in R_\#$ と書く．また，イデアル $\mathrm{ulim}_m \mathfrak{a}_m \subseteq {}^*R$ 像を $[\mathfrak{a}_m]_m \subseteq R_\#$ と書く．

例 4.10. $R = k[[x_1, \ldots, x_d]]$ とした時，$R_\# = ({}^*k)[[x_1, \ldots, x_d]]$ である．各 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{N}^d$ について，$x^\lambda := x_1^{\lambda_1} \cdots x_d^{\lambda_d}$ とする．各自然数 m に対し，べき級数 $f_m = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^d} a_{m,\lambda} x^\lambda \in R$ が与えられた時，$[f_m]_m = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^d} (\mathrm{ulim}_m a_{m,\lambda}) x^\lambda \in R_\#$ である．

定理 4.11 ([BMS09], [Sat19])**.** R を F 有限正則局所環とし，R のイデアルの無限列 $\{\mathfrak{a}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq R$ を考え，$\mathfrak{a}_\infty := [\mathfrak{a}_m]_m \subseteq R_\#$ とおく．この時，

$$\mathrm{sh}(\mathrm{ulim}_m \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a}_m)) = \mathrm{fpt}(R_\#; \mathfrak{a}_\infty).$$

右辺が有理数であることは [ST14] で示されているので，これと注意 4.4 を合わせると次が示される．

系 4.12 (= 定理 3.4(1))**.** R, $\{\mathfrak{a}_m\}_m$ 及び $\mathfrak{a}_\infty$ を定理 4.11 の通りとする．この時，もし極限 $\lim_{m \longrightarrow \infty} \mathrm{fpt}(R; \mathfrak{a}_m)$ が存在するならば，それは有理数である．

謝辞

第 65 回代数学シンポジウムでの講演, 執筆の機会を与えて下さった世話人の皆様にこの場を借りて感謝致します.

参考文献

[Ben70] B. M. Bennett, On the characteristic functions of a local ring, Ann. of Math. (2) **91** (1970), 25-87.

[Bir07] C. Birkar, Ascending chain condition for log canonical thresholds and termination of log flips, Duke Math. J. **136** (2007), no. 1, 173–180.

[Bir16] C. Birkar, Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties, arXiv :1609.05543, preprint (2016).

[BMS09] M. Blickle, M. Mustaţă and K. E. Smith, F-thresholds of hypersurfaces, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 12, 6549-6565.

[Cut04] S. D. Cutkosky, *Resolution of singularities*, Vol. 63, American Mathematical Soc., Providence, RI, 2004.

[dFEM10] T. de Fernex, L. Ein and M. Mustaţă, Shokurov's ACC conjecture for log canonical thresholds on smooth varieties, Duke Math. J. **152** (2010), no. 1, 93–114.

[dFEM11] T. de Fernex, L. Ein and M. Mustaţă, Log canonical thresholds on varieties with bounded singularities, *Classification of algebraic varieties*, pp. 221-257, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zrich, 2011.

[dFM09] T. de Fernex and M. Mustaţă, Limits of log canonical thresholds. *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure* **42**, 491–515, 2009.

[Gol98] R. Goldblatt, *Lectures on the hyperreals*, An introduction to nonstandard analysis. Graduate Texts in Mathematics **188**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[HMX14] C. D. Hacon, J. McKernan and C. Xu. ACC for log canonical thresholds, Ann. of Math. **180** (2014) no. 2, 523–571.

[KM08] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, **134**, Cambridge university press, 2008.

[Kol97] J. Kollár, Singularities of pairs, *In Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **62**, 221–288. Amer. Math. Soc., 1997.

[Sat19] K. Sato, Ascending chain condition for F-pure thresholds on a fixed strongly F-regular germ, Compos. Math. **155** (2019) no. 6, 1194–1223.

[Sat20] K. Sato, On accumulation points of F-pure thresholds on regular local rings, arXiv:2001.08923, preprint (2020).

[Scho04] H. Schoutens, Canonical big Cohen-Macaulay algebras and rational singularities, Illinois J. Math. **48** (2004) no. 1, 131–150.

[Scho08] H. Schoutens, Pure subrings of regular rings are pseudo-rational, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008) no. 2, 609–627.

[Scho10] H. Schoutens, *The use of ultraproducts in commutative algebra*, Lecture Notes in Mathematics **1999**, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[ST14] K. Schwede and K. Tucker, Test ideals of non-principal ideals: Computations, Jumping Numbers, Alterations and Division Theorems, J. Math. Pures. Appl. **102** (2014), no. 05, 891–929.

[Sho92] V. Shokurov, Three-dimensional log perestroikas, With an appendix by Yujiro Kawamata, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992) no. 1, 105-203.

[Tak04] S. Takagi, An interpretation of multiplier ideals via tight closure, J. Algebraic Geom. **13** (2004), no. 2, 393-415.

[TW04] S. Takagi and K.-i. Watanabe, On F-pure thresholds, J. Algebra **282** (2004), no. 1, 278-297.