

ルート系から定まるトーリック多様体の コホモロジー環とヤング図

阿部 拓

大阪市立大学 数学研究所

1 導入

まずはルート系が A_{n-1} 型の場合の例を用いて、どのような問題を扱うかを説明する。複素ベクトル空間 \mathbb{C}^n の旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ とは \mathbb{C}^n の線形部分空間の列の成す空間である。

$$Fl(\mathbb{C}^n) = \{V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の線形部分空間で } \dim_{\mathbb{C}} V_i = i\}$$

$SL_n(\mathbb{C})$ を n 次の特殊線形群とし、 $T \subset SL_n(\mathbb{C})$ を対角成分のみからなる部分群とする。このとき、 $SL_n(\mathbb{C})$ は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ に自然に作用し、トーラス T はその制限として作用する。このトーラス作用の一般軌道の閉包はトーリック多様体であることが知られている。以下、このトーリック多様体を X と書く。

旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ は n 次置換群 \mathfrak{S}_n の元 w ごとにシューベルト胞体 C_w と呼ばれる胞体を持ち、 X との共通部分 $X \cap C_w$ を考えるとこれらは X の胞体分割を与える。今、 $X \cap C_w$ の X における閉包を X_w と書くとき、 X_w のポアンカレ双対 $[X_w]$ は X の特異コホモロジーの基底を成す： $H^*(X; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{Z}[X_w]$ 。そこで、カップ積の展開

$$[X_u][X_v] = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} c_{uv}^w [X_w]$$

において展開係数 $c_{uv}^w \in \mathbb{Z}$ が現れるが、この数 c_{uv}^w はどのように記述される数だろうか。それについて考えたい。この問題を念頭に置いたうえで、この予稿ではコホモロジー環 $H^*(X; \mathbb{Z})$ とヤング図の関係について説明する。特に、各 $[X_w]$ をヤング図で表す方法や、構造定数 c_{uv}^w と同値な量である交叉数をこれらのヤング図で計算する方法について述べる。

ここでは、理由はさておきどのようなヤング図を考えるかだけ述べておく。雰囲気だけでも伝わればと思う。置換 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し、 $w(i) > w(i+1)$ を満たす $i \in [n]$ に注目し、その情報をもとにヤング図を作る。そしてそのような $w(i)$ の情報が失われないようにヤング図の上に $w(i)$ 達を並べる。例えば

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ ならば、} [X_w] \text{ は } \begin{array}{ccccc} & 4 & 1 & 5 & 3 \\ \square & & & & \\ \square & & & & \\ \square & & & & \\ \square & & & & \end{array} \text{ で表される}$$

という具合である（詳しい構成法は 5 節で説明する）。

2 トーリック多様体

トーリック多様体とは、正規¹代数多様体であり代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ をそのザリスキー開集合にもち、 $(\mathbb{C}^\times)^n$ の群構造を拡張するような $(\mathbb{C}^\times)^n$ -作用を持つ空間のことである。トーリック多様体が興味を持たれている主な理由は、その幾何やトポロジーを扇と呼ばれる組み合わせ論的な対象を用いて記述することができるという点である。

トーリック多様体は扇を用いて構成できるが、ここではまず扇とはどのような対象であるか、また、扇の性質とトーリック多様体の幾何的性質がどのように結びついているかを概観する。

\mathbb{R}^n における扇 σ が**有理強凸多面錐**であるとは、錐としての生成元を \mathbb{Z}^n の有限個の元から選ぶことができ（有理性）、かつ $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ （強凸性）が満たされるときをいう。 \mathbb{R}^n における有理強凸多面錐のなす有限集合 Δ で次の条件を満たすものを**扇**という。

- (1) $\sigma \in \Delta$ のとき、 σ の任意の面は Δ の元
- (2) $\sigma, \tau \in \Delta$ ならばその共通部分 $\sigma \cap \tau$ は σ, τ それぞれの面である。

ここでは詳細は省くが、扇からトーリック多様体を構成することが出来る。特に、扇とトーリック多様体の同型類は 1 対 1 に対応することが知られている。

$$\text{扇} \xleftrightarrow{1:1} \text{トーリック多様体の同型類}$$

\mathbb{R}^2 における扇の例として以下のようなものがある。左側の扇は複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ に対応し、右側の扇はある Hirzebruch 曲面に対応する。

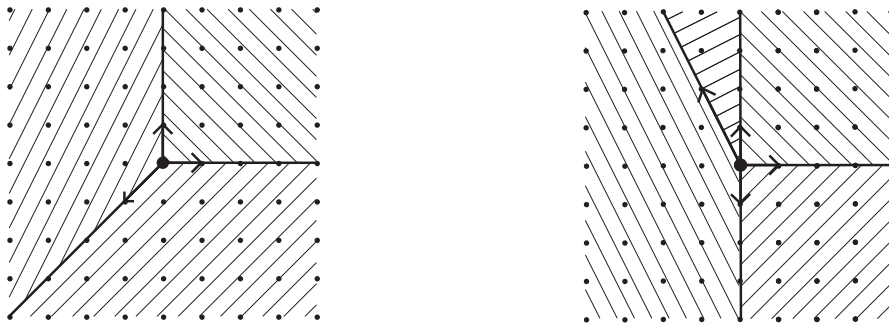


図 1: \mathbb{R}^2 における扇の例

ここで感じ取って頂きたいことは、この対応の下で、トーリック多様体 $X(\Delta)$ の幾何やトポロジーが扇 Δ の言葉で言い換えられるであろうということである。実際、例えば次のような対応がある。

- Δ の錐の集まりが \mathbb{R}^n 全体を覆う $\iff X(\Delta)$ がコンパクト
- Δ の各錐の生成元が \mathbb{Z}^n の \mathbb{Z} 上の基底の一部にとれる $\iff X(\Delta)$ は非特異

¹正規性を仮定しない定義が最も一般的であるが、この予稿では正規性を定義に入れる。

- 扇 Δ の n 次元錐の数 = トーリック多様体 $X(\Delta)$ のオイラー数

ここに幾何やトポロジーと組み合わせ論の調和を見てとることができる。

3 ルート系から定まるトーリック多様体

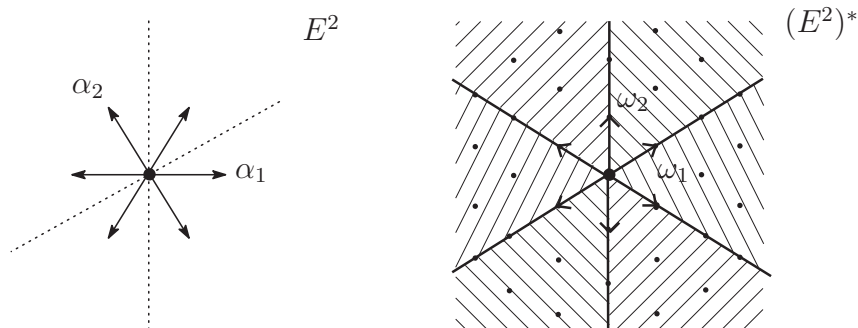
E^n を実 n 次元ユークリッド空間とし, $\Phi \subset E^n$ をルート系, W をそのワイル群とする. Φ からトーリック多様体を構成しよう. $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ を Φ の底 (または単純ルートの集合) とすると, その双対基底 $\Pi^* = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ が双対空間 $(E^n)^*$ の中に決まる. 特に $\omega_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$ であり, ω_i は基本コウェイトと呼ばれる. このとき

$$\begin{aligned} \sigma_0 &:= \{f \in (E^n)^* \mid i = 1, \dots, n \text{ に対し } f(\alpha_i) \geq 0\} \\ &= \{c_1\omega_1 + \dots + c_n\omega_n \in (E^n)^* \mid i = 1, \dots, n \text{ に対し } c_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \end{aligned}$$

とおき, 各 $u \in W$ に対し $\sigma_u := u\sigma_0$ と定める. ただし, Weyl 群 W の $(E^n)^*$ への作用は E^n への作用の双対作用で与える. 各 σ_u は Weyl の部屋と呼ばれる.

各 σ_u は $(E^n)^*$ における錐であり, 全ての $u \in W$ について錐 σ_u とその面 (これもまた錐である) の集まりを考えるとそれは $(E^n)^*$ における扇をなす. ただし, 格子点はコウェイト格子 $N := \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\omega_i (\cong \mathbb{Z}^n)$ によって与える. この得られた扇を $\Delta(\Phi)$ と書くことにする.

例 3.1. ルート系 Φ が A_2 型の場合, 我々の扇 $\Delta(A_2)$ は次のようになる.



さて, 我々はルート系 $\Phi \subset E^n$ からその双対空間 $(E^n)^*$ における扇 $\Delta(\Phi)$ を構成した. この扇に対応するトーリック多様体を $X(\Phi)$ と書くことにする. 標語的に言うと,

「 $X(\Phi)$ は Weyl の部屋とコウェイト格子の成す扇に対応するトーリック多様体」

である. このトーリック多様体 $X(\Phi)$ が実は1節に出てきたトーリック多様体 X そのものなのである. すなわち, $X(\Phi)$ は一般化された旗多様体への標準的なトーラス作用の一般軌道の閉包として記述することもできる. $X(\Phi)$ の一般的な性質については Klyachko [6] や Batyrev-Blume [2] を参照されたい.

扇 $\Delta(\Phi)$ の構成から, ワイル群 W が $\Delta(\Phi)$ に作用し, ゆえに $X(\Phi)$ に W が自然に作用する. これは W が $H^*(X(\Phi); \mathbb{C})$ 上に表現を持つことを意味する. Procesi [8], Dolgachev-Lunts [4], Stembridge [9] らがこの表現を詳しく調べている.

また、例えばルート系 Φ が A_n 型の場合、 $X(A_n)$ は複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ のすべての座標部分空間に沿って次元の低いものから順にブローイングアップを繰り返して得られる空間である ([8]). Losev-Manin [7] や Batyrev-Blume [2] など $X(A_n)$ の幾何について研究している。

扇において特に1次元錐はトーラス作用で不変な複素余次元1の部分多様体と1対1に対応し、トーリック多様体の幾何やトポロジーを記述するうえで重要である。我々の扇 $\Delta(\Phi)$ の場合、1次元錐の生成元全体はコウエイトの成す集合

$$\Phi^* := \cup_{u \in W} \{u\omega_1, \dots, u\omega_n\} \subset (E^n)^*$$

で与えられる。扇 $\Delta(\Phi)$ の性質から、トーリック多様体 $X(\Phi)$ はコンパクトで非特異なトーリック多様体であることが従う。 $\Delta(\Phi)$ の構成からは明らかではないが、実は $X(\Phi)$ は射影多様体である²。

本来、トーリック多様体は扇のデータを用いてアフィントーリック多様体の張り合わせとして定義するのが一般の定義であるが、我々のトーリック多様体 $X(\Phi)$ はコンパクトなので、そのようなトーリック多様体に対して使うことのできる別の記述により $X(\Phi)$ を定義しておく。 \mathbb{C}^{Φ^*} を Φ^* の元ごとに成分を持つ複素ベクトルの全体とする。すなわち、 $\mathbb{C}^{\Phi^*} = \{(z_x)_{x \in \Phi^*} \mid z_x \in \mathbb{C}\}$ である。 \mathbb{C}^{Φ^*} の元 z に対し、成分が0になっている座標の集まりを $\Phi^*(z) = \{x \in \Phi^* \mid z_x = 0\}$ とおき、これを用いて

$$\begin{aligned} U(\Phi) &= \{z \in \mathbb{C}^{\Phi^*} \mid \Phi^*(z) \text{ は扇 } \Delta(\Phi) \text{ において錐を張る}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^{\Phi^*} \mid \Phi^*(z) \subset \{u\omega_1, \dots, u\omega_n\} \text{ となる } u \in W \text{ は存在しない}\} \end{aligned}$$

と定める。このとき、

$$X(\Delta(\Phi)) = U(\Phi) / \ker \nu \tag{1}$$

ただし、

$$\nu: (\mathbb{C}^\times)^{\Phi^*} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^n \quad ; \quad t = (t_x)_{x \in \Phi^*} \mapsto \prod_{x \in \Phi^*} (t_x^{\langle \alpha_1, x \rangle}, \dots, t_x^{\langle \alpha_n, x \rangle})$$

構成から、 n 次元の商トーラス $(\mathbb{C}^\times)^{\Phi^*} / \ker \nu$ (これは準同型 ν により $(\mathbb{C}^\times)^n$ と同型) が $X(\Delta(\Phi))$ に自然に作用し、この作用により $X(\Phi)$ はトーリック多様体となる。

4 トーリック多様体 $X(\Phi)$ のコホモロジー環

Φ をルート系とし、 $X(\Phi)$ を前節で構成したトーリック多様体とする。 $X(\Phi)$ を記述する扇 $\Delta(\Phi)$ の1次元錐の生成元の集合が $\Phi^* = \cup_{u \in W} \{u\omega_1, \dots, u\omega_n\}$ であることは1節ですで見たとした。式(1)において各 $x \in \Phi^*$ ごとに、第 x 番目の座標がゼロという条件で定まる複素余次元1の部分多様体 $D_x \subset X(\Phi)$ が定まる (特性部分多様体と呼ばれる)。 D_x のポアン

²旗多様体の運動量多面体に対応する非特異射影的トーリック多様体であることが知られている。

カレ双対を $\tau_x := [D_x]$ と書くと, $\tau_x \in H^2(X(\Phi); \mathbb{Z})$ である. コンパクトかつ非特異なトーリック多様体の特異コホモロジー環を多項式環の商として記述する方法はよく知られており ([5]), 我々のトーリック多様体 $X(\Phi)$ の場合には次のように表示される.

$$H^*(X(\Phi); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\tau_x \mid x \in \Phi^*] / I$$

ここで, I は次の形のもので生成される $\mathbb{Z}[\tau_x \mid x \in \Phi^*]$ のイデアルである.

- (i) $\tau_{x_1} \cdots \tau_{x_k}$ ただし $x_i = u\omega_i$ ($i = 1, \dots, k$) となるような $u \in W$ は存在しない
- (ii) $\sum_{i=1}^n \langle \alpha, x \rangle \tau_x$ ($\alpha \in \Phi$)

さて, ワイル群の元 $u \in W$ に対し, $X(\Phi)$ の部分多様体 X_u が次のようにして定まる.

$$X_u := \bigcap_{\substack{i \in [n] \\ u\alpha_i \in \Phi^-}} D_{u\omega_i}$$

ただし, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ であり, Φ^- は負ルートの集合である. X_u のポアンカレ双対 $[X_u]$ はコホモロジー環 $H^*(X(\Phi); \mathbb{Z})$ の元を定める. 交わりが空でない相異なる特性部分多様体 D_{x_1}, \dots, D_{x_k} は横断的に交わるので, $[X_u]$ は次のようにと書くことができる.

$$[X_u] = \prod_{\substack{i \in [n] \\ u\alpha_i \in \Phi^-}} \tau_{u\omega_i} \in H^*(X(\Phi); \mathbb{Z}) \quad (2)$$

命題 4.1. (De Mari-Procesi-Shayman [3]) $[X_u]$ 達は $X(\Phi)$ のコホモロジー群の基底を成す: $H^*(X(\Phi); \mathbb{Z}) = \bigoplus_{u \in W} \mathbb{Z}[X_u]$.

そこで, カップ積の展開

$$[X_u][X_v] = \sum_{w \in W} c_{uv}^w [X_w] \quad (c_{uv}^w \in \mathbb{Z})$$

において展開係数 $c_{uv}^w \in \mathbb{Z}$ が現れる. この係数 c_{uv}^w はコホモロジー環 $H^*(X(\Phi); \mathbb{Z})$ の (基底 $\{[X_w]\}_{w \in W}$ に関する) **構造定数** と呼ばれる. 序説でも書いたが, 構造定数 c_{uv}^w がどのように記述されるかを調べたい³.

少し間接的にはなるが, 一つの方法として交叉数を用いる方法がある. $X(\Phi)$ のホモロジー基本類を $\mu_{X(\Phi)}$ と書くとき, ホモロジーとコホモロジーのペアリング $(,)$ を用いて $X(\Phi)$ における Y^w, X_u, X_v の **交叉数** を

$$I_{uv}^w := (\mu_{X(\Phi)}, [Y^w][X_u][X_v]) \in \mathbb{Z}$$

³この問題は旗多様体やグラスマン多様体のシューベルトカルキュラスのトーリック多様体における類似問題と言ってよいと思うが, 構造定数は負になることもある.

により定める. ただし, $Y^w := w_0 X_{w_0 w}$ であり, $w_0 \in W$ は最長元である. サイズが $|W|$ の行列 \mathcal{I} を $\mathcal{I}_{uv} = (\mu_{X(\Phi)}, [Y^u][X_v])$ で定めると, 構造定数 c_{uv}^w と交叉数 I_{uv}^w の間に次の関係があることが従う.

$$I_{uv}^w = \sum_{w' \in W} \mathcal{I}_{uw'} c_{w'v}^{w'}$$

実は行列 \mathcal{I} は \mathbb{Z} 上の可逆行列であり, 構造定数は交叉数によって記述される.

$$c_{uv}^w = \sum_{w' \in W} (\mathcal{I}^{-1})_{ww'} I_{uv}^{w'}$$

このようにして構造定数 c_{uv}^w と交叉数 I_{uv}^w は可逆な線形変換で結びついており⁴, この意味で両者は等価な量であると言える.

$$\text{コホモロジー環の構造定数 } c_{uv}^w \xleftrightarrow{\text{交叉行列 } \mathcal{I}} X_u, X_v, Y^w \text{ の交叉数 } I_{uv}^w$$

ヤング図を用いて交叉数 I_{uv}^w を計算する方法について次節で述べる.

5 ヤング図による交叉数の計算

この説ではヤング図を用いた交叉数の計算について説明する. A_n 型についてのみ解説するが, 他の古典型ルート系 B, C, D 型の場合も同様な議論を進めていくことができる.

置換 $u \in \mathfrak{S}_{n+1}$ に対して $X_u \subset X(A_n)$ のポアンカレ双対 $[X_u]$ の記述は (2) で与えたが, $u\alpha_i \in \Phi^-$ という条件は $u(i) > u(i+1)$ と同値なので, A_n 型の場合には次のようになる.

$$[X_u] = \prod_{\substack{i \in [n] \\ u(i) > u(i+1)}} \tau_{uw_i} \in H^*(X(A_n); \mathbb{Z})$$

特に $[X_u]$ の次数は $2d(u)$ で与えられる. ここで

$$d(u) := |\{i \in [n] \mid u(i) > u(i+1)\}|.$$

各 $[X_u]$ はどのような τ_{uw_i} の積になっているかという情報で決まっており, その情報をヤング図で表現することを考える. A_n 型の場合はコウエイットの集合 $\Phi^* = \{uw_i \mid 1 \leq i \leq n, u \in \mathfrak{S}_{n+1}\}$ と $[n+1] (= \{1, 2, \dots, n+1\})$ の空でない真部分集合のなす集合を対応 $uw_i \mapsto \{u(1), \dots, u(i)\}$ によって同一視することができる. これを意識した上で, 次のようにヤング図を作る. まず, $u(i) > u(i+1)$ を満たす各 i が各行の箱の数であるようなヤング図を作る. そしてそのヤング図の上に $u(1), u(2), \dots$ 達をこの順で並べる. 置換 u をその値の列 $u(1)u(2)\dots u(n)$ で書くとき, 例えば

$$u = 41532 \text{ ならば, } [X_u] = \tau_{uw_1} \tau_{uw_3} \tau_{uw_4} \text{ は } \begin{array}{cccc} 4 & 1 & 5 & 3 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \text{ で表される.}$$

⁴行列 \mathcal{I} は上三角行列とすることができ, 必要なら逆行列を \mathcal{I} の言葉で具体的に書き下すこともできる.

つまり、ヤング図の各行が1つの τ_{uw_i} を表し、その添え字 uw_i に対応する $\{u(1), \dots, u(i)\}$ がちょうどその行の上に並ぶようにしているのである。

同様にして、 $[Y^w] = [w_0 X_{w_0 w}]$ は $u(i) < u(i+1)$ を満たす各 i をデータとして作ったヤング図によって表示することができる（すぐ下の例参照）。

置換 $u, v, w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ に対し、ヤング図 λ_{uv}^w を次のようにして定める。もし $d(u) + d(v) = d(w)$ で、かつ X_u, X_v, Y^w を表すヤング図の各行の上に並ぶ数字の集合が（順序を適当に入れ替えて）包含列をなしているならば、それぞれの集合の位数を広義単調減少になるように並べて得られるヤング図を λ_{uv}^w とし、それ以外の場合は $\lambda_{uv}^w = \emptyset$ と定める。

例 5.1. $n = 4$ のとき、 $u = 31254, v = 12354, w = 35421$ とすると

$$X_{31254} = \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 5 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}, \quad X_{12354} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}, \quad Y^{35421} = \begin{array}{c} 3 \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}$$

包含列をなしているかどうか確かめる集合列は $\{3\}, \{3, 1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{3\}$ であるが、明らかに $\{3\} = \{3\} \subset \{3, 1, 2, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$ という包含列をなす（わざわざ集合を書き下さなくてもヤング図を見ればすぐに確かめられる）。よって $u = 31254, v = 12354, w = 35421$ に対して定まるヤング図 λ_{uv}^w は下図のようになる。

$$\lambda_{31254, 12354}^{35421} = \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}$$

交叉数の計算のために、ヤング図に値をとる関数を考える。今 λ を n 行からなるヤング図とし、各行の箱の個数は n 以下であるとする。 λ の凸な角の数を s と置く。すなわち $s = |\{i \in [n] \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\}| + 1$ 。凸な角を与える行の番号の集合を次のように書く。

$$\{i \in [n] \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\} \cup \{n\} = \{i_1, \dots, i_s\}$$

ただし $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ とする。特に $i_s = n$ 。 λ の r 番目の凸な角を与える行における箱の数を $\lambda^r := \lambda_{i_r}$ で表す ($1 \leq r \leq s$)。ここで $\lambda^{s+1} := 0$ 。この記号を用いて、各 $r = 1, \dots, s$ に対し、次のように定める。

$$a_r := i_r - i_{r-1} - 1, \quad b_r := \lambda^r - \lambda^{r+1} - 1, \quad c_r := \lambda^r + i_r - n - 1$$

ここで、 $0 \leq y \leq x$ でなければ $\binom{x}{y} = 0$ と約束する。これらの数の図形的な意味は比較的単純である（図2）。実際、ヤング図 λ の（右上から） r 番目の凸な角の箱を黒く塗っておくと、 a_r は黒箱とその上側にある凹な角までの間にある箱の数であり、 b_r は黒箱とその左側にある凹な角までの間にある箱の数であり、 c_r は反対角線との交点と黒箱の間にある箱の数である。これらの数はヤング図と反対角線を実際にかけば簡単に数えることができる。

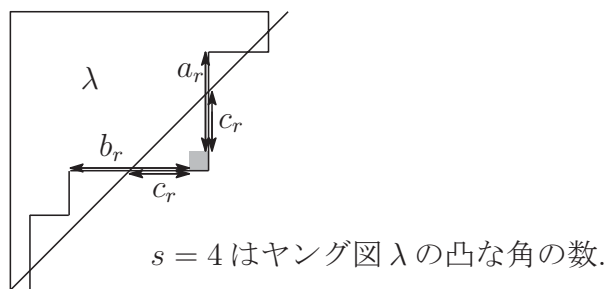


図 2: a_r, b_r, c_r の図形的な意味

今, 各 $r = 1, \dots, s$ に対して

$$y_r := \begin{pmatrix} a_r \\ c_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_r \\ c_r \end{pmatrix}$$

と置き, $I(\lambda)$ を次のように定める.

$$I(\lambda) := (-1)^{n-s} y_1 \cdots y_s$$

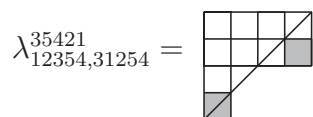
定理 5.2. ([1]) 置換 $u, v, w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ に対し, $X(A_n)$ における Y^w, X_u, X_v の交叉数は次で与えられる.

$$(\mu_{X(A_n)}, [Y^w][X_u][X_v]) = I(\lambda_{uv}^w)$$

ここで, $\mu_{X(A_n)}$ は $X(A_n)$ の基本類である.

例 5.3. 例えば A_4 型るとき (ワイル群は 5 次の置換群 \mathfrak{S}_5), $Y^{35421}, X_{12354}, X_{31254}$ から定まるヤング図は例 5.1 ですすでに与えており, 定理から交叉数が計算される.

$$(\mu_{X(A_4)}, [Y^{35421}][X_{12354}][X_{31254}]) = 2$$



参考文献

- [1] H. Abe, *Young diagrams and intersection numbers for toric manifolds associated with Weyl chambers*, preprint, arXiv:1404.3805.
- [2] V. Batyrev and Mark Blume, *The functor for toric varieties associated with Weyl chambers and Losev-Manin moduli spaces*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 581-604.

- [3] F. De Mari, C. Procesi and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529-534.
- [4] V. Dolgachev and V. Lunts, *A character formula for the representation of a Weyl group in the cohomology of the associated toric variety*, J. Algebra **168** (1994), 741-772.
- [5] W. Fulton, *An Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Stud., vol. **113**, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1993.
- [6] A. Klyachko, *Orbits of a maximal torus on a flag space*, Functional Anal. Appl. **19** (1985), no. 2, 65-66.
- [7] A. Losev and Y. Manin, *New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections*, Michigan Math. J. **48** (2000), 443-472.
- [8] C. Procesi, *The toric variety associated to Weyl chambers*, Mots, 153-161, Lang. Raison. Calc., Hermès, Paris, 1990.
- [9] J. Stembridge, *Some permutation representations of Weyl groups associated with the cohomology of toric varieties*, Adv. Math. **106** (1994), 244-301.