

4次元空間内の自己交差を持つ曲面結び目について

河村 建吾 (大阪市立大学大学院 理学研究科 D3)*

0. はじめに

3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の結び目が, リボン交差のみを自己交差とする円盤(リボン特異円盤)の境界となる時, その結び目はリボン結び目であるという. リボン結び目は4次元球体 B^4 の境界にそれを置くとき, ある性質を満たす埋め込まれた円盤を B^4 において張ることができ, 4次元空間内の曲面の研究においても重要な役割を果たす. 特に, 2次元結び目のKSS標準形の赤道面での切り口として現れることが, 結び目がリボン結び目である必要十分条件となっている¹. リボン交差は高次元でも定義され, 4次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 内のリボン曲面結び目のようにリボン結び目を高次元化した概念が知られており, これまでもよく研究されていた.

一方, 3次元空間内の曲面の自己交差にはリボン交差の他にクラスプ交差と呼ばれるものがある. クラスプ交差は結び目解消操作と深い関係があり, どのような結び目もクラスプ交差のみを自己交差とする円盤(クラスプ特異円盤)の境界となることが容易に分かる. 講演者はクラスプ交差の概念の高次元化を行い, リボン交差も含めることで, \mathbb{R}^4 内のリボン・クラスプ曲面結び目という概念を導入した. リボン・クラスプ曲面結び目はリボン曲面結び目の拡張である.

本講演では, \mathbb{R}^3 内の結び目が張るリボン特異円盤とクラスプ特異円盤について紹介し, そのあと \mathbb{R}^4 内のリボン曲面結び目について, 仮想結び目を用いた表示法などを紹介する. 後半ではリボン・クラスプ曲面結び目の概念を導入し, 半仮想ダイアグラムを用いた表示法について説明する. 議論はPLカテゴリーで行い, 埋め込みやはめ込みは局所平坦であることを仮定する. この研究は大阪市立大学の鎌田聖一氏との共同研究である.

1. 曲面結び目について

本稿で**曲面結び目**といえば**自己交差を持つ曲面結び目**, すなわち, \mathbb{R}^4 内にはめ込まれた連結な閉曲面で, その多重点集合が横断的な2重点のみであるものを意味する². はめ込む前の閉曲面のトポロジーを具体的に明示する場合は S^2 -結び目や T^2 -結び目のように記述する. ここで, S^2 は2次元球面, T^2 は2次元トーラス $S^1 \times S^1$ を表す. また, 2次元結び目とは2重点を持たない S^2 -結び目のことである. 2つの曲面結び目が \mathbb{R}^4 の全同位で互いに移り合うとき, それらは**同値**であるという.

図1のモーション・ピクチャーで表される曲面結び目 S_0, S_+, S_-, T_0, P_+ または P_- のことを**標準的な曲面結び目**という. ここで, S_0 は埋め込まれた2次元球面, S_+ および S_- は横断的な2重点を1個持つ2次元球面, T_0 は埋め込まれた2次元トーラス, P_+ および P_- は埋め込まれた実射影平面である. **自明な曲面結び目**とは, 標準的な曲面結

* 〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138 大阪市立大学大学院理学研究科
e-mail: k.kawamura0403@gmail.com

¹ 2次元結び目の(KSS標準形とは限らない)赤道面での切り口として現れることが, 結び目がスライス結び目である必要十分条件である.

² 曲面結び目は \mathbb{R}^4 内に埋め込まれた連結な閉曲面(つまり横断的な2重点を持たないもの)を意味することもあり, その場合本稿の意味での曲面結び目は自己交差を持つ曲面結び目や特異曲面結び目と呼ばれる.

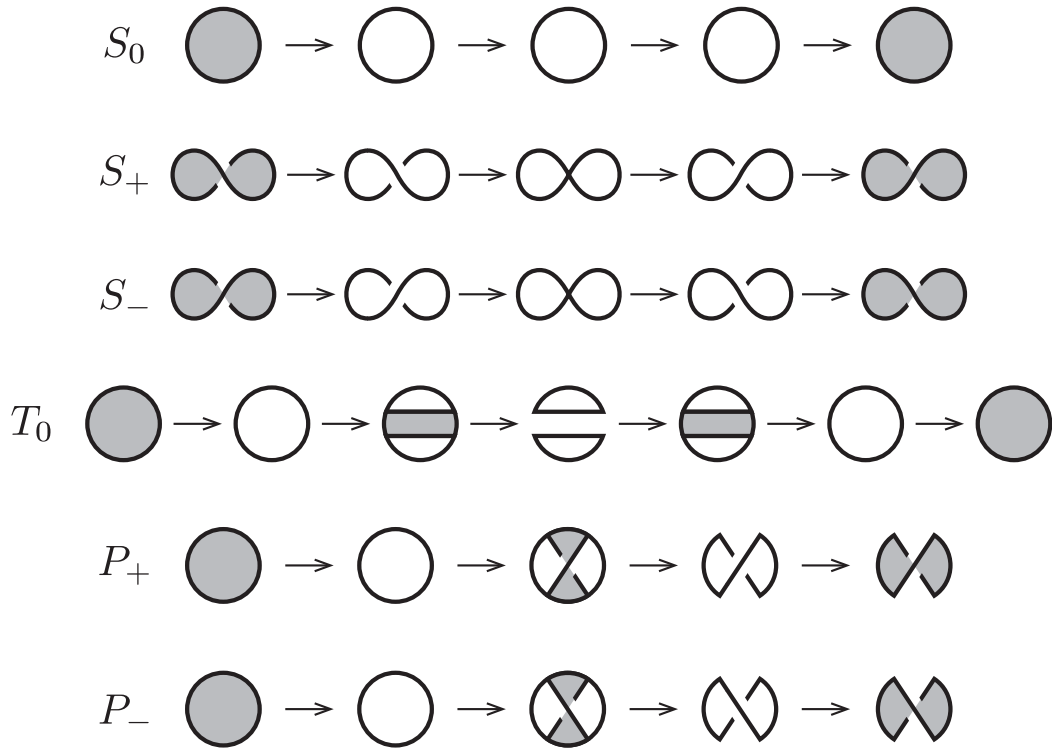


図 1: 標準的な曲面結び目 S_0 , S_+ , S_- , T_0 , P_+ , P_- のモーション・ピクチャー

び目の連結和に同値な曲面結び目のことである³。以下、曲面結び目は有向であると仮定する。

曲面結び目から新しい曲面結び目を構成する方法について説明する。 \mathbb{R}^4 内の単純弧 γ が曲面結び目 F に接着する**コード**とは、 $\gamma \cap F = \partial\gamma$ であり、 $\partial\gamma$ の各点は F の2重点ではないときをいう。曲面結び目 F に接着する2つのコードは F を (集合として) 固定した \mathbb{R}^4 の全同位で移り合うときに**同値**であるという。曲面結び目に接着するコードが与えられるとそれに沿った1-ハンドル手術 (cf. [1, 5]) およびフィンガー移動 (cf. [2, 12]) が定まる⁴。曲面結び目に接着する2つのコード γ, γ' が同値であるとき、 γ に沿った1-ハンドル手術 (resp. フィンガー移動) によって得られる曲面結び目と γ' に沿った1-ハンドル手術 (resp. フィンガー移動) によって得られる曲面結び目は同値となる。そして、1-ハンドル手術およびフィンガー移動は (ある意味で) 曲面結び目の結び目解消操作であることが知られている [7, 8]。

2. 3次元空間内のリボン交差とクラスプ交差

境界付きコンパクト曲面 M の \mathbb{R}^3 へのはめ込みを $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ とする。像 $f(M)$ の2重点集合の連結成分を d とし、その逆像 $f^{-1}(d)$ を構成する2つの成分を d_1 と d_2 とする。 d が**リボン交差**であるとは、 d_1 が M にプロパーに埋め込まれた弧であり、 d_2 が M の内部に埋め込まれた弧であるときをいう (図2)。 d が**クラスプ交差**であるとは、各 d_i が M の内点 a_i と M の境界点 b_i を繋ぐ M 内の弧であり、 $f(a_1) = f(b_2)$ かつ $f(a_2) = f(b_1)$

³ 向き付け不可能で自明な曲面結び目の標準的な曲面結び目への分解の仕方は一意でない (cf. [9])。

また、非自明な2次元結び目 K で、 $K \# P_+$ が P_+ に同値となるものが存在する [14]。

⁴ コードに沿った1-ハンドル手術が一意に定まるのは、今、有向な曲面結び目のみを考えているからである。

を満たすときをいう (図3). M が2次元円盤の場合, $f(M)$ の多重点集合がリボン交差のみであるとき $f(M)$ を**リボン特異円盤**といい, $f(M)$ の多重点集合がクラスプ交差のみであるとき $f(M)$ を**クラスプ特異円盤**という. \mathbb{R}^3 内の結び目 K がリボン特異円盤を張るとき, K を**リボン結び目**という. 一方, \mathbb{R}^3 内の任意の結び目はクラスプ特異円盤を張ることが知られている.

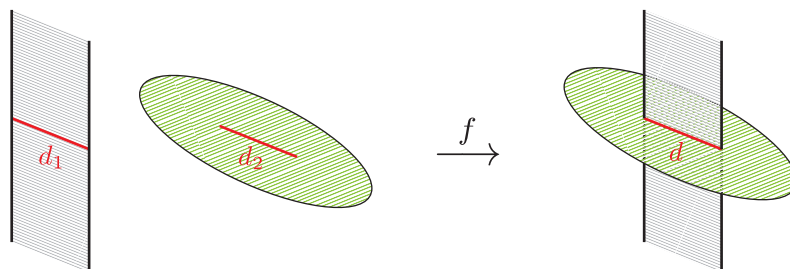


図 2: 3次元空間内のリボン交差 d の近傍

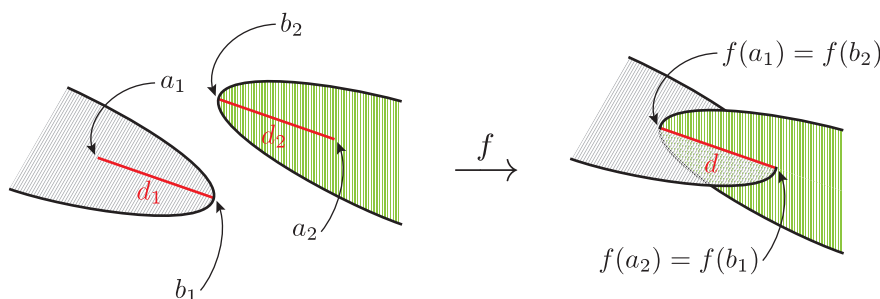


図 3: 3次元空間内のクラスプ交差 d の近傍

リボン結び目に関して以下のことが知られている.

命題 2.1. 結び目 K がリボン結び目であるための必要十分条件は, ある自明な絡み目 L とそれに接着するバンドの集合で, L をバンド手術して得られる結び目が K に同値となるものが存在することである.

\mathbb{R}^3 の部分集合 A と \mathbb{R} の部分集合 J に対して, \mathbb{R}^4 の部分集合 $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mid \mathbf{x} \in A, t \in J\}$ を $A \times J$ で表すことにする. $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ 内にプロパーに埋め込まれた円盤 D が**リボン円盤**であるとは, D が第4座標に関して極小点を持たないときをいう. 次の定理はよく知られたリボン結び目の特徴付けである.

定理 2.2. 結び目 K がリボン結び目であるための必要十分条件は $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ 内のリボン円盤 D で, $\partial D = K \times \{0\}$ を満たすものが存在することである.

結び目が $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ 内にプロパーに埋め込まれた円盤の境界となるとき, スライス結び目という. リボン結び目はスライス結び目であるが, その逆は「スライス・リボン予想」と呼ばれる未解決問題である.

予想 2.3. ([3]) スライス結び目はリボン結び目である.

3. リボン曲面結び目

この節ではリボン曲面結び目 (cf. [16, 17]) とそれに関する結果をいくつか紹介する.

3.1. 4次元空間内のリボン交差

第2節で紹介した3次元空間内のリボン交差の概念は4次元空間内のリボン交差として拡張できる. 境界付きコンパクト3次元多様体 M の \mathbb{R}^4 へのはめ込みを $f: M \rightarrow \mathbb{R}^4$ とする. 像 $f(M)$ の2重点集合の連結成分を Δ とし, その逆像 $f^{-1}(\Delta)$ を構成する2つの成分を Δ_1 と Δ_2 とする. Δ がリボン交差であるとは, Δ_1 が M 内にプロパーに埋め込まれた円盤であり, Δ_2 が M の内部に埋め込まれた円盤であるときをいう. 図4と図5はリボン交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャーである.

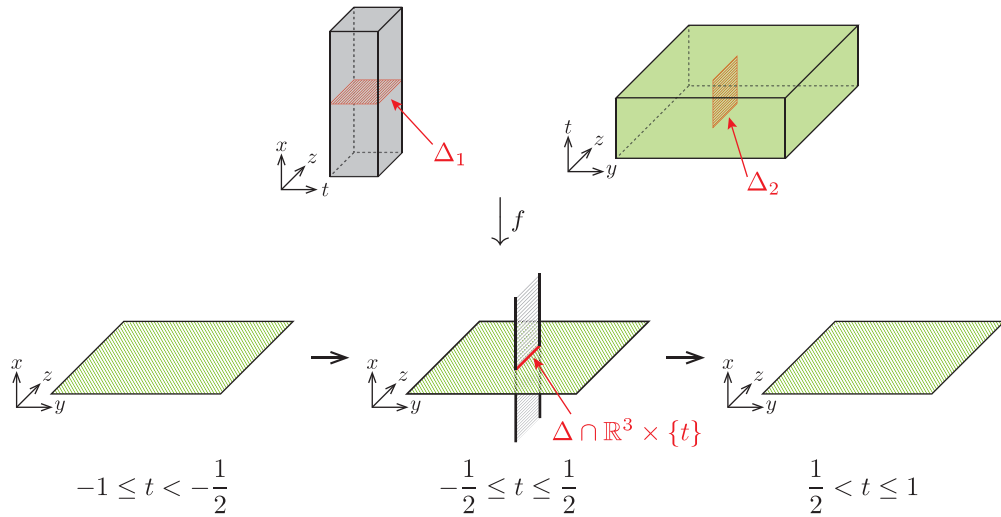


図 4: 4次元空間内のリボン交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャー (1)

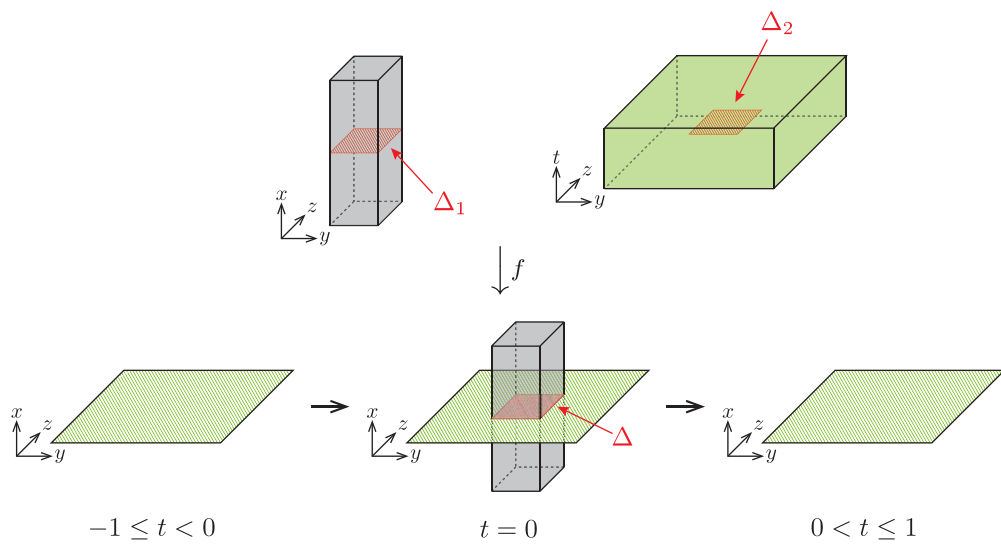


図 5: 4次元空間内のリボン交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャー (2)

3.2. リボン曲面結び目

曲面結び目 F がリボン曲面結び目であるとは, 多重点集合がリボン交差のみとなるようなハンドル体 V の \mathbb{R}^4 へのはめ込み $f: V \rightarrow \mathbb{R}^4$ で, F が V の境界 ∂V の f による像 $f(\partial V)$ に同値となるものが存在するときをいう. リボン曲面結び目は自己交差を持たない曲面結び目である.

\mathbb{R}^4 内に互いに交わらないように埋め込まれた $\mu(\geq 1)$ 個の3次元球体の境界は μ 個の S_0 となっている。これを自明な2次元絡み目といい、 \mathcal{O} で表す。このとき、リボン曲面結び目は次のように表すことができる。

定理 3.1. 曲面結び目 F がリボン曲面結び目であるための必要十分条件は、ある自明な2次元絡み目 \mathcal{O} とそれに接着するコードの集合 Γ で、 Γ に沿った1-ハンドル手術によって \mathcal{O} から得られる曲面結び目が F に同値となるものが存在することである。

さらに、リボン曲面結び目はKSS標準形[11]を用いて次のように特徴付けられることが知られている。

定理 3.2. 曲面結び目 F がリボン曲面結び目であるための必要十分条件は、 F はKSS標準形かつ $r(F) = F$ であるように F を全同位で変形できることである。ここで、 $r: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ は $r(x, y, z, t) = (x, y, z, -t)$ で定義される写像である。

つまり、リボン曲面結び目は同値な変形によってKSS標準形かつ \mathbb{R}^4 内の超平面 $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ に関して対称な位置に置くことができる。

3.3. リボン曲面結び目の仮想結び目を用いた表示

仮想結び目 [10] は、一般ライデマイスター移動による仮想ダイアグラムの同値類である。ここで、仮想ダイアグラムとは \mathbb{R}^2 内に横断的にはめ込まれた有向円周で、各2重点に実交点または仮想交点の情報が指定されているものである (図6)。仮想結び目は

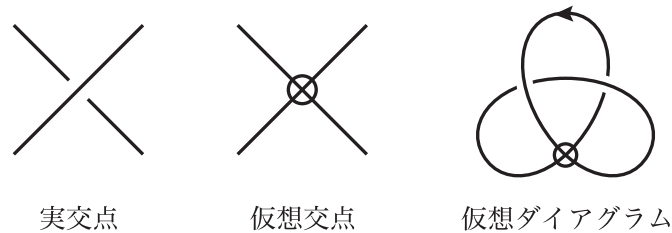


図 6: 実交点と仮想交点および仮想ダイアグラム

結び目のガウスコード図式による研究 [10] や閉曲面上の結び目図式の安定同値類の研究 [6] に用いられるが、神戸大学の佐藤進氏によってリボン曲面結び目 (リボン T^2 -結び目) の研究にも有効であることが示された [13]。仮想結び目を用いたりボン曲面結び目の研究方法について説明する。

仮想ダイアグラム D からリボン T^2 -結び目のダイアグラム $\text{tube}(D) \subset \mathbb{R}^3$ を図7のように構成する。ただし、実交点と仮想交点における対応は図8のように定める。この

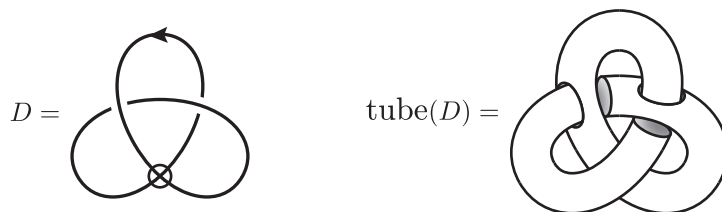


図 7: 仮想ダイアグラム D から得られるリボン T^2 -結び目のダイアグラム $\text{tube}(D)$

対応において、 $\text{tube}(D)$ は仮想交点に対応する部分で曖昧さが存在するが、 $\text{tube}(D)$ に

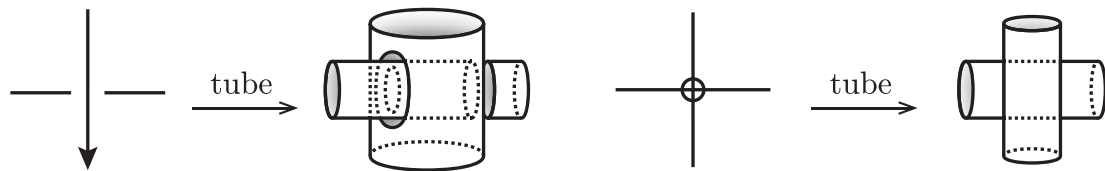


図 8: 実交点と仮想交点における対応

よって表されるリボン T^2 -結び目の同値類は D から一意的に定まる. 従って, 仮想ダイアグラム D に $\text{tube}(D)$ が表すリボン T^2 -結び目の同値類を対応させる写像

$$T_0 : \{ \text{仮想ダイアグラム} \} \rightarrow \{ \text{リボン } T^2\text{-結び目の同値類} \}$$

が定義される. このとき, 次が成り立つ.

定理 3.3. ([13]) 写像 T_0 は全射である. すなわち, 任意のリボン T^2 -結び目 F に対して, F と $\text{tube}(D)$ が表すリボン T^2 -結び目が同値となるような仮想ダイアグラム D が存在する.

定理 3.3 の状況で F を D に付随するリボン T^2 -結び目という. 写像 T_0 は仮想結び目の集合からリボン T^2 -結び目の同値類の集合への全射を誘導する [13] ⁵. よって, リボン T^2 -結び目は仮想結び目を用いて表すことができる. この表示法の利点の一つはリボン T^2 -結び目の結び目群 ⁶ を仮想ダイアグラムから直接計算できることにある.

仮想ダイアグラム D から得られる有限表示群 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$ を $G(D)$ で表す. ここで, $G(D)$ の各生成元 x_j は D の各弧のメリディアンに相当し, 各関係式 r_i は実交点に対して図 9 のように対応させる. リボン T^2 -結び目の結び目群は次のよう

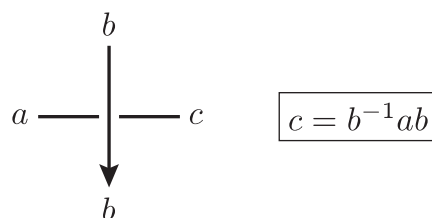


図 9: 実交点における $G(D)$ の関係式

に仮想ダイアグラムから直接計算できる.

定理 3.4. ([13], cf. [15]) F を仮想ダイアグラム D に付随するリボン T^2 -結び目とする. このとき, F の結び目群 $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ は群 $G(D)$ に同型である.

次節では上記で紹介したリボン曲面結び目に関するの結果をリボン・クラスプ曲面結び目の場合に拡張する.

4. リボン・クラスプ曲面結び目

この節では, 曲面結び目の新しいクラスであるリボン・クラスプ曲面結び目を導入し, リボン・クラスプ T^2 -結び目の半仮想ダイアグラムを用いた表示について述べる.

⁵ さらに写像 T_0 は溶接結び目の集合からリボン T^2 -結び目の同値類の集合への全射を誘導する. ここで溶接結び目とは, 「禁止移動」を法とする仮想結び目のことである.

⁶ 曲面結び目 F の補空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ のことを F の結び目群という. 結び目群は曲面結び目の不変量である.

4.1. 4次元空間内のクラスプ交差

第2節で紹介した3次元空間内のクラスプ交差の概念を次のように4次元空間内のクラスプ交差として拡張する. 境界付きコンパクト3次元多様体 M の \mathbb{R}^4 へのはめ込みを $f: M \rightarrow \mathbb{R}^4$ とする. 像 $f(M)$ の2重点集合の連結成分を Δ とし, その逆像 $f^{-1}(\Delta)$ を構成する2つの成分を Δ_1 と Δ_2 とする. Δ が**クラスプ交差**であるとは, 各 Δ_i は M 内に埋め込まれた円盤で, $\partial\Delta_i$ が2本の弧 α_i と β_i の和となるときをいう. ここで, α_i は M 内にプロパーに埋め込まれた弧であり, β_i は $\partial\alpha_i$ を繋ぐ ∂M 内の単純弧である. さらに, これらは $f(\alpha_1) = f(\beta_2)$ かつ $f(\alpha_2) = f(\beta_1)$ を満たす. 図10と図11と図12はクラスプ交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャーである.

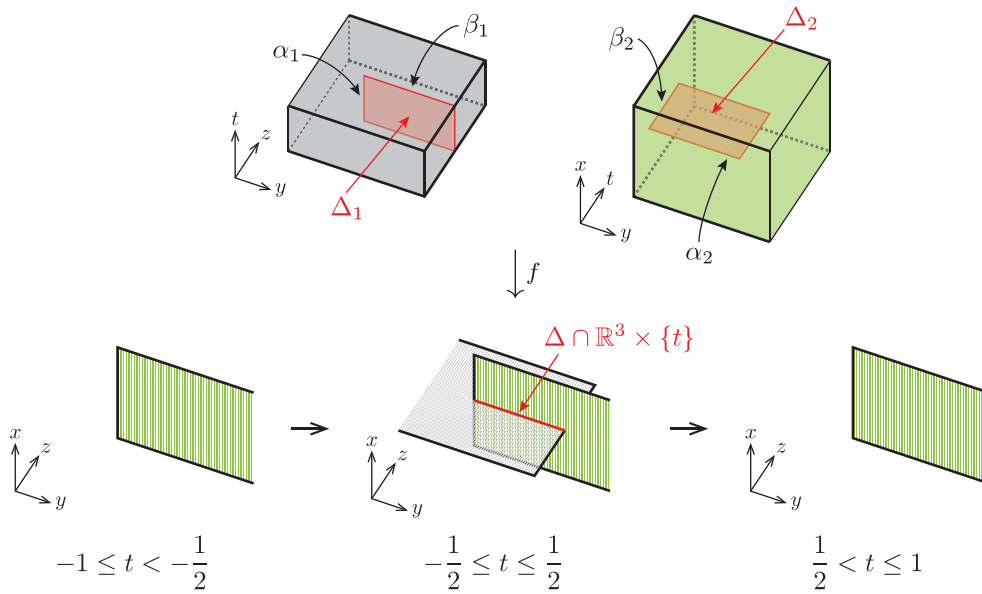


図 10: 4次元空間内のクラスプ交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャー (1)

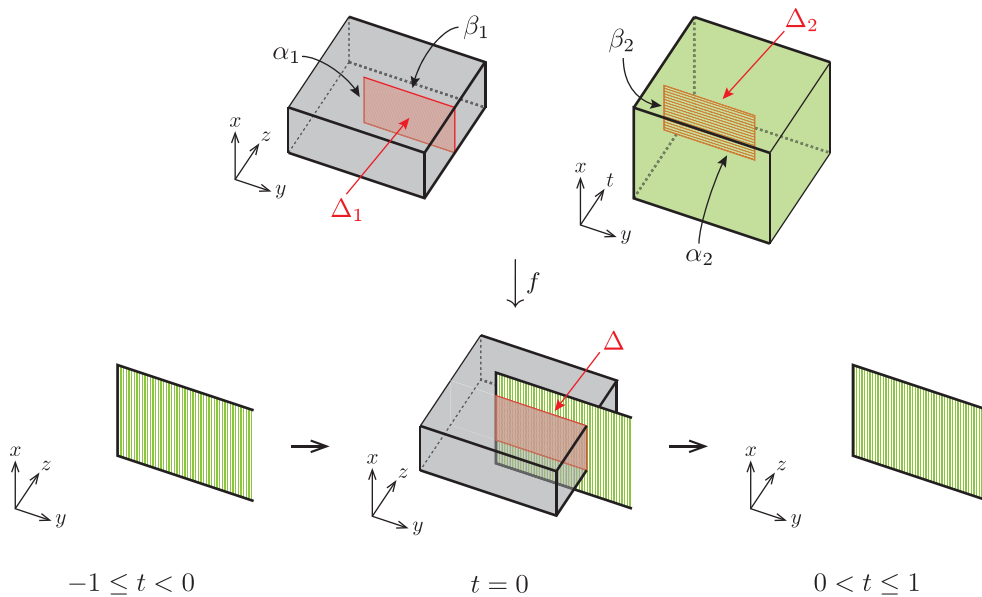


図 11: 4次元空間内のクラスプ交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャー (2)

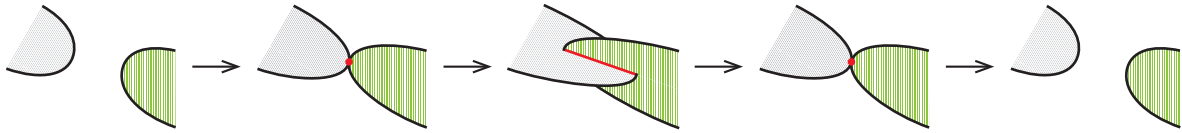


図 12: 4次元空間内のクラスプ交差 Δ の近傍のモーション・ピクチャー (3)

4.2. リボン・クラスプ曲面結び目

定義 4.1. 曲面結び目 F がリボン・クラスプ曲面結び目であるとは、多重点集合がリボン交差かクラスプ交差のみであるハンドル体 V の \mathbb{R}^4 へのはめ込み $f: V \rightarrow \mathbb{R}^4$ で、 V の境界 ∂V の f による像 $f(\partial V)$ が F に同値となるものが存在するときをいう。

リボン・クラスプ曲面結び目はリボン曲面結び目の概念の拡張となっている。クラスプ交差の近傍では正の2重点と負の2重点が1つずつ現れるので、リボン・クラスプ曲面結び目は2重点を偶数個持つ。 \mathbb{R}^3 内の任意の結び目はクラスプ特異円盤を張ることが知られているが、曲面結び目に関しては次のことがわかる。

定理 4.2. 多重点集合がクラスプ交差のみであるようなハンドル体のはめ込みの境界となるリボン・クラスプ曲面結び目は自明である。

リボン・クラスプ曲面結び目はリボン曲面結び目と同じく自明な2次元絡み目 \mathcal{O} を用いて次のように表すことができる。

定理 4.3. 曲面結び目 F がリボン・クラスプ曲面結び目であるための必要十分条件は、ある自明な2次元絡み目 \mathcal{O} とそれに接着するコードの集合 Γ で、 Γ に沿った1-ハンドル手術とフィンガー移動によって \mathcal{O} から得られる曲面結び目が F に同値となるものが存在することである。

4.3. リボン・クラスプ曲面結び目の半仮想ダイアグラム表示

リボン・クラスプ T^2 -結び目の半仮想ダイアグラムを用いた表示を与える。

半仮想ダイアグラム [4] とは半仮想交点を許容する仮想ダイアグラムのことである(図13)。 $[4]$ では、仮想結び目の有限型不変量の研究において、半仮想交点を実交点と

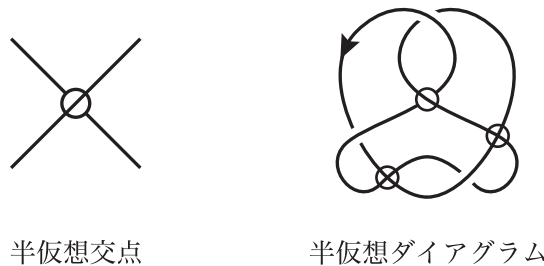


図 13: 半仮想交点と半仮想ダイアグラム

仮想交点の間の形式的な差によって導入した。ここでは半仮想ダイアグラムは仮想ダイアグラムの集合によって生成される自由 \mathbb{Z} -加群のある特別な元を表している。一方、半仮想交点は実交点を仮想交点に置き換える変形において、実交点が仮想交点に変わる瞬間に現れるとみなすことができる(図14)。後者の解釈は我々の目的であるリボン・クラスプ曲面結び目の研究に非常に良く適合している。

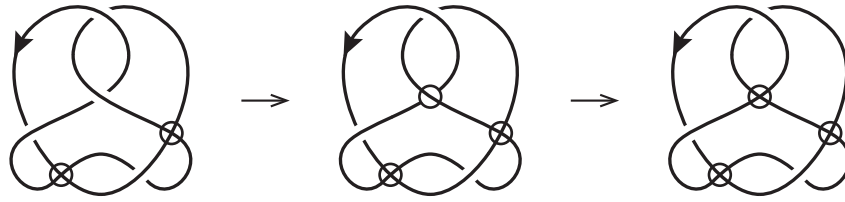


図 14: 半仮想ダイアグラムが現れる瞬間

リボン・クラスプ曲面結び目はリボン曲面結び目の拡張であり，半仮想ダイアグラムは仮想ダイアグラムの拡張である．我々は前節で紹介したリボン T^2 -結び目の仮想結び目による表示の拡張として，半仮想ダイアグラムとリボン・クラスプ曲面結び目（リボン・クラスプ T^2 -結び目）との関係性を新しく導入する．

半仮想ダイアグラムからリボン・クラスプ T^2 -結び目のダイアグラムを次のように構成する．第 3.3 項で紹介した $\text{tube}(D)$ の構成法を，実交点と仮想交点では以前と同じく図 8 のように，半仮想交点では図 15 のように対応させることで半仮想ダイアグラムからリボン・クラスプ T^2 -結び目のダイアグラムが構成できる．このダイアグラムも $\text{tube}(D)$ と表す．このとき，半仮想ダイアグラム D に $\text{tube}(D)$ が表すリボン・クラス

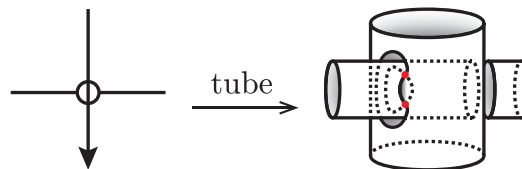


図 15: 半仮想交点における対応

プ T^2 -結び目の同値類を対応させる写像

$$T : \{\text{半仮想ダイアグラム}\} \rightarrow \{\text{リボン・クラスプ } T^2\text{-結び目の同値類}\}$$

が定義できる．写像 T に関して次が成り立つ．

定理 4.4. 写像 T は全射である．すなわち，任意のリボン・クラスプ T^2 -結び目 F に対して， F と $\text{tube}(D)$ が表すリボン・クラスプ T^2 -結び目が同値となるような半仮想ダイアグラム D が存在する．

この定理は定理 3.3 の自然な拡張となっている．定理 4.4 の状況で F を D に付随するリボン・クラスプ T^2 -結び目という．

半仮想ダイアグラム D に対して群 $G(D)$ を次のように定義する．

定義 4.5. 半仮想ダイアグラム D から得られる有限表示群 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$ を $G(D)$ で表す．ここで，各生成元 x_j は D の各弧のメリディアンに相当し，各関係式 r_i は実交点および半仮想交点に対して図 16 のように対応させる．

このとき，次が成り立つ．

定理 4.6. F を半仮想ダイアグラム D に付随するリボン・クラスプ T^2 -結び目とする．このとき， F の結び目群 $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ は群 $G(D)$ に同型である．

この定理は定理 3.4 の自然な拡張となっている．この定理を使うとリボン・クラスプ T^2 -結び目の結び目群を半仮想ダイアグラムから直接計算できる．

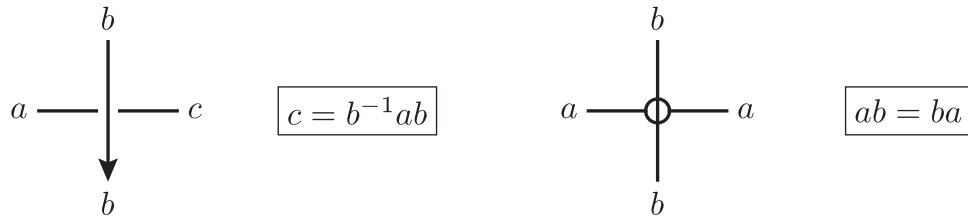


図 16: 実交点および半仮想交点における $G(D)$ の関係式

参考文献

- [1] J. Boyle, *Classifying 1-handles attached to knotted surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **306** (1988) 475–487.
- [2] A. J. Casson, *Three lectures on new-infinite constructions in 4-dimensional manifolds*, In: L. Guillou and A. Marin (Eds.), *À la Recherche de la Topologie Perdue*, Progr. Math., **62**, Birkhäuser (1986) 201–214.
- [3] R. H. Fox, *Some problems in knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), pp. 168–176, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- [4] M. Goussarov, M. Polyak and O. Viro, *Finite type invariants of classical and virtual knots*, Topology **39** (2000), no.5, 1045–1068.
- [5] F. Hosokawa and A. Kawauchi, *Proposals for unknotted surfaces in four-spaces*, Osaka J. Math., **16** (1979) 233–248.
- [6] N. Kamada and S. Kamada, *Abstract link diagrams and virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000) 93–106.
- [7] S. Kamada, *Unknotting immersed surface-links and singular 2-dimensional braids by 1-handle surgeries*, Osaka J. Math. **36** (1999) 33–49.
- [8] S. Kamada, *Vanishing of a certain kind of Vassiliev invariants of 2-knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999) 3421–3426.
- [9] S. Kamada, *On 1-handle surgery and finite type invariants of surface knots*, Topology Appl. **121** (2002), no. 1–2, 219–230.
- [10] L. H. Kauffman, *Virtual Knot Theory*, Europ. J. Combinatorics **20** (1999) 663–690.
- [11] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki, *Descriptions on surfaces in four-space, I, Normal forms*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **10** (1982), 75–125.
- [12] R. Kirby, *The topology of 4-manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **1374** Springer-Verlag (1989).
- [13] S. Satoh, *Virtual knot presentation of ribbon torus-knots*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000) 531–542.
- [14] O. Ya. Viro, *Local knotting of submanifolds*, Math. USSR-Sb. **19** (1973) 166–176.
- [15] T. Yajima, *On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in 4-space*, J. Math., Osaka City Univ., **13** (1962) 63–71.
- [16] T. Yajima, *On simply knotted spheres in R^4* , Osaka J. Math., **1** (1964) 133–152.
- [17] T. Yanagawa, *On ribbon 2-knots: The 3-manifold bounded by the 2-knots*, Osaka J. Math. **6** (1969) 447–464.