フロベニウス多元環の構造について

山形邦夫

東京農工大学工学研究院

有限次元のフロベニウス多元環を Auslander-Reiten クイバーを介在して大域次元有限の多元環の研究に帰着させる問題を考える．この問題は 70 年代後半の有限表現型フロベニウス多元環の分類定理に始まり、一般の解決はなお困難であるが、表現論の観点から自然に現われる重要な場合について，環論的な判定方法と近年得られた表現論的な判定方法とを紹介する．

1 Brauer-Nesbitt-中山の定理

本稿で扱う環は特に断らない限り（必ずしも代数的閉体ではない）体 K 上の有限次元多元環であり、直規約である（二つの多元環の直積に分解できない）とする。加群は有限次元右加群で，A 上の有限次元右加群の成す圏を $\operatorname{mod} A$ で表わす．A 加群 M の（Jacobson）根基を $\operatorname{rad} M$ で表わし，$\operatorname{top}(M) := M/\operatorname{rad} M$ とおく．また礎石（単純部分加群すべての和）を $\operatorname{soc}(M)$ で表わす．有限次元加群の間の標準双対 $\operatorname{Hom}_K(-, K)$ を D とおく．

1900 年頃に G. Frobenius は，K 上の左正則表現と右正則表現とが同値になる有限次元多元環について研究を行った．1930 年代後半に R. Brauer, C. Nesbitt, 中山正 等によって，左正則表現と右正則表現が同値である多元環は有限群環の有する環構造に関わる重要な多元環として認識され，**フロベニウス多元環**と名付けて研究され，今日もなお重要な完成された定理が得られた．1970 年頃から始まる有限次元多元環の表現論の研究における Auslander-Reiten クイバーの導入は，有限次元直既約加群が無数に存在する場合でさえ直既約加群の関係を視覚的に捉えることを可能とし，先ず遺伝的多元環とその周辺の研究が完成に近い域にまで研究された．これには C. M. Ringel [R1984] による貢献が極めて大きい．他方，フロベニウス多元環の表現の研究における最初の大きな成果には P. Gabriel のグループによる有限表現型フロベニウス多元環の分類の完成がある．Gabriel の被覆理論は，フロベニウス多元環を遺伝的多元環やその周辺の多元環と結びつけることを可能とし，その結果，フロベニウス多元環の表現の研究に無限表現型遺伝多元環やその周辺の研究成果を応用することを可能にした．これは，フロベニウス多元環の研究が大域次元の有限な多元環の研究に帰着できる場合のあることを示唆するものであり，本稿での内容はこれに関するものである．

なお，多元環の表現に関連する研究をされている方には煩わしいかもしれないが，一般の方にも理解していただけるよう，できるだけ定義の復習をしながら解説します．Frobenius の研究や関連する事項についての詳細は中山の論文 [N1939] か [SY2011] を参照してください．

前述した Brauer や Nesbitt, 中山等によるフロベニウス多元環の主たる特徴付けの復習から始めよう．

Brauer-Nesbitt-中山の定理：有限次元多元環 A がフロベニウスであるということは，次の各条件 (i), (ii), (iii) に同値である：

(i) 結合的な非退化 K 双線形写像 $(-,-): A \times A \to K$ が存在する．

(ii) $\exists$ K 線形写像 $\lambda: A \to K$: $\operatorname{Ker}\lambda$ に含まれる右イデアルは零のみ．

(iii) 右 A 加群としての同型写像 $A_A \to D(A)_A$ が存在する．

(ii), (iii) において，「右」を「左」に置き換えた条件も同値になる．ここで $(-,-)$ が結合的であるとは、$(ab,c)=(a,bc)$ $\forall a,b,c \in A$ が成り立つことをいう．

λ を (ii) における線形写像とすると，$\lambda(ab) = \lambda(\nu_A(b)a)$, $a,b \in A$, が成り立つ対応 $\nu_A: A \to A$ が定まり ν_A は A の自己同型写像になる．これは A の**中山自己同型写像**とよばれ，内部自己同型の違いを除いてただ一つ定まる．中山自己同型写像が内部自己同型である多元環 A を**対称多元環**とよぶ，すなわち，λ として $\lambda(ab) = \lambda(ba)$, $a,b \in A$, を満たすものをとれる．また同型写像 $\theta: {}_AA \to {}_AD(A)$ が与えられれば，A のある自己同型写像 ν によって，θ は両側 A 加群としての同型写像 $A \to D(A)_\nu$ になる．（A の自己同型写像 ν と右 A 加群 M が与えられたとき，M_ν はベクトル空間として $M_\nu = M$ で，$a \in A$ の M_ν への作用は $m \cdot a = m\nu(a)$ で与えられる右 A 加群を表わす．）特に多元環 A が対称多元環であることは，両側 A 加群の同型写像 $A \cong D(A)$ が存在することである．

中山自己同型写像 ν_A は両側 A 同型 $A \to D(A)_\nu$ を与える自己同型写像 ν に他ならない．この事実は森田 [M1958] によって示されたもので，一般に中山自己同型写像の定義として使われる．

フロベニウス多元環の例としてよく知られているものに，有限群 G の群多元環 KG や有限次元 Hopf 代数, Hecke 代数 $\mathcal{H}_{K,q}[G]$（G はコクセター群で $q \in K\backslash\{0\}$）などがある．特に群多元環や Hecke 代数は対称多元環である．そのほか近年，K. Erdmann と A. Skowroński によって，連結なコンパクト二次元実多様体を利用して，原始ベキ等元の個数やベクトル空間次元が任意の大きさの対称多元環を構成する方法が示された．この多元環は順多元環（定義は後述）で、ほとんどの場合が非多項式増大である．これについては関連する研究の最初の文献 [ES2018] のみを挙げておく．

二つの多元環 A, B が**森田同値**であるとは，$\mathrm{mod}\, A$ と $\mathrm{mod}\, B$ が圏同値であることを言う．フロベニウス多元環に森田同値である多元環は中山によって準フロベニウス多元環とよばれその構造が決められたが，それは単に**自己入射的** (self-injective) — すなわち右あるいは左 A 加群として入射的 — であるという一言で言い表わされる．したがって多元環の表現論においては準フロベニウスという言葉が使われることはない.

自己入射多元環の右礎石 $\mathrm{soc}(A_A)$ と左礎石 $\mathrm{soc}({}_AA)$ は一致するので，これを単に $\mathrm{soc}(A)$ で表わす．A の部分集合 X に対して，

$$\ell_A(X) = \{a \in A \mid aX = 0\},\ \ r_A(X) = \{a \in A \mid Xa = 0\}$$

とおく．本稿の主定理に関わる重要な定理がもう一つある：

中山の定理：A を自己入射多元環とすると，零化作用素 ℓ_A, r_A は￥A の右イデアルと左イデアルとの間の互いに逆の一対一対応を定める？（逆も成立).

次に一般の多元環における注意を与えておく.
多元環 A の単位元 1_A の**標準分解** (canonical decomposition) とは次のようなベキ等元の和をいう：

$$1_A = \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{m_A(i)} e_{ij}$$

$$e_{ij}e_{kl} = 0 \text{ for } ij \neq kl; \quad e_{ij}A \cong e_{kl}A \Leftrightarrow j = k.$$

Krull-Schmidt の定理により，単位元の標準分解は（A の）内部自己同型の違いを除いて一意的に定まる．ベキ等元 $e_A = \sum_{i=1}^{n_A} e_{i1}$ を A の基本ベキ等元とよび，$1_A = e_A$ であるとき A を**基本多元環**とよぶ．特に，自己入射的な基本多元環はフロベニウス多元環になる．任意の多元環 A は基本多元環 e_AAe_A に森田同値になるから，したがって任意の自己入射多元環はあるフロベニウス多元環に森田同値になる.

A を自己入射多元環とする．$e_{i1}A$, $1 \leq i \leq n_A$, は互いに非同型な直規約入射加群全体を表わすから，$\mathrm{top}(e_{i1}A) := e_{i1}A/e_{i1}(\mathrm{rad}\, A)$ の同型類全体と $\mathrm{soc}(e_{i1}A)$ の同型類全体とは一致する．したがって，集合 $1, \ldots, n_A$ における置換 ν が存在して $\mathrm{soc}(e_{i1}A) \cong \mathrm{top}(e_{\nu(i)1}A)$ が成り立つ．この置換を自己入射多元環 A の**中山置換**とよぶ．$\nu_A(e_{i1}) = e_{\nu(i)1}$ が成り立つように中山同型 ν_A を選べることを注意しておく.

以上はフロベニウス多元環に関する古典的な結果の復習であるが，これから紹介する主な内容は A. Skowroński と筆者との一連の研究によるもので，原則として該当する研究論文は挙げないけれど，これ等はガロア被覆理論を含めて [SY2021] に掲載される予定なので，興味ある方は参照してください.

2　軌道多元環

有限次元多元環 A は有限対象集合をもつ K 圏 $\mathcal{A}$ と見做すことができる：$1_A = e_1 + \cdots + e_n$ を互いに直交する原始ベキ等元の和とすると，$\mathcal{A}$ は，対象集合 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ が $\{e_1, \ldots, e_n\}$ で，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(e_i, e_j) = e_j A e_i$ で定まる射集合をもつ．逆に K 圏 $\mathcal{A}$ が与えられたとき，$A = \bigoplus_{x,y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)$ とおけば，$e_x := id_x : x \to x$（恒等射）は A の原始ベキ等元で単位元 $1_A = \sum_{x \in \mathcal{A}} e_x$ をもつ多元環になる．A と $\mathcal{A}$ とは同一視される．

反復多元環は Gabriel によるガロア被覆の一例として D. Hughes–J. Waschbüsch により導入されたもので，一般の体上の多元環あるいは Artin 多元環に対しても定義できる．

B を体 K 上の有限次元多元環とする．B と $D(B)$ のコピー $B_n = B$, $D(B)_n = D(B)$, $n \in \mathbb{Z}$, をとり，ベクトル空間の直和を考える：

$$\widehat{B} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (B_n \oplus D(B)_n).$$

$\widehat{B}$ における積を次のように定める：$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_i, x_i)$, $\sum_{i \in \mathbb{Z}} (b_j, y_j) \in \widehat{B}$ に対して

$$\Big(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_i, x_i)\Big) \cdot \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (b_j, y_j)\Big) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_i b_i, a_i y_i + x_i b_{i-1}).$$

これにより $\widehat{B}$ は無限次元の（単位元をもたない）多元環になる．これを B の**反復多元環** (repetitive algebra) とよぶ．ここでは表記しないが，$\widehat{B}$ の要素 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n, x_n)$ を，(n, n) 成分が a_n で $(n, n-1)$ 成分が x_n，他の成分はすべて 0 という $-\infty \times \infty$ 下三角行列として表わせば，$\widehat{B}$ は $-\infty \times \infty$ 下三角行列多元環の部分多元環みなすことができて分りやすくなる．実際，$\widehat{B}$ での積は行列としての積にほかならない．

$1_B = e_1 + \cdots + e_s$ を互いに直交する原始ベキ等元の和とし，B_n におけるコピーを $1_{B_n} = e_{n,1} + \cdots + e_{n,s}$ とおけば，$e_{n,i} \in \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, s\}$ 全体は $\widehat{B}$ の原始ベキ等元の完全代表系を成す．各 $e_{n,i}\widehat{B}$ は入射的直既約 $\widehat{B}$ 加群で，$\widehat{B} = \bigoplus_{n,i} e_{n,i}\widehat{B}$ である．$\widehat{B}$ は $e_{n,i}$ 全体を対象とする K 圏とみなせる．$\widehat{B}$ の K 圏自己同型写像 φ（原始ベキ等元の完全代表系全体を固定する多元環同型写像のこと）について次の条件を満たすものを考える：

- 中山自己同型写像 $\varphi = \nu_{\widehat{B}}$： $\nu_{\widehat{B}}(e_{n,i}) = e_{n+1,i}$，$n \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq s$
- 正自己同型写像 φ： $\varphi(B_n) \subseteq \sum_{k \geq n} B_k$，$n \in \mathbb{Z}$
- 剛自己同型写像 φ： $\varphi(B_n) = B_n$，$n \in \mathbb{Z}$
- 強正自己同型写像：剛自己同型ではない正自己同型写像

例えば，$\nu_{\widehat{B}}^n$, $n>0$, は強正自己同型であり，任意の正自己同型写像 φ との結合 $\varphi\nu_{\widehat{B}}$ も強正自己同型写像である．

$\widehat{B}$ の自己同型群の部分 G が $\widehat{B}$ の許容同型群であるとは，次の条件 (a), (b) を満たすことをいう：(a) G の要素は $\widehat{B}$ の対象に自由に作用する，(b) G 軌道の個数は有限である．$\widehat{B}$ の許容同型群 G による**軌道多元環** $A := \widehat{B}/G$ とは，A を K 圏とみるとき，対象集合が G 軌道全体で，各対象 $a, b \in A$ に対する射集合 $A(a,b)$ は次で定義される：

$$A(a,b) = \Big\{(f_{y,x}) \in \prod_{(x,y)\in a\times b} A(x,y) \mid gf_{y,x} = f_{gy,gx} \ \text{ for } \ g \in G, (x,y) \in a \times b\Big\}.$$

自然な K 圏対応 $F\colon \widehat{B} \to A = \widehat{B}/G$（ガロア被覆）が定まる：各対象 $x \in \widehat{B}$ はその G 軌道 $\bar{x}$ に，各射 $f_{v,u} \in \widehat{B}(u,v)$ は $h_{v,u} = f_{v,u}$ となる射 $h = (h_{y,x}) \in A(\bar{u},\bar{v})$ に対応させればよい．こうして得られる軌道多元環が単位元を持つ有限次元自己入射多元環になることは容易に確認できる．定義から明らかなように，B が基本多元環ならば $\widehat{B}/G$ も基本多元環となる．

例 2.1 1. 自明拡大多元環 $B \ltimes D(B)$ は軌道多元環 $\widehat{B}/(\nu_{\widehat{B}})$ に同型である．
2. 軌道多元環 $\widehat{B}/(\nu_{\widehat{B}}^n)$, $n>0$, は対称多元環である．

代数的閉体上の有限表現型自己入射多元環は，1980 年の C. Riedtmann の研究に始まる Gabriel グループによる一連の研究によってその分類が完成され，さらに 1989 年には Skowroński によって多項式型の順表現型多元環の概念が導入されて，多項式型フロベニウス多元環の分類が完成された．この研究は，Hughes–Waschbüsch による反復多元環の概念や，P. Dowbor–Skowroński による無限表現型多元環に関するガロア被覆の研究，S. Brenner–M.C.R. Butler による傾理論，C.M. Ringel による管多元環 (tubular algebra) など多くの成果の上に完成されたものである．これらの分類には体の標数に依存する場合もあるが，このような依存性は，実は多元環の礎石に集約され，したがって礎石を無視すれば非常に簡明な分類表記を得ることができるのである．この事実は Skowroński によって指摘されたもので，主な結果を二つ紹介しよう．その準備としていくつかの用語の定義を復習しておく．

二つの自己入射多元環 A と Λ が**礎石同型** (socle equivalence) であるとは，剰余多元環の間の同型

$$A/\operatorname{soc}(A) \cong \Lambda/\operatorname{soc}(\Lambda)$$

が成り立つことを言う．A を Λ の**礎石変形** (socle deformation) ともいう．

例 2.2 $$A_k = K\langle X,Y\rangle/(X^2,Y^2,XY-kYX),\ \ k \in K\backslash\{0\}$$

とおく．ここで $K\langle X,Y\rangle$ は K 上の非可換二変数多項式環である．$1,x,y$ をそれぞれ $1_K,X,Y$ の剰余類とすると $1,x,y,xy$ は A_k の基底を成す．線形写像

$$\lambda_k : A_k \to K,$$
$$\lambda_k(1)=0,\ \lambda_k(x)=0,\ \lambda_k(y)=0,\ \lambda_k(xy)=1_K$$

が Brauer-Nesbitt-中山の定理の条件 (ii) を満たすから，A_k はフロベニウス多元環である．A_k が対称多元環であるのは $k=1$（A_1 は可換環）のときに限る．さらに，k の値にかかわらず $A_k/\operatorname{soc}(A_k)$ は可換環 $K[X,Y]/(X^2,Y^2)$ に同型であるから，すべての A_k, $0\neq k\in K$, は互いに礎石同型である．

多元環の (Gabriel) クイバー：多元環の表現論では Gabriel にしたがって有向グラフをクイバー (quiver) と呼ぶ．有限次元多元環に付随するクイバーはいくつかあるが，ここでは多元環のクイバー（Gabriel クイバー）の定義を与えておく．

$1_A=\sum_{i=1}^{n_A}\sum_{j=1}^{m_A(i)}e_{ij}$ を単位元の標準分解とすると, 前節で注意したように, $\{e_{11},\ldots,e_{n_A1}\}$ は互い直交する A の原始ベキ等元の完全代表系を成す．多元環 A のクイバー $\mathcal{Q}_A$ は, $\{1,\ldots,n_A\}$ を点集合とし，点の間の矢 $i\to j$ は

$$e_{j1}(\operatorname{rad}A)e_{i1}/e_{j1}(\operatorname{rad}A)^2e_{i1}\neq 0$$

のときに定義される．$F_i=e_{i1}Ae_{i1}/e_{i1}(\operatorname{rad}A)e_{i1}$ が斜体であることに注意して

$$d_{ij}=\dim_{F_j}\bigl(e_{j1}(\operatorname{rad}A)e_{i1}/e_{j1}(\operatorname{rad}A)^2e_{i1}\bigr),$$
$$d'_{ij}=\dim_{F_i}\bigl(e_{j1}(\operatorname{rad}A)e_{i1}/e_{j1}(\operatorname{rad}A)^2e_{i1}\bigr)$$

を考える．このとき矢に付値をつけて $i\xrightarrow{(d_{ij},d'_{ij})}j$ と書く．$i\xrightarrow{(1,1)}j$ を単に $i\to j$ と表わす．特に，K が代数的閉体のときや K 上の A が道多元環などの場合には $d_{ij}=d'_{ij}$ となるので，付値をつける代わりに i から j へ d_{ij} 本の矢を書く．付値がついていることを強調して付値付きクイバーともいう．

有限次元多元環 A 上の加群 T は次の性質を満たすとき傾加群とよばれる：

(T1) $\operatorname{pd}_A T\leq 1$

(T2) $\operatorname{Ext}_A(T,T)=0$

(T3) A 加群の完全系列：$0\to A\to T'\to T''\to 0$ が存在する．ここで T',T'' は T の有限直和の直和因子である．

K を体とし有限クイバー Q は有向閉路を含まないとする．道多元環 $H := KQ$ 上の傾加群 T の準同型多元環 $\mathrm{End}_H(T)$ を傾斜多元環よび，Q がディンキン型かユークリッド型であるかに応じて，傾斜多元環 $\mathrm{End}_H(T)$ はディンキン型，ユークリッド型であるなどという．H は遺伝多元環（すなわち $\mathrm{gldim}\, H \le 1$）で $\mathrm{gldim}\,\mathrm{End}_H(T) \le 2$ である．ある多元環 B の軌道多元環 $\widehat{B}/G$ に同型である自己入射多元環 A は，B が傾斜多元環であるとき**傾斜型**であるといい，特に B がディンキン型であるかユークリッド型であるかに応じて A は**ディンキン型**である，**ユークリッド型**であるなどという．また B が管多元環であるとき**管型** (tubular type) であるという．いずれの場合にも，許容同型群 G は正自己同型写像によって生成される無限巡回群になることを注意しておく．管多元環の定義を一般向けに書くのは容易ではないので復習はしないが，管多元環はユークリッド型のある傾斜多元環のクイバーに，Auslander-Reiten クイバーを利用して，点と関係式を追加して定義される．詳しくは [R1984] を参照．

順多元環． Y. A. Drozd (1979) は有限次元多元環に対し順（表現型）多元環と野生（表現型）多元環をそれぞれ定義し，表現論における最も重要な定理の一つである**順・野生分離定理**「任意の多元環は順であるか野生的であり，順であって野生的なものは存在しない」を証明した．本稿では野生表現型を扱わないので，順多元環の定義のみを述べておく．

K を代数的閉体とし $K[X]$ を一変数多項式環とする．K 上の有限次元多元環 A が**順** (tame) であるとは，各自然数 $d \ge 1$ に対して次の条件を満たす有限個の $(K[X], A)$ 両側加群 N_i $(1 \le i \le m_d)$ が存在することを言う：

(a) N_i は有限生成自由 $K[X]$ 加群である，

(b) d 次元の直既約 A 加群は，有限個を除いたすべてが

$$(K[X]/(X-\lambda)) \otimes_{K[X]} N_i, \quad \lambda \in K$$

という形の A 加群に同型である．

定義から明らかなように有限表現型多元環は順多元環である．$N_1, \ldots, N_{m_d}$ が上の条件を満たす最小個数の組であるとき m_d を $\mu(d)$ とおく．d に依存しない自然数 m によって，$\mu_A(d) \le d^m$ となるとき A は**多項式増大** (polynomial growth) である，$\mu_A(d) \le md$ であるとき A は**従順** (domestic) であるなどという．実は，「従順」本来の定義は若干異なり，ここでの条件「$\mu_A(d) \le md$」は線形増大とよばれる多元環の定義なのだが，両者は一致することが知られている（W. Crawley-Boevey）ので，上記のように定めておく．

従順多元環は多項式増大であることに注意して，表現型に関する分類定理は次のように表わされる．

定理 2.3　K を代数的閉体とする．多元環 A は連結かつ基礎的な自己入射多元環で，半単純ではないとする．

(i) (C. Riedtmann) A が有限表現型であることは，A があるディンキン型 $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$ の自己入射多元環 $\bar{A}$ に礎石同型となることと同値である．ここで $\mathrm{char}(K) \neq 2$ であれば $A \cong \bar{A}$ である．

(ii) (A. Skowroński) (a) A が従順多元環であることは，A があるユークリッド型 $\widetilde{\mathbb{A}}_n$, $\widetilde{\mathbb{D}}_n$, $\widetilde{\mathbb{E}}_6$, $\widetilde{\mathbb{E}}_7$, $\widetilde{\mathbb{E}}_8$ の自己入射多元環 $\bar{A}$ に礎石同型であることと同値である．

(b) A が従順ではない多項式増大の多元環であることは，A がある管型の自己入射多元環 $\bar{A}$ に礎石同型であることと同値である．

ここで $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$ であれば $A \cong \bar{A}$ である．

定理におけ自己入射多元環 $\bar{A}$ は同型の違いを除いて A によって一意的に定まる．$\bar{A}$ を A の**標準形**という．これらの分類定理はいずれも代数的閉体上の場合であって，一般の体上の場合については知られていない．

分類定理における多元環 B は大域次元が有限であることを考慮すると，次の問題が生ずる：

問題 1. K は代数的閉体とは限らない任意の体とする．大域次元有限の多元環 B による軌道多元環 $\widehat{B}/(\varphi)$ に礎石同型となる自己入射多元環の森田同値類を求めよ．

これは有限表現型の場合でさえ非常に難しい問題と思われる．定理 2.3 の (i), (ii)(a) が傾斜多元環を対象にしていることを考慮して，次の問題に置き換えてみる．

問題 2. K は代数的閉体とは限らない任意の体とする．傾斜型自己入射多元環の森田同値類を求めよ．

いずれの場合にも完全な解を得ることはできないが，本稿では，許容同型部 G が中山自己同型写像と正自己同型写像との合成 $\varphi\nu_{\widehat{B}}$ によって生成される無限巡回群の場合の解について問題 2 を考える．

問題の理解のために典型的な例を二つ挙げる．第一例は簡単に確認できる．第二例は 4 節に紹介する主定理から容易に導かれる．

例 2.4 K を任意の体とし，次の巡回クイバーを Q_n, $n > 1$, とおく．

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n \xrightarrow{\alpha_n} 1, \ \ n > 1.$$

連続する三つの矢の合成すべてから生成される KQ_n のイデアルを N_n とおき，$A_n = KQ_n/N_n$ とおく．また B を $\mathbb{A}_2$ 型クイバー $\Delta: 1 \longrightarrow 2$ による道多元環 $K\Delta$ とする．このとき

$$I_n = (\mathrm{rad}^2 e_1 A) \oplus (\mathrm{rad}\, e_2 A) \oplus e_3 A \oplus \cdots \oplus e_n A$$

とお くと，$B \cong A_n/I_n$ が成り立ち，$\widehat{B}$ のある正自己同型写像 φ_n によって多元環としての同型 $A_n \cong \widehat{B}/(\varphi_n \nu_{\widehat{B}})$ を得る．

たとえば，$n = 5$ のとき $\varphi_5 = \sigma\nu_{\widehat{B}}$ を選べる．ここで σ は $\sigma^2 = \nu_{\widehat{B}}$ を満たす正自己同型写像である．

このようにして，すべての A_n $(n > 1)$ は三次元の多元環 B の軌道多元環として実現される．

多元環 A の加群圏 $\mathrm{mod}\, A$ の根基を rad_A とおいて，

$$\mathrm{rad}_A^\infty(X, Y) = \bigcap_{1 \le n < \infty} \mathrm{rad}_A^n(X, Y), \quad X, Y：\text{直既約 } A \text{ 加群}$$

とおく．定義により，$\mathrm{rad}_A(X, Y)$ は X から Y への非同型な A 準同型写像全体からなるベクトル空間である．また，Auslander-Reiten 移動を τ_A で表わす．

例 2.5 K を任意の体とし，A は無限表現型の直既約自己入射多元環であるとする（すなわち Γ_A は有限な連結成分を持たない）．Auslander-Reiten クイバー Γ_A（定義は４節）が次を満たす連結成分 $\mathcal{C}$ を持つとする：

(a) $X \in \mathcal{C}$ は射影加群でなければ，$0 \ne \forall m \in \mathbb{Z}$ に対して $\tau_A^m(X) \ncong X$ である．

(b) $\mathrm{rad}^\infty(X, Y) = 0$，$X, Y \in \mathcal{C}$.

(c) 射影加群を含まない（$\mathcal{C}$ の）ある充満部分クイバー $\mathcal{D}$ で次の条件を満たすものが存在する：$X \in \mathcal{D}$ から $Y \in \mathcal{C}$ への道があれば $Y \in \mathcal{D}$.

このとき A は，ユークリッド型のある傾斜多元環 B による軌道多元環 $\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$ に磁石同型になる．ここで φ は正自己同型写像である．一般に磁石同型は（多元環の）同型に置き換えることはできないが，K が代数的閉体であれば $A \cong \widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$ が成り立つ．

例 2.5 における A の自明な例として，$H = KQ$ をユークリッド型クイバー Q の道多元環とし，$A = H \ltimes D(H)$ とおけばよい．このとき，Γ_H の前射影的 (preprojective) 連結成分 $\mathcal{P}_H$ と前入射的 (preinjective) 連結成分 $\mathcal{I}_H$ はそれぞれ Γ_A のある連結成分の充満部分クイバーになり，他の連結成分（管）はそのまま Γ_A の連結成分になる ([Y1981], [SY2017])．この事実を考慮して，Γ_A の連結成分 $\mathcal{C}$ として $\mathcal{P}_H$ を含むものをとり，さらに，$\mathcal{P}_H$ の充満

クイバー $\mathcal{D}$ として「$x \in \mathcal{D}$ から $y \in \mathcal{P}_H$ への道があれば，$y \in \mathcal{D}$」を満たすもの（無数にある）を任意に取ればよい．もちろん $A \cong \widehat{H}/(\nu_{\widehat{H}})$ である．

3　自己入射多元環の礎石変形

軌道多元環 $\widehat{B}/G$ に礎石同型となる自己入射多元環の研究に鍵となる概念である変形イデアルについて解説する．

A を体 K 上の自己入射多元環とする．A のイデアル $I\,(\subsetneq A)$ の剰余多元環 A/I を B とおく．$1_A = \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{m_A(i)} e_{ij}$ を単位元の標準分解とし，I に属さないすべてのベキ等元 e_{ij} の和を e とおくと，剰余類 $e + I$ は B の単位元になる．e は自己同型写像の違いを除いて I により一意的に定まる．e を B の**剰余単位元**とよぶ．剰余単位元を導く次の命題は中山の定理（１節）の簡単な応用として示せる．

命題 3.1 A を自己入射多元環とし，e を A のベキ等元，I を A のイデアルとする．このとき，二つの零化条件 $r_A(I) = eI$ と $\ell_A(I) = Ie$ は同値である．さらにこの条件のもとで，e は A/I の剰余単位元になり，次が成り立つ．

$$\mathrm{soc}(A) \subseteq I, \quad eIe = \ell_{eAe}(I) = r_{eAe}(I).$$

定義 3.2 A を自己入射多元環とし，I を A のイデアル，e を $B = A/I$ の剰余単位元とする．I が A の**変形イデアル** (deforming ideal) であるとは，B のクイバー $\mathcal{Q}_B$ が有向閉路を含まず，零化条件 $eIe = \ell_{eAe}(I) = r_{eAe}(I)$ を満たすことをいう．変形イデアルは常に $\mathrm{soc}(A)$ を含むことを注意しておく．

命題 3.1 から，条件 $r_A(I) = eI$ を満たすイデアル I は e を剰余単位元にもつ変形イデアルである．後に分るように，この事実が軌道多元環との礎石同型を導く重要な根拠となるのである．次の例で分るように，変形イデアルは A の根基に含まれない十分大きなイデアルということもある．根基に含まれる場合の剰余単位元は明らかに 1_A である．

例 3.3 1. B を任意の多元環とし $A = B \ltimes D(B)$ とおくと，$I := D(B) \subseteq \mathrm{rad}\, A$ は変形イデアルである．

2. 例 2.4 における自己入射多元環 A_n, $n \geq 3$, におけるイデアル I_n は変形イデアルで $n-2$ 個の原始ベキ等元 $e_3, \ldots, e_n$ を含む．明らかに $I \nsubseteq \mathrm{rad}\, A$ で $e := e_1 + e_2$ は $B = A_n/I_n$ の剰余単位元である．

さて，I を変形イデアルとし e を $B = A/I$ の剰余単位元とする．このとき自然な対応

$$B \to eAe/eIe : a + I \mapsto eae + eIe$$

は同型写像になることがわかる．したがって, 多元環の準同型写像の合成 $A \to B \to eAe/eIe$ により，eAe/eIe 加群は自然に A 加群とみなせる．

自己入射多元環 A の軌道多元環としての構造を調べるためには中山自己同型写像が必要となるので，A はフロベニウス多元環であるとする．次に軌道多元環を求める環論的な判定定理を述べる．

定理 3.3 体 K 上のフロベニウス多元環 A について 次の条件は同値である：

(i) $A \cong \widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$, ここで B は K 上の多元環で φ は $\widehat{B}$ の正自己同型写像である．

(ii) 次の条件を満たすイデアル I が存在する（A/I の剰余単位元を e とおく）：

  (a) $r_A(I) = eI$.

  (b) 自然な対応 $\rho : eAe \to eAe/eIe$ は多元環準同型写像として分裂する．（すなわち，$\rho\mu = id_{eAe/eIe}$ を満たすような多元環準同型写像 $\mu : eAe/eIe \to eAe$ が存在する．）

この定理は軌道多元環との「同型」を主張しているのだが，一般に礎石同型の存在は同型対応を導かない．そこで，与えられたフロベニウス多元環 A に礎石同型となる多元環で上記の判定定理を満たすものが構成できれば，許容同型群 G が $\varphi\nu_{\widehat{B}}$ で生成される場合に問題が解決することになる．以下に変形イデアルを用いた構成方法を紹介するが，その方法には中山自己同型写像を必要としないので A は自己入射多元環を考える．

K を一般の体とする．A を K 上の自己入射多元環で変形イデアル I をもつとし, $B = A/I$ とおく．$1_A = e_1 + \cdots + e_n$ を互いに直行する原始ベキ等元の和とし，$e = e_1 + \cdots + e_m$, $m \leq n$, を B の剰余単位元とする．ベクトル空間の直和 $A[I] := eAe/eIe \oplus I$ は積を次の規則で定めると有限次元多元環になる：$(b, x), (c, y) \in eAe/eIe \oplus I$ に対して

$$(b, x) \cdot (c, y) = (bc,\, by + xc + xy).$$

$A[I]$ は $1_{A[I]} = (e, 1_A - e)$ を単位元にもち，$(e_i, , 0)$, $(0, e_j)$, $1 \leq i \leq m < j \leq n$, , は互いに直交する原始ベキ等元である．$A[I]$ のイデアル $(0, I)$ を I と同一視し，また与えられた標準分解 $1_A = \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{m_A(i)} e_{ij}$ に対し，$e_{ij} < e$ のとき $(e_{ij}, 0)$ を，$e_{ij} < 1_A - e$ のとき $(0, e_{ij})$ を e_{ij} と同一視すると,

$$1_{A[I]} = \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{m_A(i)} e_{ij}$$

は $A[I]$ の単位元の標準分解となり，$A[I]$ の要素として e はベキ等元である．また自然な対応によって同型写像を得る：$A[I]/I = eAe/eIe \cong A/I, \quad eA[I]e = (eAe/eIe) \oplus eIe.$

定理 3.4 体 K 上の自己入射多元環 A は変形イデアル I を有するとする．e を A/I の剰余単位元とする．このとき次が成立する：

(i) $A[I]$ は I を変形イデアルとする自己入射多元環で A と同じ中山置換を持つ．また，e は $A[I]$ の要素とみて $A[I]/I$ の剰余単位元である．

(ii) $A[I]$ はフロベニウス多元環である $\Longleftrightarrow$ A はフロベニウス多元環である．

(iii) $A[I]$ は対称多元環である $\Longleftrightarrow$ A は対称多元環である．

また $A[I]$ の定義から明らかに，自然な準同型写像 $eA[I]e \to eA[I]e/eIe$ は分裂する．$\mu : eA[I]e/eIe \to eA[I]e$ として包含写像 $x \mapsto (x, 0)$ をとればよい．こうして判定定理の分裂条件を有する自己入射多元環 $A[I]$ が得られた．さらに次の定理によって，与えられた多元環 A と新しく作られた多元環 $A[I]$ の関係が明らかになる．

定理 3.5 体 K 上の自己入射多元環 A は変形イデアル I を有するとする．e を A/I の剰余単位元とする．このとき，自己入射多元環 $A[I]$ は A に礎石同型であり，安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}\, A[I]$ は $\underline{\mathrm{mod}}\, A$ に同値である．

以上から，フロベニウス多元環が軌道多元環に礎石同型となる条件が得られる：

定理 3.6 K を任意の体とする．A は K 上の直既約フロベニウス多元環で，次の条件を満たすイデアル I をもつとする（e は A/I の剰余単位元とする）：

(a) $r_A(I) = eI$,

(b) $\mathcal{Q}_{A/I}$ は有向閉路を含まない．

このとき，$B = A/I$ とおいて，次が成り立つ．

(i) $A[I]$ は $\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$ に同型である．ここで φ は $\widehat{B}$ の正自己同型写像である．

(ii) A は $\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$ に礎石同型である．ここで φ は $\widehat{B}$ の正自己同型写像である．
さらに，K が代数的閉体であれば，$\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$ に同型である．

4　遺伝的安定切片をもつ自己入射多元環

最後に表現論的観点からの判定条件を [SY2019] から紹介する．

先ず Auslander-Reiten クイバーの定義から始めよう．A を体 K 上の自己入射多元環とする．直既約 A 加群 X の準同型多元環 $\mathrm{End}_A(X)$ は局所多元環であるから，

$$F_X := \mathrm{End}_A(X)/\operatorname{rad}\mathrm{End}_A(X)$$

は斜体になり，

$$\operatorname{irr}_A(X,Y) := \operatorname{rad}_A(X,Y)/\operatorname{rad}_A^2(X,Y)$$

とおけば，$\operatorname{irr}_A(X,Y)$ は自然な作用によって (F_Y, F_X) 両側加群になる．A の Auslander-Reiten クイバー Γ_A とは，直既約加群の同型類を点とする有向グラフで，$\operatorname{irr}_A(X,Y) \neq 0$ であるときに矢 $\{X\} \to \{Y\}$ を定義する（$\{X\}$ は X の同型類を表わす）．さらに

$$d_{XY} := \dim_{F_Y} \operatorname{irr}_A(X,Y), \quad d'_{X,Y} := \dim_{F_X} \operatorname{irr}(X,Y)$$

とおくとき，矢に付値をつけて

$$\{X\} \xrightarrow{(d_{XY}, d'_{XY})} \{Y\}$$

と書く．$\{X\} \xrightarrow{(1,1)} \{Y\}$ のときは単に $\{X\} \to \{Y\}$ とかく．Γ_A の充満部分クイバー Δ が与えられたとき，付値付き矢 $\{X\} \xrightarrow{(d_{XY}, d'_{XY})} \{Y\}$ を逆向きの矢 $\{Y\} \xrightarrow{(d'_{XY}, d_{XY})} \{X\}$ で置き換えて得られるクイバーを Δ^{op} とおく．Γ_A の点と直既約加群とは同一視される．

Γ_A からすべての射影加群を除き，さらにそれらを始点あるいは終点に持つ矢もすべて除くことによって，（Γ_A の）充満部分クイバーが得られる．これを Γ_A の安定 Auslander-Reiten クイバーとよび Γ_A^s で表わす．つまり Γ_A^s は，$\tau_A^n x, \forall n \in \mathbb{Z},$ が定義されるすべての点 $x \in \Gamma_A$ からなる充満部分クイバーである．

Γ_A^s の付値付き部分クイバー Δ が次の二条件を満たすとき，Δ を**安定切片**とよぶ：

(1) Δ は有向閉路を含まない連結な充満クイバーで，直既約射影加群を含まない．

(2) $U \in \Delta$ で $V \in \Gamma_A$ は非射影的であるとする．このとき
   (a) $V \xrightarrow{(a,a')} U \in \Gamma_A \Longrightarrow V \in \Delta$ or $V \in \tau_A \Delta$,
   (b) $U \xrightarrow{(b,b')} V \in \Gamma_A \Longrightarrow V \in \Delta$ or $V \in \tau_A^{-1} \Delta$.

さらに安定切片 Δ は次のように区別される：

- **右正則**：Δ は直既約射影加群 P の根基 $\operatorname{rad} P$ を含まない．
- **左正則**：Δ は直既約射影加群 P の礎石剰余加群 $P/\operatorname{soc}(P)$ を含まない．
- **概右正則**：$\operatorname{rad} P \in \Delta$ となる直既約射影加群 P があれば，$\operatorname{rad} P$ は Δ のシンクである．
- **概左正則**：$P/\operatorname{soc}(P) \in \Delta$ となる直既約射影加群 P があれば，$P/\operatorname{soc}(P) \in \Delta$ は Δ のソースである．

明らかに，右（左）正則であれば概右（左）正則である．

安定切片 Δ が有限クイバーであるとき，Δ に属するすべての直既約加群の直和を $M(\Delta)$ で表わし，$H(\Delta) := \mathrm{End}_A(M(\Delta))$ とおく．$H(\Delta)$ が遺伝多元環でクイバー $\mathcal{Q}_{H(\Delta)}$ が Δ^{op} に一致するとき，有限安定切片 Δ は**遺伝的**であるという．具体例でこれらの用語を確認してみよう．

例 4.1 K を任意の体とし，Q を次のクイバーとする：

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 3 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift left, "\gamma"] & 2 \arrow[l, shift left, "\sigma"] \end{tikzcd},$$

体 K 上の道多元環 KQ において $\beta\alpha - \gamma\sigma,\ \alpha\beta,\ \sigma\gamma$ で生成されるイデアルを R とおき，$A = KQ/R$ とおく．A は自己入射多元環である．

Q の各点 i に対応する直既約射影 A 加群を P_i, 単純加群を S_i で表わすと，Γ_A は次のように形になる：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & P_1 \arrow[dr] & & & & & \\
\operatorname{rad} P_1 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dashed] & & P_1/S_2 \arrow[dr] & & S_2 \arrow[dr] & & \operatorname{rad} P_2 \arrow[dd, dash, dashed] \\
 & S_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \operatorname{rad} P_3 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & P_3 \arrow[r] & P_3/S_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\operatorname{rad} P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_2/S_1 \arrow[ur] & & S_1 \arrow[ur] & & \operatorname{rad} P_1 \\
 & P_2 \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

ここで二つの破線は同一視されることを示している．次の部分クイバーを考える：

$$\Delta_1 : P_1/S_2 \longleftarrow S_3 \longrightarrow P_2/S_1, \qquad \Delta_2 : \operatorname{rad} P_1 \longleftarrow P_3/S_3 \longrightarrow \operatorname{rad} P_2,$$
$$\Delta_3 : S_2 \longrightarrow P_3/S_3 \longrightarrow \operatorname{rad} P_1, \qquad \Delta_4 : \operatorname{rad} P_1 \longrightarrow S_3 \longrightarrow P_2/S_1.$$

このとき，Δ_1 は概左正則ではないが遺伝的右正則安定切片である．Δ_2 は遺伝的ではないが概右正則，概左正則安定切片である．Δ_3 は遺伝的でも概左正則でもないが，概右正則安定切片である．他方，Δ_4 は遺伝的でも，概右正則，概左正則でもない．

以上の準備のもとに主定理は次のように述べることができる．

定理 4.2 K を任意の体とする．A は K 上の直既約自己入射多元環で，単純多元環ではないとする．次の各条件は同値である：

(i) Γ_A は遺伝的概右正則安定切片をもつ.

(ii) Γ_A は遺伝的概左正則安定切片をもつ.

(iii) A は軌道多元環 $\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$ に礎石同型である．ここで，B は傾斜多元環で φ は $\widehat{B}$ の正自己同型写像である.

(iv) 次の条件を満たす A のイデアル I が存在する（e を A/I の剰余単位元とする）：

(a) $r_A(I) = eI$,

(b) A/I は傾斜多元環である.

K が代数的閉体のときは条件 (iii) における礎石同型は同型に置き換えられる.

定理における安定切片と傾斜多元環，イデアルなどの関係について：(i) または (ii) における安定切片を Δ とおき，$I = r_A(M(\Delta))$，$B = A/I$ とおく．このとき，B と I はそれぞれ条件 (iii) と (iv) を満たす．さらに，(iii) における傾斜多元環 B の型は，矢の向きを無視すれば，(i) または (ii) における安定切片の型と一致する.

例 2.5 において，$\mathcal{D}$ の連結部分クイバー Δ として，”$x \in \mathcal{D} \Rightarrow 1\exists r \in \mathbb{Z} : \tau_A^r x \in \Delta$” を満たすものを任意にとれば，$\Delta$ がユークリッド型の遺伝的右正則安定切片であることが分る．したがって定理により，A はユークリッド型の自己入射多元環に礎石同型である.

例 4.1 における自己入射多元環 A は遺伝的右正則安定部分クイバーをもつので，定理により A は軌道多元環に礎石同型になることが分る．実際，クイバー

$$Q^* :\ 1 \xrightarrow{\alpha} 3 \xleftarrow{\sigma} 2$$

による道多元環を $B = KQ^*$ とおき，$\widehat{B}$ の正自己同型写像 φ として次の対応を満たすものをとる：$\varphi(e_{m,1}) = e_{m,2}$，$\varphi(e_{m,2}) = e_{m,1}$，$\varphi(e_{m,3}) = e_{m,3}$，$\forall m \in \mathbb{Z}$. このとき A は $\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$ に同型になることが確かめられる.

定理 3.5 の応用として，礎石同型の存在と加群圏の間の関係が得られる：

定理 4.3 K を任意の体とする．A は K 上の直既約自己入射多元環で単純多元環ではないとする．このとき次の条件は同値である.

(i) A は $\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$ に礎石同型である，ただし B は傾斜多元環で φ は $\widehat{B}$ の正自己同型写像である.

(ii) $\underline{\mathrm{mod}}\, A \cong \underline{\mathrm{mod}} \left(\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})\right)$，ただし B は傾斜多元環で φ は $\widehat{B}$ の正自己同型写像である.

最後に，ここに紹介した（軌道多元環に礎石同型であるための）環論および表現論的な判定条件は森田同値により不変な性質であることを注意しておく.

参考文献

[ES2018] K. Erdmann and A. Skowroński, *Weighted surface algebras*. J. Algebra **505** (2018) 490–558.

[M1958] K. Morita, *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*. Sci. Rep.Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A, **6** (1958) 83–142.

[N1939] T, Nakayama, *On Frobeniusean algebras. I*, Annals of Math. **40** (1939) 611–633.

[R1984] C. M. Ringel, *Tame algebras and Integral Quadratic forms*. Lecture Notes in Math., No. 1099, Springer-Verlag, 1984, pp. 1–371.

[SY2011] A. Skowroński and K. Yamagata, *Frobenius Algebras I. Basic Representation Theory*. EMS Textbooks in Mathematics, (European Math. Soc. Publ. House, Zürich, 2011).

[SY2017] A. Skowroński and K. Yamagata, *Frobenius Algebras II. Tilted and Hochschild Extension Algebras*. EMS Textbooks in Mathematics, (European Math. Soc. Publ. House, Zürich, 2017).

[SY2019] A. Skowroński and K. Yamagata, *Selfinjective algebras with hereditary stable slice*. J. Algebra **530** (2019) 146–162.

[SY2021] A. Skowroński and K. Yamagata, *Frobenius Algebras III. Orbit Algebras*. EMS Textbooks in Mathematics, (European Math. Soc. Publ. House, Zürich), in preparation.

[Y1981] K. Yamagata, *Extensions over hereditary Artinian rings with self-dualities. I*. J. Algebra. **73** (1981) 386–433.