ファノ多様体上の高階極小有理曲線族とその応用

鈴木　拓 *（宇都宮大学）

概要

本稿は，2020 年度代数学シンポジウムにおける講演内容をまとめたものである．ファノ多様体に付随する高階極小有理曲線族という新たな概念を導入し，その性質と応用に関する二つの結果について述べる．

謝辞. 感染症の拡大防止が求められる大変難しい状況の中，本シンポジウムの運営にご尽力されたシンポジウム責任者の大野泰生先生，および，代数幾何分野プログラム責任者の權業善範先生，安田健彦先生に感謝申し上げます．本研究の一部は，科研費「研究活動スタート支援」(課題番号:15H06690) の助成を受けています.

1　導入

高次元代数幾何学において，ファノ多様体は重要な多様体のクラスである．S. Mori の結果 [9] により，ファノ多様体は有理曲線で覆われることが知られている．Y. Miyaoka, J. Kollár らを始めとした多くの代数幾何学者によって，ファノ多様体上の有理曲線の幾何学が研究されてきた．

ファノ多様体 X 上の一般の点 p を固定したとき，p を通る X 上の反標準次数最小の有理曲線の集合は，モジュライ空間として多様体を成す．これを極小有理曲線族と呼び，その構造を調べることの有用性が，J.-M. Hwang，N. Mok らの研究によって示されている．

本稿の前半においては，ファノ多様体 X の極小有理曲線族を取る操作を繰り返すことにより，高階極小有理曲線族という新たな概念を導入し，その階数の最大値を表す不変量 N_X について調べる．一つ目の結果として，N_X が大きな値を取るための充分条件が，多様体のチャーン指標の条件によって与えられることを述べる：

* e-mail: taku.suzuki@cc.utsunomiya-u.ac.jp

定理 1.1 ([12]). X をファノ多様体，r を 100 以下の自然数とする．$\mathrm{ch}_2(X), \ldots, \mathrm{ch}_r(X)$ が非負，かつ極小有理曲線族の次元が $r^2 - r - 1$ 以上であれば，$N_X \geq r$ である．

本定理は，C. Araujo と A.-M. Castravet による極小有理曲線族のチャーン指標に関する結果（命題 3.4）の拡張になっている．また，本定理の応用として，多様体が高次元の有理多様体で覆われるための充分条件が，同様のチャーン指標の条件によって与えられることについても述べる．

本稿の後半においては，高階極小有理曲線族の "直線版" を考えることにより，高階直線族という概念を導入し，その階数の最大値を表す不変量 S_X について調べる．二つ目の結果として，ある程度大きな S_X を持つ多様体の分類を与える：

定理 1.2 ([13]). $X \subset \mathbb{P}^N$ をピカール数 1 の n 次元ファノ多様体とする．

(1) $S_X > \frac{n}{2}$ ならば，X は線形空間 $\mathbb{P}^n$ である．

(2) $S_X = \frac{n}{2}$ ならば，X は 2 次超曲面 Q^{2m} またはグラスマン多様体 $G(2, \mathbb{C}^{m+2})$ と同型である．

(3) $S_X = \frac{n-1}{2}$ ならば，X は次のいずれかと同型である．
   (a) 2 次超曲面 Q^{2m+1},
   (b) シンプレクティックグラスマン多様体 $SG(2, \mathbb{C}^{m+3})$,
   (c) 3 次元 3 次超曲面,
   (d) 3 次元 $(2, 2)$ 型完全交叉,
   (e) グラスマン多様体 $G(2, \mathbb{C}^5)$ の 3 次元線形切断.

不変量 S_X は，多様体 X を覆う線形空間の次元を表している（命題 5.5）．従って，本定理は，高次元の線形空間で覆われる多様体の分類を与えている．

2 極小有理曲線族

以下 X を複素数体上の射影的かつ非特異なファノ多様体（第 1 チャーン類 $c_1(X)$ が正である多様体）とし，n をその次元とする．また，p を X の一般点とする．

定義 2.1. 点 p を通る X 上の有理曲線の成すスキーム $\mathrm{RatCurves}^n(X, p)$ の各既約成分を有理曲線族と呼ぶ．それらの中で反標準次数が最小の有理曲線をパラメトライズする族 H を極小有理曲線族と呼ぶ．このとき H は，モジュライ空間として，射影的かつ非特異な多様体を成す．また，接写像と呼ばれる接空間への有限射 $\tau : H \to \mathbb{P}(T_pX)$ が存在す

ることが知られている．ここで，接空間 $\mathbb{P}(T_pX) := (T_pX \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ は $n-1$ 次元の射影空間であり，その各点は X の点 p における接線に対応している．そして，τ は H に属す各曲線を点 p における接線に対応する点に写すような射である．接写像 τ による自然な直線束 $\mathscr{O}(1)$ の引き戻しを L とするとき，組 (H, L) を偏極極小有理曲線族と呼ぶ.

例 2.2. ファノ多様体 X における偏極極小有理曲線族 (H, L) の例をいくつか挙げる．以下の例は全て，H が直線族となる例であり，τ が埋め込みになる．詳細については，[5] を参照されたい.

(1) X が n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ のとき，固定点 p を通る直線は $n-1$ 次元分存在し，それらは τ によって $\mathbb{P}(T_pX)$ の各点に一対一に対応する．従って，(H, L) は $(\mathbb{P}^{n-1}, \mathscr{O}(1))$ と同型である.

(2) X が 2 次曲面 Q^2 のとき，固定点 p を通る直線が 2 本存在する．即ち，それらは $\mathbb{P}(T_pX)$ 内の 2 点を成し，H はそのどちらか 1 点である.

(3) X が n 次元 2 次超曲面 $Q^n (n \geq 3)$ のとき，(H, L) は $(Q^{n-2}, \mathscr{O}(1))$ と同型になる.

(4) X が n 次元 d 次超曲面 $(n > d)$ のとき，H は $\mathbb{P}^{n-1}$ 内の $(2, 3, \ldots, d)$ 型完全交叉，L はその上の自然な直線束 $\mathscr{O}(1)$ と同型になる.

(5) X がグラスマン多様体 $G(m, k)$ のとき，(H, L) は $(\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{k-m-1}, \mathscr{O}(1, 1))$ と同型になる.

命題 2.3 ([2] および [8])**.** 極小有理曲線族 H に対して，以下が成立する.

(1) $\dim H \leq n-1$.

(2) $\dim H = n-1$ となるのは $X \cong \mathbb{P}^n$ のときのみである.

(3) X のピカール数が 1 のとき，$\dim H = n-2$ となるのは $X \cong Q^n$ のときのみである.

3 高階極小有理曲線族

定義 3.1. ファノ多様体 X 上の一般点を通る極小有理曲線族 H を取る操作を，本稿では $X \vdash H$ と表す．この操作を繰り返し行うことにより，高階極小有理曲線族を定義する．即ち，極小有理曲線族 $X \vdash H_1$ が再びファノ多様体であるならば，第 2 階極小有理曲線族 $X \vdash H_1 \vdash H_2$ が定義できる．同様に，第 $r-1$ 階まで全てファノ多様体であるならば，第 r 階極小有理曲線族 $X \vdash H_1 \vdash \cdots \vdash H_{r-1} \vdash H_r$ が定義できる．更に，このようにしてで

きる鎖の長さ r の最大値を N_X とする[*1].

例 3.2. (1) 射影空間 $\mathbb{P}^n$ に対しては,

$$\mathbb{P}^n \vdash \mathbb{P}^{n-1} \vdash \mathbb{P}^{n-2} \vdash \cdots \vdash \mathbb{P}^1 \vdash \mathrm{pt}$$

となるので，$N_{\mathbb{P}^n} = n$ である.

(2) 2 次超曲面 Q^n に対しては,

$$Q^n \vdash Q^{n-2} \vdash Q^{n-4} \vdash \cdots \vdash \begin{cases} Q^2 \vdash \mathrm{pt} & (n \text{ が偶数}) \\ Q^3 \vdash Q^1 \vdash \mathrm{pt} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

となるので，$N_{Q^n} = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数}) \\ \frac{n+1}{2} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$ である.

命題 2.3 より，以下が直ちに従う.

命題 3.3. 任意のファノ多様体 X に対して $N_X \leq n$ が成立し，等号成立は $X \cong \mathbb{P}^n$ の場合に限る.

以下,「不変量 N_X が大きくなるための条件は何か」という問題について考える．この問題に関連する先行結果として，以下のものがある.

命題 3.4 ([1]). $X \vdash H$ に対して，以下が成立する.

(1) $\mathrm{ch}_2(X)$ が正ならば，H はファノ多様体である.（従って，$N_X \geq 2$ である.）
(2) $\mathrm{ch}_2(X)$ が正，$\mathrm{ch}_3(X)$ が非負，かつ $\dim H \geq 2$ ならば，$\mathrm{ch}_2(H)$ も正である.（従って，(1) を H に対して適用すれば，$N_X \geq 3$ である.）

定義 3.5. 多様体上の次元 m のサイクルが正（あるいは非負）であるとは，任意の余次元 m の有効サイクルとの交叉数が正（あるいは非負）であることを意味する.

4 主結果 1

本稿における一つ目の主結果は，命題 3.4 を 100 まで拡張したものである：

[*1] この不変量 N_X は，早稲田大学の永井保成氏の助言を受けてできたものである.

定理 4.1. X をファノ多様体，r を 100 以下の自然数とする．$\mathrm{ch}_2(X),\ldots,\mathrm{ch}_r(X)$ が非負，かつ第 1 階極小有理曲線族の次元が r^2-r-1 以上であれば，$N_X \geq r$ である．

詳しい説明は省くことにするが，不変量 N_X は多様体 X を覆う有理多様体の次元と関連していることが分かっており，定理 4.1 の応用として以下のことが成り立つ：

系 4.2. 定理 4.1 の仮定において，高階極小有理曲線族 $H_1, H_2, \ldots$ が射影空間でも 2 次超曲面でもないとすると，多様体 X は r 次元有理多様体で覆われる．

系 4.2 は，S. Mori による有名な結果「ファノ多様体（$c_1(X)$ が正の多様体）は有理曲線（1 次元有理多様体）で覆われる」の高次元版と言える．なお，仮定「高階極小有理曲線族 $H_1, H_2, \ldots$ が射影空間でも 2 次超曲面でもない」は技術的なものであり，この仮定が無くても成り立つだろうと筆者は予想している．

定理 4.1 の証明の概略. 長さ $s < r$ の鎖 $X \vdash H_1 \vdash \cdots \vdash H_s$ が存在すると仮定して，$\mathrm{dim} H_s > 0$ かつ H_s がファノ多様体であることを示せばよい．そのために，以下の極小有理曲線族のチャーン指標に関する結果を用いる．

命題 4.3 ([1])**.** $X \vdash H$ に対して，

$$\mathrm{ch}_j(H) = \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^m B_m}{m!} T(\mathrm{ch}_{j+1-m}(X)) \cdot c_1(L)^m - \frac{1}{j!} c_1(L)^j$$

が成立する．ここで，L は H の自然な偏極，B_m は第 m ベルヌーイ数，T は X 上のサイクルを H 上のサイクルに写す自然な射である．

定義 4.4. ベルヌーイ数 B_m とは，

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} t^m.$$

で定まる数列である．始めの数項は以下の通りである．

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
B_m	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	$\cdots$

注意 4.5. ベルヌーイ数は，1700 年頃，ベルヌーイや関孝和によって，冪乗和公式を表すために導入された：

$$1^d + 2^d + 3^d + \cdots + n^d = \frac{1}{d+1} \sum_{m=0}^{d} (-1)^m B_m \binom{d+1}{m} n^{d+1-m}.$$

これを関-ベルヌーイの公式と呼ぶ．

命題 4.3 を繰り返し適用することにより，高階極小有理曲線族のチャーン指標 $\mathrm{ch}_j(H_i)$ を計算することができる：

$$\mathrm{ch}_j(H_i) = b_{(i,j,0)}c_1(L_i)^j + \sum_{k=1}^{i+1} b_{(i,j,k)}T_{(i,j,k)}(\mathrm{ch}_k(X)).$$

ここで，L_i は H_i の自然な偏極，$T_{(i,j,k)}$ は X 上の余次元 k のサイクルを H_i 上の余次元 j のサイクルに写す自然な射である．また，$b_{(i,j,k)}$ は有理数であり，ベルヌーイ数や $H_2, H_3, \ldots$ に属す有理曲線達の（自然な偏極に関する）次数で表される漸化式によって与えられる．

場合 1． $H_2, H_3, \ldots$ が全て直線族の場合．

この場合，$b_{(i,j,k)}$ が以下の漸化式で与えられることが分かる：

$$\begin{aligned} b_{(1,j,k)} &= \begin{cases} -\frac{1}{j!} & (k=0) \\ \frac{(-1)^{j+1-k}B_{j+1-k}}{(j+1-k)!} & (k \geq 1) \end{cases}, \\ b_{(i,j,k)} &= \sum_{m=0}^{\min\{j,\, i+j-k\}} \frac{(-1)^m B_m}{m!} b_{(i-1,j+1-m,k)} - \begin{cases} \frac{1}{j!} & (k=0) \\ 0 & (k \geq 1) \end{cases}. \end{aligned}$$

この漸化式を解いて一般項を求めることは非常に難しいように思われるが，関-ベルヌーイの公式（注意 4.5）や二項係数に関する性質を使うことにより，$k = 0, 1$ の場合には解くことできる：

$$\begin{aligned} b_{(i,j,0)} &= -\frac{i}{j!}, \\ b_{(i,j,1)} &= \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{p=1}^{j} \frac{1}{i+p} \sum_{q=1}^{p} (-1)^q \binom{p}{q} q^j. \end{aligned}$$

仮定 $\dim H_1 \geq r^2 - r - 1$ を用いると，

$$c_1(H_s) = b_{(s,1,0)}c_1(L_s) + b_{(s,1,1)}T_{(s,1,1)}(c_1(X)) + \sum_{k=2}^{s+1} b_{(s,1,k)}T_{(s,1,k)}(\mathrm{ch}_k(X)),$$

$$\mathrm{ch}_2(H_{s-1}) = b_{(s,2,0)}c_1(L_{s-1})^2 + b_{(s,2,1)}T_{(s,2,1)}(c_1(X)) + \sum_{k=2}^{s+1} b_{(s,2,k)}T_{(s,2,k)}(\mathrm{ch}_k(X))$$

における最初の 2 項の和は，どちらもうまく打ち消し合って正になること分かる．一方，第 3 項目以降の係数 $b_{(s,1,k)}$ および $b_{(s,2,k)}$（$k \geq 2$）については，コンピュータによる数

値計算によって正の値になることが分かる（$s < 100$ までは確認した）．X のチャーン指標 $\mathrm{ch}_k(X)$ の非負値性の仮定と合わせると，$c_1(H_s)$ および $\mathrm{ch}_2(H_{s-1})$ が正であることが従う．$\mathrm{ch}_2(H_{s-1})$ が正であることから $\dim H_s > 0$ が示せ，$c_1(H_s)$ が正であることから H_s はファノ多様体となり，主張が示される．

場合 2. $H_2, H_3, \ldots$ のいずれかが直線族ではない場合．

第 i 階まで直線族であり，第 $i+1$ 階で初めて直線族ではない族が現れるとする．このとき，H_i と H_{i+1} の次元の差に注目する．その差は H_{i+1} に属す有理曲線の次数および $\mathrm{ch}_2(H_{i-1})$ によって決まるが，場合 1 の証明より，$\mathrm{ch}_2(H_{i-1})$ が正（$i = 1$ のときは非負）であることから，その差が 1（$i = 1$ のときは 1 または 2）になることが分かる．そして，命題 2.3 を適用することで，H_i が射影空間（$i = 1$ のときは射影空間または 2 次超曲面）であることが従う．仮定 $\dim H_1 \geq r^2 - r - 1$ を用いると，H_s も正の次元を持つ射影空間または 2 次超曲面になる（例 3.2）ことが従い，主張が示される． □

注意 4.6. 最近の T. Nagaoka([10]) や N. Minami らの研究によって，定理 4.1 は任意の自然数 r に対して成り立つことが分かっている．

5 高階直線族

以下 X を射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込まれたファノ多様体とし，直線で覆われているとする．また，n を X の次元とする．

定義 5.1. X 上の一般点 p を通る直線族（必ずしも反標準次数が最小でなくてもよい）H を取る操作を，本稿では $X \models H$ と表す．このとき，接写像 τ によって接空間 $\mathbb{P}(T_pX)$ に埋め込まれる．そこで，直線族 $X \models H_1$ が接空間への埋め込みの下で，再び直線で覆われるファノ多様体になるとき，第 2 階直線族 $X \models H_1 \models H_2$ が定義できる．同様にこの操作を繰り返すことによって，高階直線族 $X \models H_1 \models \cdots \models H_r$ が定義できる．更に，このようにしてできる鎖の長さ r の最大値を S_X とする．

例 5.2. (1) 射影空間 $\mathbb{P}^n$ に対しては，

$$\mathbb{P}^n \models \mathbb{P}^{n-1} \models \mathbb{P}^{n-2} \models \cdots \models \mathbb{P}^1 \models \mathrm{pt}$$

となるので，$S_{\mathbb{P}^n} = n$ である．

(2) 2 次超曲面 Q^n に対しては，

$$Q^n \models Q^{n-2} \vdash Q^{n-4} \models \cdots \models \begin{cases} Q^2 \models \mathrm{pt} & (n \text{ が偶数}) \\ Q^3 \models Q^1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

となるので，$S_{Q^n} = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数}) \\ \frac{n-1}{2} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$ である．

命題 2.3 と同様に，次が成立する．

命題 5.3. 直線族 $X \models H$ に対して，以下が成立する．

(1) $\mathrm{dim} H \leq n-1$.
(2) $\mathrm{dim} H = n-1$ となるのは X が線形空間 $\mathbb{P}^n$ の場合のみである．

命題 5.3 より，命題 3.3 に対応する以下の命題が成立する．

命題 5.4. 一般に $S_X \leq n$ が成立し，等号成立は X が線形空間 $\mathbb{P}^n$ の場合に限る．

不変量 S_X は，以下の命題のように，幾何学的に有益な情報を含んでいる．

命題 5.5. S_X がある自然数 r 以上ならば，X は線形空間 $\mathbb{P}^r$ で覆われる．

証明の概略. 長さ r の直線族の鎖

$$X \vdash H_1 \models \cdots \models H_{r-3} \models H_{r-2} \models H_{r-1} \models H_r$$

が取れるとする．このとき，H_r における点は H_{r-1} 内のある直線 $\mathbb{P}^1$ に対応している．その直線上の各点は H_{r-2} 内の直線達に対応しており，それらの和集合は平面 $\mathbb{P}^2$ を成すことが分かる．更に，その平面上の各点は H_{r-3} 内の直線達に対応しており，それらの和集合は 3 次元線形空間 $\mathbb{P}^3$ を成すことが分かる．このようにして帰納的に考えれば，X は r 次元線形空間 $\mathbb{P}^r$ 含み，それらで覆われることが示される． □

注意 5.6. 命題 5.5 の逆は成立しない．即ち，S_X は X を覆う線形空間の最大次元になっているとは限らない．例えば，X を $\mathbb{P}^7$ 内の $(2,2)$ 型完全交叉とすると，これは平面 $\mathbb{P}^2$ で覆われる．しかし，X の直線族は $\mathbb{P}^4$ 内の $(2,2)$ 型完全交叉と同型であり，これは直線で覆われないため，$S_X = 1$ である．

命題 5.5 を用いると，以下のことが分かる．

命題 5.7. $S_X = n-1$ ならば，X は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ または $\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}^{n-2}}\mathbb{P}^n$ のどちらかと同型である．

証明の概略． $S_X = n-1$ とすると，命題 5.5 より，X は $n-1$ 次元の射影空間で覆われ，ある曲線 C 上の射影空間束 $\mathbb{P}_C(\mathscr{E})$ と同型になる．X はファノ多様体であることから，C は射影直線であり，$\mathscr{E}$ は $\mathscr{O}^n$ または $\mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}^{n-1}$ のどちらかと同型であることが分かる． □

高次元の線形空間で覆われる多様体に関する研究として，E. Sato は，次元が $\frac{n}{2}$ 以上の線形空間で覆われる n 次元多様体の分類を与えている:

命題 5.8 ([11])**.** $X \subset \mathbb{P}^N$ を次元が $\frac{n}{2}$ 以上の線形空間で覆われる n 次元多様体（ファノ多様体でなくてもよい）．このとき，X は次のいずれかと同型である．

(a) 線形射影空間束，
(b) 2 次超曲面 Q^{2m}，
(c) グラスマン多様体 $G(2, \mathbb{C}^{m+2})$．

命題 5.8 および 5.5 を用いると，以下のことが直ちに従う．

命題 5.9. $X \subset \mathbb{P}^N$ をピカール数 1 の n 次元ファノ多様体とする．

(1) $S_X > \frac{n}{2}$ ならば，X は線形射影空間 $\mathbb{P}^n$ である．
(2) $S_X = \frac{n}{2}$ ならば，X は 2 次超曲面 Q^{2m} またはグラスマン多様体 $G(2, \mathbb{C}^{m+2})$ と同型である．

一方，$\frac{n-1}{2}$ 次元の線形空間で覆われる n 次元多様体の分類問題（命題 5.8 の拡張）は，ピカール数 1 の場合に限っても未解決である．

6　主結果 2

$\frac{n-1}{2}$ 次元の線形空間で覆われる n 次元多様体の分類問題の特別な場合として，$S_X = \frac{n-1}{2}$ なるピカール数 1 のファノ多様体の分類を与えたものが，二つ目の主結果である：

定理 6.1. $X \subset \mathbb{P}^N$ をピカール数 1 の n 次元ファノ多様体とする．$S_X = \frac{n-1}{2}$ ならば，X は次のいずれかと同型である．

(a) 2 次超曲面 Q^{2m+1}，

(b) シンプレクティックグラスマン多様体 $SG(2, \mathbb{C}^{m+3})$,
(c) 3 次元 3 次超曲面,
(d) 3 次元 $(2,2)$ 型完全交叉,
(e) グラスマン多様体 $G(2, \mathbb{C}^5)$ の 3 次元線形切断.

証明の概略. 次元 n を $2m+1$ とすると，仮定より，長さ m の直線族の鎖

$$X \vdash H_1 \models H_2 \models \cdots \models H_m$$

が取れる.

場合 1. $H_1, H_2, \ldots$ に線形空間が現れない場合.

この場合，命題 5.3 より，直線族 $H_1, H_2, \ldots$ の次元は少なくとも 2 ずつ下がっていき，故に，H_1 の次元は $2m-2$ 以上でなければならない．有理曲線の変形理論における基本性質を用いると，ファノ指数 i_X（反標準直線束が何倍の直線束で表されるかを表す不変量）は，$\mathrm{dim} H_1 + 2$ と等しく，従って $2m (= n-1)$ 以上であることが従う．ここで，「$i_X \geq n$ なるファノ多様体 X は射影空間および 2 次超曲面のみである」ということが，S. Kobayashi と T. Ochiai の結果（[7]）によって知られている．また，$i_X = n-1$ なるファノ多様体 X の分類も，T. Fujita の結果（[3] および [4]）によって知られている．それら全てにおいて S_X を調べれば，仮定を満たす X は (a)，(c)，(d)，(e) のいずれかしかないことが確認できる.

場合 2. $H_1, H_2, \ldots$ のいずれかが線形空間である場合.

第 i 階までは線形空間が現れず，第 $i+1$ 階で初めて線形空間が現れるとする．このとき，場合 1 と同様に，$H_1, H_2, \ldots, H_i$ の次元は少なくとも 2 ずつ下がっていき，H_{i+1} 以降は次元が 1 ずつ下がっていく．また，直線族に関する性質を用いると，H_i のピカール数が 1 ならば H_i と H_{i+1} の次元の差が大きくなること（$\frac{\mathrm{dim} H_i - 4}{2} \geq \mathrm{dim} H_{i+1}$）が分かり，$H_i$ のピカール数が 2 以上ならば H_{i-1} と H_i の次元の差が大きくなること（$\frac{\mathrm{dim} H_{i-1}}{2} \geq \mathrm{dim} H_i$）が分かる．このとき，鎖の長さが m になり得るのは，$i=1$ かつ H_1 はピカール数 2 以上の m 次元多様体で，

$$X \vdash H_1 \models \mathbb{P}^{m-2} \models \mathbb{P}^{m-3} \models \cdots \quad \models \mathbb{P}^1 \models \mathrm{pt}$$

という状況しかないことが分かる．このとき，$S_{H_1} = m-1$ となっており，命題 5.7 から，H_1 は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{m-1}$ または $\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}^{m-2}} \mathbb{P}^m$ のどちらかと同型である．ここで，H_1 は X の接空間である $2m$ 次元の射影空間に埋め込まれる非退化な多様体となっている．一般に，

割線多様体の次元を調べることで，多様体が何次元の射影空間に埋め込まれるかを調べることができる．そこで，上記の二つの多様体に対してあらゆる埋め込まれ方を考え，その割線多様体の次元を計算することで，条件を満たす H_1 は $\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}^{m-2}}\mathbb{P}^m$ であることが分かり，接空間への埋め込まれ方も決定できる．すると，J.-M. Hwang と Q. Li によるシンプレクティックグラスマン多様体の直線族による特徴付けの結果 [6] を適用でき，X は (b) と同型であることが従う． □

参考文献

[1] C. Araujo and A-M. Castravet, Polarized minimal families of rational curves and higher Fano manifolds, *American J. Math.*, **134**(1) (2012), 87-107.

[2] K. Cho, Y. Miyaoka, and N. I. Shepherd-Barron, Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds, *Adv. Stud. Pure Math.*, **35** (Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2002), 1-88.

[3] T. Fujita, On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, I, *J. Math. Soc. Japan.* **32** (1980), 709-725.

[4] T. Fujita, On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, II, *J. Math. Soc. Japan.* **33** (1981), 415-434.

[5] J.-M. Hwang, Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds, in *School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry* (Trieste, 2000), ICTP Lect. Notes, vol. 6, 335-393. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys. (2001).

[6] J.-M. Hwang and Q. Li, Characterizing symplectic Grassmannians by varieties of minimal rational tangents, arXiv:1901.00357.

[7] S. Kobayashi and T. Ochiai, Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics, *J. Math. Kyoto Univ.*, **13** (1973) 31-47.

[8] Y. Miyaoka. Numerical characterizations of hyperquadrics, *Adv. Stud. Pure Math.*, **42**, (Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004), 209-235.

[9] S. Mori, Projective manifolds with ample tangent bundles, *Ann. Math.(2)*, **110**(3) (1979), 593-606.

[10] T. Nagaoka, On a sufficient condition for a Fano manifold to be covered by rational N-folds, *J. Pure and Applied Algebra*, **223**(11) (2019), 4677-4688.

[11] E. Sato, Projective manifolds swept out by large dimensional linear spaces, *Tohoku Math. J.*, **49** (1997), 299-321.

[12] T. Suzuki, Higher order minimal families of rational curves and Fano manifolds with nef Chern characters, *J. Math. Soc. Japan*, to appear.

[13] T. Suzuki, An invariant for embedded Fano manifolds covered by linear spaces, *Kyushu Journal of Mathematics*, **72**(1) (2018), 223-230.