算術的曲面のエタールコホモロジーとゼータ関数の値

佐藤 周友（中央大学）

概 要

本稿では，解析的類数公式と代数的整数環の実 Deligne コホモロジー, およびスキームのゼータ関数についての簡単なサーベイを行った後, r が 2 以上の整数の場合に算術的曲面の $\mathbb{Q}_p(r)$ 係数エタールコホモロジーと Bloch-Kato の Selmer 群の比較，p 進 Abel-Jacobi 写像とモチーフの Tate-Shafarevich 群の比較について述べる．さらに，これらの比較に関する結果が, モチーフの L 関数の特殊値に関する玉河数予想とモチビックコホモロジーの有限生成性に関する予想を仮定した場合に，算術的曲面のゼータ関数の $s=2$ での留数と $s=r\,(\geqq 3)$ での値の記述に応用できることを述べたい．

1 Dedekind ゼータ関数と Deligne コホモロジー

K を代数体とし, O_K をその整数環とする. 0 でないイデアル $\mathfrak{a}\subset O_K$ に対し, 剰余環 $O_K/\mathfrak{a}$ の位数を $\mathscr{N}(\mathfrak{a})$ と表す.

定義 1.1 代数体 K の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ を

$$\zeta_K(s) := \sum_{0\neq\mathfrak{a}\subset O_K} \frac{1}{\mathscr{N}(\mathfrak{a})^s}$$

と定義する. ただし, 右辺は整数環 O_K の 0 でないイデアル $\mathfrak{a}$ すべてを亙る和を表す.

K が有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合, $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ は Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqq 1} \frac{1}{n^s}$$

である. よく知られているように, Riemann ゼータ関数は $\mathrm{Re}(s)>1$ において広義一様絶対収束し, 有理型関数として全複素平面に解析接続され, $s\neq 1$ において正則である. また, $s=1$ で 1 位の極を持ち, その留数は 1 である (例えば, [ア] 第 5 章 §4 などを参照). これらの事実を Dedekind ゼータ関数に拡張したのが次の古典的な定理である.

定理 1.2 (1) $\zeta_K(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ において広義一様絶対収束し, 有理型関数として全複素平面に解析接続され, $s\neq 1$ で正則である.

(2) $\zeta_K(s)$ は $s=1$ で 1 位の極を持ち, 次の等式が成り立つ.

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}hR}{w\sqrt{|D|}} \qquad \text{(解析的類数公式)}$$

ただし, r_1, r_2, h, R, w, D は代数体 K の不変量で, それぞれ実素点の個数, 複素素点の個数, 類数, 単数規準, 1 のべき根の個数, 判別式を表す.

この定理の詳細については, [ノ] 第 7 章, あるいは [雪] 第 5 章などを参照されたい.

以下では, Spec(K) の実 Deligne コホモロジー $H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ に値を持つ規準写像 (regulator map) の構成と, この規準写像を用いた解析的類数公式のいい換えについて述べたい. まず,

$$T := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(K, \mathbb{C}) \qquad (\text{体の埋め込み } K \hookrightarrow \mathbb{C} \text{ 全体のなす集合})$$

とおき, 次の Gal$(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 加群のコチェイン複体 $\mathbb{Z}(1)_{\mathscr{D}}$ (Deligne 複体) を導入する.

$$\mathbb{Z}(1)_{\mathscr{D}} \ : \ \prod_{\tau \in T} 2\pi i \mathbb{Z} \longrightarrow \prod_{\tau \in T} \mathbb{C}$$

ここで, 各項は左から順に次数 $0, 1$ にある (次数 $0, 1$ 以外の項はすべて 0) とし, 矢印は各 $\tau \in T$ 成分ごとの自然な包含と定めた. また, 複素共役 $c \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の $(a_\tau)_\tau$ $(a_\tau \in \mathbb{C})$ への作用を

$$c\big((a_\tau)_\tau\big) := (\overline{a_{c\tau}})_\tau$$

と定めた (各 $a \in \mathbb{C}$ に対し, $\overline{a}$ は a の複素共役 $c(a)$ を, 各 $\tau \in T$ に対し, $c\tau$ は $\tau : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ と $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の合成を表す). これらの記号の下で, 実 Deligne コホモロジーを

$$H^i_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1)) := H^i(\mathbb{Z}(1)_{\mathscr{D}})^+$$

と定義する. ただし, 右辺の $^+$ は Gal$(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の作用による不変部分を表す. この群は $i = 1$ 以外で自明である. また, 指数関数による同型 $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^\times$ から, 同型

$$\alpha : H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\simeq} \left(\prod_{\tau \in T} \mathbb{C}^\times \right)^+ \tag{1.1}$$

が得られる. この同型の右辺の自然な位相によって $H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ を位相アーベル群とみなす. $H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ はコンパクトでない局所コンパクト群である.

定義 1.3 規準写像

$$\mathrm{reg}^{1,1}_{\mathscr{D}} : O_K^\times \longrightarrow H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$$

を $\mathrm{reg}^{1,1}_{\mathscr{D}}(u) := \alpha^{-1}((\tau(u))_{\tau \in T})$ と定義する.

写像 $\mathrm{reg}^{1,1}_{\mathscr{D}}$ は単射準同型である. また, K に含まれる 1 のべき根の有限性と Dirichlet の単数定理 (例えば, [ノ] 第 1 章 §7 を参照) によって, 像 $\mathrm{reg}^{1,1}_{\mathscr{D}}(O_K^\times)$ はトレース写像

$$\mathrm{Tr}_K : H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1)) \xrightarrow[\alpha]{\simeq} \prod_{\tau \in T} (\mathbb{C}^\times)^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (z_\tau)_\tau \mapsto \sum_{\tau \in T} \ln |z_\tau|$$

の核 $\widetilde{H}^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ の余コンパクトな離散部分群である.

一方, $\mathbb{C}$ 線型空間 $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ に複素共役 c の作用を $c(a \otimes z) := a \otimes \overline{z}$ $(a \in K,\ z \in \mathbb{C})$ と定める. このとき, 標準的な $\mathbb{C}$ 線型同型

$$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \prod_{\tau \in T} \mathbb{C}, \qquad a \otimes z \longmapsto (\tau(a)z)_\tau \tag{1.2}$$

は Gal$(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 同変となり, $\mathbb{R}$ 線型空間の標準同型

$$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \left(\prod_{\tau \in T} \mathbb{C} \right)^+$$

をひき起こす．この同型によって，$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ から $H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ への自然な連続開写像が定まる (像は連結な開部分群で，その指数は 2^{r_1})．$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の完全格子 O_K に関する $H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ 上の Haar 測度を m_0 と表す．この m_0 と $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度 λ_1 から，$\widetilde{H}^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ 上の Haar 測度 m_1 を次の手続きによって構成する．

定義 1.4 トレース写像 Tr_K の連続な切断 $s : \mathbb{R} \to H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ を $x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha^{-1}((\exp(x/n))_\tau)$ $(n := [K : \mathbb{Q}] = \#T)$ と定めることにより，位相同型

$$H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1)) \cong \widetilde{H}^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1)) \times \mathbb{R}$$

が成り立つ．ただし，$\widetilde{H}^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ の位相は $H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ の制限位相である．この同型を用いて，$\widetilde{H}^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ の Borel 集合 V の測度 $\mathsf{m}_1(V)$ を

$$\mathsf{m}_1(V) := \frac{\mathsf{m}_0(V \times s(Z))}{\lambda_1(Z)}$$

と定める．ただし，右辺の Z は補助的にとった $\mathbb{R}$ の有界開集合 $\neq \emptyset$ である．右辺の値が Z のとり方によらないこと，および m_1 が Haar 測度であることは，容易に確かめられる．

以上の準備の下で，値域を小さくとり換えた規準写像

$$\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}} : O_K^\times \longrightarrow \widetilde{H}^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1)) \tag{1.3}$$

について，次の命題を述べることができる．

命題 1.5 m_1 の商 Haar 測度 m_2 に関する $\mathrm{Coker}(\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}})$ の体積は $\dfrac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}R}{w\sqrt{|D|}}$ に等しい．

この命題の証明は補遺で与えることにして，命題 1.5 と解析的類数公式 (定理 1.2 (2)) の帰結である系 1.6 を述べたい．本稿の主題はこの系 1.6 の二次元版 (定理 5.6 参照) である．

系 1.6 $\zeta_K(s)$ の $s = 1$ での留数は，

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_K(s) = \frac{\mathsf{m}_2(\mathrm{Coker}(\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}})) \cdot \#\mathrm{Ker}(\mathrm{reg}^{2,1}_{\mathscr{D}})}{\#\mathrm{Ker}(\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}}) \cdot \#\mathrm{Coker}(\mathrm{reg}^{2,1}_{\mathscr{D}})}$$

と表される．ただし，$\mathrm{reg}^{2,1}_{\mathscr{D}}$ は次の自明な写像を表す ($C\ell(K)$ は K のイデアル類群)．

$$\mathrm{reg}^{2,1}_{\mathscr{D}} : C\ell(K) \longrightarrow H^2_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1)) (= 0)$$

補足 1.7 同型 (1.2) は，$\mathrm{Spec}(K)$ の代数的 de Rham コホモロジーと，$X' := \mathrm{Spec}(K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ に付随した複素多様体 (有限個の孤立点からなる位相空間) の特異コホモロジーの比較同型

$$H^0_{\mathrm{dR}}(K/\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \prod_{\tau \in T} H^0_{\mathrm{sing}}(X'(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$$

とみなすことができる．

2 スキームのゼータ関数

Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ は，領域 $\mathrm{Re}(s) > 1$ において次の Euler 積表示をもつ．

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Specm}(O_K)} \frac{1}{1 - \mathscr{N}(\mathfrak{p})^{-s}}$$

ただし，右辺は O_K の極大イデアル $\mathfrak{p}$ すべてを亙る無限積を表す．この事実を用いて，

定義 2.1 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上有限型なスキーム X のゼータ関数 $\zeta(X,s)$ を, Euler 積

$$\zeta(X,s) := \prod_{x\in X_0} \frac{1}{1-\mathscr{N}(x)^{-s}}$$

で定義する．ここで, X_0 は X の閉点全体のなす集合を表し, $\mathscr{N}(x)$ は点 $x \in X_0$ の剰余体 $\kappa(x)$ の位数を表す.

$X = \mathrm{Spec}(O_K)$ (代数体 K の整数環のスペクトラム) の場合, $\zeta(X,s)$ は $\zeta_K(s)$ に他ならない. すなわち, スキームのゼータ関数 $\zeta(X,s)$ は, Dedekind ゼータ関数の拡張である．スキームのゼータ関数について, 次の事実は基本的である.

定理 2.2 X を $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上有限型なスキームとするとき, 次が成り立つ.

(1) $\zeta(X,s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \dim X$ で絶対収束する．特に, この領域で零点をもたない.

(2) $\zeta(X,s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \dim X - \frac{1}{2}$ に有理型に解析接続され, $s = \dim(X)$ において m 位の極をもつ．ただし, m は X の既約成分のうち, 次元が $\dim X$ (既約成分たちの次元の最大値) に等しいようなものの個数を表す.

この定理の詳細については, [Se2] §1.3〜§1.4 を参照されたい．次の定理 2.3 は X が有限体上のスキームの場合に成り立つもので, Weil 予想 [W] を肯定的に解決している．特に, (2) はゼータ関数とエタールコホモロジーの関係を表し, (3) はモチーフの重さ (weight) の概念の基本になっている重要な事実である.

定理 2.3 p を素数とし, X を $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 上有限型な d 次元スキームとするとき, 次が成り立つ.

(1) $\zeta(X,s)$ は p^{-s} の有理数係数有理式である.

(2) X が $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 上分離的ならば, p と異なる素数 ℓ を用いて

$$\zeta(X,s) = \frac{P_{1,\ell}(p^{-s})\cdots P_{2d-1,\ell}(p^{-s})}{P_{0,\ell}(p^{-s})P_{2,\ell}(p^{-s})\cdots P_{2d,\ell}(p^{-s})}$$

と表される．ここで, $P_{i,\ell}(t)$ は次で定義される $\mathbb{Q}_\ell$ 係数多項式である.

$$P_{i,\ell}(t) := \det(1-\mathrm{Fr}_p{\cdot}t \mid H^i_c(X',\mathbb{Q}_\ell))$$

$H^*_c(X',\mathbb{Q}_\ell)$ は $X' := X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)} \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p})$ のコンパクト台つき $\mathbb{Q}_\ell$ 係数エタールコホモロジー

$$H^*_c(X',\mathbb{Q}_\ell) := \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \varprojlim_{n\geqq 1} H^*_c(X',\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

を表す (例えば, [齋佐] §11.7.b などを参照されたい)．また, Fr_p は幾何的 Frobenius 作用素とよばれる $H^i_c(X',\mathbb{Q}_\ell))$ の $\mathbb{Q}_\ell$ 線型自己同型で, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ の Frobenius 元 φ_p ($\overline{\mathbb{F}_p}$ の各元を p 乗する自己同型) の逆元による作用と同じものである (幾何的 Frobenius 作用素の定義については [齋佐] §11.7.d などを参照されたい).

(3) X が $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 上スムーズかつ固有的ならば, 任意の $0 \leqq i \leqq 2d$ に対し, (2) の多項式 $P_{i,\ell}(t)$ は素数 $\ell \neq p$ によらない整数係数多項式である．さらに, $P_i(t) = P_{i,\ell}(t)$ の任意の根 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ は, いかなる体の埋め込み $\tau : \mathbb{Q}(\alpha) \hookrightarrow \mathbb{C}$ によっても

$$|\tau(\alpha)| = p^{-\frac{i}{2}}$$

をみたす.

定理 2.3 (1) は Dwork [Dw], (2) は Grothendieck [G], (3) は Deligne [De1], [De2] による.

定義 2.4 スキーム X で可逆な整数 $m > 0$ に対し, $\mu_m = \mu_{m,X}$ を 1 の m 乗根のなす X 上のエタール層とする. X で可逆な素数 ℓ と整数 $r \geqq 0$ に対し,

$$H^*(X, \mathbb{Z}_\ell(r)) := \varprojlim_{n \geqq 1} H^*_{\text{ét}}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes r}), \qquad H^*(X, \mathbb{Q}_\ell(r)) := \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^*(X, \mathbb{Z}_\ell(r))$$

とおく. X が $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ または $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p})$ 上スムーズなスキームなら,

$$H^*(X, \mathbb{Z}_p(r)) := \varprojlim_{n \geqq 1} H^{*-r}_{\text{ét}}(X, W_r\Omega^n_{X,\log}), \qquad H^*(X, \mathbb{Q}_\ell(r)) := \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^*(X, \mathbb{Z}_\ell(r))$$

とおく. ただし, $W_r\Omega^n_{X,\log}$ は Hodge-Witt 層の対数的部分のなすエタール部分層 [Ill] を表す.

次の定理 2.5 は, X が有限体上の良い多様体の場合に成り立つものであり, Milne [Mi] Theorem 0.1 の特別な場合である ([BN] Theorem 3.1, [Sch] Theorem 5 も見よ).

定理 2.5 X を $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 上スムーズかつ固有的な d 次元多様体とし, X の関数体における $\mathbb{F}_p$ の代数閉包を $\mathbb{F}_q$ とするとき, 次の有理数の等式が成り立つ.

$$\lim_{s \to d} (1 - q^{d-s})\zeta(X, s) = \chi(X, \mathscr{O}_X, d) \prod_{i=1}^{2d-1} (\# H^i(X, \widehat{\mathbb{Z}}(d)))^{(-1)^i} \cdot \#(H^{2d}(X, \widehat{\mathbb{Z}}(d))_{\text{tors}}),$$

$$\zeta(X, r) = \chi(X, \mathscr{O}_X, r) \prod_{i=1}^{2d+1} (\# H^i(X, \widehat{\mathbb{Z}}(r)))^{(-1)^i} \qquad (r > d,\ r \in \mathbb{Z} \text{ のとき})$$

ただし, $H^*(X, \widehat{\mathbb{Z}}(r))$ と $\chi(X, \mathscr{O}_X, r)$ は次で定義される.

$$H^i(X, \widehat{\mathbb{Z}}(r)) := \prod_{\ell:\,\text{素数}} H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(r)),$$

$$\chi(X, \mathscr{O}_X, r) := \prod_{i,j \geqq 0} (\# H^j(X, \Omega^i_X))^{(r-i)\cdot(-1)^{i+j}} \qquad (\text{Milne の補正因子})$$

定理 2.5 は $H^i(X, \widehat{\mathbb{Z}}(r))$ $(i \geqq 0,\ r \geqq d,\ (i, r) \neq (2d, d), (2d+1, d))$ および $H^{2d}(X, \widehat{\mathbb{Z}}(d))_{\text{tors}}$ の有限性を前提としているが, これらの有限性は定理 2.3 (3) と Gabber の定理 [Ga] の帰結である.

補足 2.6 [Mi] Theorem 0.1 では, X が射影的であることと, すべての素数 ℓ に対し

$$H^{2r}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(r)) \qquad (\text{ただし, } \overline{X} := X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p}))$$

への Frobenius 元 $\varphi_q \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_q)$ の作用に関する予想 $SS(X, r, \ell)$「固有値 1 の広義固有空間は固有空間に等しい」が成り立つことを仮定して, $s \to r$ $(r \in \mathbb{Z})$ での $\zeta(X, s)$ の様子を $H^*(X, \widehat{\mathbb{Z}}(r))$ と $\chi(X, \mathscr{O}_X, r)$ で記述している. 予想 $SS(X, r, \ell)$ は半単純性予想 ([T] §3 (d)) を根拠としているが, $r \geqq d$ の場合は X が射影的でなくても自明に成り立つので, [Mi] Theorem 0.1 の主張も X が固有的 (かつスムーズ) という仮定で成り立つ.

定義 2.7 (1) $i \geqq 0$ に対し, $\Delta^i := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t_0, t_1, \ldots, t_n]/(t_0 + t_1 + \cdots + t_i - 1))$ とおく. Δ^i の閉部分スキーム F が, $0 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_c \leqq i$ をみたす整数の組 $(k_1, k_2, \ldots, k_c)$ によって $F = \{t_{k_1} = t_{k_2} = \cdots = t_{k_c} = 0\}$ と表されるとき, F を Δ^i の (余次元 c の) 面とよぶ. Δ^i の余次元 1 の面 $\{t_k = 0\}$ から Δ^i への閉埋め込み射を $\partial_{i,k}$ と表す.

(2) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上有限型な既約スキーム X と整数 $r, i \geqq 0$ に対し, $z^r(X,i)$ を次の集合で生成される自由アーベル群とする.

$$\left\{ V \;\middle|\; \begin{array}{l} V \text{ は } X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \varDelta^i \text{ の既約閉集合で, かつ} \\ \varDelta^i \text{ の任意の面 } F \text{ に対し, } X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} F \text{ と proper に交わる} \end{array} \right\}$$

余次元 1 の面に沿ったサイクルの引き戻しの交代和

$$d_i := \sum_{k=0}^{i} (-1)^k (\mathrm{id}_X \times \partial_{i,k})^* : z^r(X,i) \longrightarrow z^r(X,i-1)$$

によって, $z^r(X,*) = ((z^r(X,i))_{i \geqq 0}, (d_i)_{i \geqq 0})$ はアーベル群のチェイン複体になる (詳細については, [齋佐] 第 8 章を参照). この複体の i 次のホモロジーを $\mathrm{CH}^r(X,i)$ と表す.

$$\mathrm{CH}^r(X,i) = \frac{\mathrm{Ker}(d_i : z^r(X,i) \to z^r(X,i-1))}{\mathrm{Im}(d_{i+1} : z^r(X,i+1) \to z^r(X,i))} \qquad (\text{高次 Chow 群})$$

$\mathrm{CH}^r(X,0)$ は通常の余次元 r のサイクルの Chow 群に同型であり, X が正則なら標準同型 $\mathrm{CH}^1(X,*) \cong H^{1-*}_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{O}_X^\times)$ が成り立つ. 高次 Chow 群の定義は Bloch [B2] による.

ここで, $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 上スムーズなスキーム X に対し, 次のサイクル写像を導入する (定義については, 例えば [齋佐] 第 12 章を参照).

$$\mathrm{cl}^{i,r}_{\mathrm{tors}} : \mathrm{CH}^r(X, 2r-i)_{\mathrm{tors}} \longrightarrow H^i(X, \widehat{\mathbb{Z}}(r))$$

これは定理 2.5 の等式の右辺に現れたエタールコホモロジーを高次 Chow 群のねじれ部分群と比較するための重要な写像 (ある種の特性類写像) である.

定理 2.8 X および $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ を定理 2.5 の通りとする.

(1) 写像 $\mathrm{cl}^{2d,d}_{\mathrm{tors}}$ は同型 $\mathrm{CH}^d(X,0)_{\mathrm{tors}} \cong H^{2d}(X, \widehat{\mathbb{Z}}(d))_{\mathrm{tors}}$ をひき起こす. $r = d$ のとき, 任意の $i \leqq 2d-1$ に対し $\mathrm{cl}^{i,d}_{\mathrm{tors}}$ は p 準素部分を除いて同型であり, 特異点の還元か, あるいは「$i \geqq 2d-3$ または $i \leqq d$」を仮定すれば, p 準素部分も込めて同型である.

(2) 任意の $r > d$ と $i \geqq 0$ に対し, 写像 $\mathrm{cl}^{i,r}_{\mathrm{tors}}$ は同型である.

定理 2.8 は, Kato-Saito [KS], Kato [KCT] Theorem 0.7, Geisser-Levine [GL1], [GL2], Voevodsky [V1], [V2], Kerz-Saito [KeS] Theorem 0.4 および Jannsen [J2] Theorem 0.10 を合わせたものである (どう合わせたかは省略する). 定理 2.5 と定理 2.8 から, 次の系が得られる.

系 2.9 X および $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ を定理 2.5 の通りとする.

(1) p べき部分の違いを許せば, 次の有理数の等式が成り立つ.

$$\lim_{s \to d} (1 - q^{d-s}) \zeta(X,s) = \chi(X, \mathscr{O}_X, d) \cdot \prod_{i=1}^{2d} (\#\mathrm{CH}^d(X, 2d-i)_{\mathrm{tors}})^{(-1)^i}$$

特異点の還元か, あるいは $d \leqq 4$ を仮定すれば, p べき部分も込めて等式が成り立つ.

(2) 任意の整数 $r > d$ に対し, 次の (有理数の) 等式が成り立つ.

$$\zeta(X,r) = \chi(X, \mathscr{O}_X, r) \cdot \prod_{i=1}^{2d+1} (\#\mathrm{CH}^r(X, 2r-i)_{\mathrm{tors}})^{(-1)^i}$$

(1) の極限公式は, 定理 1.2 (2) で述べた解析的類数公式の類似である.

補足 2.10 整数点でのゼータ関数の特殊値を記述 (予想) する方法として, Weil エタール位相でのモチビックコホモロジーを使ったアプローチがある ([Li1], [Ge]). この方法では, 高次 Chow 群を用いる方法と比べて, 特に $1 \leqq r \leqq d-1$ の場合に簡明な表示 (予想) が得られる.

3 算術的スキーム上のエタール層の複体

§§3〜5 では主に, X を $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上有限型平坦かつ分離的な正則整スキームとする. 素数 p を一つ固定し, $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上のエタール $\mathbb{Z}/p^n$ 層の導来圏 $D(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$, および X 上のエタール $\mathbb{Z}/p^n$ 層の導来圏 $D(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ において次のような対象たちを導入する.

定義 3.1 n, r を整数とし, $n \geqq 1$ とする.

(1) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上のエタール $\mathbb{Z}/p^n$ 層の複体 $\mathfrak{T}_n(1)_{\mathbb{Z}} \in D^+(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ を完全三角形

$$(i')_*\mathbb{Z}/p^n[-2] \longrightarrow \mathfrak{T}_n(1)_{\mathbb{Z}} \longrightarrow R(j')_*\mu_{p^n} \xrightarrow{\delta_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{val}}} (i')_*\mathbb{Z}/p^n[-1] \tag{3.1}$$

によって定義する. ここで, i', j' はそれぞれアフィンスキームの自然な埋め込み射

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[p^{-1}]) \xhookrightarrow{j'} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \xhookleftarrow{i'} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

を表し, μ_{p^n} は 1 の p^n 乗根のなす $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[p^{-1}])$ 上のエタール層 (定義 2.4), $\mathbb{Z}/p^n$ は $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 上の定数層を表す. また, $\delta_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{val}}$ は $D^+(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ における射で, 正規化された p 進的離散付値 $\mathrm{ord}_p : \left(\mathbb{Q}_{(p)}^{\mathrm{sh}}\right)^{\times} \to \mathbb{Z}$ (ただし, $\mathbb{Q}_{(p)}^{\mathrm{sh}}$ は $\mathbb{Z}$ の局所化 $\mathbb{Z}_{(p)}$ の強 Hensel 化の分数体) の定める $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 上のエタール層の準同型

$$(i')^*R^1(j')_*\mu_{p^n} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n$$

と, 任意の $q \geqq 2$ に対し $R^q(j')_*\mu_{p^n} = 0$ ([Se3] II.3.3 (c)) という事実から定義される.

(2) $r \geqq 2$ のとき, $\mathfrak{T}_n(r)_{\mathbb{Z}} \in D^+(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ を次で定義する.

$$\mathfrak{T}_n(r)_{\mathbb{Z}} := R(j')_*\mu_{p^n}^{\otimes r}$$

(3) X をこの節の冒頭の通りとし, $d := \dim(X)$ とおく. $f : X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ を構造射とするとき, $r \geqq d$ に対し, X 上のエタール $\mathbb{Z}/p^n$ 層の複体 $\mathfrak{T}_n(r)_X \in D^+(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ を

$$\mathfrak{T}_n(r)_X := Rf^!\mathfrak{T}_n(r-d+1)_{\mathbb{Z}}[2-2d]$$

と定める. ただし, $Rf^! : D^+(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n) \to D^+(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ はコンパクト台付き高次順像関手 $Rf_!$ の右随伴関手 ([GAV] XVIII) を表す.

(4) $r \leqq 0$ のとき, $\mathfrak{T}_n(r)_X$ を X 上のエタール層

$$\begin{cases} \mathbb{Z}/p^n & (r = 0 \text{ のとき}) \\ j_!\mathscr{H}om_{X[p^{-1}]}\left(\mu_{p^n}^{\otimes(-r)}, \mathbb{Z}/p^n\right) & (r < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める. ただし, j は開埋め込み射 $X[p^{-1}] := X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[p^{-1}]) \hookrightarrow X$ を表す.

命題 3.2 以下の (2) では, X, d および $j : X[p^{-1}] \hookrightarrow X$ を上記の通りとする.

(1) $\mathfrak{T}_n(1)_{\mathbb{Z}}$ は次数 $0, 1$ 以外に非自明なコホモロジー層をもたず, 完全三角形 (3.1) に当てはまる $\mathfrak{T}_n(1)_{\mathbb{Z}}$ は (厳密には, $\mathfrak{T}_n(1)_{\mathbb{Z}}$ とそれを挟む二つの射からなる三つ組みは) 一意的な同型を除いて一意的である.

(2) $r > d$ ならば, $\mathfrak{T}_n(r)_X \cong Rj_*\mu_{p^n}^{\otimes r}$ である. $\mathfrak{T}_n(d)_X$ は次の $D^+(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ の完全三角形に当てはまる.

$$i_*R(f_p)^!\mathbb{Z}/p^n[-2d] \longrightarrow \mathfrak{T}_n(d)_X \longrightarrow Rj_*\mu_{p^n}^{\otimes d} \xrightarrow{Rf^!(\delta_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{val}})} i_*R(f_p)^!\mathbb{Z}/p^n[1-2d]$$

ただし, f_p は $f : X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ がひき起す射 $Y_p := X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ を, i は閉埋め込み射 $Y_p \hookrightarrow X$ を表す.

証明. (1) [SH] Lemma 4.2.2 を参照. (2) Gabber の絶対純粋性 [FG] によって $Rj_*\mu_{p^n}^{\otimes d} \cong Rf^!R(j')_*\mu_{p^n}[2-2d]$ である. □

補足 3.3 Y_p に被約な閉部分スキーム構造を与えたものを $(Y_p)_{\mathrm{red}}$ とする. $(Y_p)_{\mathrm{red}}$ が X 上の完全交差因子 (normal crossing divisor) ならば, 命題 3.2 (2) の完全三角形は

$$i'_*\nu_{Y_p,n}^{d-1}[-d-1] \longrightarrow \mathfrak{T}_n(d)_X \longrightarrow R(j')_*\mu_{p^n}^{\otimes d} \xrightarrow{\delta_X^{\mathrm{val}}} i'_*\nu_{Y_p,n}^{d-1}[-d] \tag{3.2}$$

と書き換えられる ([JSS] Theorem 4.6.2, Theorem 5.2.1 (1), [Sa1] Corollary 2.2.5 (1)). ここで, $\nu_{Y_p,n}^{d-1}$ は [Sa1] で定義された $(Y_p)_{\mathrm{red}}$ のホモロジカルな対数的 Hodge-Witt 層を表し, δ_X^{val} は Y_p の既約成分の生成点 η たちに対する $\mathscr{O}_{X,\overline{\eta}}^{\mathrm{sh}}[p^{-1}]$ (= 局所環 $\mathscr{O}_{X,\eta}$ の強 Hensel 化の分数体) の Galois コホモロジーの境界写像 ([KCT] 参照) がひき起す射を表す.

記号 3.4 X の関数体における $\mathbb{Q}$ の代数閉包を K とおき, K の整数環を O_K と表す. $B := \mathrm{Spec}(O_K)$ とおき, 自然な射 $X \to B$ を g と表す.

$r \geqq d$ とする. $\mathfrak{T}_n(r)_X$ と $\mathfrak{T}_n(d-r)_X$ の定義により, $D^+(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ において同型

$$\mathfrak{T}_n(r)_X \cong R\mathscr{H}om_{X,\mathbb{Z}/p^n}(\mathfrak{T}_n(d-r)_X, \mathfrak{T}_n(d)_X)$$

が成り立つ. この事実と同型 $\mathfrak{T}_n(d)_X \cong Rg^!\mathfrak{T}_n(1)_B[2-2d]$, および $Rg_!$ と $Rg^!$ の随伴性 ([GAV] XVIII.3.1.10) により, $D^+(B_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ において同型

$$Rg_*\mathfrak{T}_n(r)_X \cong R\mathscr{H}om_{B,\mathbb{Z}/p^n}(Rg_!\mathfrak{T}_n(d-r)_X, \mathfrak{T}_n(1)_B)[2-2d] \tag{3.3}$$

が成り立つ. この同型に注意しつつ, 次のような複体を導入する.

定義 3.5 ([Sa3] Definition 3.2) $r \geqq d$ とする. 整数 i に対し, $D^+(B_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ において

$$\mathfrak{H}^{\leqq i}(X, \mathfrak{T}_n(r)) := R\mathscr{H}om_{B,\mathbb{Z}/p^n}(\tau_{\geqq 2(d-1)-i}Rg_!\mathfrak{T}_n(d-r)_X, \mathfrak{T}_n(1)_B)[2-2d],$$
$$\mathfrak{H}^{i}(X, \mathfrak{T}_n(r)) := R\mathscr{H}om_{B,\mathbb{Z}/p^n}(R^{2(d-1)-i}g_!\mathfrak{T}_n(d-r)_X, \mathfrak{T}_n(1)_B),$$

と定める. データ $\{\mathfrak{H}^{\leqq i}(X, \mathfrak{T}_n(r))\}_{i\in\mathbb{Z}}$ は同型 (3.3) の右辺の複体上に実質有限長の増大フィルターを定め, 収束するスペクトル系列

$$E_2^{a,b} = H^a_{\text{ét}}(B, \mathfrak{H}^b(X, \mathfrak{T}_n(r))) \Longrightarrow H^{a+b}_{\text{ét}}(X, \mathfrak{T}_n(r)_X) \tag{3.4}$$

を与える. (つまり, $E_2^{a,b}$ を計算することによって $H^*_{\text{ét}}(X, \mathfrak{T}_n(r)_X)$ が分かる.)

スペクトル系列 (3.4) の $E_2^{a,b}$ を計算する上で重要な $\mathfrak{H}^i(X,\mathfrak{T}_n(r))$ の性質を述べておく.

命題 3.6 (純粋性) $m\in\mathbb{Z}$, $r\geqq d$ とし, $\iota_v : v\hookrightarrow B$ を閉点からの閉埋め込み射とする.

(1) $q\neq 2$ ならば $R^q\iota_v^!\mathfrak{H}^i(X,\mathfrak{T}_n(r))=0$ である. $q=2$ の場合, $R^2\iota_v^!\mathfrak{H}^i(X,\mathfrak{T}_n(r))$ の茎は

$$(R^2\iota_v^!\mathfrak{H}^i(X,\mathfrak{T}_n(r)))_{\overline{v}}\cong H^{i+2}_{Y_{\overline{v}},\text{ét}}(X\times_B\operatorname{Spec}(\mathscr{O}^{\text{sh}}_{B,\overline{v}}),\mathfrak{T}_n(r)).$$

と表される. ただし, $Y_{\overline{v}}$ は $X\times_B\operatorname{Spec}(\overline{\kappa(v)})$ を表し, $\mathscr{O}^{\text{sh}}_{B,\overline{v}}$ は局所環 $\mathscr{O}_{B,v}$ の強 Hensel 化を表す.

(2) $\operatorname{ch}(v)=p$ かつ $r>d$ ならば, $R\iota_v^!\mathfrak{H}^i(X,\mathfrak{T}_n(r))=0$ である.

命題 3.7 (Ext との比較と有限性) 任意の $q,i\in\mathbb{Z}$ と $r\geqq d$ に対し

$$H^q_{\text{ét}}(B,\mathfrak{H}^i(X,\mathfrak{T}_n(r)))\cong\operatorname{Ext}^q_B(R^{2(d-1)-i}g_!\mathfrak{T}_n(d-r),\mathbb{G}_{\text{m}})$$

である. ([Ma] (2.4) により右辺は位数有限であるから, 左辺も位数有限である.)

これらの命題の証明については, [Sa3] Proposition 3.6 (1) および Proposition 4.1 を参照されたい.

4 Selmer 群, Tate-Shafarevich 群との比較

スキーム X を前節の冒頭の通りとし, 代数体 K と底スキーム B を記号 3.4 の通りとする. p を素数とし, 整数 q,i,r ($r\geqq d=\dim(X)$) に対し,

$$H^i(X,\mathbb{Z}_p(r)):=\varprojlim_{n\geqq 1}H^i_{\text{ét}}(X,\mathfrak{T}_n(r)),\qquad H^i(X,\mathbb{Q}_p(r)):=\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_p(r)),$$
$$H^q(B,\mathfrak{H}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))):=\varprojlim_{n\geqq 1}H^q_{\text{ét}}(B,\mathfrak{H}^i(X,\mathfrak{T}_n(r)))$$
$$H^q(B,\mathfrak{H}^i(X,\mathbb{Q}_p(r))):=\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}H^q_{\text{ét}}(B,\mathfrak{H}^i(X,\mathbb{Z}_p(r)))$$

とおく. 命題 3.7 とスペクトル系列 (3.4) により, 収束するスペクトル系列

$$E_2^{a,b}=H^a(B,\mathfrak{H}^b(X,\mathbb{Z}_p(r)))\Longrightarrow H^{a+b}(X,\mathbb{Z}_p(r)_X)\tag{4.1}$$

$$E_2^{a,b}=H^a(B,\mathfrak{H}^b(X,\mathbb{Q}_p(r)))\Longrightarrow H^{a+b}(X,\mathbb{Q}_p(r)_X)\tag{4.2}$$

が得られる. また, 任意の $a,b\in\mathbb{Z}$ に対し $H^a(B,\mathfrak{H}^b(X,\mathbb{Z}_p(r)))$ は有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群である ([Sa3] Theorem 4.2 参照). したがって, (4.1) は有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群のスペクトル系列, (4.2) は有限次元 $\mathbb{Q}_p$ 線型空間のスペクトル系列である.

記号 4.1 $\overline{K}$ を K の代数閉包とし,

$$X_K:=X\times_B\operatorname{Spec}(K),\qquad X_{\overline{K}}:=X\times_B\operatorname{Spec}(\overline{K})$$

とおく. K の素点全体のなす集合を P, 有限素点全体のなす部分集合を P_f とおく. 各 $v\in P$ に対し, K の v での完備化を K_v とおく. 各 $v\in P_f$ に対し, K_v の付値環を O_v, 剰余体を $\kappa(v)$

と表す．局所環 $O_{K,v}$ (K の v に関する付値環) の Hensel 化を O_v^{h} とおき，$B_v^{\mathrm{h}} := \mathrm{Spec}(O_v^{\mathrm{h}})$ とおく．また，

$$X_{K_v} := X \times_B \mathrm{Spec}(K_v), \qquad X_v := X \times_B \mathrm{Spec}(O_v), \qquad Y_v := X \times_B \mathrm{Spec}(\kappa(v))$$

とおく (X_{K_v} と Y_v は $d-1$ 次元である)．

以下では，しばしば次の条件 4.2 を仮定する．

条件 4.2 $v|p$ をみたす任意の素点 $v \in P_f$ に対し，$(Y_v)_{\mathrm{red}}$ は X_v 上の完全交差因子，かつ X_v は $\mathrm{Spec}(O_v)$ 上対数的スムーズ ([K] 参照) である．

本稿の最初の主結果は次の比較定理である ($H^*(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r))$ の定義は，定義 2.4 を参照)．

定理 4.3 $g : X \to B$ は固有的であると仮定する．$r \geqq d$ とし，$r = d$ の場合にはさらに条件 4.2 を仮定する．このとき，スペクトル系列 (4.2) について，

$$E_2^{a,b} \cong \begin{cases} H^1_f(K, H^b(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r))) & (a = 1 \text{ のとき}) \\ \mathbb{Q}_p & ((a,b,r) = (3, 2d-2, d) \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，$H^1_f(K, -)$ は Bloch-Kato の Selmer 群を表す (以下の定義 4.4 を参照)．特に，次の同型が成り立つ．

$$H^i(X, \mathbb{Q}_p(r)) \cong \begin{cases} H^1_f(K, H^{i-1}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r))) & ((i,r) \neq (2d+1, d) \text{ のとき}) \\ \mathbb{Q}_p & ((i,r) = (2d+1, d) \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下ではしばしば，$V^i(r) := H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r))$ とおく．

定義 4.4 ([BK] §5) Selmer 群 $H^1_f(K, V^i(r))$ を次で定義する．

$$H^1_f(K, V^i(r)) := \mathrm{Ker}\left(H^1(G_S, V^i(r)) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} \frac{H^1(K_v, V^i(r))}{H^1_f(K_v, V^i(r))} \right)$$

ここで，S は p を割り切る素点，無限素点，および X が良い還元をもたないような有限素点 v をすべて含むような P の有限部分集合を表し，$K_S := S$ の外で不分岐な K の最大 Galois 拡大，$G_S := \mathrm{Gal}(K_S/K)$ とおいた．副有限群のコホモロジーは Galois コホモロジーを表し，体のコホモロジーは絶対 Galois 群のコホモロジーを意味する．各有限素点 $v \in P_f$ に対する $H^1_f(K_v, V^i(r))$ の定義については [BK] §3 を参照せよ．$H^1_f(K, V^i(r))$ は S のとり方に依存しないこと，および $v|p$ の場合に $H^1_f(K_v, V^i(r))$ は Fontaine の p 進周期環 B_{cris} を用いて定義されることを補足しておく．

定理 4.3 の概略． まず，任意の $v \in P_f$ に対し，次を示す ([Sa3] 系 3.9, 定理 5.3)．

$$H^a(B_v^{\mathrm{h}}, \mathfrak{H}^i(X, \mathbb{Q}_p(r))) \cong \begin{cases} H^1_f(K_v, V^i(r)) & (a = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (a \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{4.3}$$

この事実 ($a=1$ の部分) と命題 3.6 (1) の純粋性から, 定理 4.3 の $E_2^{1,b}$ に関する主張が導かれる. また, $E_2^{a,b}$ $(a \neq 1,2)$ に関する主張は, Artin-Verdier 双対性 ([Ma] (2.4)) と Deligne の定理 (定理 2.3 (3)), および (4.3) の $a=3$ の部分などを用いたスタンダードな議論で確かめられる (詳細は [Sa3] Proposition 6.1 の証明を参照). 定理 4.3 の最も重要な部分は $E_2^{2,b}$ の消滅で, これは (4.3) の $a=1,2$ の部分と Jannsen の Hasse 原理 ([J1] p. 337 Theorem 3 (c)) によって証明される (詳細は [Sa3] Theorem 6.6 の証明を参照). □

定理 4.3 の「$E_2^{2,b}$, $E_2^{3,b}$ の消滅」と (4.3) の「$a=2,3$ での消滅」から次の系が得られる.

系 4.5 $r \geqq d$ とし, 定理 4.3 と同じ仮定の下で, S と G_S を定義 4.4 の通りとする. このとき, 制限写像

$$H^2(G_S, V^i(r)) \longrightarrow \bigoplus_{v\in S} H^2(K_v, V^i(r))$$

は任意の $(i,r) \neq (2d-2,d)$ に対し全単射であり, $(i,r)=(2d-2,d)$ に対し単射である. 特に, $r>d$ あるいは X_K がすべての有限素点 $v \in P_f$ で潜在的に良い還元をもつならば, 任意の $(i,r) \neq (2d-2,d)$ に対し $H^2(G_S, V^i(r))=0$ である.

補足 4.6 系 4.5 の主張は, Jannsen が提起した問題 [J1] p. 349 Question 2 に対し部分的に (かつ肯定的に) 答えるものであり, [Ki] Theorem 1.1.5 の「H_p^2 の有限性」の仮定を外すものである. また, 定理 4.3 の「$E_2^{2,b}$ の消滅」から, $H^*(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r))$ $(r \geqq d)$ の Kummer 双対の Selmer 群の消滅

$$H_f^1(K_v, H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r'))) = 0 \qquad ({}^\forall i \geqq 0,\ {}^\forall r' \leqq 0) \tag{4.4}$$

が導かれる ([Sa3] Corollary 6.8 参照). これは Flach が提起した予想 [Fl] Conjecture 1.6 に対し部分的に (かつ肯定的に) 答えている.

X のモチビックコホモロジー $H^*_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Z}(r))$ を X 上の Zariski 層のコチェイン複体

$$\mathbb{Z}(r) : U\,(\subset X\text{: 開集合}) \longmapsto z^r(U,*)[-2r]$$

の超コホモロジーと定義する ($z^r(-,*)$ については定義 2.7 を参照). 以下では $g: X \to B$ が固有的であることに加えてさらに, $d=2$ であることも仮定する. この仮定の下で, $r \geqq 2$ とし, p 進的なサイクル写像

$$\mathrm{cl}_p^{i,r} : H^i_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Z}(r)) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{Z}_p := \varprojlim_{n\geqq 1} H^i_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Z}(r))/p^n \longrightarrow H^i(X,\mathbb{Z}_p(r))$$

がひき起こす p 進的 Abel-Jacobi 写像

$$\mathrm{aj}_p^{i,r} : H^i_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Z}(r)) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{Z}_p \longrightarrow H^1(B, \mathfrak{H}^{i-1}(X,\mathbb{Z}_p(r)))$$

を導入する ([Sa2] §7, [Sa3] §2.3, §7.1, §7.2 参照). 一方, $T^i := H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ とおき, Bloch-Kato の局所・大域写像 ([BK] §5)

$$\alpha^{i,r} : \frac{H^1(K, T^i \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))}{H^1_f(K, T^i \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))} \longrightarrow \bigoplus_{v\in P} \frac{H^1(K_v, T^i \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))}{H^1_f(K_v, T^i \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))} \tag{4.5}$$

を考える (P, K_v などの記号については記号 4.1 を参照). ここで, $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r) := \varinjlim_{n\geqq 1} \mu_{p^n}^{\otimes r}$ であり, $H^1_f(K, T^i \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))$ は $H^1_f(K, V^i(r))$ の像, $H^1_f(K_v, T^i \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))$ は $H^1_f(K_v, V^i(r))$ の像を表す. 本稿の第二の主結果は, 上記の $\mathrm{aj}_p^{i,r}$ と $\alpha^{i,r}$ の比較である.

定理 4.7 ([Sa3] Theorem 1.4) $g : X \to B$ は固有的, かつ $d = 2$ とし, $p \geqq 3$ または K は総虚と仮定する. $r \geqq 2$ とし, $r = 2$ の場合は条件 4.2 を仮定する. さらに, $H^3_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Z}(r))$ の p 準素部分 $H^3_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Z}(r))\{p\}$ は位数有限であると仮定する. p を割り切る素点, および X が良い還元をもたないような素点全体からなる P_f の (有限) 部分集合を S' とする. このとき, $\mathrm{aj}^{i,r}_p$ $(i = 2, 3)$ の核と余核は位数有限であり, 等式

$$\frac{\chi(\alpha^{1,2})}{\chi(\alpha^{0,2})} = \frac{\chi(\mathrm{aj}^{3,2}_p)}{\chi(\mathrm{aj}^{2,2}_p)} \cdot \frac{\#\mathrm{CH}_0(X)\{p\}}{\# C\ell(K)\{p\}} \cdot \prod_{v \in S'} \frac{e^{2,1,2}_v \cdot e^{3,0,2}_v}{e^{2,0,2}_v \cdot e^{3,1,2}_v} \qquad (r = 2)$$

$$\frac{\chi(\alpha^{1,r})}{\chi(\alpha^{0,r}) \cdot \chi(\alpha^{2,r})} = \frac{\chi(\mathrm{aj}^{3,r}_p)}{\chi(\mathrm{aj}^{2,r}_p)} \cdot \# H^4_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Z}(r))\{p\} \cdot \prod_{v \in S'} \frac{e^{2,1,r}_v \cdot e^{3,0,r}_v \cdot e^{3,2,r}_v}{e^{2,0,r}_v \cdot e^{2,2,r}_v \cdot e^{3,1,r}_v} \qquad (r \geqq 3)$$

が成り立つ. ただし, 核と余核が位数有限であるようなアーベル群の準同型 $f : M \to N$ に対し, $\chi(f) := \#\mathrm{Coker}(f)/\#\mathrm{Ker}(f)$ とおいた. また各素点 $v \in S'$ と $a = 2, 3$ に対し,

$$e^{a,i,r}_v := \# H^a(B^{\mathrm{h}}_v, \mathfrak{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)))$$

とおいた ($e^{a,i,r}_v$ の有限性は (4.3) の $a = 2, 3$ の場合の消滅による).

補足 4.8 (1) $\alpha^{i,r}$ $(r \geqq 2)$ の核と余核の有限性は Bloch-Kato[BK] Proposition 5.14 による. $\mathrm{Ker}(\alpha^{i,r})$ はモチーフ $H^i(X_K)(r)$ の p-Tate-Shafarevich 群とよばれ, $Ш^{(p)}(H^i(X_K)(r))$ などと表される. $\mathrm{Coker}(\alpha^{i,r})$ は $H^{2-i}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2-r))^{G_K}$ の Pontryagin 双対に標準同型である.

(2) 定理 4.7 の証明では, 定理 4.3 の比較同型と $\mathrm{cl}^{i,r}_p$ の全単射性が鍵となる ([B1], [So], [KS], [MS], [KCT], [Ka], [GL2], [Le], [V1], [V2]; 詳細は [Sa3] Corollary 7.7 参照). $\mathrm{cl}^{i,r}_p$ の全単射性は定理 2.8 の類似である.

5 ゼータ値との比較

スキーム X を §3 の冒頭の通りとし, 代数体 K と底スキーム B を記号 3.4 の通りとする. p を素数とし, この節では常に, $g : X \to B$ は固有的, かつ $d = 2$ とする. 記号 4.1 に加えて次の記号を導入する.

記号 5.1 前節と同様, $V^i(r) := H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r))$, $T^i(r) := H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p(r))$ とおく. 各 $v \in P_f$ に対し, $q_v := \#(\kappa(v))$ とおき, 自然な準同型 $H^1(K_v, T^i(r)) \to H^1(K_v, V^i(r))$ による $H^1_f(K_v, V^i(r))$ の逆像を $H^1_f(K_v, T^i(r)))$ とおく.

次の結果は, 定理 4.7 の等式の右辺に現れた局所項の交代積とファイバーのゼータ値を関係づけるものである ([Sa3] Theorems 8.4, 8.5 参照).

定理 5.2 $r \geqq 2$, $v \in P_f$ とする. $|\ |_p$ を $\mathbb{Q}$ 上の p 進絶対値 ($|p|_p = p^{-1}$) とする.

(1) $v \nmid p$ ならば, $e^{2,2,r}_v = e^{3,2,r}_v = 1$ であり, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{e^{2,1,r}_v \cdot e^{3,0,r}_v \cdot e^{3,2,r}_v}{e^{2,0,r}_v \cdot e^{2,2,r}_v \cdot e^{3,1,r}_v} = \frac{\# H^1_f(K_v, T^1(r))}{\left|\zeta(Y_v, r)(1 - q_v^{1-r})(1 - q_v^{-r})\right|_p^{-1}}$$

(2) $v|p$ かつ $p \geqq r+2$ とし, $K_v/\mathbb{Q}_p$ は不分岐, かつ X は v で良い還元をもつと仮定する. このとき, $e_v^{2,2,r} = e_v^{3,2,r} = 1$ であり, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{e_v^{2,1,r} \cdot e_v^{3,0,r} \cdot e_v^{3,2,r}}{e_v^{2,0,r} \cdot e_v^{2,2,r} \cdot e_v^{3,1,r}} = \frac{\mathsf{m}_v^1(H_f^1(K_v, T^1(r)))}{\left|\zeta(Y_v, r)(1-q_v^{1-r})(1-q_v^{-r})\right|_p^{-1}} \tag{5.1}$$

ただし, 右辺の m_v^i は $H_f^1(K_v, T^i(r))$ 上の Haar 測度で, $\mathsf{m}_v^i(H_{\mathrm{dR}}^i(X_v/\mathbb{Z}_p)) = 1$ をみたす $H_{\mathrm{dR}}^i(X_{K_v}/\mathbb{Q}_p)$ 上の Haar 測度 m_v^i を指数同型

$$H_{\mathrm{dR}}^i(X_{K_v}/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\simeq} H_f^1(K_v, V^i(r))$$

によって $H_f^1(K_v, V^i(r))$ 上の Haar 測度とみなし, さらに $H_f^1(K_v, T^i(r))$ 上に引き戻したものである.

定理 5.2 の一つのポイントは, (4.3) の $a=1$ の場合の同型の精密化

$$H^1(B_v^{\mathrm{h}}, \mathfrak{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))) \cong H_f^1(K_v, T^i(r)) \qquad (i = 0, 1, 2)$$

がこの節の冒頭の仮定の下で一般に成り立っていることである ([Sa3] Lemma 8.1 参照). もう一つのポイントは, 定理 5.2 (1), (2) のそれぞれの仮定の下で, 等式

$$\left|\zeta(Y_v, r)\right|_p^{-1} = \prod_{a=1}^{3} \prod_{i=0}^{2} (e_v^{a,i,r})^{(-1)^{a+i}} \tag{5.2}$$

が成り立つことである ([Sa3] Lemmas 8.3, 8.6 参照). ただし,

$$e_v^{1,i,r} := \begin{cases} \#H^1(B_v^{\mathrm{h}}, \mathfrak{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))) & (v \nmid p \text{ のとき}) \\ \mathsf{m}_v^i(H^1(B_v^{\mathrm{h}}, \mathfrak{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)))) & (v|p \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5.3}$$

とおいた. $v \nmid p$ の場合, (5.2) は定理 2.3 (2) と固有底変換定理 $H^i(X_v, \mathbb{Z}_p(r)) \cong H^i(Y_v, \mathbb{Z}_p(r))$ から導かれる. 一方, $v|p$ の場合は主に, 定理 2.5 と Bloch-Esnault-Kerz ([BEK] Theorem 5.4), Kurihara ([Ku] p. 275 Theorem), Bloch-Kato ([BK] Theorem 4.2) などから導かれる.

以下では, ここまでの主結果 (定理 4.3, 4.7, 5.2) を $\zeta(X, s)$ の特殊値の計算に当てはめることを考える (以下の命題 5.6, 定理 5.6 参照). そのためにまず, L 関数の特殊値

$$L_{S'}(H^i(X_K), r) := \prod_{v \in P_f \smallsetminus S'} \det(1 - q_v^{-r} \cdot \mathrm{Fr}_v \,|\, V^i)^{-1} \qquad (S' \text{ は定理 4.7 と同じもの})$$

に関する玉河数予想 ([BK] §5) の弱い形を述べておく. 整数環 $\mathbb{Z}$ の素イデアル (p) での局所化を $\mathbb{Z}_{(p)}$ と表す. また, $Z \in \{X, X_K\}$ に対し, $H_{\mathscr{M}}^*(Z, \mathbb{Q}(r)) := H_{\mathscr{M}}^*(Z, \mathbb{Z}(r)) \otimes \mathbb{Q}$ とおく.

予想 5.3 (弱い p 玉河数予想) $i = 0, 1, 2$, $r \geqq 2$ とし, $(i, r) \neq (2, 2)$ とするとき, $\mathbb{Q}$ 線型空間

$$H_{\mathscr{M}}^{i+1}(X_K, \mathbb{Q}(r))_{\mathbb{Z}} := \mathrm{Im}\big(H_{\mathscr{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(r)) \to H_{\mathscr{M}}^{i+1}(X_K, \mathbb{Q}(r))\big)$$

の有限次元 $\mathbb{Q}$ 部分空間 $\Phi^{i,r} = \Phi_p^{i,r}$ で, 次の (i), (ii) をみたすものが存在する.

(i) p 進 Abel-Jacobi 写像および Beilinson の規準写像

$$H_{\mathscr{M}}^{i+1}(X_K, \mathbb{Q}(r)) \longrightarrow H^1(K, V^i(r)), \qquad H_{\mathscr{M}}^{i+1}(X_K, \mathbb{Q}(r)) \longrightarrow H_{\mathscr{D}}^{i+1}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(r))$$

によって, 同型 $\Phi^{i,r} \otimes \mathbb{Q}_p \cong H_f^1(K, V^i(r))$, $\Phi^{i,r} \otimes \mathbb{R} \cong H_{\mathscr{D}}^{i+1}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(r))$ が成り立つ. (実 Deligne コホモロジー $H_{\mathscr{D}}^*(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(r))$ の定義については, 以下の補足 5.4 を見よ.)

(ii) 自然な写像 $H^1_f(K, T^i(r)) \to H^1_f(K, V^i(r)) \cong \Phi^{i,r} \otimes \mathbb{Q}_p$ による $\Phi^{i,r}$ の逆像を $A^{i,r}_p(K)$ とし (これは有限生成 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 加群), $H^i_{\mathrm{dR}}(X_K/\mathbb{Q})$ の O_K 格子 $L^i = H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{Z})/H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ に関する

$$H^{i+1}_{\mathscr{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_{(p)}(r))/(A^{i,r}_p(K) \text{ の像})$$

の体積を $R^{i,r}_\Phi \in \mathbb{R}^\times/\mathbb{Z}^\times_{(p)}$ とおく．このとき次の等式が成り立つ．

$$L_{S'}(H^i(X_K), r) \equiv \chi(\alpha^{i,r})^{-1} \cdot R^{i,r}_\Phi \cdot \prod_{v \in S'} e^{1,i,r}_v \mod \mathbb{Z}^\times_{(p)}$$

ここで, 右辺の $\alpha^{i,r}$ は (4.5) の写像を, $e^{1,i,r}_v$ は (5.3) で定義した数を表す．

補足 5.4 $X' := X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ とおき, $X'(\mathbb{C})$ から定まる複素多様体を $X'(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}$ と表す．$\mathbb{R}$ の部分環 A と整数 $r \geqq 0$ に対し, 実 Deligne コホモロジー $H^*_{\mathscr{D}}(X_{/\mathbb{R}}, A(r))$ は $X'(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}$ 上の $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 層のコチェイン複体

$$A(r)_{\mathscr{D}} : (2\pi i)^r A \longrightarrow \mathscr{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{r-1}$$

($(2\pi i)^r A$ が次数 0 にある) を用いて $H^*_{\mathscr{D}}(X_{/\mathbb{R}}, A(r)) := H^*(X'(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, A(r)_{\mathscr{D}})^+$ と定義される．ただし, $^+$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の作用による不変部分を表す．$r \geqq 2 (= \dim(X))$ なら

$$H^{i+1}_{\mathscr{D}}(X_{/\mathbb{R}}, A(r)) \cong \left(\frac{H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}}{H^i_{\mathrm{sing}}(X'(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, (2\pi i)^r A)} \right)^+$$

である．ここで右辺の剰余群は, 補足 1.7 と同様の同型 $H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \cong H^i_{\mathrm{sing}}(X'(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$ を用いて分母を分子の部分群とみなすことで定義される．

次の命題は, 定理 4.3, 4.7, 5.2 と p 玉河数予想を単純に合わせたものである．

命題 5.5 ([Sa3] Proposition 9.3) 次の三条件を仮定する．

(i) $p - 2 \geqq r \geqq 2$.

(ii) p 上の任意の素点 $v \in P_f$ について, v は絶対不分岐かつ X は v で良い還元をもつ．

(iii) $r = 2$ (resp. $r \geqq 3$) ならば, 予想 5.3 が $i = 0, 1$ (resp. $i = 0, 1, 2$) に対して成り立つ．

このとき, $H^3_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Z}(r))\{p\}$ は位数有限であり, 次の等式が成り立つ．

$$\operatorname*{Res}_{s=2} \zeta(X, s) \equiv \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_K(s) \cdot \frac{\chi(\mathrm{aj}^{3,2}_p) \cdot \# \mathrm{CH}_0(X) \cdot R^{0,2}_\Phi}{\chi(\mathrm{aj}^{2,2}_p) \cdot \# C\ell(K) \cdot R^{1,2}_\Phi} \mod \mathbb{Z}^\times_{(p)} \qquad (r = 2)$$

$$\zeta(X, r) \equiv \frac{\chi(\mathrm{aj}^{3,r}_p) \cdot \# H^4_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Z}(r))\{p\} \cdot R^{0,r}_\Phi \cdot R^{2,r}_\Phi}{\chi(\mathrm{aj}^{2,r}_p) \cdot R^{1,r}_\Phi} \mod \mathbb{Z}^\times_{(p)} \qquad (r \geqq 3)$$

命題 5.5 の等式からエタールコホモロジーを消去したのが次の定理 5.6 である (系 1.6 も使っている)．予想 5.3 と定理の条件 (iv) の前半を合わせたものが (弱くない) p 玉河数予想であり, 条件 (iv) の後半はモチビックコホモロジーに対する Bass 予想 [Ba] の類似である．

定理 5.6 ([Sa3] Theorem 9.6) 命題 5.5 と同じ仮定の下で, さらに次を仮定する．

(iv) $i = 0, 1, 2$ に対し, $\mathit{\Phi}^{i,r}_p = H^{i+1}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(r))_{\mathbb{Z}}$, かつ $H^{i+1}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Z}(r))$ は $\mathbb{Z}$ 上有限生成である．

$T = T(r, K, X)$ を次の条件 (a), (b), (c) のいずれかをみたす素数 p 全体のなす有限集合とする．(a) $p \leqq r+1$; (b) p は $K/\mathbb{Q}$ で分岐する; (c) ある素点 $v \in P_f$, $v|p$ で X は良い還元をもたない．このとき,

$$\zeta^*(X, r) \equiv \prod_{i=0}^{3} \left(\frac{R_{\mathscr{M}}^{i,r}}{\#\mathrm{Ker}\big(\mathrm{reg}_{\mathscr{D}}^{i+1,r}\big)} \right)^{(-1)^i} \mod \mathbb{Z}[T^{-1}]^\times$$

が成り立つ．ここで, $\zeta^*(X, 2) := \operatorname*{Res}_{s=2} \zeta(X, s)$, $r \geqq 3$ のとき $\zeta^*(X, r) := \zeta(X, r)$ である．$\mathrm{reg}_{\mathscr{D}}^{i+1,r}$ は実 Deligne コホモロジーに値をもつ規準写像 (サイクル写像)

$$\mathrm{reg}_{\mathscr{D}}^{i+1,r} : H_{\mathscr{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Z}(r)) \longrightarrow H_{\mathscr{D}}^{i+1}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(r))$$

を表し, $R_{\mathscr{M}}^{i,r}$ は $R_{\Phi}^{i,r}$ を定義する際に用いた $H_{\mathrm{dR}}^i(X_K/K)$ の格子 L^i に関する $\mathrm{Coker}(\mathrm{reg}_{\mathscr{D}}^{i+1,r})$ の体積を表す (ただし, $(i, r) = (2, 2)$ の場合に限っては, 写像 (1.3) と同様, $H_{\mathscr{D}}^3(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(2))$ をトレース写像 $H_{\mathscr{D}}^3(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(2)) \to \mathbb{R}$ の核にとり換えてから余核の体積 $R_{\mathscr{M}}^{2,2}$ を考える).

例 5.7 虚二次体 K の整数環 O_K に虚数乗法をもつ $\mathrm{Spec}(K)$ 上の楕円曲線 E を考える．K の判別式と 1 のべき根の個数をそれぞれ D, w と表す．$\mathrm{Spec}(O_K)$ 上固有的かつ平坦な E の正則モデル X をとる．p を $6D$ と互いに素な素数とし, X は p 上の各素点で良い還元をもつと仮定する．このとき, 命題 5.5, 系 4.5 と Kings ([Ki] Theorem 1.1.5) および Huber-Kings ([HK] Theorem 1.3.1) により,

$$\operatorname*{Res}_{s=2} \zeta(X, s) \equiv \frac{2\pi \cdot \chi(\mathrm{aj}_p^{3,2}) \cdot \#\mathrm{CH}_0(X) \cdot R_{\Phi}^{0,2}}{w\sqrt{-D} \cdot \chi(\mathrm{aj}_p^{2,2}) \cdot R_{\Phi}^{1,2}} \mod \mathbb{Z}_{(p)}^\times$$

が成り立つ．ここまでは何の予想も仮定していないが, $i = 0, 1, 2$ に対し, $H_{\mathscr{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Z}(2))$ が $\mathbb{Z}$ 上有限生成であることを仮定すれば, 定理 4.3 と $\mathrm{cl}_p^{i+1,2}$ の全単射性 (補足 4.8 (2) 参照) から $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, H_{\mathscr{M}}^1(X, \mathbb{Z}(2)) = 1$, $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, H_{\mathscr{M}}^2(X, \mathbb{Z}(2)) = 2$, $\#H_{\mathscr{M}}^3(X, \mathbb{Z}(2)) < \infty$ となり, 定理 5.6 から

$$\operatorname*{Res}_{s=2} \zeta(X, s) \equiv \frac{2\pi \cdot R_{\mathscr{M}}^{0,2} \cdot \#\mathrm{Ker}(\mathrm{reg}_{\mathscr{D}}^{2,2}) \cdot \#\mathrm{CH}_0(X)}{\sqrt{-D} \cdot \#\mathrm{Ker}(\mathrm{reg}_{\mathscr{D}}^{1,2}) \cdot R_{\mathscr{M}}^{1,2} \cdot \#H_{\mathscr{M}}^3(X, \mathbb{Z}(2))} \mod \mathbb{Z}[T^{-1}]^\times$$

が成り立つ．ただし, $T = T(2, K, X)$ は定理 5.6 で定めた集合である．

補足 5.8 [FM] Conjectures 5.11, 5.12 では, Weil エタール位相でのモチビックコホモロジーなどを用いて, $s \to r$ ($r \in \mathbb{Z}$) での $\zeta(X, s)$ の様子を解析接続を認めて定式化している．定理 5.6 と [FM] Theorem 5.27 の違いは主に次の 4 点である．

(1) 扱っているスキームの次元と r の範囲は定理 5.6 の方が限られている．

(2) 仮定している予想の内容は定理 5.6 の方が少ない．例えば, [FM] Conjecture 5.26 および (80) では $2r - i \geqq 2$ の場合に $V^i(r) = H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r))$ の Kummer 双対 $V^{2(d-1)-i}(d-r)$ の Selmer 群の消滅 ([FM] Conjecture 5.25) を仮定するが, 本稿では $r \geqq d := \dim(X)$ の場合に $V^*(d-r)$ の Selmer 群の消滅が (4.4) によって定理になっている．

(3) 還元に関する仮定は定理 5.6 の方が弱い．

(4) 分岐に関する仮定は定理 5.6 の方が強いが, これは [FM] Definition 5.6 の補正因子 $c_p(X, r)$ を定理 5.6 でブラックボックスにしていないためである．ちなみに定理 5.2 (2) の状況では, 等式 (5.1) の左辺と右辺の比が $c_p(X, r)$ に相当する．

命題 5.5 の条件 (i), (ii) は定理 5.2 (2) の仮定に起因するもので, (5.1) の左辺と右辺の比をより一般の状況で計算することが今後の課題の一つである.

A　Haar 測度の計算

ここでは命題 1.5 の証明を与える. 記号および設定は §1 の通りとし, さらに次の記号を導入する.

$$U^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \qquad H := \left\{(b_\tau)_\tau \in \left(\prod_{\tau\in T}\mathbb{R}\right)^+ \,\middle|\, \sum_{\tau\in T} b_\tau = 0\right\}$$

古典的な規準写像によく似た次の写像も用意しておく (規準写像については補題 A.1 の証明を参照).

$$\mathrm{reg}'_{\mathrm{D}} : O_K^\times \longrightarrow H, \qquad a \mapsto (\ln|\tau(a)|)_\tau$$

Deligne コホモロジー $H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ からの全射準同型

$$p : H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1)) \overset{(1.1)}{\cong} \left(\prod_{\tau\in T}\mathbb{C}^\times\right)^+ \longrightarrow \left(\prod_{\tau\in T}\mathbb{R}\right)^+, \qquad (z_\tau)_\tau \longmapsto (\ln|z_\tau|)_\tau$$

は全射準同型 $q : \widetilde{H}^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1)) \twoheadrightarrow H$ をひき起こし, その核は $\left(\prod_{\tau\in T}U^1\right)^+$ に等しい. また, 命題 1.5 で考えている規準写像 $\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}}$ と q の合成は, $\mathrm{reg}'_{\mathrm{D}}$ に等しい. したがって,

$$0 \longrightarrow \frac{\left(\prod_{\tau\in T}U^1\right)^+}{\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}}(\mu_K)} \longrightarrow \mathrm{Coker}(\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}}) \xrightarrow{\bar{q}} \frac{H}{\mathrm{reg}'_{\mathrm{D}}(O_K^\times)} \longrightarrow 0 \tag{A.1}$$

という短完全系列が得られる. ここで, μ_K は K に含まれる 1 のべき根全体のなす群を表す.

さて, $\mathsf{m}_2(\mathrm{Coker}(\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}}))$ (m_2 は m_1 の商測度) を計算するために, $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \left(\prod_{\tau\in T}\mathbb{C}\right)^+$ の完全格子

$$L := \prod_{v\in P_{\mathrm{real}}}\mathbb{Z} \times \prod_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$$

を補助的にとる. ここで, P_{real} は K の実素点全体の集合を, P_{cpx} は複素素点全体の集合を表し, 集合 T に全順序 $\leqq$ を一つ固定した上で, 各 $v \in P_{\mathrm{cpx}}$ に対し v 成分 $b_v \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ を τ 成分と $c\tau$ 成分の組 $(b_v, \overline{b_v})$ ($\tau \in T$ は複素素点 v を与える体の埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ のうち, $\tau \leqq c\tau$ をみたす方) に対応させることで, 上記の右辺の群を $\left(\prod_{\tau\in T}\mathbb{C}^\times\right)^+$ の部分群とみなした. 完全格子 L から構成した $H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ 上の Haar 測度, $\widetilde{H}^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}}, \mathbb{Z}(1))$ 上の Haar 測度, $\mathrm{Coker}(\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}})$ 上の Haar 測度をそれぞれ, n_0, n_1, n_2 とする (n_1 を構成する際の $\mathbb{R}$ 上の Haar 測度は Lebesgue 測度 λ_1 を用いる). 格子 $L \subset K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の基本領域を F とし, 一方, 完全格子 O_K に関する $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 上の Haar 測度を m とする. $\mathsf{m}_2(\mathrm{Coker}(\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}})) = \mathsf{n}_2(\mathrm{Coker}(\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}}))\cdot\mathsf{m}(F)$ であるから, 命題 1.5 を証明するには,

$$\mathsf{n}_2(\mathrm{Coker}(\widetilde{\mathrm{reg}}^{1,1}_{\mathscr{D}})) = \frac{2^{r_1}\pi^{r_2}R}{w}, \qquad \mathsf{m}(F) = \frac{2^{r_2}}{\sqrt{|D|}} \tag{A.2}$$

の二つを示せばよい. 第一の等式は完全系列 (A.1) と次の補題 A.1 の帰結である.

補題 A.1 $\left(\prod_{\tau\in T}\mathbb{R}\right)^+$ の完全格子

$$L' = \prod_{v\in P_{\mathrm{real}}}\mathbb{Z}\times\prod_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}\mathbb{Z}$$

と $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度 λ_1 から構成される $H/\mathrm{reg}'_{\mathrm{D}}(O_K^\times)$ 上の Haar 測度を n_3 とするとき, $\mathsf{n}_3(H/\mathrm{reg}'_{\mathrm{D}}(O_K^\times)) = R/2^{r_2}$ である.

証明の概略. L' の標準的な $\mathbb{Z}$ 基底に関する $\left(\prod_{\tau\in T}\mathbb{R}\right)^+$ の座標 $\left((x_v)_{v\in P_{\mathrm{real}}},(x_v)_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}\right)$ を用いると, H と $\mathrm{reg}'_{\mathrm{D}}(O_K^\times)$ はそれぞれ,

$$H = \left\{\sum_{v\in P_{\mathrm{real}}}x_v + \sum_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}2x_v = 0\right\}\subset\left(\prod_{\tau\in T}\mathbb{R}\right)^+$$

$$\mathrm{reg}'_{\mathrm{D}}(O_K^\times) = \left\{\left(\left(\ln|a|_v\right)_{v\in P_{\mathrm{real}}},\left(\frac{\ln|a|_v}{2}\right)_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}\right)\,\middle|\, a\in O_K^\times\right\}\subset H$$

と表される ($|\ |_v$ は正規化された付値を表す). 一方, 単数規準 R は, $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ の超平面

$$H' = \left\{\sum_{v\in P_{\mathrm{real}}}t_v + \sum_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}t_v = 0\right\}\subset\mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

に値をもつ関数 (古典的な規準写像)

$$\mathrm{reg}_{\mathrm{D}} : O_K^\times \longrightarrow H',\qquad a\mapsto\left((\ln|a|_v)_{v\in P_{\mathrm{real}}},(\ln|a|_v)_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}\right)$$

を用いて定義される. 補題の主張はこれらを比較することで示される. □

補足 A.2 格子 L の標準的な $\mathbb{Z}$ 基底に関する $K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ の座標 $\left((x_v)_{v\in P_{\mathrm{real}}},(x_v,y_v)_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}\right)$ と補題 A.1 の証明で用いた $\left(\prod_{\tau\in T}\mathbb{R}\right)^+$ の座標 $\left((x_v)_{v\in P_{\mathrm{real}}},(x_v)_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}\right)$ を用いると, 合成写像

$$F : K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\longrightarrow H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}(K)_{/\mathbb{R}},\mathbb{Z}(1))\xrightarrow{p}\left(\prod_{\tau\in T}\mathbb{R}\right)^+$$

は自然な射影 $\left((x_v)_{v\in P_{\mathrm{real}}},(x_v,y_v)_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}\right)\mapsto\left((x_v)_{v\in P_{\mathrm{real}}},(x_v)_{v\in P_{\mathrm{cpx}}}\right)$ である.

次に, (A.2) の第二の等式を示す. K の整基底 $\langle\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\rangle$ ($n := [K:\mathbb{Q}]$) を一つとり, $\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{r_1}\}\subset T$ を P_{real} の完全代表系, $\{\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_{r_2}\}\subset T$ を P_{cpx} の完全代表系とする. 行列 A,B,C を

$$A := (\sigma_i(\omega_j))_{\substack{1\leqq i\leqq r_1\\1\leqq j\leqq n}},\qquad B := (\theta_i(\omega_j))_{\substack{1\leqq i\leqq r_2\\1\leqq j\leqq n}},\qquad C := \begin{pmatrix}A\\ \mathrm{Re}\,B\\ \mathrm{Im}\,B\end{pmatrix}$$

と定める ($\mathrm{Re}\,B$, $\mathrm{Im}\,B$ はそれぞれ B の実部と虚部を表す). C は n 次実正則行列であり, $\mathsf{m}(F) = |\det C|^{-1}$ である. 一方, 判別式 D の定義と行列式の性質から

$$D = \left(\det\begin{pmatrix}A\\B\\\overline{B}\end{pmatrix}\right)^2 = (-4)^{r_2}(\det C)^2$$

である. したがって, $\mathsf{m}(F) = 2^{r_2}/\sqrt{|D|}$ となり, 以上で命題 1.5 が証明された.

参考文献

[ア] L. アールフォルス (笠原乾吉訳) 「複素解析」 現代数学社 1982 年

[Ba] Bass, H.: Some problems in "classical" algebraic K-Theory. In: Bass, H. (ed.) *"Classical" Algebraic K-theory and Connection with Arithmetic*, (Lecture Notes in Math. 342), pp. 3–73, Berlin, Springer, 1973

[BN] Bayer, P., Neukirch, J.: On values of zeta functions and l-adic Euler characteristics. Invent. Math. **50**, 35–64 (1978)

[B1] Bloch, S.: Algebraic K-theory and classfield theory for arithmetic surfaces. Ann. of Math. (2) **114**, 229–265 (1981)

[B2] Bloch, S.: Algebraic cycles and higher K-theory. Adv. Math. **61**, 267–304 (1986)

[BEK] Bloch, S., Esnault, H., Kerz, M.: p-adic deformation of algebraic cycle classes. Invent. Math. **195**, 673–722 (2014)

[BK] Bloch, S., Kato, K.: L-functions and Tamagawa numbers of motives. In: Cartier, P., Illusie, L., Katz, N. M. et al. (eds.) *The Grothendieck Festschrift I*, (Progr. Math. 86), pp. 333–400, Boston, Birkhäuser, 1990

[CT] Colliot-Thélène, J.-L.: On the reciprocity sequence in the higher class field theory of function fields. In: Goerss, P. G., Jardine, J. F. (eds.) *Algebraic K -theory and algebraic topology, Lake Louise, 1991*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 407, pp. 35–55, Kluwer, Dordrecht, 1993

[De1] Deligne, P.: La conjecture de Weil. I. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **43**, 273–308 (1973)

[De2] Deligne, P.: La conjecture de Weil. II. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **52**, 137–252 (1980)

[Dw] Dwork, B.: On the rationality of the zeta function of an algebraic variety. Amer. J. Math. **82**, 631–648 (1960)

[Fl] Flach, M.: Selmer groups for the symmetric squares of an elliptic curve. Thesis, Cambridge University, 1990

[FM] Flach, M., Morin, B.: Weil-étale cohomology and zeta-values of proper arithmetic schemes. Doc. Math. **23**, 1425–1560 (2018)

[FG] Fujiwara, K.: A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber). In: Usui, S., Green, M., Illusie, L., Kato, K., Looijenga, E., Mukai, S., Saito, S. (eds.) *Algebraic Geometry, Azumino, 2001*, (Adv. Stud. in Pure Math. 36), pp. 153–184, Tokyo, Math. Soc. Japan, 2002

[Ga] Gabber, O.: Sur la torsion dans la cohomologie l-adique d'une variété. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **297**, 179–182 (1983)

[Ge] Geisser, T.: Weil-étale cohomology over finite fields. Math. Ann. **330**, 665–692 (2004)

[GL1] Geisser, T., Levine, M.: The K-theory of fields in characteristic p. Invent. Math. **139**, 459–493 (2000)

[GL2] Geisser, T., Levine, M.: The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky. J. Reine Angew. Math. **530**, 55–103 (2001)

[G] Grothendieck, A.: Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L. Séminaire Bourbaki 1964/65 exp. n° 279, pp. 41–55

[GAV] Grothendieck, A., Artin, M., Verdier, J.-L., with Deligne, P., Saint-Donat, B.: *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas* (SGA4). Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Berlin, Springer, 1972–73

[HK] Huber, A., Kings, G.: Bloch-Kato conjecture and main conjecture of Iwasawa theory for Dirichlet characters. Duke Math. J. **119**, 393–464 (2003)

[Ill] Illusie, L.: Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12**, 501–661 (1979)

[J1] Jannsen, U.: On the l-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology. In: Ihara, Y., Ribet, K. A., Serre, J.-P. (eds.) *Galois Groups over* $\mathbb{Q}$, pp. 314–360, Berlin, Springer, 1989

[J2] Jannsen, U.: Hasse principles for higher-dimensional fields. Ann. of Math. (2) 183, 1–71 (2016)

[JSS] Jannsen, U., Saito, S., Sato, K.: Étale duality for constructible sheaves on arithmetic schemes. J. Reine Angew. Math. **688**, 1–66 (2014)

[dJ] de Jong, A. J.: Smoothness, semi-stability, and alterations. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **83**, 51–93 (1996)

[Ka] Kahn, B.: On the Lichtenbaum-Quillen conjecture. In: Goerss, P. G., Jardine, J. (eds.) *Algebraic K-theory and algebraic topology, Lake Louise, 1991*, (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 407), pp. 147–166, Dordrecht, Kluwer, 1993

[K] Kato, K.: Logarithmic structures of Fontaine-Illusie. In: Igusa, J. (ed.) *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, pp. 191–224, Baltimore, The Johns Hopkins Univ. Press, 1988

[KCT] Kato, K.: A Hasse principle for two-dimensional global fields. (with an appendix by Colliot-Thélène, J.-L.), J. Reine Angew. Math. **366**, 142–183 (1986)

[KS] Kato, K., Saito, S.: Unramified class field theory of arithmetic surfaces. Ann. of Math. (2) **118**, 241–275 (1983)

[KeS] Kerz, M., Saito, S.: Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **115**, 123–183 (2012)

[Ki] Kings, G.: The Tamagawa number conjecture for CM elliptic curves. Invent. Math. **143**, 571–627 (2001)

[Ku] Kurihara, M.: A note on p-adic étale cohomology. Proc. Japan Acad. Ser. A **63**, 275–278 (1987)

[Le] Levine, M.: Techniques of localization in the theory of algebraic cycles. J. Algebraic Geom. **10**, 299–363 (2001)

[Li1] Lichtenbaum, S.: The Weil-étale topology on schemes over finite fields. Compositio Math. **141**, 689–702 (2005)

[Li2] Lichtenbaum, S.: The Weil-étale topology for number rings. Ann. of Math. (2) **170**, 657–683 (2009)

[Ma] Mazur, B.: Notes on étale cohomology of number fields. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **6**, 521–552 (1973)

[MS] Merkur'ev, A. S., Suslin, A. A.: K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. Math. USSR Izv. **21**, 307–341 (1983)

[Mi] Milne, J. S.: Values of zeta functions of varieties over finite fields. Amer. J. Math. **108**, 297–360 (1986)

[ノ] J. ノイキルヒ (梅垣敦紀訳) 「代数的整数論」 丸善出版 2012 年

[齋佐] 齋藤秀司, 佐藤周友「代数的サイクルとエタールコホモロジー」(シュプリンガー現代数学シリーズ 17) 丸善出版 2012 年

[SS] Saito, S., Sato, K.: On p-adic vanishing cycles of log smooth families. Tunisian J. Math. **2**, 309–335 (2020)

[Sa1] Sato, K.: Logarithmic Hodge-Witt sheaves on normal crossing varieties. Math. Z. **257**, 707–743 (2007)

[Sa2] Sato, K.: Cycle classes for p-adic étale Tate twists and the image of p-adic regulators. Doc. Math. **18**, 177–247 (2013)

[Sa3] Sato, K.: Étale cohomology of arithmetic schemes and zeta values of arithmetic surfaces. `arxiv.org/abs/2001.09845`

[SH] Sato, K.: p-adic étale Tate twists and arithmetic duality (with an appendix by Hagihara, K.). Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **40**, 519–588 (2007)

[Sch] Schneider, P.: On the values of the zeta function of a variety over a finite field. Compositio Math. **46**, 133–143 (1982)

[Se1] Serre, J.-P.: Rationalité des fonctions ζ des variétés algébriques (d'après B. Dwork). Séminaire Bourbaki 1959/60 exp. n° 198, pp. 415–425.

[Se2] Serre, J.-P.: Zeta and L-functions. In: Schilling (ed.), *Arithmetic Algebraic Geometry*, pp. 82–92, New York, Harper and Row, 1965

[Se3] Serre, J.-P.: *Cohomologie Galoisienne.* 5^{e} éd., (Lecture Notes in Math. 5), Berlin, Springer, 1992

[So] Soulé, C.: On higher p-adic regulators. In: Friedlander, E. M., Stein, M. R. (eds.) *Algebraic K-Theory, Evanston, 1980*, (Lecture Notes in Math. 854), pp. 372–401, Berlin, Springer, 1981

[T] Tate, J. T.: Algebraic cycles and poles of zeta functions. In: Schilling (ed.), *Arithmetic Algebraic Geometry*, pp. 93–110, New York, Harper and Row, 1965

[V1] Voevodsky, V.: Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$-coefficients. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **98**, 59–104 (2003)

[V2] Voevodsky, V.: On motivic cohomology with $\mathbf{Z}/l$-coefficients. Ann. of Math. (2) **174**, 401–438 (2011)

[W] Weil, A.: Numbers of solutions of equations in finite fields. Bull. Amer. Math. Soc. **55**: 497–508 (1949)

[雪] 雪江明彦 「整数論 3 解析的整数論への誘い」 日本評論社 2014 年