置換表現の個数に関する p 進的性質について

竹ヶ原　裕元

室蘭工業大学

A を群とし, 任意の自然数 d に対して, A における指数 d の部分群の個数は有限であるとする. 対称群 S_n, 交代群 A_n, 環積 $C_p \wr S_n$, $C_2 \wr A_n$, および D_n 型のワイル群 $W(D_n)$ の何れかを K_n で表し, A から K_n への準同形の個数を $h(A, K_n)$ で表すとき, 数列 $\{h(A, K_n)\}_{n=0}^{\infty}$ に対する指数型母関数は A の部分群に関する情報から定まる指数関数を用いた表示をもつ. ここで C_p は位数が素数 p の巡回群である. また, アルティン・ハッセの指数関数 $\exp(\sum_{k=0}^{\infty} X^{p^k}/p^k)$ が p 進整数係数の形式的べき級数である事実を用いて, $\sum_{n=0}^{\infty} h(C_p, S_n)X^n/n! = \exp(X + X^p/p)$ の p 進的性質が得られることや, $h(C_p, S_n)$ が p 進解析関数の値により特徴付けられることが知られている. 最近, このことの拡張として, A が有限アーベル p 群の場合に, 数列 $\{h(A, S_n)\}_{n=0}^{\infty}$ に対する指数型母関数の p 進的性質および $h(A, S_n)$ の p 進解析関数の値による特徴付けが得られた. さらに, 位数 p^u の巡回群と位数 p^v の巡回群の直積を $C_{p^u} \times C_{p^v}$ で表すとき, $h(C_{p^u} \times C_{p^v}, C_p \wr S_n)$ について類似の結果が得られた. $p = 2$ のときには, $h(C_{2^u} \times C_{2^v}, A_n)$, $h(C_{2^u} \times C_{2^v}, C_2 \wr A_n)$, および $h(C_{2^u} \times C_{2^v}, W(D_n))$ についても類似の結果が得られた. 本報告では, このような研究で用いられる手法について解説する.

1　母関数

A において指数が有限である部分群全体の集合を $\mathcal{F}_A$ で表す. S_0 は単位元のみからなる群とする. 数列 $\{h(A, S_n)\}_{n=0}^{\infty}$ に関して, 次の式が知られている ([25]).

$$E_A(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(A, S_n)}{n!} X^n = \exp\left(\sum_{B \in \mathcal{F}_A} \frac{1}{|A : B|} X^{|A:B|}\right) \tag{1}$$

p を素数, u を正の整数とする. 位数 p^u の巡回群を C_{p^u} で表す. $A = C_{p^u}$ の場合, 数列 $\{h(C_{p^u}, S_n)\}_{n=0}^{\infty}$ に関して, 次の式が得られる ([3]).

$$E_{C_{p^u}}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(C_{p^u}, S_n)}{n!} X^n = \exp\left(\sum_{k=0}^{u} \frac{1}{p^k} X^{p^k}\right) \tag{2}$$

$\mathbb{Z}_p$ で p 進整数のなす環, $\mathbb{Q}_p$ で p 進数のなす体を表す. $A = \mathbb{Z}_p$ (加法群) の場合, $E_{\mathbb{Z}_p}(X)$ は アルティン・ハッセの指数関数と呼ばれ, 次のことが成り立つ.

$$E_{\mathbb{Z}_p}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(\mathbb{Z}_p, S_n)}{n!} X^n = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} X^{p^k}\right) \in 1 + X\mathbb{Z}_p[[X]] \tag{3}$$

$E_{\mathbb{Z}_p}(X) \in 1 + X\mathbb{Z}_p[[X]]$ の部分は, 次のデュドネによる結果から得られる ([5]).

命題 1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n = \exp(\sum_{i=0}^{\infty} \ell_i X^{p^i})$, $\ell_i \in \mathbb{Q}_p$, とするとき, $c_n \in \mathbb{Z}_p$, $n = 1, 2, \ldots,$ であるための必要十分条件は

$$\ell_i - \frac{\ell_{i-1}}{p} \in \mathbb{Z}_p, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (\ell_{-1} = 0)$$

が成り立つことである.

$E_{C_{p^u}}(X)$ の p 進的性質は, $E_{\mathbb{Z}_p}(X) \in 1 + X\mathbb{Z}_p[[X]]$ であることを用いて研究された.

環積について述べる. G を有限群, H_n を n 次対称群 S_n の部分群とする. 群の直積

$$G^{(n)} := \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n}$$

について, H_n から $G^{(n)}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, G^{(n)}$ への準同型 $\rho : H_n \to \mathrm{Aut}\, G^{(n)}$ を

$$\rho(\sigma)(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(n)}), \qquad {}^{\forall}\sigma \in H_n,\ {}^{\forall}(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^{(n)}$$

により定義する. このとき, H_n による $G^{(n)}$ 上の作用

$${}^{\sigma}(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(n)})$$

が定義される. この作用に関する $G^{(n)}$ と H_n の半直積を G の H_n による環積といい, $G \wr H_n$ で表す. 定義から, $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^{(n)}$ と $\sigma \in H_n$ に対して

$$\sigma(g_1, g_2, \ldots, g_n)\sigma^{-1} = (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(n)})$$

である. 数列 $\{h(A, G \wr S_n)\}_{n=0}^{\infty}$ に関して, 次の式が知られている ([15]).

$$E_A(X; G) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(A, G \wr S_n)}{|G|^n n!} X^n = \exp\left(\sum_{B \in \mathcal{F}_A} \frac{h(B, G)}{|G| \cdot |A : B|} X^{|A:B|} \right)$$

ここで $h(B, G)$ は B から G への準同型の個数を表す. $C_2 \wr S_n$ は B_n 型のワイル群である. $A = C_{p^u}$ の場合, 数列 $\{h(C_{p^u}, C_p \wr S_n)\}_{n=0}^{\infty}$ に関して, 次の式が得られる ([17]).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(C_{p^u}, C_p \wr S_n)}{p^n n!} X^n = \exp\left(\sum_{k=0}^{u-1} \frac{1}{p^k} X^{p^k} + \frac{1}{p^{u+1}} X^{p^u} \right)$$

A の部分群 B に対して, 写像 $\mathrm{sgn}_{A/B} : A \to \{-1, 1\}$ を次のように定める.

$$\mathrm{sgn}_{A/B}(a) := \begin{cases} 1 & (a \in A \text{ が } A/B \text{ 上に偶置換として作用する場合}) \\ -1 & (a \in A \text{ が } A/B \text{ 上に奇置換として作用する場合}) \end{cases}$$

数列 $\{h(A, G \wr A_n)\}_{n=0}^{\infty}$ に関して, 次の式が知られている ([20]).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(A, G \wr A_n)}{|G|^n n!} X^n$$
$$= \frac{1}{|A : \Phi_2(A)|} \sum_{c\Phi_2(A) \in A/\Phi_2(A)} \exp\left(\sum_{B \in \mathcal{F}_A} \frac{\mathrm{sgn}_{A/B}(c) \cdot h(B, G)}{|G| \cdot |A : B|} X^{|A:B|} \right)$$

ここで $\Phi_2(A)$ は A のすべての指数 2 の部分群の共通部分である. $A = C_{2^u}$ の場合, 数列 $\{h(C_{2^u}, C_2 \wr A_n)\}_{n=0}^{\infty}$ に関して, 次の式が得られる ([1]).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(C_{2^u}, C_2 \wr A_n)}{2^n n!} X^n$$
$$= \frac{1}{2} \exp\left(\sum_{k=0}^{u-1} \frac{1}{2^k} X^{2^k} + \frac{1}{2^{u+1}} X^{2^u} \right) + \frac{1}{2} \exp\left(X - \sum_{k=1}^{u-1} \frac{1}{2^k} X^{2^k} - \frac{1}{2^{u+1}} X^{2^u} \right)$$

$A = C_{2^u}$ の場合, 数列 $\{h(C_{2^u}, A_n)\}_{n=0}^{\infty}$ に関して, 次の式が得られる ([18]).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(C_{2^u}, A_n)}{n!} X^n = \frac{1}{2} \exp\left(\sum_{k=0}^{u} \frac{1}{2^k} X^{2^k} \right) + \frac{1}{2} \exp\left(X - \sum_{k=1}^{u} \frac{1}{2^k} X^{2^k} \right) \tag{4}$$

D_n 型のワイル群 $W(D_n)$ は次のように定義される.

$$W(D_n) := \{(g_1, g_2 \ldots, g_n)\alpha \in C_2 \wr S_n \mid g_1 g_2 \cdots g_n = 1\}$$

A の部分群 B に対して, 写像 $V_{B/\Phi_2(B)} : A \to B/\Phi_2(B)$ を次のように定める.

$$a \mapsto a^{|A:B|}\Phi_2(B)$$

数列 $\{h(A, W(D_n))\}_{n=0}^{\infty}$ に関して, 次の式が知られている ([20]).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(A, W(D_n))|}{2^n n!} X^n$$
$$= \frac{1}{|A : \Phi_2(A)|} \sum_{c\Phi_2(A) \in A/\Phi_2(A)} \exp\left(\sum_{\substack{B \in \mathcal{F}_A, \\ c \in \ker V_{B/\Phi_2(B)}}} \frac{|B : \Phi_2(B)|}{2|A : B|} X^{|A:B|} \right)$$

$A = C_{2^u}$ の場合, 数列 $\{h(C_{2^u}, W(D_n))\}_{n=0}^{\infty}$ に関して, 次の式が得られる ([1]).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(C_{2^u}, W(D_n))}{2^n n!} X^n = \frac{1}{2} \exp\left(\sum_{k=0}^{u-1} \frac{1}{2^k} X^{2^k} + \frac{1}{2^{u+1}} X^{2^u} \right) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2^{u+1}} X^{2^u} \right)$$

2　母関数の収束域

$a=\sum_{i=-n_0}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Q}_p$, $0 \le a_i \le p-1$, ただし n_0 は非負整数, に対して $a_i \neq 0$ である最小の i を $\mathrm{ord}_p(a)$ で表す．ただし, $\mathrm{ord}_p(0)=\infty$ とする．0 でない整数 a に対して $\mathrm{ord}_p(a)$ は a を割り切る最大の p のべき数を表す．$\mathbb{Z}_p=\{a \in \mathbb{Q}_p \mid \mathrm{ord}_p(a) \ge 0\}$ である．実数 x に対して $[x]$ で x を超えない最大の整数を表す．

$\mathbb{Q}_p$ における非アルキメデス的絶対値 $|\ |_p$ を, $x \in \mathbb{Q}_p$ に対して,

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-\mathrm{ord}_p(x)} & (x \neq 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (x = 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

と定める．形式的べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{Q}_p[[X]]$ の収束半径は

$$a = \liminf(\mathrm{ord}_p(a_n)/n)$$

とおくとき, p^a で与えられる．$\exp(X)$ の収束域は $|x|_p < p^{-1/(p-1)}$ であり, アルティン・ハッセの指数関数 $E_{\mathbb{Z}_p}(X)$ の収束域は $|x|_p < 1$ である ([11])．また, $E_{C_p}(X)$ の収束域は $|x|_p < p^{-(2p-1)/p^2(p-1)}$ であることが知られている ([9, 14, 19])．この事実は $\mathrm{ord}_p(h(C_p,S_n))$ の評価により示されるが,

$$\mathrm{ord}_p(h(C_p,S_n)) \ge \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p^2}\right]$$

であり, n が p^2 の倍数であるとき等号が成立することが知られている ([7, 8, 10])．この評価は $p=2$ の場合には, [2] で示されており, [16] では次のことが示された．

$$\mathrm{ord}_2(h(C_2,S_n)) = \left[\frac{n}{2}\right] - 2\left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n+1}{4}\right]$$

上記の結果を一般化する次の定理およびその系は [22] で示された．

定理 2.1 A を有限アーベル群とし, P を A のシロー p 部分群とする．P の位数を p^s とし, P の型は s の分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ であるとする．非負整数 u, v を

$$u := \max\left\{\lambda_1, \left[\frac{s+1}{2}\right]\right\} \quad \text{および} \quad v := \min\left\{s-\lambda_1, \left[\frac{s}{2}\right]\right\}$$

により定める．($s=u+v$, $u \ge v \ge 0$ である.) $p=2$ かつ $u=v\ge 1$ の場合を除き

$$\mathrm{ord}_p(h(A,S_n)) \ge \sum_{j=1}^{u}\left[\frac{n}{p^j}\right] - (u-v)\left[\frac{n}{p^{u+1}}\right]$$

であり, n が p^{u+1} の倍数のとき等号が成立する．また $p=2$ かつ $u=v\ge 1$ ならば

$$\mathrm{ord}_2(h(A,S_n)) \ge \sum_{j=1}^{u}\left[\frac{n}{2^j}\right] + \left[\frac{n}{2^{u+2}}\right] - \left[\frac{n}{2^{u+3}}\right]$$

であり, n が 2^{u+3} の倍数のとき等号が成立する．

定理 2.1 において, $A = P$ の場合は [13] で示されている.

系 2.2 定理 2.1 の仮定のもとで, 形式的べき級数 $E_A(X)$ の収束域は

$$a := \begin{cases} -\dfrac{7}{2^{u+3}} & (p=2,\ u=v \geq 1 \text{ の場合}) \\ -\dfrac{1}{p^u(p-1)} - \dfrac{u-v}{p^{u+1}} & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

として, $|x|_p < p^a$ である.

以後 $u, v \in \mathbb{Z}$, $u \geq 1$, $u \geq v \geq 0$ とする. 次の定理および系は [23] で示された.

定理 2.3 $p \geq 2$ かつ $u \geq v+1$ または $p > 2$ かつ $u = v$ ならば

$$\mathrm{ord}_p(h(C_{p^u} \times C_{p^v}, C_p \wr S_n)) \geq \sum_{j=0}^{u-1} \left[\frac{n}{p^j}\right] - (u-v)\left[\frac{n}{p^u}\right]$$

であり, n が p^u の倍数のとき等号が成立する. また $p=2$ かつ $u=v$ ならば

$$\mathrm{ord}_2(h(C_{2^u} \times C_{2^v}, C_2 \wr S_n)) \geq \sum_{j=0}^{u-1} \left[\frac{n}{2^j}\right] + \left[\frac{n}{2^{u+1}}\right] - \left[\frac{n}{2^{u+2}}\right]$$

であり, n が 2^{u+2} の倍数のとき等号が成立する.

系 2.4 形式的べき級数 $E_{C_{p^u} \times C_{p^v}}(X; C_p)$ の収束域は

$$a := \begin{cases} -\dfrac{7}{2^{u+2}} & (p=2,\ u=v \text{ の場合}) \\ -\dfrac{1}{p^{u-1}(p-1)} - \dfrac{u-v}{p^u} & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

として, $|x|_p < p^a$ である.

最近, $h(C_{2^u} \times C_{2^v}, A_n)$ に関する以下の 2 つの結果を得た ([24]).

定理 2.5 $k=2$ または $k=3$ とする. $u=v$ の場合を除き

$$\mathrm{ord}_2(h(C_{2^u} \times C_{2^v}, A_n)) \geq \sum_{j=1}^{u} \left[\frac{n}{2^j}\right] - (u-v)\left[\frac{n}{2^{u+1}}\right] - 1$$

であり, $n \equiv k \pmod{2^{u+1}}$ のとき等号が成立する. また $u=v$ ならば

$$\mathrm{ord}_2(h(C_{2^u} \times C_{2^v}, A_n)) \geq \sum_{j=1}^{u} \left[\frac{n}{2^j}\right] + \left[\frac{n}{2^{u+2}}\right] - \left[\frac{n}{2^{u+3}}\right] - 1$$

であり, $n \equiv k \pmod{2^{u+3}}$ のとき等号が成立する.

非負整数 y に対して, y が奇数のとき $\chi_o(y)=1$, y が偶数のとき $\chi_o(y)=0$ とする.

定理 2.6 $r=0$ または $r=1$ とする. $u+\delta_{v0}\geq v+2$ ならば, 任意の非負整数 y に対して, 次の式を満たす 2 進整数 α_r が存在する.

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_2(h(C_{2^u}\times C_{2^v},A_{2^{u+1}y+r})) &= (2^{u+1}-u+v-2)y+\chi_o(y)\cdot(\mathrm{ord}_2(y+\alpha_r)+u-v)\\ &\geq \sum_{j=1}^{u}\left[\frac{2^{u+1}y+r}{2^j}\right]-(u-v)\left[\frac{2^{u+1}y+r}{2^{u+1}}\right]\\ &(=(2^{u+1}-u+v-2)y)\end{aligned}$$

定理 2.6 に関して, $\mathrm{ord}_2(h(C_2,S_{4y}))=y+\chi_o(y)$ である. このことと定理 2.5 における $u=1$, $v=0$ の場合の結果は [10] で示された. 定理 2.6 における $v=0$ の場合の結果は [12] で示された. 定理 2.6 の主張に現れる 2 進整数の存在に関連して, [8, 16] では $\mathrm{ord}_p(h(C_p,S_n))$ に対して定まる p 進整数の存在が研究された.

$h(C_{2^u}\times C_{2^v},W(D_n))$, $h(C_{2^u}\times C_{2^v},C_2\wr A_n)$ の 2 進的性質は $h(C_{2^u}\times C_{2^v},A_n)$ の 2 進的性質に類似していて, ほぼ同じように示される. (6 節で少し記述する.)

3 $h(C_{2^u},A_n)$ の 2 進的性質

この節では, 定理 2.5 と定理 2.6 を導く $h(C_{2^u},A_n)$ の 2 進的性質について解説する. (内容は [12, 24] に記載されたものである.) (2) および (4) より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{t}_n}{n!}X^n=\exp\left(X-\sum_{k=1}^{u}\frac{1}{2^k}X^{2^k}\right)$$

とおけば

$$h(C_{2^u},A_n)=\frac{h(C_{2^u},S_n)+\hat{t}_n}{2} \tag{5}$$

と表される. 次に, 数列 $\{\hat{c}_n\}$, $\{\hat{z}_n\}$ を次のように定める.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\hat{c}_nX^n=\exp\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}X^{2^k}\right)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\hat{z}_nX^n=\exp\left(X-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}X^{2^k}\right)$$

前者はアルティン・ハッセの指数関数であり, (3) より $\hat{c}_n\in\mathbb{Z}_2$ である. また, 命題 1.1 より $\hat{z}_n\in\mathbb{Z}_2$ を得る. これらの事実が定理 2.5 や定理 2.6 の証明に重要な役割を果たす. Mathematica を用いて, 次のようになっていることがわかる.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\hat{c}_n$	1	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{67}{315}$	$\frac{88}{315}$	$\frac{617}{2835}$	$\frac{2626}{14175}$	$\frac{18176}{155925}$
$\hat{z}_n$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{5}{63}$	$-\frac{8}{105}$	$-\frac{43}{405}$	$-\frac{74}{14175}$	$\frac{559}{17325}$

$h(C_{2^u}, S_n)$ および $\hat{t}_n$ の 2 進的性質の研究では, 次の式を使う.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(C_{2^u}, S_n)}{n!} X^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n X^n \right) \exp \left(- \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{u+i+1}} X^{2^{u+i+1}} \right) \tag{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{t}_n}{n!} X^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{z}_n X^n \right) \exp \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{u+i+1}} X^{2^{u+i+1}} \right) \tag{7}$$

(7) を変形する. r を $0 \leq r < 2^{u+1}$ を満たす整数として, 次の式を得る.

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\hat{t}_{2^{u+1}y+r}}{(2^{u+1}y+r)!} X^{2^{u+1}y} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \hat{z}_{2^{u+1}j+r} X^{2^{u+1}j} \right) \exp \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{u+i+1}} X^{2^{u+i+1}} \right) \tag{8}$$

形式的べき級数 $F(X)$ を次のように定める.

$$F(X) := \left(\sum_{j=0}^{\infty} \hat{z}_{2^{u+1}j+r} (2^{u+1}X)^j \right) \exp \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{u+i+1}} (2^{u+1}X)^{2^i} \right)$$

(8) で $X^{2^{u+1}}$ を $2^{u+1}X$ に置き換えて, 次の式を得る.

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\hat{t}_{2^{u+1}y+r}}{(2^{u+1}y+r)!} (2^{u+1}X)^y = \exp(X) \exp(2^u X^2) F(X) \tag{9}$$

ここで, 形式的べき級数の環 $\mathbb{Z}_p[[X]]$ の部分環 $\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$ を次のように定める.

$$\mathbb{Z}_p\langle X \rangle := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{Z}_p[[X]] \;\middle|\; |a_n|_p \to 0 \quad (n \to \infty) \right\}$$

$\hat{z}_n \in \mathbb{Z}_2$ より, 次のことが成り立つ.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{z}_{2^{u+1}j+r} (2^{u+1}X)^j \in \mathbb{Z}_2\langle X \rangle$$

(9) を利用するため, 次の補題を準備する ([12]).

補題 3.1 $\sum_{n=0}^{\ell} m_n X^n$ を $\mathbb{Z}_p$ 係数の ℓ 次多項式とし, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n X^n \in p^k X \mathbb{Z}_p\langle X \rangle$, k は非負整数とする. 数列 $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $d_0 = m_0$, $d_n = m_n + w_n$, ${}^{\forall} n \in \mathbb{N}$, により定める. ここで $m_{\ell+1} = m_{\ell+2} = \cdots = 0$ とする. このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n)}{n!} X^n = \exp(X) \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n \quad \text{かつ} \quad g(X) \in \sum_{i=0}^{\ell} m_i X^{\underline{i}} + p^k X \mathbb{Z}_p\langle X \rangle$$

を満たす $g(X)$ が存在する. ここで $X^{\underline{i}}$ は次で定義される.

$$X^{\underline{i}} = \begin{cases} X(X-1)\cdots(X-i+1) & (i \geq 1 \text{ の場合}) \\ 1 & (i = 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$\exp(2^u X^2)F(X)$ の 2 進的性質を見るには, 次の補題を用いる ([12]).

補題 3.2 k を正の整数とし, a を $\mathrm{ord}_p(a) = k$ を満たす p 進整数とする. $p = 2$ かつ $k = 1$ の場合を除けば, 次のことが成り立つ.

$$\exp(aX) \in 1 + aX + \frac{a^2}{2}X^2 + \frac{a^3}{6}X^3 + p^{2k+1}X^4\mathbb{Z}_p\langle X\rangle$$

$F(X)$ の式中, $i \geq 2$ ならば $\mathrm{ord}_2(2^{(u+1)2^i}/2^{u+i+1}) \geq 3u+1$ が成り立ち, $u \geq 2$ ならば, 次のことが補題 3.2 から導かれる.

$$\exp(2^u X^2)F(X) \in \hat{z}_r(1 + 2^u X^2 + 2^{2u-1}X^4) + \hat{z}_{2^{u+1}+r}2^{u+1}X + 2^{2u+1}X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$$

$u = 1$ の場合, (9) において X を $-X$ に置き換えて, 次の式を得る.

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\hat{t}_{4y+r}}{(4y+r)!}(-4X)^y = \exp(X)\exp(-2X + 2X^2)F(-X) \tag{10}$$

さらに, 次のことがわかる.

$$\exp(-2X + 2X^2)F(-X) \in \hat{z}_r(1 - 2X + 4X^2 - 4X^4) - 4\hat{z}_{4+r}X + 8X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$$

これで (9) および (10) に補題 3.1 を応用し, $\hat{t}_n$ を評価できる. 同様に $h(C_{2^u}, S_n)$ を評価するための (6) の変形がある ([4]). 結局, 補題 3.1 を用いて次の結果を得る.

定理 3.3 y を非負整数とし, r を $0 \leq r < 2^{u+1}$ を満たす整数とする.

(1) $u \geq 2$ ならば, 次の式を満たす $\hat{g}_r(X)$, $\hat{f}_r(X) \in \mathbb{Z}_2\langle X\rangle$ が存在する.

$$\begin{aligned}
\hat{g}_r(X) &\in \hat{c}_r(1 - 2^u X^{\underline{2}} + 2^{2u-1}X^{\underline{4}}) - \hat{c}_{2^{u+1}+r}2^{u+1}X + 2^{2u+1}X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle \\
\hat{f}_r(X) &\in \hat{z}_r(1 + 2^u X^{\underline{2}} + 2^{2u-1}X^{\underline{4}}) + \hat{z}_{2^{u+1}+r}2^{u+1}X + 2^{2u+1}X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle \\
\hat{g}_r(y) &= \frac{h(C_{2^u}, S_{2^{u+1}y+r})}{(2^{u+1}y+r)!}(-2^{u+1})^y y! \\
\hat{f}_r(y) &= \frac{\hat{t}_{2^{u+1}y+r}}{(2^{u+1}y+r)!}2^{(u+1)y}y!
\end{aligned}$$

(2) $u = 1$ ならば, 次の式を満たす $\hat{g}_r(X)$, $\hat{f}_r(X) \in \mathbb{Z}_2\langle X\rangle$ が存在する.

$$\begin{aligned}
\hat{g}_r(X) &\in \hat{c}_r(1 - 2X - 4X^{\underline{4}}) + 4\hat{c}_{4+r}X + 8X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle \\
\hat{f}_r(X) &\in \hat{z}_r(1 - 2X + 4X^{\underline{2}} - 4X^{\underline{4}}) - 4\hat{z}_{4+r}X + 8X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle \\
\hat{g}_r(y) &= \frac{h(C_2, S_{4y+r})}{(4y+r)!}4^y y! \\
\hat{f}_r(y) &= \frac{\hat{t}_{4y+r}}{(4y+r)!}(-4)^y y!
\end{aligned}$$

定理 3.3 の記号のもとで, (5) より, 次の $h(C_{2^u}, A_n)$ の 2 進的性質を得る.

定理 3.4 非負整数 y と $0 \leq r < 2^{u+1}$ を満たす整数 r に対して, 次の式が成り立つ.

$$h(C_{2^u}, A_{2^{u+1}y+r}) = \begin{cases} \dfrac{(2^{u+1}y+r)!}{(-2^{u+1})^y y!} \cdot \dfrac{\hat{g}_r(y) + (-1)^y \hat{f}_r(y)}{2} & (u \geq 2 \text{ の場合}) \\ \dfrac{(4y+r)!}{4^y y!} \cdot \dfrac{\hat{g}_r(y) + (-1)^y \hat{f}_r(y)}{2} & (u = 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

定理 2.5 を示すには, 次の補題を用いる.

補題 3.5 $n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \cdots \in \mathbb{N}$, $0 \leq n_i \leq p-1$, とすると, 次が成り立つ.

$$\mathrm{ord}_p(n!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j}\right] = \frac{n - n_0 - n_1 - n_2 - \cdots}{p-1} \leq \frac{n-1}{p-1}$$

<u>定理 2.5 の証明 ($v = 0$ の場合)</u>: y を非負整数とし, r を $0 \leq r < 2^{u+1}$ を満たす整数とする. 定理 3.4 の式の右辺について, 補題 3.5 より

$$\mathrm{ord}_2\left(\frac{(2^{u+1}y+r)!}{2^{(u+1)y} y!}\right) = \sum_{j=1}^{u} \left[\frac{2^{u+1}y+r}{2^j}\right] - uy$$

である. よって, 最初の不等式が成り立つ. 次に $u = 1$ とする. この場合

$$\frac{\hat{g}_r(y) + (-1)^y \hat{f}_r(y)}{2} \in \frac{\hat{c}_r(1 - 2X - 4X^{\underline{4}}) + 4\hat{c}_{4+r}X}{2}$$
$$+(-1)^y \frac{\hat{z}_r(1 - 2X + 4X^{\underline{2}} - 4X^{\underline{4}}) - 4\hat{z}_{4+r}X}{2} + 4X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$$

および $\hat{c}_2 = 1$, $\hat{z}_2 = 0$, $\hat{c}_3 = 2/3$, $\hat{z}_3 = -1/3$ より, 次のことがわかる.

$$\mathrm{ord}_2\left(\frac{\hat{g}_k(y) + (-1)^y \hat{f}_k(y)}{2}\right) = -1$$

よって $n \equiv k \pmod 4$ のとき等号が成立する. $u \geq 2$ の場合も同様に証明される. □

定理 2.6 の証明に用いられる, 次の結果が知られている ([6]).

定理 3.6 (p-adic Weierstrass Preparation Theorem)

$$f(X) = \sum f_n X^n \in \mathbb{Q}_p[[X]]$$

を $n \to \infty$ のとき $|f_n|_p \to 0$ を満たす形式的べき級数とする. N を

$$|f_N|_p = \max |f_n|_p \text{ かつすべての } n > N \text{ について } |f_n|_p < |f_N|_p$$

を満たす整数とする．このとき $\mathbb{Q}_p$ に係数をもつ N 次多項式

$$k_0 + k_1X + k_2X^2 + \cdots + k_NX^N$$

と, $\mathbb{Q}_p$ に係数をもつべき級数

$$1 + m_1X + m_2X^2 + \cdots$$

が存在して, 次の条件を満たす.

(1) $f(X) = (k_0 + k_1X + k_2X^2 + \cdots + k_NX^N)(1 + m_1X + m_2X^2 + \cdots)$

(2) $|k_N|_p = \max |k_n|_p$

(3) $\lim_{n\to\infty} |m_n|_p = 0$

(4) $|m_n|_p < 1 \qquad {}^\forall n \geq 1$

定理 2.6 の証明 ($v = 0$ の場合): $u = 1$ とする．定理 2.5 の証明 ($v = 0$ の場合) において, $r = 0$ または $r = 1$ とすれば, $\hat{c}_i = \hat{z}_i = 1$ $(i = 0,\, 1)$ より

$$\frac{\hat{g}_r(X) + (-1)^y \hat{f}_r(X)}{2} \in \begin{cases} 1 + 2X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle & (y \text{ が偶数の場合}) \\ 2(1 + \hat{c}_{4+r} + \hat{z}_{4+r})X - 2X^2 + 4X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle & (y \text{ が奇数の場合}) \end{cases}$$

を得る．よって y が偶数ならば $\mathrm{ord}_2(h(C_2, A_{4y+r})) = y$ である．y が奇数であるとし, $f(X) = (\hat{g}_r(X) - \hat{f}_r(X))/2$ とおく．定理 3.6 より 2 進数を係数とする 2 次多項式

$$k_0 + k_1X + k_2X^2$$

および 2 進数を係数とする形式的べき級数

$$1 + m_1X + m_2X^2 + \cdots$$

で定理 3.6 における条件 (1)–(4) を満たすものが存在する．このとき $k_0 = 0$,

$$k_1 \equiv 2(1 + \hat{c}_{4+r} + \hat{z}_{4+r}) \pmod 4, \qquad k_2 \equiv -2 - k_1m_1 \pmod 4$$

である．$\lambda_r = 2^{-1}k_2$, $\alpha_r = 2^{-1}k_1\lambda_r^{-1}$ とおく．このとき $\mathrm{ord}_2(\lambda_r) = 0$, $\alpha_r \in \mathbb{Z}_2$ であって,

$$f(X) = 2\lambda_rX(X + \alpha_r)(1 + m_1X + m_2X^2 + \cdots)$$

より

$$\mathrm{ord}_2(h(C_2, A_{4y+r})) = y + \mathrm{ord}_2(y + \alpha_r) + 1$$

を得る．($r = 0$ のとき, $\hat{c}_4 = 2/3$, $\hat{z}_4 = -1/3$ より $\alpha_0 \equiv 0 \pmod 2$ となり, $\mathrm{ord}_2(h(C_2, A_{4y+r})) = y + 1$ である.) $u \geq 2$ の場合も同様に証明される．□

4　$h(A, S_n)$ の p 進的性質

定理 2.1 の証明は $A = P$ の場合が本質的である．A を位数 p^s のアーベル p 群とし, A の型は s の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ であるとする．非負整数 u, v を

$$u := \max\left\{\lambda_1, \left[\frac{s+1}{2}\right]\right\} \quad \text{および} \quad v := \min\left\{s - \lambda_1, \left[\frac{s}{2}\right]\right\}$$

により定め (この節では $u = 0$ の場合も考える),

$$\kappa_p(u,v) = \begin{cases} u+3 & (p=2,\ u=v\geq 1 \text{ の場合}) \\ u+2 & (p=2,\ u=v+1\geq 2 \text{ または } p=3,\ u=v\geq 1 \text{ の場合}) \\ u+1 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

とおく．$s = u + v$, $u \geq v \geq 0$ である．また, 非負整数 n に対して

$$\tau_p^{(u,v)}(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{u}\left[\frac{n}{2^j}\right] + \left[\frac{n}{2^{u+2}}\right] - \left[\frac{n}{2^{u+3}}\right] & (p=2,\ u=v\geq 1 \text{ の場合}) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{u}\left[\frac{n}{p^j}\right] - (u-v)\left[\frac{n}{p^{u+1}}\right] & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

とおく．このとき, 定理 2.1 の大部分を含む, 次の定理が得られる ([23]).

定理 4.1 $p = 2$, $u+\delta_{v0} = v+1$ または $p = 2$, $\lambda_3 \geq 1$, $u = v$ の場合を除き, $p^{\kappa_p(u,v)}-1$ 次整数係数多項式 $\eta(X)$ および $\varphi_r(X) \in \mathbb{Z}_p\langle X\rangle$, $r = 0, 1, \ldots, p^{\kappa_p(u,v)}-1$, が存在して,

$$h(A, S_{p^{\kappa_p(u,v)}y+r}) = p^{\tau_p^{(u,v)}(p^{\kappa_p(u,v)}y)}\varphi_r(y)\prod_{j=1}^{y}\eta(j) \qquad y = 0, 1, \ldots$$

および

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_p(h(A, S_{p^{\kappa_p(u,v)}y+r})) &= \tau_p^{(u,v)}(p^{\kappa_p(u,v)}y) + \mathrm{ord}_p(\varphi_r(y)) \\ &\geq \tau_p^{(u,v)}(p^{\kappa_p(u,v)}y + r) \qquad y = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに, $p = 2$, $u = v \geq 1$ の場合を除いて, r が $0 \leq r < p^{\kappa_p(u,v)}$ および $r \equiv 0 \pmod{p^{u+1}}$ を満たす整数ならば

$$\mathrm{ord}_p(h(A, S_{p^{\kappa_p(u,v)}y+r})) = \tau_p^{(u,v)}(p^{\kappa_p(u,v)}y + r) \qquad y = 0, 1, \ldots$$

であり, $p = 2$, $u = v \geq 1$ の場合には

$$\mathrm{ord}_2(h(A, S_{2^{u+3}y})) = \tau_2^{(u,u)}(2^{u+3}y) \qquad y = 0, 1, \ldots$$

である．

定理 4.1 における $u=1$, $v=0$ の場合の結果は [8, 16] で示された. 定理 4.1 における $p=2$, $v=0$ の場合の結果は定理 3.3 における $h(C_{2^u}, S_{2^{u+1}y+r})$ に関する結果から導かれる. $h(A, S_n)$ の p 進的性質には $h(C_{p^u}\times C_{p^v}, S_n)$ の p 進的性質が強く反映される. $h(C_{p^u}\times C_{p^v}, S_n)$ の p 進的性質は以下の方法により得られる. $k\in\mathbb{Z}$ に対して, $k\geq 1$ ならば $[k]_p=\sum_{j=0}^{k-1}p^j$, $k\leq 0$ ならば $[k]_p=0$ と定める. (1) より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h(C_{p^u}\times C_{p^v}, S_n)}{n!}X^n$$
$$=\exp\left(\sum_{k=0}^{v-1}\frac{[k+1]_p}{p^k}X^{p^k}+\sum_{k=v}^{u}\frac{[v+1]_p}{p^k}X^{p^k}+\sum_{k=u+1}^{u+v}\frac{[u+v-k+1]_p}{p^k}X^{p^k}\right)$$

を得る. 数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を次の形式的べき級数で定義する.

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nX^n=\exp\left(\sum_{k=0}^{v-1}\frac{[k+1]_p}{p^k}X^{p^k}+\sum_{k=v}^{\infty}\frac{[v+1]_p}{p^k}X^{p^k}\right)$$

命題 1.1 より $c_n\in\mathbb{Z}_p$ が成り立つ. また

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h(C_{p^u}\times C_{p^v}, S_n)}{n!}X^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nX^n\right)\exp\left(-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[v+1]_p-[v-i]_p}{p^{u+i+1}}X^{p^{u+i+1}}\right)$$

であることがわかる. さらに r を $0\leq r<p^{u+1}$ を満たす整数とすれば,

$$\sum_{y=0}^{\infty}\frac{h(C_{p^u}\times C_{p^v}, S_{p^{u+1}y+r})}{(p^{u+1}y+r)!}X^{p^{u+1}y}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}c_{p^{u+1}j+r}X^{p^{u+1}j}\right)$$
$$\times\exp\left(-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[v+1]_p-[v-i]_p}{p^{u+i+1}}X^{p^{u+i+1}}\right)$$

を得る. この式から, 幾つかの場合に分けて, $h(C_{p^u}\times C_{p^v}, S_n)$ の p 進的性質を導く. ここでは, $p=2$, $u=v\geq 1$ の場合に, $h(C_{2^u}\times C_{2^u}, S_n)$ の 2 進的性質を紹介する ([23]). 証明には定理 3.3 の証明で用いた方法を適用する.

定理 4.2 $p=2$, $u=v\geq 1$ とし, r を $0\leq r<2^{u+1}$ を満たす整数, q を $0\leq q<4$ を満たす整数とする. このとき, 次の条件を満たす $g_{q,r}(X)\in\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$ が存在する.

$$g_{q,r}(y)=\frac{h(C_{2^u}\times C_{2^u}, S_{2^{u+1}(4y+q)+r})}{(2^{u+1}(4y+q)+r)!}(-1)^{(1-\delta_{u1})y}2^{6y+q}y!\qquad y=0,\,1,\ldots$$
$$g_{q,r}(X)\in g^*_{q,r}(X)+2^2X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$$

ここで

$$g^*_{q,r}(X)=\begin{cases} c_r(1+(-1)^{1-\delta_{u1}}2X) & (q=0\text{ の場合}) \\ -c_r(1+(-1)^{1-\delta_{u1}}2X)+2c_{2^{u+1}+r} & (q=1\text{ の場合}) \\ -c_r(1-(-1)^{1-\delta_{u1}}2X)-2c_{2^{u+1}+r}+2^2c_{2^{u+2}+r} & (q=2\text{ の場合}) \\ \dfrac{2^2}{3}c_r(1-(-1)^{1-\delta_{u1}}X)-2c_{2^{u+1}+r}-2^2c_{2^{u+2}+r} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +2^3c_{2^{u+2}+2^{u+1}+r} & (q=3\text{ の場合}) \end{cases}$$

定理 4.1 はこのような事実を用いて証明される.

<u>定理 4.1 の証明 ($A=C_{2^u}\times C_{2^u}$, $u\geq 1$ の場合)</u>: r' を $0\leq r'<2^{u+1}$ を満たす整数, q を $0\leq q<4$ を満たす整数とし, $r=2^{u+1}q+r'$ とおく. 形式的べき級数 $\varphi_r(X)$ を

$$\varphi_r(X):=\frac{1}{2^q}g_{q,r'}(X)\prod_{i=1}^{r}(2^{u+3}X+i)\in\mathbb{Z}_p\langle X\rangle$$

とおき ($g_{q,r'}(X)$ は定理 4.2 の主張にあるもの), 多項式 $\eta(X)$ を次のように定める.

$$\eta(X):=(-1)^{1-\delta_{u1}}\frac{1}{2^{2^{u+3}-u-4}}\prod_{i=1}^{2^{u+3}-1}(2^{u+3}X-i)$$

$\mathrm{ord}_2((2^{u+3}-1)!)=2^{u+3}-u-4$ だから, $\eta(X)$ は $2^{u+3}-1$ 次整数係数多項式であり, 任意の整数 j に対して $\eta(j)\not\equiv 0\pmod 2$ である. 任意の非負整数 y に対して

$$2^{(2^{u+3}-1)y}\prod_{j=1}^{y}\eta(j)=(-1)^{(1-\delta_{u1})y}\frac{(2^{u+3}y)!}{y!}$$

であり, さらに, 定理 4.2 より

$$\begin{aligned} 2^{(2^{u+2}+\cdots+2^3+2-1)y}\varphi_r(y)\prod_{j=1}^{y}\eta(j) &= \frac{1}{2^{6y+q}}g_{q,r'}(y)\prod_{i=1}^{r}(2^{u+3}y+i)2^{(2^{u+3}-1)y}\prod_{j=1}^{y}\eta(j) \\ &= \frac{(2^{u+3}y+r)!}{2^{6y+q}y!}(-1)^{(1-\delta_{u1})y}g_{q,r'}(y) \\ &= h(C_{2^u}\times C_{2^u},S_{2^{u+3}y+r}) \end{aligned}$$

となる. また, 任意の非負整数 y に対して $\mathrm{ord}_2(\varphi_r(y))\geq\tau_2^{(u,u)}(r)$ であって, $r=0$ ならば, $c_0=1$ より $\mathrm{ord}_2(\varphi_0(y))=\mathrm{ord}_2(c_0)=0$ だから, 定理の主張が成り立つ. □

定理 4.1 は定理 2.1 における $A=P$ の場合の結果をより鮮明にしたものである. $p=2$, $u+\delta_{v0}=v+1$ または $p=2$, $\lambda_3\geq 1$, $u=v$ の場合にも少し弱い形で定理 2.1 における $A=P$ の場合の結果をより鮮明にすることができる. $p=2$, $u=v+1\geq 2$ の場合に結果を示す (系 4.4). まず, 定理 3.3 の証明で用いた方法で, 次を得る ([23]).

定理 4.3 $A = C_{2^u} \times C_{2^v}$, $u = v+1 \geq 2$ とし, r を $0 \leq r < 2^{u+1}$ を満たす整数, q を $0 \leq q < 2$ を満たす整数とする. 多項式 $g_{q,r}(X)$ を

$$g_{q,r}(X) = \begin{cases} c_r(1 - X - X^2) & (q = 0 \text{ の場合}) \\ -c_r(1 + X - X^2) & (q = 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

と定める. このとき, 次の合同式が成り立つ.

$$\frac{h(A, S_{2^{u+1}(2y+q)+r})}{(2^{u+1}(2y+q)+r)!} 2^{5y+2q} y! \equiv g_{q,r}(y) \pmod{2^2} \qquad y = 0, 1, \ldots$$

系 4.4 $A = C_{2^u} \times C_{2^v}$, $u = v+1 \geq 2$ とする. r' を $0 \leq r' < 2^{u+1}$ を満たす整数, q を $0 \leq q < 2$ を満たす整数とし, $r = 2^{u+1}q + r'$ とおく. 多項式 $\psi_r(X)$ を

$$\psi_r(X) := \frac{1}{2^{2q}} g_{q,r'}(X) \prod_{i=1}^{r} (2^{u+2}X + i) \in \mathbb{Z}_p\langle X \rangle$$

とおき ($g_{q,r'}(X)$ は定理 4.3 の主張にあるもの), 多項式 $\eta(X)$ を次のように定める.

$$\eta(X) := \frac{1}{2^{2^{u+2}-u-3}} \prod_{i=1}^{2^{u+2}-1} (2^{u+2}X - i)$$

このとき, 任意の非負整数 y に対して, 以下の式が成り立つ.

$$h(A, S_{2^{u+2}y+r}) \equiv 2^{\tau_2^{(u,v)}(2^{u+2}y)} \psi_r(y) \prod_{j=1}^{y} \eta(j) \pmod{2^{\tau_2^{(u,v)}(2^{u+2}y+r)+2}}$$

$$\mathrm{ord}_2(h(A, S_{2^{u+2}y+r})) = \tau_2^{(u,v)}(2^{u+2}y) + \mathrm{ord}_2(\psi_r(y)) \geq \tau_2^{(u,v)}(2^{u+2}y + r)$$

$$\mathrm{ord}_2(h(A, S_{2^{u+2}y+2^{u+1}q})) = \tau_2^{(u,v)}(2^{u+2}y)$$

証明: $\mathrm{ord}_2((2^{u+2}-1)!) = 2^{u+2} - u - 3$ だから, $\eta(X)$ は $2^{u+2}-1$ 次整数係数多項式であり, 任意の整数 j に対して $\eta(j) \not\equiv 0 \pmod 2$ である. 任意の非負整数 y に対して

$$2^{(2^{u+2}-1)y} \prod_{j=1}^{y} \eta(j) = \frac{(2^{u+2}y)!}{y!}$$

であり, さらに, 補題 3.5 および定理 4.3 より

$$\begin{aligned} 2^{(2^{u+1}+\cdots+2^3+2^2-2)y} \psi_r(y) \prod_{j=1}^{y} \eta(j) &= \frac{1}{2^{5y+2q}} g_{q,r'}(y) \prod_{i=1}^{r} (2^{u+2}y + i) 2^{(2^{u+2}-1)y} \prod_{j=1}^{y} \eta(j) \\ &= \frac{(2^{u+2}y + r)!}{2^{5y+2q} y!} g_{q,r'}(y) \\ &\equiv h(A, S_{2^{u+2}y+r}) \pmod{2^{\tau_2^{(u,v)}(2^{u+2}y+r)+2}} \end{aligned}$$

となる. また, 任意の非負整数 y に対して $\mathrm{ord}_2(\psi_r(y)) \geq \tau_2^{(u,u)}(r)$ であって, $r' = 0$ ならば $c_0 = 1$ より $\mathrm{ord}_2(\psi_r(y)) = \mathrm{ord}_2(c_0) = 0$ だから, 定理の主張が成り立つ. □

5 $h(C_{2^u}\times C_{2^v},A_n)$ の 2 進的性質

以後 u, v は $u\geq v\geq 1$ を満たす整数とし, $A=C_{2^u}\times C_{2^v}$ とおく. 定理 2.5 および定理 2.6 の証明を解説する. 数列 $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\tilde{t}_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_n}{n!}X^n=\exp\left(X-\sum_{k=1}^{v}\frac{1}{2^k}X^{2^k}+\sum_{k=v+1}^{u}\frac{[v+1]_2}{2^k}X^{2^k}+\sum_{k=u+1}^{s}\frac{[s-k+1]_2}{2^k}X^{2^k}\right)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{t}_n}{n!}X^n=\exp\left(X-\sum_{k=1}^{u}\frac{1}{2^k}X^{2^k}+\sum_{k=u+1}^{s}\frac{[s-k+1]_2}{2^k}X^{2^k}\right)$$

により定めれば, 次の式が成り立つ ([21]).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h(A,A_n)}{n!}X^n=\frac{1}{2^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h(A,S_n)}{n!}X^n+\frac{1}{2^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_n}{n!}X^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{t}_n}{n!}X^n \tag{11}$$

数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\tilde{z}_n\}_{n=0}^{\infty}$ を次のように定める.

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nX^n=\exp\left(\sum_{k=0}^{v}\frac{[k+1]_2}{2^k}X^{2^k}+\sum_{k=v+1}^{\infty}\frac{[v+1]_2}{2^k}X^{2^k}\right)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}z_nX^n=\exp\left(X-\sum_{k=1}^{v}\frac{1}{2^k}X^{2^k}+\sum_{k=v+1}^{\infty}\frac{[v+1]_2}{2^k}X^{2^k}\right)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{z}_nX^n=\exp\left(X-\sum_{k=1}^{u}\frac{1}{2^k}X^{2^k}+\sum_{k=u+1}^{\infty}\frac{[u+1]_2}{2^k}X^{2^k}\right)$$

命題 1.1 より c_n, z_n, $\tilde{z}_n\in\mathbb{Z}_2$ である. 次の関係式がある.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h(A,S_n)}{n!}X^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nX^n\right)\exp\left(-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[v+1]_2-[v-i]_2}{2^{u+i+1}}X^{2^{u+i+1}}\right) \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_n}{n!}X^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z_nX^n\right)\exp\left(-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[v+1]_2-[v-i]_2}{2^{u+i+1}}X^{2^{u+i+1}}\right) \tag{13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{t}_n}{n!}X^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{z}_nX^n\right)\exp\left(-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[u+1]_2-[v-i]_2}{2^{u+i+1}}X^{2^{u+i+1}}\right) \tag{14}$$

これらの関係式を用いて, $h(A,S_n)$, t_n, $\tilde{t}_n$ について, それぞれの 2 進的性質を調べることができ, $h(A,A_n)$ の 2 進的性質は (11) からわかる関係式

$$h(A,A_n)=\frac{h(A,S_n)+t_n+2\tilde{t}_n}{2^2}$$

を用いて得られる. (12) と (13) の類似性から t_n の 2 進的性質は $h(A, S_n)$ の 2 進的性質に類似していて, 例えば定理 4.2 において, $h(C_{2^u} \times C_{2^v}, S_{2^{u+1}(4y+q)+r})$, c_n をそれぞれ t_n, z_n に置き換えた主張が成立する. $h(A, S_n)$, t_n, $\tilde{t}_n$ の 2 進的性質は $u \geq v+3$, $u = v+2$, $u = v+1$, $u = v$ の四つの場合に分かれて結果が得られる.

以下, $u = v+2$ の場合の結果を紹介する. ($u \geq v+3$ の場合の結果は $u = v+2$ の場合の結果に類似している.) 次の定理は [23] で得られた.

定理 5.1 $u = v+2$ とし, r を $0 \leq r < 2^{u+1}$ を満たす整数とする. このとき, 次の条件を満たす $g_r(X) \in \mathbb{Z}_2\langle X \rangle$ が存在する.

$$g_r(y) = \frac{h(A, S_{2^{u+1}y+r})}{(2^{u+1}y+r)!} 2^{3y} y! \qquad y = 0, 1, \ldots$$

$$g_r(X) \in g_r^*(X) + 16X\mathbb{Z}_2\langle X \rangle$$

$$g_r^*(X) = c_r(1 - 2X - 4X^{\underline{2}} - 4X^{\underline{4}} + 8X^{\underline{5}} + 8X^{\underline{8}}) + c_{2^{u+1}+r} 8X$$

(12) と (13) の類似性から, 定理 5.2 の証明と同じ方法で次の定理を証明できる.

定理 5.2 $u = v+2$ とし, r を $0 \leq r < 2^{u+1}$ を満たす整数とする. このとき, 次の条件を満たす $f_r(X) \in \mathbb{Z}_2\langle X \rangle$ が存在する.

$$f_r(y) = \frac{t_{2^{u+1}y+r}}{(2^{u+1}y+r)!} 2^{3y} y! \qquad y = 0, 1, \ldots$$

$$f_r(X) \in f_r^*(X) + 16X\mathbb{Z}_2\langle X \rangle$$

$$f_r^*(X) = z_r(1 - 2X - 4X^{\underline{2}} - 4X^{\underline{4}} + 8X^{\underline{5}} + 8X^{\underline{8}}) + z_{2^{u+1}+r} 8X$$

t_n については, (14) を用いて, 次の定理が得られる ([24]).

定理 5.3 $u = v+2$ とし, r を $0 \leq r < 2^{u+1}$ を満たす整数とする. このとき, 次の条件を満たす $\tilde{f}_r(X) \in \mathbb{Z}_2\langle X \rangle$ が存在する.

$$\tilde{f}_r(y) = \frac{\tilde{t}_{2^{u+1}y+r}}{(2^{u+1}y+r)!} (-2^3)^y y! \qquad y = 0, 1, \ldots$$

$$\tilde{f}_r(X) \in \tilde{f}_r^*(X) + 16X\mathbb{Z}_2\langle X \rangle$$

$$\tilde{f}_r^*(X) = \tilde{z}_r(1 + 6X + 4X^{\underline{2}} - 4X^{\underline{4}} + 8X^{\underline{5}} + 8X^{\underline{8}}) - \tilde{z}_{2^{u+1}+r} 8X$$

定理 2.5 および定理 2.6 を証明するため

$$\ell_n := \frac{c_n + z_n + 2\tilde{z}_n}{2^2}$$

とおく. 次の補題が得られる ([24]).

補題 5.4 $c_n \equiv z_n \pmod 2$, $\mathrm{ord}_2(\ell_n) \geq -1$.

以後 ε で 0 または 1 を表す. 定理 5.1 とその証明, 定理 5.2, 定理 5.3, 補題 3.1 の証明, 補題 5.4 から次の定理が得られる ([24]).

定理 5.5 $u = v+2$ とし, r を $0 \leq r < 2^{u+1}$ を満たす整数とする. 次の条件を満たす $W_{r,0}(X)$, $W_{r,1}(X) \in 8X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$ および多項式 $M_{r,0}(X)$, $M_{r,1}(X)$ が存在する.

$$\frac{g_r(X)+f_r(X)}{2^2} + (-1)^{\varepsilon}\frac{\tilde{f}_r(X)}{2} = M_{r,\varepsilon}(X) + W_{r,\varepsilon}(X)$$

$$\begin{aligned}
M_{r,\varepsilon}(X) = {} & \frac{(c_r+z_r)(1-2X-4X^{\underline{2}}-4X^{\underline{4}}+8X^{\underline{5}}+8X^{\underline{8}})}{2^2} \\
& + \frac{(c_{2^{u+1}+r}+z_{2^{u+1}+r})8X}{2^2} \\
& + (-1)^{\varepsilon}\frac{\tilde{z}_r(1+6X+4X^{\underline{2}}-4X^{\underline{4}}+8X^{\underline{5}}+8X^{\underline{8}})-\tilde{z}_{2^{u+1}+r}8X}{2}
\end{aligned}$$

$$h(A, A_{2^{u+1}y+r}) = \frac{(2^{u+1}y+r)!}{2^{3y}y!}(M_{r,\chi_o(y)}(y) + W_{r,\chi_o(y)}(y)) \qquad y = 0, 1, \ldots \tag{15}$$

<u>定理 2.5 の証明 ($u = v+2 \geq 3$ の場合)</u>: (15) において, 補題 3.5 から

$$\mathrm{ord}_2\left(\frac{(2^{u+1}y+r)!}{2^{3y}y!}\right) = \sum_{j=1}^{u}\left[\frac{2^{u+1}y+r}{2^j}\right] - 2y = \tau_2^{(u,v)}(2^{u+1}y+r)$$

が成り立ち, 補題 5.4 および定理 5.5 より $\mathrm{ord}_2(h(A, A_n)) \geq \tau_2^{(u,v)}(2^{u+1}y+r) - 1$ が成り立つ. さらに $c_2 = 2$, $z_2 = \tilde{z}_2 = 0$, $c_3 = 5/3$, $z_3 = \tilde{z}_3 = -1/3$ であるから, $r = 2$ または $r = 3$ のとき, 等号が成立する. □

<u>定理 2.6 の証明 ($u = v+2 \geq 3$ の場合)</u>: $c_i = z_i = \tilde{z}_i = 1$ $(i = 0, 1)$ だから定理 5.5 において $r = 0$ または $r = 1$ とすれば,

$$\begin{aligned}
M_{r,\varepsilon}(X) = {} & \frac{2-4X-8X^{\underline{2}}-8X^{\underline{4}}+16X^{\underline{5}}+16X^{\underline{8}}+(c_{2^{u+1}+r}+z_{2^{u+1}+r})8X}{2^2} \\
& + (-1)^{\varepsilon}\frac{1+6X+4X^{\underline{2}}-4X^{\underline{4}}+8X^{\underline{5}}+8X^{\underline{8}}-\tilde{z}_{2^{u+1}+r}8X}{2} \\
\in {} & \begin{cases} 1+2X\mathbb{Z}_2[X] & (\varepsilon = 0 \text{ の場合}) \\ 8\ell_{2^{u+1}+r}X - 4X^2 & (\varepsilon = 1 \text{ の場合}) \end{cases}
\end{aligned}$$

である. よって, 定理 2.6 の証明 ($v = 0$ の場合) と同様な方法で,

$$\mathrm{ord}_2(h(A, A_{2^{u+1}y+r})) = \tau_2^{(u,v)}(2^{u+1}y+r) + \chi_o(y)\cdot(\mathrm{ord}_2(y+\alpha_r)+2)$$

を満たす 2 進整数 α_r が存在することがわかる. □

定理 4.1 に相当する結果もある ([24]).

定理 5.6 $u+\delta_{v0} \geq v+2$ とする ($v=0$ でもよい). $2^{u+1}-1$ 次整数係数多項式 $\eta(X)$ および $\gamma_{o,r}(X)$, $\gamma_{e,r}(X) \in \mathbb{Q}_2[[X]]$, $r=0,1,\ldots,2^{u+1}-1$, が存在して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&2\gamma_{o,r}(X),\ 2\gamma_{e,r}(X) \in \mathbb{Z}_2\langle X\rangle \\
&h(A, A_{2^{u+1}y+r}) = 2^{\tau_2^{(u,v)}(2^{u+1}y)}\gamma_{o,r}(y)\prod_{j=1}^{y}\eta(j) \qquad y=1,3,\ldots \quad (\text{奇数}) \\
&h(A, A_{2^{u+1}y+r}) = 2^{\tau_2^{(u,v)}(2^{u+1}y)}\gamma_{e,r}(y)\prod_{j=1}^{y}\eta(j) \qquad y=0,2,\ldots \quad (\text{偶数}) \\
&\mathrm{ord}_2(\eta(j)) = 0 \qquad {}^\forall j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

定理 5.7 $u=v\geq 1$ とする. $2^{u+3}-1$ 次整数係数多項式 $\eta(X)$ および $\gamma_r(X) \in \mathbb{Q}_2[[X]]$, $r=0,1,\ldots,2^{u+3}-1$, が存在して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&2\gamma_r(X) \in \mathbb{Z}_2\langle X\rangle \\
&h(A, A_{2^{u+3}y+r}) = 2^{\tau_2^{(u,v)}(2^{u+3}y)}\gamma_r(y)\prod_{j=1}^{y}\eta(j) \qquad y=0,1,\ldots \\
&\mathrm{ord}_2(\eta(j)) = 0 \qquad {}^\forall j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

A が一般のアーベル 2 群の場合に, 数列 $\{h(A,A_n)\}_{n=0}^{\infty}$ に対する母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h(A,A_n)}{n!}X^n$$

から $h(A,A_n)$ の 2 進的性質を導く問題が残っている. 今後の課題である.

6 $h(C_{p^u}\times C_{p^v}, C_p \wr S_n)$ の p 進的性質

$u, v \in \mathbb{Z}$, $u \geq 1$, $u \geq v \geq 0$ とする. $h(C_{p^u}\times C_{p^v}, C_p \wr S_n)$ の p 進的性質は $h(A,S_n)$ の p 進的性質を得る方法と同様な方法で得られ, 定理 2.3 が証明される. また, $p=2$, $1\leq v\leq u\leq v+1$ を除く場合に, 定理 4.1 に相当する結果も得られる ([23]). その主張では $\kappa_p(u,v)$ を $\overline{\kappa}_p(u,v) := \kappa_p(u,v)-1$ に置き換え, $\tau_p^{(u,v)}$ を

$$\overline{\tau}_p^{(u,v)}(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{u-1}\left[\frac{n}{2^j}\right] + \left[\frac{n}{2^{u+1}}\right] - \left[\frac{n}{2^{u+2}}\right] & (p=2,\ u=v\geq 1 \text{ の場合}) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{u-1}\left[\frac{n}{p^j}\right] - (u-v)\left[\frac{n}{p^u}\right] & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

に置き換える. A が一般のアーベル p 群の場合に, $h(A, C_p \wr S_n)$ の p 進的性質を調べる問題が残っている. $p = 2$ の場合, $K_n = C_2 \wr A_n$ または $K_n = W(D_n)$ ならば

$$\mathrm{ord}_2(h(C_{2^u} \times C_{2^v}, K_n)) \geq \overline{\tau}_2^{(u,v)}(n) - 1$$

が成り立つ. さらに $K_n = W(D_n)$ の場合, $n \equiv 1 \pmod{2^u}$ ならば等号が成り立つ. $K_n = C_2 \wr A_n$ の場合, いつ等号が成り立つかを調べる問題が残っている.

参考文献

[1] N. Chigira, The solutions of $x^d = 1$ in finite groups, *J. Algebra* **180** (1996), 653–661.

[2] S. Chowla, I. N. Herstein, and W. K. Moore, On recursions connected with symmetric groups I, Canad. J. Math. **3** (1951), 328–334.

[3] S. Chowla, I. N. Herstein, and W. R. Scott, The solutions of $x^d = 1$ in symmetric groups, Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **25** (1952), 29–31.

[4] K. Conrad, p-adic properties of truncated Artin-Hasse coefficients, 1998, preprint.

[5] J. Dieudonné, On the Artin-Hasse exponential series, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 210–214.

[6] F. Q. Gouvêa, p-adic Numbers, 2nd ed., Universitext, Springer-Verlag, New York, 1997.

[7] M. Grady and M. Newman, Residue periodicity in subgroup counting functions; in :“The Rademacher Legacy to Mathematics,” Contemp. Math. **166** (1994), 265–273.

[8] H. Ishihara, H. Ochiai, Y. Takegahara, and T. Yoshida, p-divisibility of the number of solutions of $x^p = 1$ in a symmetric group, Ann. Comb. **5** (2001), 197–210.

[9] H. Katsurada, Y. Takegahara, and T. Yoshida, The number of homomorphisms from a finite abelian group to a symmetric group, Comm. Algebra **28** (2000), 2271–2290.

[10] D. Kim and J. S. Kim, A combinatorial approach to the power of 2 in the number of involutions, J. Combin. Theory Ser. A **117** (2010), 1082–1094.

[11] N. Koblitz, p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1984.

[12] T. Koda, M. Sato, and Y. Takegahara, 2-adic properties for the numbers of involutions in the alternating groups, J. Algebra Appl. **14** (2015), 1550052, 21pp.

[13] C. Krattenthaler and T. W. Müller, Truncated versions of Dwork's lemma for exponentials of power series and p-divisibility of arithmetic functions, Adv. Math. **283** (2015), 489–529.

[14] S. Lang, Cyclotomic Fields I and II, Springer-Verlag, New York, 1990.

[15] T. Müller, Enumerating representations in finite wreath products, Adv. Math. **153** (2000), 118–154.

[16] H. Ochiai, A p-adic property of the Taylor series of $\exp(x + x^p/p)$, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 71–85.

[17] S. Okada, Wreath products by the symmetric groups and product posets of Young's lattices, J. Combin. Theory Ser. A **55** (1990), 14–32.

[18] J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, Wiley, New York, 1958.

[19] A. M. Robert, A Course in p-adic Analysis, Springer-Verlag, New York, 2000.

[20] Y. Takegahara, Generating functions for permutation representations, J. Algebra **281** (2004), 68–82.

[21] Y. Takegahara, On Wohlfahrt series and wreath products, Adv. Math. **209** (2007), 526–546.

[22] Y. Takegahara, The number of homomorphisms from a finite abelian group to a symmetric group (II), Comm. Algebra **44** (2016), 2402–2442.

[23] Y. Takegahara, p-adic estimates of the number of permutation representations, Adv. Math. **349** (2019), 367–425.

[24] Y. Takegahara, p-adic properties for the numbers of representations in the alternating groups, submitted.

[25] K. Wohlfahrt, Über einen Satz von Dey und die Modulgruppe, Arch. Math. (Basel) **29** (1977), 455–457.