第17回位相幾何学シンポジウム

講　演　集

1967年7月18日～20日

科学研究綜合研究班

目　次

Weakly complex bordism group $\mathfrak{u}_*(B_{Z_p})$ について

鎌 田 正 良

I 記号及び結果の説明

1. CW complex 対 (X, A) に対して，n次元 compact weakly complex manifold M^n と map $f: (M^n, \dot{M}^n) \to (X, A)$ との組 (M^n, Φ_{M^n}, f) を考える。（但し，Φ_{M^n} は M^n の weakly complex structure）適当な weakly complex manifold $(W^{n+1}, \Phi_{W^{n+1}})$ と map $F: W^{n+1} \to X$ が存在して次の4つの条件をみたすとき (M^n, Φ_{M^n}, f) は bord であるという。

   (1) M^n は $\dot{W}^{n+1}$ の regular submanifold として embed されている。

   (2) $\partial\Phi_{W^{n+1}}$ を M^n に制限したものは Φ_{M^n} である。

   (3) $F|_{M^n} = f$

   (4) $F(\dot{W}^{n+1} - M^n) \subset A$

   (M_1^n, Φ_{M^n}, f_1) と $(M_2^n, \Phi_{M_2^n}, f_2)$ が bordant であるとは，$(M_1^n \cup M_2^n, \Phi_{M_1^n} \cup (-\Phi_{M_2^n}), f_1 \cup f_2)$ が bord のことと定義する。以後 (M^n, Φ_M, f) は単に (M^n, f) と書くことにする。集合 $\{(M^n, f)\}$ を bordant relation で分類して得られる集合に $[M_1^n, f_1] + [M_2^n, f_2] = [M_1^n \cup M_2^n, f_1 \cup f_2]$ で演算を定義し，これを群にする。この群を (X, A) に対する n次元 weakly complex bordism group といい，$\mathfrak{u}_n(X, A)$ と書く。$\mathfrak{u}_*(\ ,\ )$ は generalized homology theory をなすことが知られる。[3]

2. finite CW complex 対 (X, A) に対して，$MU(k)$ で k次元 universal complex bundle に対する Thom complex を表わし，$\mathfrak{u}^n(X, A) = \lim_k [S^{2k-n}(X/A), MU(k)]$ と定義する。これを (X, A) に対する n次元 weakly complex cobordesm group と言う，$\mathfrak{u}^*(\ ,\ )$ は

generalized cohomolvgy theory になる。

3. r を (n+1) 次元複素空間 C^{n+1} の球面 S^{2n+1} の回転で

$$r(z_0, z_1, \cdots, z_n) = (e^{2\pi i}/p z_0, e^{2\pi i}/p z_1, \cdots, e^{2\pi i}/p z_n)$$

で与えられるものとする。Γ を r で生成される位相変換群とする。レンズ空間を $L^n(p) = S^{2n+1}/\Gamma$ と定義する。$\tilde{L}_n = [L^n(p), i]$ ($\varepsilon\ U_{2n+1}(BZ_p)$) とおく。但し $i : L^n(p) \subset BZ_p$ 包含写像とする。$U_* = U_*$ (point) とし，$\alpha_i\ \varepsilon\ U_{2i}$ で generator を表わすこととする。

4. 我々は次の結果を得る。

定理 1. $\tilde{L}_n$ の order は $p^{1+[\frac{n}{p-1}]}$ である。

定理 2. (1) $U_{2n-1}(BZ_p) \approx U_{2n-1}(L^n(p)) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i_1+2i_2+\cdots+ji_j+\cdots=n-k-1} Z^{i_1,\cdots,i_j}_{p^{1+[\frac{k}{p-1}]}}$

但し，$j \neq p-1$，$Z^{i_1,\cdots,i_j\cdots}_{p^{1+[\frac{k}{p-1}]}} \approx Z_{p^{1+[\frac{k}{p-1}]}}$，

$Z^{i_1,\cdots,i_j,\cdots}_{p^{1+[\frac{k}{p+1}]}}$ の generator は $\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}, \cdots \alpha_j^{i_j} \cdots \tilde{L}_k$

(2) $U_{2n}(BZ_p) \approx U_{2n}$

II 定理 1 の証明

1. 双対定理

定理 3. X^n が n 次元 weakly complex manifold ならば，同型対応 $\Phi : U_k(X^n) \to U^{n-k}(X^n)$ が存在する。 ([5])

対応 Φ は，次のようにし与えられるものである。簡単のために，$[M^k, f]\ \varepsilon\ U_k(X^n)$ において (M^k, f) なる代表元の f は embedding であるとし tangent bundles $\tau(M^k)$, $\tau(X^n)$ に almost complex structure があるものとして説明する。X^n における M^k の normal bundle を $\nu(M)$ として表わす。$\nu(M^k)$ に対する classifying map $\nu(M^k) \to r^{\frac{n-k}{2}}$ (但し $r^{\frac{n-k}{2}}$ は $(\frac{n-k}{2})$ complex universal bundle) から誘導される

map $g: N(M^k)/\dot{N}(M^k) \to MU(\frac{n-k}{2})$ が得られる。（但し，$N(M^k)$ は M^k の X^n における tubular neighborhood である。）この map より，次の map が考えられる

$$\alpha(f): X \to X/X-\mathrm{int}\,N(M) \to N(M)/\dot{N}(M) \xrightarrow{g} MU(\frac{n-k}{2})$$

$\Phi([M^k, f]) = \{\alpha(f)\} \in u^{n-k}(X)$ と定める。

2. K − theory と cobordism group $u^*(\quad)$ との関係

定理 4. X を finite connected CW complex とすると，monomorphism $\rho: \widetilde{K}(X) \to u^2(X)$ が存在する。([2])

対応 ρ は，次のようにして与えられるものである。$X-n \in \widetilde{K}(X)$ において，X を表わす代表元を ξ^n とするとき，$\rho(X-n) = c_1(\xi^n)$ と定める。ここで $c_1(\xi^n)$ の定義を以下に述べる。

conplex projective space CP^n の上の $U(1)$ − Hopf bundle η と，包含写像 $i: CP^n \subset MU(1)$ を考える。homotopy class $c_1 = \{i\}$ は $u^2(CP^n)$ の元を表わす。

任意の finite complex X の上の $U(1)$ − bundle ξ に対して，n を十分大にとると bundle map $\xi \to \eta$ から誘導される map $f: X \to CP^n$ が存在する。$c_1(\xi) = f^* c_1$ と定義する。一般に finite CW complex X の上の $U(n)$ − bundle ξ^n に対しては，帰納的に次の様に定める。ξ^n の complex projective space を associated した bundle $g: E \to X$ を考える。その時 $g^! \xi^n = \eta_1 \oplus \eta_2$（但し，$\eta_1$ は E の上の $U(1)$ − bundle）と表わされる。

$g^* c(\xi^n) = c(\eta_1)\, c(\eta_2)$ なるような $c(\xi^n)$ は一意に存在する。（但し，$c(\xi^n) = 1 + c_1(\xi^n) + \cdots + c_n(\xi^n)$）故に帰納的に $c_1(\xi^n)$ を定義することができる。

3. $\pi : L^n(p) \to CP^n$ を canonical projection とする。$\sigma = \pi^!(\eta - 1_c)$ とおいて，定理3，定理4で与えられる対応 $\Phi : u_{2n-1}(L^n(p)) \to u^2(L^n(p))$，$\rho : \widetilde{K}(L^n(p)) \to u^2(L^n(p))$ を調べることによって，次の補題を得る。

補題5. $\rho(\sigma) = \Phi[L^{n-1}(p), i]$

一方［4］によると σ は $\widetilde{K}(L^n(p))$ の generator で，且つ order $p^{1+\left[\frac{n-1}{p-1}\right]}$ であるから定理1は補題5より直ちに得られる。

Ⅲ　定理2の証明

補題6. $u_{2n-1}(BZ_p) \approx u_{2n-1}(L^n(p))$，$u_{2n}(BZ_p) \approx u_{2n}(L^n(p))$

が得られるので，以後 $u_{2n-1}(L^n(p))$，$u_{2n}(L^n(p))$ の群構造を調べる。

$L^n(p)$ の $2n$ skeleton $L^n_0(p) = S^1 \cup_p e^2 \cup e^3 \cup_p e^4 \cup \cdots \cup e^{2n-1} \cup_p e^{2n}$

を考える。

$(L^{n+1}_0(p), L^n_0(p))$ に対して，exact 列を調べると，次の exact 列が得られる。

$$(1)\qquad 0 \to U_{2n} \otimes Z_p \to \widetilde{u}^2(L^{n+1}_0(p)) \to \widetilde{u}^2(L^n_0(p)) \to 0$$

この exact 列を利用して，次の exact 列が得られる。

$$(2)\qquad 0 \to U_{2n} \otimes Z_p \to u_{2n+1}(L^{n+1}(p)) \xrightarrow{j_*} u_{2n-1}(L^n(p)) \to 0$$

ここで対応 j_* は次の composition である。

$$u_{2n+1}(L^{n+1}(p)) \underset{\cong}{\overset{\Phi}{\to}} u^2(L^{n+1}(p)) \xrightarrow{j_0^*} u^2(L^n(p)) \underset{\cong}{\overset{\Phi^{-1}}{\to}} u_{2n-1}(L^n(p))$$

$(j_0 : L^n(p) \subset L^{n+1}(p)$ 包含写像$)$

$\Gamma(p)$ を $\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\cdots\alpha_j^{i_j}$ $(\alpha_i \notin U_{2(p-1)})$ で生成される polynomial ring とするとき $p^a \widetilde{L}_{a(p-1)} = b_a[CP^{p-1}]^a\widetilde{L}_0$ $(b_a \not\equiv 0 \bmod p)$

(［1］)

に注意すると，次の結果が得られる。

補題 7.　$\beta_k \varepsilon \Gamma(p)$ に対して　$(2i_k = \dim \beta_k)$

$$\sum_{i_k+k=n} \beta_k \tilde{L}_k = 0 \quad \text{ならば} \quad \beta_k \varepsilon\, p^{1+[\frac{k}{p-1}]} U_*$$

故に $\alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \cdots \tilde{L}_k$ $(\alpha_i \varepsilon U_{2(p-1)},\ 2(i_1+2i_2+\cdots)+2k+1=2n+1)$ の張る $u_{2n+1}(L^{n+1}(p))$ の部分群の order は $u_{2n+1}(L^{n+1}(p))$ の order と一致することが調べられ，定理 2 が得られる。

参　考　文　献

〔1〕 P.E.Conner, E.E.Floyd ; Periodic maps which preserve a complex structure, Bull, Amer, Math. Soc. 70 (1964) 574–579

〔2〕 P.E.Conner, E.E.Floyd ; Cobordism theories, Seattle Conference on Differential and Algebraic Topology(mimeographed), Amer. Math. Soc, Providence, R.I., (1963)

〔3〕 P.E.Conner, E.E.Floyd ; Torsion in SU – bordism, Memoirs of Amer. Math. Soc. 60 (1966)

〔4〕 T.Kambe ; The structure of K_Λ–rings of the lens space and their application, J.Math. Soc. Japan 18 (1966), 135–146.

〔5〕 R.Kultze ; Über die konplexen Cobordismen gruppen, Arch. Math. 17 (1966), 226–223.

PL_2 の homotopy type について

秋 葉 忠 利

§ 0.　semi－simplicial group PL_n は Milnor [3] により導入され，microbundle の structure group の役割を果すことは良く知られていますが，その unstable な homotopy 群は余り良くわかっていません。Kuiper－Lashof は [2] に於て，exact sequence

$$\to \pi_j(PL_n) \to \pi_j(S^{n-1}) \oplus \pi_{j-1}(C_{n-1}) \to \pi_{j-1}(PL_{n-1})$$
$$\to \pi_{j-1}(PL_n) \to$$

の存在を示し，$\pi_i(PL_1) \cong \pi_i(O_1)$，$\pi_i(PL_n)$ は $\pi_i(O_n)$ に injective に入ることを $n \leq 3$ で示しています。すべての n について $\pi_i(PL_n) \cong \pi_i(O_n)$ が成立しないことも良く知られていますが，以下，n＝2 では同型が成立することを示します。

n＝2 ということを essential に生かして，幾何学的，かつ初等的な方法に依っているので，$n \geqq 3$ 以上への拡張は困難に思われます。なお詳しくは [4] を参照して頂きたいと思います。

§ 1.　考える category は勿論(!) PL－category です。Kuiper－Lashof [2] により，PL_n は $\overline{H}(I \times S^{n-1})$ と homotopy type が等しいことがわかっています。$\overline{H}(I \times S^{n-1})$ は $\triangle_k$ を base とする trivial bundle の isomorphism $f : \triangle_k \times (I \times S^{n-1}) \to \triangle_k \times (I \times S^{n-1})$ で，かつ $\triangle_k \times \{0\} \times S^{n-1}$ と $\triangle_k \times \{1\} \times S^{n-1}$ を動かさないようなものを k－simplex とする semi－simplicial complex です。今 n＝2 ですから，$f : \triangle_k \times I \times S^1 \to f : \triangle_k \times I \times S^1$ をその universal covering $\triangle_k \times I \times R$ の automorphism で周期性の条件の付いたものとみることができます。こう見たとき $f(\triangle_k \times I \times \{0\})$ を $\triangle_k \times I \times \{0\}$ まで周期的な isotopy によって戻すことができれば，R を S^1 に

project することができ join extension により，$\pi_k(PL_2) = 0$ ということができます。ところが，一般の k は，"nice triangulation" の存在から，$k = 0$ の場合に帰着され，この場合は $I \times \{0\}$ と $f(I \times \{0\})$ の囲む complex の境界にある三角形の種類により，isotopy でもとに戻ることがわかります。$k = 1$ の場合，以下の周期的な bundle map の i）の条件を満たさない場合があり，homotopy 群は Z になることがわかります（H. Gluck [1]）。

§2. 定義 1. $I^i \times I \times R$ の Z－周期を持つ bundle homeomorphism とは $I^i \times I \times R$ の onto homeo. で次の条件を満たすものをいう。（以下 p.b. homeo と略す。）

i） $f \mid Bd(I^i \times I) \times R = \text{identity}$

ii） $f(\{x\} \times I \times R) = \{x\} \times I \times R$

iii） $f(x, t, r) = (x, t', r')$ と表わされるなら，$f(x, t, r+m) = (x, t', r'+m)$，但し m は整数，となる。

定義 2. p.b. homeo. f に関する $I^i \times I \times R$ の nice triangulation K とは

i） $I^i \times I \times Z$ に制限すると，それは subcomplex で

ii） $I^i \times I \times Z$ の triangulation J があって，f を J に制限すると K の中への simplicial map になっており，

iii） projection $p: I^i \times I \times R \to I^i$ は K に関して simplicial で，

iv） K は $Z: I^i \times I \times R \to I^i \times I \times R$ という，R の Z による translation に関して equivariant なものを言う。

この nice triangulation は例えば次のような良い特徴を持っています。

i） $f(I^i \times I \times \{\varphi\})$ に含まれる 2－simplex は $\text{fiber} = \{0\} \times I \times R$ に平行でない。

ii） 各 $(i+2)$－simplex は fiber に平行な 2－simplex をただ一つ

持っている。（これを nice − simplex という）

iii）任意の nice − simplex がその上にのるような有限個の帯 P_{V_j} が存在する。

iv）P_{V_j} の subdivision は equivariant ならK全体に拡張される。

v）K の equivariant な subdivision は更に subdivision により，nice にすることができる。

補助定理：任意の p.b.homeo に関して $I^i \times I \times R$ の nice triangulation が存在する。

直観的には明らかですが，まず各区間 $I^i \times I \times I$ で I^i への projection を考え，その逆像による cell 構造を分割して得られます。

bundle isotopy とは，fiber を保つような isotopy をいうこととすれば，次の定理が成立します。

<u>Bundle isotopy theorem</u>

$I^i \times I \times R$ の p.b.homeo f と，f に関する nice triangulation が与えられた時，$f \mid I^i \times I \times Z$ は identity に ambient bundle isotopy によって移される。

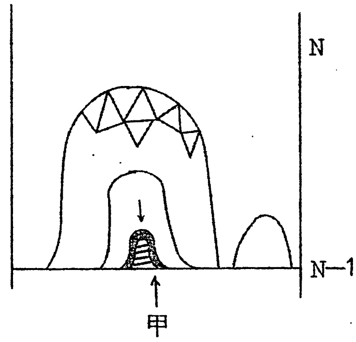
更に，この isotopy は $Bd\,(I^n \times I) \times R$ を fix し，Z の operation と可換である。

この定理により，§2の $f\,(I^i \times I \times \{0\})$ を元に戻すことが可能になり，PL_2 の homotopy 群がわかる訳です。Z の operation と可換なことにより $I^i \times I \times R$ でも $I^i \times I \times S$ どちらで考えても良いことが保証される訳です。

§3. 定理の特別な場合 $i = 0$ の証明の概略を示します。

I と $I \times 0$ を同一視して，$f(I) \subset I \times [-N, N]$ となる最小の整数Nをとります。$f(I) \cap I \times N$ は有限個の simplex から成っていて，isotopy で，これを内側（0に近い方）に押してやることができます。次の図のよう

な状態になったのですが，ここで一番内側の孤（甲）をとることができます。すると，甲の三角形の境界上にある辺の数と・連結性により，甲の三角形をいくつかの類に分けることができますが，そのうち，境界と二辺又は一辺で連結した共通部分を持った三角形は“つぶして”良いことがわかります。即ち，



isotopy によって，三角形をつぶした所まで，境界を内側に押すことができるわけです。あとはこのような三角形が常に存在することを言うわけですが，帰納法により容易にわかります。

さて一般の場合ですが，nice triangulation の性質 iii）で紹介した P_{V_j} 上の nice − simplex の数の帰納法により $i = 0$ の場合に帰着されます。この際，nice triangulation の性質から，各段階で作った nice − simplex の isotopy が次元の高い isotopy に拡張されることがわかります。

$i = 0$（従って $i > 0$ の場合にも）で各三角形に対して carrier がそのごく小さい近傍に含まれる isotopy を合成して定理の isotopy が得られた訳ですが，この三角形は十分小さくとることができるので Z の operation と可換なことが解ります。

参　考　文　献

〔1〕 H.Gluck, The embedding of two − spheres in the four − sphere, Trans, Amer. Math. Soc., 104 (1962), 308 − 333

〔2〕 N.H.Kuiper and R.K.Lashof, Microbundles and bundles I. Invent. math. 1 (1966), 243 − 259, II: to appear

〔3〕 J.Milnor, Microbundles and differentiable structures, Princeton University, 1961 (mimeographed)

[4] T.Akiba, On the homotopy type of PL_2, to appear in the Journal of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo.

微分同相群の連結成分について

佐藤　肇

向きづけられた微分可能多様体Mの向きを保つ微分同相全体を Diff M と書く，これは写像の結合によって群をなすが，それに pseudo − diffeotopy による同値関係 — 即ち f．g と Diff M が pseudo − diffeodoty とは $M \times I$ の微分同相Hで $M \times 0$，$M \times 1$ で f，g にそれぞれ一致するものが存在する — を入れ，その同値数全体を $\tilde{\pi}_0$ (Diff M) と書く。これは Diff M からひき起こされる群構造をもつ，今，写像 f，$S^{p-1} \to SO_{q+1}$ を特性写像とする S^p 上の D^{q+1} bundle，S^p 上の S^q bundle をそれぞれ ε_f，F_f とすると，ε_f，F_f は自然に微分可能多様体の構造を持つ，群 $\tilde{\pi}_0$ (Diff ε_f)，$\tilde{\pi}_0$ (Diff F_f) の構造を適当な次元の制限のもとに調べるのが才一の目標である。

homotopy class と diffeotopy class が一致する次元 $p < 2q-1$ の範囲 (Haeflger [1])，に限ると，計算は簡単になる。今，$r \in O(q+1)$ を reflection とし，$r^\#$ で内部自己同型による作用をあらわす。群 α を

$$\alpha = 0 \qquad r^\#\{f\} \neq -\{f\} \text{ の時}$$

$$\alpha = Z_2 \qquad r^\#\{f\} = -\{f\} \text{ の時}$$

と定義すると，次の定理が成立つ

定理 1.　$p < 2q-1$ と仮定する。群 $\tilde{\pi}_0$ (Diff ε_f) の位数は $\pi_p(SO_{q+1})$ の剰余群と群 α の直積の群の位数に等しい。特に

定理 2.　$p < 2q-2$ の時 $\tilde{\pi}_0$ (Diff $S^p \times D^{q+1}$) の位数は，群 $\pi_p(SO_{q+1}) \oplus Z_2$ の位数に等しい。

$\tilde{\pi}_0$ (Diff F_f) を計算する為には，我々は次のような filtration を入れる。$p < q < 2p-2$ と仮定する。

$$1 \subset \mathrm{Ker}\ M \subset \mathrm{Ker}\ L \subset \mathrm{Ker}\ K \subset \mathrm{Ker}\ A \subset \tilde{\pi}_0(\mathrm{Diff}\ F_f)$$

ここで，Ker A′，Ker K，Ker L，Ker M はひきおこす homology 群の

自己同型，q－次元の homotopy 群の自己同型， fibre S^q の tubular nbd の間の bnndle map，S^{p+q} の微分同相の pseudo－diffeotopy class がそれぞれ trivial なものになる。Diff F_f の subgroup の pseudo－diffeotopy class の集まりである。これらの群の間の相対次数をそれぞれ計算すればよいが，bundle F_f が trivial でない時には Milnor の pairing [2]，あるいは Wall の pairing [3]，に依存する量となる。bundle F_f が trivial，即ち $F_f = S^p \times S^q$ の時には次の定理が成立つ

定理3. $4 \leq p < q < 2p-2$ とする。$\tilde{\pi}_0$ (Diff $S^p \times S^q$) の位数は群 $Z_2 \oplus \pi_p(SO_{q+1}) \oplus \pi_q(SO_{p+1}) \oplus \Theta^{p+q+1}$ の位数に等しい。

未発表の Cerf の結果によると，上の定理3の次元のもとでは，pseudo－diffeotopy class を diffeotopy class は一致する為，群 Diff $S^p \times S^q$ の connected component の数をも与えていることになる。

以上の結果を用いると，我々は下の条件を満たす単連結な向きづけられる，多様体 (N_1)，(N_2)，(N_3) の微分構造全体の数を求めることが出来る。

$$(N_1): \begin{cases} H_i(N_1) = Z & i = 0,\ p,\ q+1,\ p+q+1 \\ H_i(N_1) = 0 & \text{その他} \\ \text{但し } 4 \leq p < q < 2p-2, & \pi_p(SO_{q+1}) = 0 \end{cases}$$

$$(N_2): \begin{cases} H_i(N_2) = Z & i = 0,\ p,\ q+1,\ p+q+1 \\ H_i(N_2) = 0 & \text{その他} \\ \pi_q(N_2) = \pi_q(S^p) & 4 \leq p < q < 2p-2 \end{cases}$$

$$(N_3) \simeq S^p \times S^{q+1} \quad \text{(homotepy equivalent)}$$

$$4 \leq p < q < 2p-2$$

その系として，例えば次のような結果が得られる。

系　(N_2) に属する多様体で $P \equiv 3, 5, 6, 7 \pmod 8$ の時，慣性群は自明群となる。

但し，多様体Mの慣性群とは Θ^{p+q+1} の部分群で，Mに connected sum

をしても微分構造が変わらないものの集りによって生成されるものを言う。

References

1. A.Haefliger Plongements differentiables de variétés dans variétés, Comment. Math Helv. 36 (1961) 47～82
2. R.Lashof Problems in differential and algebraic topology Ann. of Math. 81 (1965) 565～591
3. C.T.C.Wall Classification problems in differential topology Ⅰ.Ⅱ.Ⅲ Topology 2 (1963) 253～261

ベクトル場とその周辺の話題

白 岩 謙 一 (名 大)

§1. 前文 微分多様体の上のベクトル場について，Poincaré 以来多くの研究がなされ，位相幾何学の重要な理論を生み出して来た。例えば，ベクトル場の特異点が孤立しているとき，その点での示数が定義される。その示数の和は Euler の標数に等しいとが，Poincaré，Hopf 等によって証明された。(Cf. Milnor [5]) この結果はベクトル・バンドルの特性類の理論に拡張され，微分位相幾何学の基本的な領域と考えられる。(Steenrod [14], Milnor [6])

もう一つの方向への拡張として Morse − Smale の理論がある。これについては興味深い話題も多く，常微分方程式の定性的研究，又は力学系に関する Smale の理論等今後の発展が待たれているが，ここではそれにふれない。(Smale [13], Rosenberg [10])

又ベクトル場の理論と関連して，接バンドルの部分バンドル，即ち Chevalley の意味の distribution の存在の問題がある。これには種々の意味でベクトル場と関連するが，そのうち直接関係する部分だけについて述べることにする。distribution の存在に関しては最近の Thomas による研究を参照されたい。(Thomas [17])

さてこの小論では多様体の Span 及び rank について最近の研究を紹介し，この分野に多くの問題が解決を待たれていることを明らかにしたいと思う。文献は最小の範囲に限ったが，ここに上げた文献の中の引用文献を探って行けば，多くの必要な文献表が得られるはずである。

§2. Span M 以下考える多様体は特にことわらない限り閉ぢた連結な C^∞ 級微分多様体とする。Mを多様体としたとき $\tau(M)$ を M の接バンドルとする。$\{X_1, \cdots, X_r\}$ をM上のベクトル場，即ち $\tau(M)$ の cross − section とする。

このベクトル場がMの各点で一次独立のとき $\{X_1, \cdots, X_r\}$ をMの r－field と云う。このとき $\{X_1, \cdots, X_r\}$ はMの各点pでpの接空間 $\tau_p(M)$ の r－frame を与えている。

今 $O(n)$ を R^n（n次元ユークリッド空間）の直交変換群，R^n の r－frames の作る Stiefel 多様体を $V_{n,r}$ で表わすと次の命題が成り立つ。

命題 1. 次の条件は互に同値

(1) Mに r－field が存在する。

(2) $\tau(M)$ は r次元の trivial な部分バンドルをもつ。

(3) M上のベクトル・バンドル ξ があって，$\tau(M) = \xi \oplus t^r$，但し t^r は r次元 trivial バンドルで $\oplus$ は Whitney 和。

(4) $\tau(M)$ の構造群が $O(n-r)$，$n = \dim M$ まで reduce 出来る。

(5) ファイバーが $V_{n,r}$ となる $\tau(M)$ の附随バンドルに cross－section が存在する。（Milnor [7]，Steenrod [14]）

問題 1. Mに r－field が存在するための必十条件をMの位相的不変量 etc. を用いて表わせ。

Mの span $\sigma(M)$ を $\max\{r \mid M$ 上に r－field が存在$\}$ で定義する。すると特に次の問題がある。

問題 1′ Mが与えられたとき $\sigma(M)$ を決定する方法を与えよ。

問題 1 及び 1′ を一般的にとくのは今の所余りうまい方法がない。命題 1 の(5)を用いて障害の理論と結びつけるのは 1 つの方法であるが，計算が大変で後述の Thomas の結果がこの方向で現在の所一つの頂点と思われる。この外には多様体を具体的に与えて実際に span を計算してみせるわけだが，個々の問題が夫々困難で，例えば Eilenberg が云っている様に，Adams の n次元球面 S^n の span の決定に関する結果を解説するためにだけでも，位相幾何の本が一冊書ける位である。

例 1. (Poincare－Hopf) (Cf. Steenrod [14])

Mが 1－field をもつための必要十分条件は Euler の標数 $\chi(M) = 0$ で

ある。

例2.　(Adams [1])　$M = S^n$ とする。

$n+1 = (2a+1)2^b$, $b = c+4d$, $0 \leq c \leq 3$ とする。このとき

$\sigma(S^n) = 2^c + 8d - 1$

例3　(Bredon－Kosinski [2]) Mをπ－多様体，即ち stably－parallelizable とする。すると

$$\sigma(M) = \begin{cases} n & \text{又は} \\ \sigma(S^n) & \end{cases}$$

(但し $n = \dim M$) そして $\sigma(M) = n$ 即ちMが parallelizable となるのは $\chi^*(M) = 0$ となるときに限る。ここで $\chi^*(M)$ は次式で与えられる。

$$\chi^*(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}\chi(M), & (n:\text{偶数}) \\ \sum_{i=0}^{r} \operatorname{rank} H_i(M, Z_2) \bmod 2 & (h = 2r+1) \end{cases}$$

($H_i(M, Z_2)$ は Z_2 係数のMのホモロジー群)

例4.　(Sutherland [15])　今 M, M′ を方向付け可能で同じホモトピー型をもつものとする。　$r \leq \frac{1}{2}(n-1)$　($n = \dim M$) とする。

今 M が r－field をもち

(1)　n：偶数　　又は

(2)　S^n が r－field をもつ　　又は

(3)　$n = 2^k(2m+1)-1$,　$k, m \geq 1$　で

$w^i = 0$　for　$1 \leq i \leq 2^k$,　$k > 3$ なら　$i = 2^{k+1}m$

(但し w^i は Stiefel－Whitney 類)

$\Longrightarrow$　M′も r－field をもつ。

例5.　(Thonas [16])　Mは方向付け可能とする。

$$\left.\begin{array}{l} \dim M = 4k+3 \quad \text{又は} \\ \dim M = 4k+2,\ \chi(M) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2-\text{field が存在}$$

§ 3. rank M　M上の C^{∞} 級実数値関数全体の集合 $C^{\infty}(M)$ には自然にR上のベクトル空間の構造及び積が入ってR上の多元環となる。するとM上のベクトル場Xは $C^{\infty}(M)$ の微分作用素，即ち

(1)　$X : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ は線型

(2)　$X(f.g) = Xf.g + f \cdot Xg$

を満たすものと考えてよい。

今 X，Y をベクトル場として $[X.Y] : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ を $[X.Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ で定義すると $[X.Y]$ は又ベクトル場となる。今M上のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ で表わすと，上の「かっこ」積で $\mathfrak{X}(M)$ は Lie 環となる。

今 G を Lie 群とするときGのMへの作用とは $\Phi : G \times M \to M$，C^{∞} 級で $\Phi(g.x) = g.x$ と表わすと (1) $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$，(2) $1 \cdot x = x$ が $\forall g_1, g_2 \in G$. $x \in M$ に対して成立するものを云う。特にGが可換でその群演算が＋で与えられたとき $\Phi(g, x) = \varphi_g(x)$ で表わす。すると上の (1)，(2) は (1') $\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1+g_2}$，(2') $\varphi_0 = id.$（恒等写像）と表わせる。

ベクトル場Xが与えられたとき，その積分曲線を用いて実数全体の加群RのMへの作用 $\{\varphi_t\}_{t \in R}$ が定義される。この対応によって $\mathfrak{X}(M)$ と｛RのMへの作用｝が1対1に対応する。

今 $\{X_1 \cdots X_k\}$ をM上のベクトル場で $[X_i, X_j] = 0$　$i, j = 1 \cdots k$ とする。このとき $\{X_1, \cdots, X_k\}$ は可換と云う。今 X_i に対応する R の作用を $\{\varphi^{(i)}_t\}$ で表わすと $[X_i, X_j] = 0 \rightleftarrows \varphi^{(i)}_t \cdot \varphi^{(j)}_s = \varphi^{(j)}_s \circ \varphi^{(i)}_t$，従って可換なベクトル場 $\{X_1, \cdots, X_k\}$ が与えられると，R^k の作用が $\varphi_{(t_1, \cdots, t_k)} = \varphi^{(1)}_{t_1} \circ \cdots \circ \varphi^{(k)}_{t_k}$ で与えられる。（松島〔4〕，Nomizu〔8〕）

特に k − field で可換なものを問題にする。そして rank M = max｛k｜M上に可換な k − field が存在する。｝と定義する。

問題 2.　rank M を決定せよ。

命題 2.　M 上に可換な k − field が存在する必十条件は，R^k の M への作用で locally treeなものが存在すること。但し locally free とは R^k の orbit は全て k 次元の部分多様体と云うこと。

この命題から M 上に可換な k − field があれば，それは M の foliation を与えることがわかる。

例 1.　(Lima [3])　　　rank $S^3 = 1$

例 2.　(Rosenberg [11])　rank $S^2 \times S^1 = 1$

例 3.　(Arnold, Rosenberg [12]) .　V が単連結なら

$$\mathrm{rank}\ V \leqq \dim V - 2$$

k 次元 torus T^k の rank は明らかに k となる。従って $T^k \times N$ の rank $\geqq$ k となる。しかし rank $S^n \geqq 2$ となる様なことが起るかどうかは不明である。いずれにしても一般的な理論は殆んどなく，foliation の理論とベクトル場の定性的理論が用いられる。

この問題は，上の命題 2 と Palais [9] による「G を単連結な Lie 群とするとき，G の M への作用と G の Lie 環から $\mathfrak{X}$(M) への Lie 環の準同型は 1 対 1 に対応する。」を組み合わせて次の様に一般化される。

問題 3.　Lie 群の多様体への locally free な作用が存在する条件を求めよ。

勿論これは一般的な foliation の問題の一つの重要な部分である。non − trivial な例を作る事とか，必要条件を位相不変量で表わす事が現在の問題と思われる。

文　献　表

1. Adams: Vector fields on spheres, Ann. of Math., 75 (1962) 603 − 632
2. Bredon − Kosinski : Vector fields on π − manifolds, Ann.

of Math., 84 (1966), 85 — 90

3. Lema : Commuting vector fields on S^3, Ann. of Math., 81 (1965), 70 — 81

・4. 松島与三 : 多様体入門, 裳華房, (1965)

◁5. Milnor : Topology from the differeutiable Viewpoint, The Univ. Press of Virginia (1965)

・6. Milnor : Lectures on characteristic classes, Princeton Univ., (1957)

・7. Milnor : Differential Topology, Princeton, (1958)

8. Nomizu : Lie groups and differential geometry, Publ. Math. Soc. Japan (1956)

9. Palais : A global formulation of The Lie theory of transformation groups. Memoirs of Amer. Math. Soc. No. 22 (1957)

10. Rosenberg : A generalization of Morse — Smale inequalities, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 422 — 427

11. Rosenberg : The rank of $S^2 \times S^1$, Amer. J. of Math, 87 (1965) 11 — 24

12. Rosenberg : Action of R^n on manifolds, Inventiones mathematicae, 1 (1966)

13. Smale : Morse inequalities for a dynamical system, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960). 43 — 49

・14. Steemrod : The topology of fibre bundles, Princeton University Press, (1951)

15. Sutherland : Fibre homotopy equivalence and vector fields, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965), 543 — 556

16. Thomas : Postnikov invariants and higher order cohomo-

logy operations, Ann. of Math. 85 (1967), 184 — 217

17. E.Thomas : Fields of tangent 2—planes on even — dimeusional manifolds, Ann. of Math. 86 (1967), 349 — 361

Novikov − Browder の理論及び Surgery 問題について

末 松 熙 子（岐阜大）

Browder はある space が closed smooth manifold と同じ homotopy type を持つための必要十分条件を求め（[1]），Novikov は [12] に於て，homotopy equivalent な 1 − connected closed smooth oriented manifolds の (orientation preserving) diffeomorphism 分類を考えました。

概略は [10] (Th. 1. Th. 2. Theorem) によって知られる。[1] 及び [10] の Th. 2. までの段階を Lashof は f − cobordism，f − modification という概念を導入することにより，もっと一般的に証明し（[7]），Wall は nornal bundle の次元を metastable range に拡張し，更に CW − pair (X. Y) の bounded manifold $(M.\partial M)$ による実現を考えました（[18]）。

これらの証明に共通な基本的な道具は spherical modification であり，その idea はある組 $(M.\ \partial M.\ X.\ Y.\ f)$ [$(M.\partial M)$ manifold，(X. Y) CW − pair，$f:(M.\partial M)\to(X.Y)$ mapping] に対して，spherical modification によって (M.f) を変え，M の extra homology を kill し，f を homotopy equivalence にまでしようということである。… ( )

ここでは Lashof，Wall の仕事を紹介し，その後の surgery 問題の方向にも簡単に触れてみます。

§ 1. Def. X (1 − connected. finite CW − complex) が次の２つの条件を満すとき，n − 次元 Browder space という。 1) Poincaré duality を満す，ie. $H_n(X)\approx Z$ で $\mathscr{g}_X$ をその generator とすると，$\wedge\mathscr{g}_X : H^i(X)\xrightarrow{\cong} H_{n-i}(X)$，$\forall i$， 2) X 上の oriented vector bundle ξ^s が存在し，その Thom complex を $T(\xi^s)$，$\phi : H_n(X)\to H_{n+s}(T(\xi^s))$

を Thom 同型写像とすると $r=\phi(g_X)$ は spherical,

◎ 1－connected closed smooth manifold は Browder space である。

◎ $h:\pi_{n+s}(T(\xi^s))\to H_{n+s}(T(\xi^s))$ を Hurewicz map.

$A=h^{-1}(r)$ とすれば，$A=\text{finite}\neq\phi$

Def. ① (M^n,ν) が f－manifold $\Leftrightarrows$ ν は $M\to X$ の mapping で M の stable normal bundle $V_m(M)=\nu^*(\xi^s\oplus\varepsilon^{m-s})$, ② 2つの f－manifolds (M_1,ν_1), (M_2,ν_2) が f－cobordant とは，f－manifold (W^{n+1},ν) が存在して $\partial W=M_1\cup(-M_2)$, $\nu|M_i=\nu_i$ なるとき

これは同値関係で n 次元 closed f－manifolds を分類した classes の全体を X^n とすると，それは group になり，普通の Thom の cobordism のように

$$\text{定理：}\ X^n\cong\lim_{\ell\to\infty}\pi_{n+\ell}(T(\xi^s\oplus\varepsilon^{\ell-s}))\cong\pi_{n+m}(T(\xi^s\oplus\varepsilon^{m-s}))\quad \text{if } m>n.$$

が成立つ。特に

lemma： $\alpha\in A$ に対しても f－manifold(M^n_α,ν_α) が決まり，$\nu_\alpha:M^n_\alpha\to X$ は degree 1 にとれる。同じ α に対応する任意の2つは，f－cobordant.

さて，$\widetilde{A}=\{\alpha\in A;\ {}^\exists(M^n_\alpha,\nu_\alpha);\ \nu_\alpha:M\to X \text{ homotopy eq.}\}$ とおくと，

定理 I. (Browder－Novikov)

$n=\text{odd}\ (\geqq5)$，あるいは $n=4k\ (\geqq5)$ で ξ の dual $\widetilde{\xi}$ について Hirzebruch の Index Theorem ie $I[X]=\langle L_k(\widetilde{p}_1,\cdots,\widetilde{p}_k),g_X\rangle$ が成立つとき $\widetilde{A}=A\ (\neq\phi)$,

従って，特に，[1] の Th. 1，Th. 2 及び [10] の Th. 1 の前半がいえる。

又，X n−dim closed manifold のとき

$n=4k+2$ に対しては，$\widetilde{A}=A$ or $\frac{1}{2}A$（次元 n によってのみきまる）

Novikov は次の様な manifolds の family $F=\{M_i^n\}$ ；

M_i^n ： 1−connected，oriented，closed，smooth，dim $n\geqq 5$ で

$$f: M_i^n \to M_j^n \quad \text{h.e of degree 1} \quad \forall_{i,j}$$

条件(＊)　$V_m(M_i^n)=f^{*}V_m(M_j^n)$ ；但し V_m は各々 stable normal bundle.（$m\geqq n+3$）

を満すものを考えました。

条件(＊)は orientation preserving diffeomorphism が存在するための必要条件である。逆に，条件(＊)のある時 $M_i^n\times E^{n-1}\overset{d}{\simeq} M_j^n\times E^{n-1}$，$M_i^n\times D^k\overset{d}{\simeq} M_j^n\times D^k$，$M_i^n\times S^k\overset{d}{\simeq} M_j^n\times D^k$（十分大きな k に対して）なる degree 1 の diffeomorphisms が存在することが Mazur，Smale，により知られているが，M_i^n，M_j^n 自身は必ずしも diffeomorphic でないことも Milnor により例証されている。

Novikov によれば，任意の代表 M_0^n をとり，$(M_0^n,\ V_m(M_0^n))$ の f−cobordism theory を考えると，

$$◎\quad F/\sim \ \underset{1-1}{\longleftrightarrow}\ \widetilde{A}\subset A\subset \pi_{n+m}(T(V_m(M_0^n)))$$

なることがわかる。更に次の定理が成立つ，

定理 II.　(Novikov)

$(M_1^n,\ \nu_1)$，$(M_2^n,\ \nu_2)$ が同じ $\alpha\in\widetilde{A}$ に対応しているならば，Milnor Sphere $\widetilde{S}^n\in\theta^n(\partial\pi)$ が存在して

$M_1^n\overset{d}{\simeq}M_1^n\#\widetilde{S}^n$（diffeomorphic）である。

特に n even のときは $M_1^n\overset{d}{\simeq}M_2^n$．この一応用として次の定理が得られる。

定理： M_1^{2k}，M_2^{2k} を $(k-1)$−connected closed oriented smooth 2k 次元（$k>2$）manifolds とし，$h: M_1\to M_2$ homotopy equivalence があって，$V_m(M_1)=h^{*}V_m(M_2)$（$m\gg 2k$）ならば，

$M_1 \approx^d M_2 \# \tilde{S}^{2k}$, 従って $M_1 \approx M_2$.

以上では stable normal bundle $\nu_m(M^n)$, $(m \geqq n+3)$ が考えられていたが，Wall は meta stable range に拡張した。

定理 III：

1) $n > 4$ $n \neq 2 \pmod 4$ $2m > n+2$ で定理 I が成立ち，更に

2) 〃 〃 $2m > n+3$ で定理 II が成立つ，

次に boundary のある場合

Def. $(X. \partial X. z\ \xi^N. \alpha)$ が B. I. S. とは

$\leftrightarrows$ $\begin{cases} (X. \partial X) \text{ finite CW-pair で } X. \partial X \text{ は共に conn, 1-conn,} \\ z \in H_n(X. \partial X) \text{ は isomorphisms をひきおこす, i.e,} \\ \quad z_n : H^i(X;G) \cong H_{n-i}(X. \partial X;G) \\ \quad z_n : H^i(X \partial X;G) \cong H_{n-i}(X;G) \end{cases}$ for $\forall i, \forall G$ アーベル群

$\alpha \in TC_{N+n}(T(\xi^N), T(\xi^N)|_{\partial X})$ で

$h(\alpha) = \Phi(z)$

◎例 $(M^n, \partial M, z, \nu_N(M), c)$

M^n: smooth manifold with boundary ∂M

z : fundamental class

c : Thom construction による collapsing map

Def. homotopy equivalence $f : (M\ \partial M) \to (X. \partial X)$ があって，$\nu_N = f^* \xi^N$ $f_* c = \alpha$ のとき，M はその B. I. S. を実現するという。

定理 IV. (Wall)

1) $n \geqq 5$ $2N > n+2$ 但し $n = 5$ のときは ∂X はもともと closed smooth manifold であるとすれば，任意の B. I. S. は manifold $M^n \subset D^{N+n}$ により実現される。

2) $n \geqq 6$ $2N > n+3 \Longrightarrow$ その pair (D^{N+n}, M^n) は unique up to diffeomorphism

§ 2. 証明の概略

Def. f − modification

embedding $\phi : S^p \times D^{q+1} \to M^n$ ($p+q+1=n$) による，spherical modification によってえられる manifold を M' とすると $M \cdot M'$ は cobordant であるが，特に M, M' が f − modification $\phi(p, q)$ を f − modification という。

記号： $\phi(S^p \times 0)$ の表わす M の homology class を x とするとき，spherical modification により生じる $* \times S^q$ の表わす M' の homology class を x' とし $x \overset{\phi}{\sim} x'$ とかく。

(Th. I). $\alpha \in A(\neq \phi)$ に対し，f − manifold (M^n, ν) で $\nu : M \to X$ deg 1 のものがある。$K_p = \ker \nu_* : H_p(M) \to H_p(X)$ とおくと，deg $\nu = 1$ より K_p は H_p の直和因子となり，かつ $\{K_p\}$ の間に Poincaré duality のなりたつことがわかる。従って f − modification によって，$p \leqq [\frac{n}{2}]$ の K_p をすべて kill すれば ν は homotopy equivalence になり (M, ν) は (X, ξ^s) を実現する。

実際

1) $K_i = 0$ $i < p$ $\to$ $K_p \ni x$ spheical

2) $p < \frac{n}{2}$ or $2 < p = \frac{n}{2}$ $\to$ $^\exists S_x^p$: x を表わす embedded sphere

3) $p < \frac{n}{2}$ $\to$ S_x^p は trivial normal bundle ν_x をもつ

($p = \frac{n}{2}$ $\to$ $\nu_x \oplus \varepsilon^1 =$ trivial)

4) このとき f－modification が可能で

i) $p < [\frac{n}{2}]$ なら $K_i(M') \cong K_i(M)$ $i < p$

$K_p(M') \cong K_p(M)/(x)$ ((x) は x で生成される subgroup)

ii) $p \neq 0$ $\pi_1(M) = 0 \to \pi_1(M') = 0$

iii) $p = 0$ $\pi_1(M') \cong \pi_1(M)/G$ ($G \ni x$ なる subgr.)

従って inductive に

5) $K_p = 0$ $p < [\frac{n}{2}]$ とできる。

6) middle 次元を消すのは Kervaire－Milnor と analogous な議論でなされる。

(6－i) $n = 2K+1$ のとき，$K_i = 0$ $i < K$，K_k を kill すればよい

① K_k $x \xrightarrow{\phi} x'$ K_k' とすると

$K_k/(x) \cong K_k'/(x')$ かつ x free なら $x' = 0$

故に

② K_k はその Torsion T にまで reduce できる。

③ $k \equiv 0\ (2)$ のとき

f－modification $\phi(k.k)$ は $K_k(M)$ の Betti number を変える。

$\therefore K_k'$ の rank > 0， $\therefore$ ① より x' infinite

$$\therefore \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Z & \to & K_k' & \to & K_k'/(x') & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 1 & \to & x' & & & & \end{array}$$ ，exact となり

K_k' の Torsion group T' は $K_k'/(x')$ へ mono に入る。

$\therefore \quad T' < K_k = T$ ($<$ は order が小の意味)

$\therefore$ ② により，K_k はより小さい torsion group におきかえられる。

従って，有限回で $K_k = 0$ とできる。

$k \not\equiv 0\ (2)$ のときは linking number を使って，もう少しデリケートな議論で証明される。

(6—ii) $n = 4k$ のとき K_{2k} だけ残っている。

① index Theorem $I[X] = <\ ,\ >$ より $I(K_{2k}) = 0$

② K_{2k} free ← (ν deg 1, universal, coefficient Th. より)

従って

③ $\{\lambda_i, \mu_j\}$ symplectic basis for K_{2k}

$$\lambda_i \cdot \lambda_j = 0 \qquad \lambda_i \cdot \mu_j = \delta_{ij}$$

(• は intersection number).

が存在するが，かつ，

$S^{2k}_{\lambda_i}$ は trivial normal bundle をもつことがいえる。

④ λ_i を kill するよう f — modification できて，そのとき

λ_i, μ_i が同時に消え $K'_{2k} \cong Z[\ \cdots\cdots \overset{\vee}{\lambda_i}, \overset{\vee}{\mu_i} \cdots\cdots\ ]$,

⑤ 従って $K_{2k} = 0$ にできる。

(Th. II).

M_1, M_2 の間に retract cobordism, $r : W^{n+1} \to M_1$

$r|_{M_2} : M_2 \to M_1$ homotopy equiv，があって，W, M_2 の normal bundles は M_1 の方から induce される。

M_1 による f — theory を考え，Th. I と同じく，但し $\partial W = M_1 \cup M_2$ に触れぬよう $W - \partial W$ に f — modification をやり，$[\frac{n+1}{2}]$ の前まで kill できる。

n even のとき r は h.e. にまででき，従って Smale により $M_1 \overset{d}{\simeq} M_2$,

n odd ($= 2k+1$) のとき，$H_{k+1}(W, M_1)$ の generator を表わす sphere から構成される handle body の boundary として $\tilde{S}^n$ が残る。

(Wall : 省略)

§3. 以上では $\pi_1 = 0$, smooth の場合が考えられていたが，その後，$\pi_1 \neq 0$ や P.L. の場合が研究され，又(.8.)の観点(p.1)を進めて embedding や Hauptvermutung の問題も考えられている。主なものをあげると

① Browder : Embedding 1−conn. manifolds

② 〃 : Manifolds with $\pi_1 = Z$.

③ Wall : Surgery of non−simply connected manifolds

④ Browder, Hirsch : Surgery on P.L. manifold and applications

⑤ J.B.Wagoner : C^∞ and P.L. surgery

⑥ 〃 : Producing PL−homeo by surgery.

①では Poincaré duality を満す finite 1−connected polyhedron を codim $k = 1$ or > 2 のある manifold W の submanifold として実現すること。及び特にXが smooth のとき，更に imbed させることが考えられている。

② $\pi_1 = Z$ のときの $N - B_r - W$ の拡張を考えている。

$\pi_1 = 0$ のときは Whitney embedding theorem, Hurewicz theorem など多くの条件が surgery を可能にしていて，しばしば ν を h.e. にまでできた。しかし $\pi_1 \neq 0$ のときはいろいろな問題が起る。但し $\pi_1 \neq 0$ のときはある意味で $\pi_1 = 0$ のときに reduce され，適当な条件をつけて $N - B_r$ の実現定理や，Nの定理IIの analogy がいえる。結果は P.L. でも成立つ。

③ 例えば $\pi_1 = Z_2$ の場合の研究は homotopy projective space の diffeomorphism 分類へ応用されるだろう。

④ $N - B_r - W$ の P.L. analogy

又，

$N - B_r$ では十分高いユークリッド空間の中で考え，どの空間の中で modification をやるか問題にしていなかったが，Wall は closed case

は fixed sphere S^*, relative case は fixed manifold 内での modification ということが起る。

⑤では，これを一般化し，

$(X,\partial X)$ CW－pair with bundle ξ に対し

$(W,\partial W)$ compact manifold

$(V,\partial V) > (E(\xi), E(\xi)|\partial X)$ を open subpair として含む space.

$f : (W,\partial W) \to (V,\partial V)$

を考え，$(M,\partial M) = (f^{-1}(X), f^{-1}(\partial X))$ とおいて，f を $(X,\partial X)$ で t－reg な h.e. にまで deform することが考えられている。

⑥では，その surgery technique が P.L.manifold に適用され，$f : (M,\partial M) \to (X,\partial X)$ h.e. を更に PL homeo にまで deform する問題に応用されている（Hauptvermutung），これとは独自に D. Sullivan の Hauptvermutumg への応用もある。

他に $N-B_r$ ということではないが surgery 自身に関しては Reinhart, Mielke などの仕事もあり，この方面は，まだいろんな問題，発展が期待できそうです。

(注) Browder は②の method を，1－connected manifolds の diffeomorphism の pseudo － isotopy classes の group の研究に適用しました。（[4]）

参　考　文　献

[1] W.Browder : Homotopy type of differentiable manifolds Colloquium on Alg. Top. (Aarhus) 1962.

[2] 〃 : Embedding 1－connected manifolds. Bull. of. A.M.S. (66)

[3] 〃 : Manifolds with $\pi_1 = Z$. Bull. of. A.M.S. (66)

[4] W. Browder : Diffeomorphisms of 1—conn. manifolds, Trans. '67. 7月

[5] Browder and Hirsch : Surgery on PL—manifolds and applications. Bull. of A.M.S. (66)

[6] Kervaire—Milnor : Groups of homotopy spheres I.

[7] Lashof : Some theorems of Browder and Novikov on homotopy equivalent manifolds. Lecture note Cicago.U.

[8] Mielke M.V. : Generalized modifications and cobounding manifolds. J. of M. Mech. 15 (66)

[9] Milnor : A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds.

[10] Novikov. S.P. : Diffeomorphisms of simply connected manifolds. A.M.S. Translations (Soviet Math). (62)

[11] 〃 : Some properties of manifolds of dim (4k+2). A.M.S. Translations. (63)

[12] 〃 : Homotopically equiv. smooth manifolds I. A.M.S.T. (64)

[13] Reinhart, B.L. : Vector cobordism and surgery. Moscow Congress (66)

[14] Sasao. S. : An exampli for the Theorem of W. Browder. J. of M.S.J. 17 (65).

[15] Sicks, .L. : Trace Bending and spherical modifications. J. of Mech. (66).

[16] Wagoner, J.B. : Smooth and PL surgery. Bull. of A.M.S. (67)

[17] Wagoner, J.B. : Producing PL-homes. by surgery. Bull. of A.M.S. (67)

[18] Wall, C.T.C. : An extension of results of Novikov and Browder. A.J. of M. (66)

[19] 〃 : Surgery of non-simply conn. manifolds. Ann. of M. (66).

[20] Wong Yuen-fat : A theorem on homotopy equivalent (2k+1)-manifolds. Proc. A.M.S. 16 (65).

On 2-spheres in 4-manifolds

鈴 木 晋 一 （上智大）

$(fS^2; M^4)$ により，三角形分割され，方向付けられた PL 4-manifold M^4 と，その内部 $\mathring{M}^4$ に subcomplex として embed されている。方向付けられた 2-sphere fS^2 の対を示し，f をその PL embedding とする。

このとき，f の local singularity を次のように定義する。

点 $x \in fS^2$ の M^4 における closed star neighborhood を N とすると，その境界 ∂N ($\dot{N}$ とも書く) は，M^4 から誘導された方向を持つ 3-sphere で，$fS^2 \cap \partial N$ は，fS^2 から誘導された方向を持つ 1-sphere である。$(fS^2 \cap \partial N \subset \partial N)$ の (oriented) knot type ($k(x)$と記す) を，f の x における singularity という。

$k(x)$ が trivial type のとき，fS^2 は x で locally flat であるといい，そうでないとき x で locally knotted であるという。その全ての点で locally flat のとき，fS^2 は locally flat であるという。

(注) 一般の PL-embedding に関する local singularity については，[2] [5] [6] 等 Combinatorial Topology の論文を参照。

次の補題が成立する。

＜補題 1＞ 対 $(fS^2; M^4)$ において，fS^2 は，点 $x_1, \cdots, x_n$ で locally knotted とし，その singularities を $k(x_1), \cdots, k(x_n)$ とする。

すると次のような embedding $g: S^2 \subset M^4$ が存在する。

(i) gS^2 は，唯一点 y で locally hnotted で，その singularity は

$$k(y) = k(x_1) + \cdots\cdots + k(x_n)。$$

(ii) $f \simeq g$ (f と g は M^4 で isotopic である。)

(略証) M^4 を二回重心細分し (従って fS^2 も)．$x_1, \cdots, x_n$ を含む polygonal tree T を fS''^2 上にとる。T の M''^4 における star neighborhood N をとれば，N は 4-cell で，$\partial N \cap fS^2 \subset \partial N$ は $k(x_1)$

$+ \cdots\cdots + k(x_n)$ を represent する knot である。$\mathring{N}$ の一点 v と $\partial N \cap$ fS^2 を join すると，N に新しい 2−cell $v * (\partial N \cap fS^2)$ ができるが，$gS^2 = v * (\partial N \cap fS^2) \cup \overline{(fS^2 - (N \cap fS^2))} \subset M^4$ と定めるとよい。$f \simeq g$ は明らか。

(注) ε−isotopy により，f を locally flat embedding にできるか？については，obstruction theory がある。[2] [6] を参照。

また S^2 を closed surface M^2 に置き換えても，この補題は成り立つ。

ところで，$(fS^2; S^4)$，$(fS^2; R^4)$ を，$fS^2; B^4)$ を，fS^2 が一点で locally kenotted であるような対とすると，その singularity は，いずれも slice knot type であり，また slice knot type に限ることが知られる [2]。（特にこの場合には，locally flat embedding g : $S^2 \subset S^4$ (or R^4, B^4) が存在して，$f \simeq g$ となる。） そこで，S^2 を，唯一点で locally kenotted であるように $S^2 \times S^2$，PC(2) に embedding したとき，その singularity として，どんな knot type が出現するかを調べる。

次が成り立つ。

<定理 1> 任意の kont type k に対し，これを唯一点の local singularity として持つ 対 $(fS^2; S^2 \times S^2)$ が存在する。

（構成）

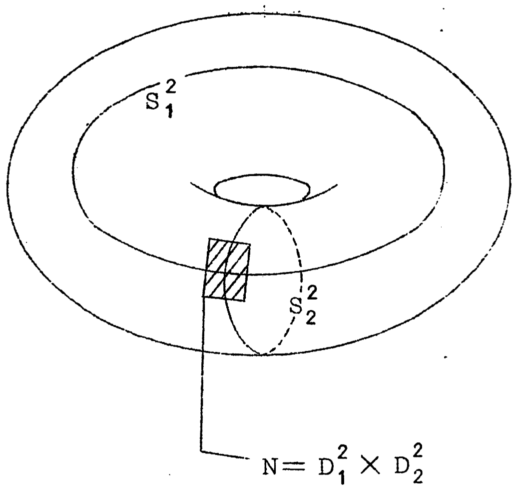
S^2_i に 2−cell D^2_i を適当に選んで $(i = 1, 2)$，$S^2_1 \times S^2_2$ の中に $N = D^2_1 \times D^2_2$ なる 4−cell を定める。$\partial N = S^3$ に，与えられた knot type k の representative 1−sphere Σ^1 をとる。ところが [8] により，k のほどき数を $n (\geqq 1)$ とすると，Σ^1 は次図のような標準形にとることが出来る。（即ち，n + 1 個の unknotted circles $C_0, C_1, \cdots,$ C_n が図のように link し，C_0 と C_i $(i = 1, \cdots, n)$ とは互いに交叉しな

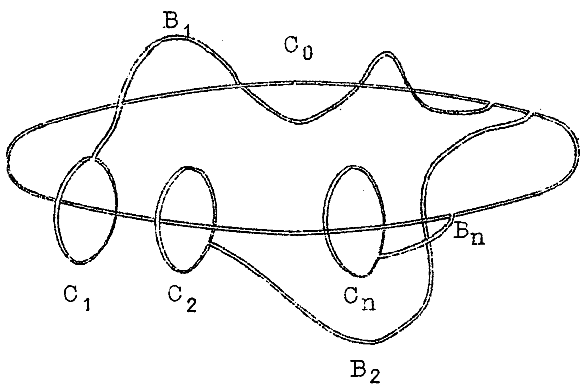
い細い帯 B_i で結ばれる。)

ところで $C_0, C_1, \cdots ; C_n$ には，明らかに $\overline{(S^2\times S^2-N)}$ で disjoint に locally flat 2−cells $C_0^2, C_1^2, \cdots, C_n^2$ が張られるから，(例えば，$\partial N = D_1^2\times \dot{D}_2^2 \cup \dot{D}_1^2\times D_2^2 = D_1^2\times S_2^1 \cup S_1^1\times D_2^2$ の中で，C_0 を $D_1^2\times S_2^1$，$C_1, \cdots, C_n$ を $S_1^1\times D_2^2$ の中に入れて考えるとよい)。Σ^1 には $\overline{(S^2\times S^2-N)}$ で locally flat 2−cell

$$C_0^2\cup B_1\cup C_1^2\cup B_2\cup \cdots \cup B_n\cup C_n^2$$

が張れる。一方，$\mathring{N}$ に一点 v を選び，join $v*\Sigma^1$ を作ると 2− cell だから，$S^2\times S^2$ の中に 2−sphere





$$\Sigma^2 = (v*\Sigma^1)\cup(C_0^2\cup B_1\cup C_1^2\cup B_2\cup \cdots \quad B_n \quad C_n^2)$$

が出来，Σ^2 は一点 v で locally knotted で，その singularity は k である。

(注) $(k_1, \cdots, k_n)$ を knot type の collection とすると，knot の分解の一意性を利用すれば，$(k_1, \cdots, k_n)$ を local singularities として持つ 対 $(fS^2; S^2\times S^2)$ が存在することも分る。

次に PC (2) について考察する。

PC (1) $\subset$ PC (2) の tubular neighborhood を U とすると，PC (2) $=$ U $\cup$ B^4 となる。但し，B^4 は 4－cell。

$$p : U \rightarrow PC(1) = S^2$$

を normal projection とすると，点 $x \in$ PC (1) について $P^{-1}(x)$ は 2－cell（これを $D^2(x)$ と書く）となる。ここで ∂U は 3－sphere で，$p \mid \partial U$ は $S^3 \rightarrow S^2$ の Hopf fibration である。

点 x_1，$x_2 \in$ PC (1)，$x_1 \neq x_2$，について，

$$p^{-1}(x_1) \cap p^{-1}(x_2) = D^2(x_1) \cap D^2(x_2) = \phi$$

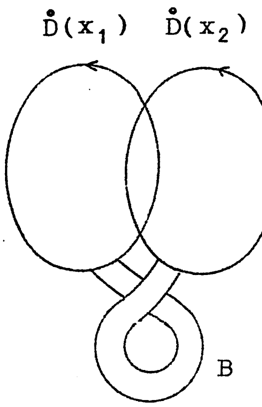
$$\mathring{D}^2(x_1) \cup \mathring{D}^2(x_2) \subset \partial U = S^3$$

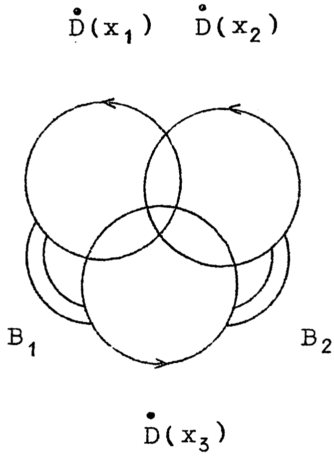
が成り立つ。ところで $H_2(PC(2)\,;\,z) \cong z$ の生成元を γ とすると，$\gamma \cdot \gamma = 1$ (homology intersection number) で，PC (2) の 2－sphere $D^2(x) \cup (v * \mathring{D}^2(x))$，（但し v は $\mathring{B}^4$ の点），が γ の representation になることから，$\mathring{D}^2(x_1)$ と $\mathring{D}^2(x_2)$ は $\partial U = \partial B^4 = S^3$ で homological に一度 link している (図参照)。

そこで PC (1) に点 $x_1, \cdots, x_n$ をとり，$D^2(x_1), \cdots, D^2(x_n)$ を作る。これら n 個の 2－cell を $\partial U = \partial B^4$ の中で互いに交叉しない細い帯 $B_1, \cdots, B_{n-1}$ で結び，$D^2(x_1) \cup B_1 \cup D^2(x_2) \cup B_2 \cup \cdots B_{n-1} \cup D^2(x_n)$ が，一つの 2－cell になるようにする（これを D と書く）。$\mathring{B}^4$ に一点 v をとり，$v * \mathring{D}$ を作ると 2－cell で，PC (2) の中に 2－sphere

$$\Sigma^2 = D \cup (v * \mathring{D})$$

が出来る。Σ^2 は一点 v で locally knotted で，その singularity は，下図左から，すべてのほどき数 1 の knot に，また一般に，(n, n+1) 型の torus knot になり得る。





結局次が言える。

<定理2> 対（fS^2；PC(2)）の唯一点の singularity として，

(i) すべての slice knot

(ii) （n，n+1）型のすべての torus knot

(iii) ほどき数1のすべての knot

が出現可能である。

最後に locally knotted 2−sphere の regular neighborhood について一つの考察を行なう。

（fS^2；M^4）を，唯一点 $y \varepsilon fS^2$ で locally knotted で，その singularity が k(y) である対とし，N（fS^2；M^4）を fS^2 の regular neighborhood とする。次が成り立つ。

<定理3>

$$\pi_1(\partial N(fS^2;M^4)) = \left(\begin{array}{l} \text{生成元} \\ \quad : S_1, \cdots, S_u, m, \ell. \\ \text{関係式} \\ \quad : r_1 = \cdots = r_{u-1} = 1 \\ \quad\quad m = m(S_1, \cdots, S_u) \end{array} \right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \ell=\ell(s_1,\cdots,s_u) \\ m^x\ell=1 \end{array}\right\}$$

但し，生成元 s_1，…，s_u，関係式 $r_1=\cdots=r_{u-1}=1$ は knot $k(y)$ の knot group を定義し，m，ℓ は各々 knot $k(y)$ の meridian, longitude であり，x は 対 $(fS^2; M^4)$ の Euler number である。

（略証）

M^4 を一回重心細分し（従って fS^2 も）．y の M'^4，fS'^2 における star neighborhoods を各々 $N(y;M'^4)$，$N(y;fS'^2)$ とする。$\partial N(y;fS'^2)\subset \partial N(y;M'^4)$ が $k(y)$ を represent する knot である。$p=c\ell(fS^2-N(y;fS'^2))$ は，locally flat 2−cell で，[5] により

$$\partial N(P;M'^4)=\partial(P\times D^2)=\partial P\times D^2\cup P\times S^1$$

$$=\partial N(y;fS'^2)\times D^2\cup P\times S^1。$$

一方

$$\begin{aligned}
&\partial N(fS^2;M'^4)\\
&=c\ell\{\partial N(y;M'^4)\cup\partial N(P;M'^4)-\partial N(y;M'^4)\cap\partial N(P;M'^4)\}\\
&=c\ell\{\partial N(y;M'^4)-\partial N(y;fS'^2)\times D^2\}\cup c\ell\{\partial N(P;N'^4)-\partial P\times D^2\}\\
&=c\ell\{\partial N(y;M'^4)-\partial N(y;fS'^2)\times D^2\}\cup P\times S'
\end{aligned}$$

ところが $c\ell\{\partial N(y;M'^4)-\partial N(y;fS'^2)\times D^2\}$ は，knot $\partial N(y;fS'^2)$ の regular neighborhood $\partial N(y;fS'^2)\times D^2$ の complement であるから，

$$\begin{aligned}
&\pi_1(c\ell\{\partial N(y;M'^4)-\partial N(y;fS'^2)\times D^2)\\
&=\pi_1(\partial N(y;M'^4)-\partial N(y;fS'^2)\}\\
&=|s_1,\cdots,s_u;r_1=\cdots=r_{u-1}=1|
\end{aligned}$$

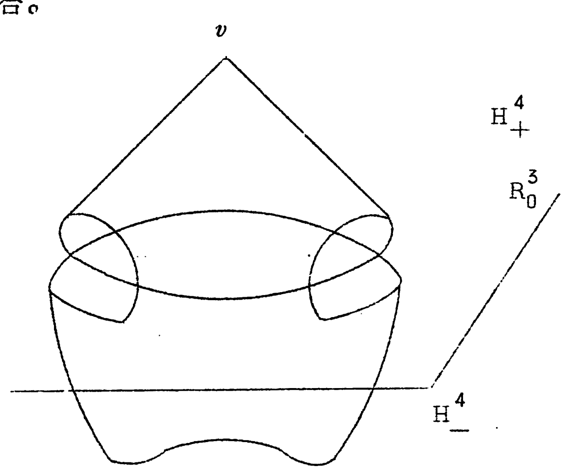
但し，$|S_1, \cdots, S_u ; r_1 = \cdots = r_{u-1}|$ は knot $k(y)$ の knot group.

$$\pi_1 (P \times S^1) = z$$

ところで［9］pp. 177 Satz I により，$c\ell\{\partial N(y; M'^4) - \partial N(y; fS'^2) \times D^2\} \cap P \times S^1$ と $c\ell\{\partial N(y; M'^4) - \partial N(y; fS'^2) \times D^2\} \cap$ の $P \times S^1 = S^1 \times S^1$ とから，$\pi_1(\partial N(fS^2; M'^4))$ が得られるが，$S^1 \times S^1$ で得られる新しい関係式が $m^x \ell = 1$ である。証明終り。

(注)　PL の Euler number については，［5］［7］を参照。

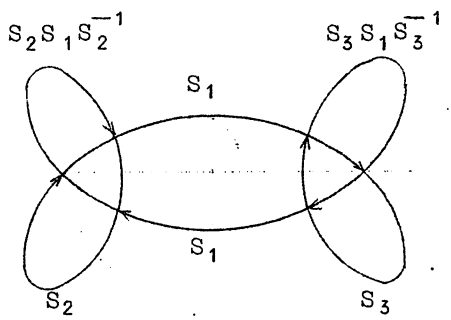
≦例>　$(fS^2; R^4)$ で，その唯一点の singularity が square knot の場合。



R^3 に square knot（図参照）を represent する 1－sphere Σ^1 をとり，H^4_+ の一点 v との join $v * \Sigma^1$ を作る。square knot は slice knot だから，Σ^1 は H^4_- で locally flat を 2－cell C^2 を bound する。

$$\Sigma^2 = (v * \Sigma^1) \cup C^2$$

は，R^4 の中の 2－sphere で，一点 v で locally knotted であり，その singularity は square knot である。



定理3　により，Σ^2 の R^4 における regular meighborhood N について，$\pi_1(\partial N)$ を計算する。

square knot の knot group G は

$$G = | s_1, s_2, s_3 ; \ s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, \ s_1 s_3 s_1 = s_3 s_1 s_3 |$$

また，$m = s_1$，$\ell = s_3^{-1} s_1 s_3 s_2^{-1} s_1^{-1} s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} s_3^{-1} s_1$

$\pi_2(R^4) = 0$ から $x = 0$ を得る。従って，

$$\pi_1(\partial N) = \left\{ \begin{array}{ll} \text{生成元}： & s_1, s_2, s_3 \\ \text{関係式}： & s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, \ s_1 s_3 s_1 = s_3 s_1 s_3, \\ & s_3^{-1} s_1 s_3 s_2^{-1} s_1^{-1} s_2 \ s_1^{-1} s_2^{-1} s_3 s_1 = 1 \end{array} \right\}$$

ここで，$\pi_1(\partial N)$ から，3次対称群 $\mathbf{S}_3$ へ，対応 h を

$$h(s_1) = (1, 2)$$
$$h(s_2) = (1, 3)$$
$$h(s_3) = (2, 3)$$

と定めると，h は onto homomorphism となり，$\mathbf{S}_3$ が non－abelian であることから，∂N は $S^2 \times S^1$ とは homeomorphic でないことが分る。

文　　献

〔1〕 R.H.Fox, On the complementary domains of a certain pair of inequivalent knots, Indag. Math., 14 (1952), 37－40.

〔2〕 R.H.Fox, and J.W.Milnor, Singularities of 2－spheres in 4－space and cobordism of knots, Osaka J. Math., 3 (1966), 257－267.

〔3〕 M.A.Kervaire and J.W.Milnor, On 2－spheres in 4－manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 47 (1961), 1651－1657.

[4] J.F.P.Hudson and E.C.Zeeman, On regular neighborhoods, Proc. London Math. Soc., 14 (1964), 719 — 745,

[5] H.Noguchi, A classification of orientable surfaces in 4—space, Proc. Japan Acad., 39 (1963), 422 — 423.

[6] ———, Obstructions to locally flat embeddings of combinatorial manifolds, Topology, 5 (1966), 203 — 213.

[7] R.Takase, Note on Orientable surfaces in 4—space, Proc. Japan Acad., 39 (1963), 424.

[8] 寺阪英孝，数学会１９６４年度秋季九大総合分科会講演。（結び目の話，数理科学　１９６４年１１月号参照）。

[9] H.Seifert and W.Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Leipzig (1934).

[10] E.C.Zeeman, Seminar on Combinatorial Topology, Institut des Hautes Etudes Scientifiques. 1963 (revised 1966).

A Construction of a transverse k－plane field

小 林 一 章 （神戸大）

この論文では Euclidean (n+k) － space R^{n+k} の中にある種の条件の下で imbed された compact topological n－manifold M^n に先ず local に transverse k－plane field を立て，次にそれを M^n 全体に拡張するものである。

§ 1. Notation and Definition.

$G_{k,n}$ を R^{n+k} の中の原点を通る k－plane の全体とする。x，y を R^{n+k} の中の non－zero vectors とするとき $\alpha(x,y)$ で x と y のなす角を示す。$Q \in G_{k,n}$ のとき $\alpha(x,Q)$ は x とそれの Q への orthogonal projection との角とする。但し x が Q に orthogonal な時は $\alpha(x,Q) = \frac{\pi}{2}$ とする。$P \in G_{i,j}$，$Q \in G_{k,n}$，$i+j = k+n$，$i \leqq k$ のとき $\alpha(P,Q)$ は

$$\alpha(P,Q) = \max\{\alpha(x,Q) \mid 0 \neq x \in P\}$$ と定義する。

$P \in G_{k,n}$，$r > 0$ のとき

$$N(P,r) = \{Q \in G_{k,n} \mid \alpha(Q,P) < r\}$$ とする。

X，Y が R^{n+k} の subset のとき $X * Y$ で X と Y の join を示す $\tilde{\Delta}$ は simplex Δ の barycenter とし $St(\Delta, K)$ は Δ の complex K に於ける closed star とする。

radius $r(\Delta)$ = minimum distance from $\tilde{\Delta}$ to $\partial\Delta$.

diameter $d(\Delta)$ = longest edge of Δ.

$$\theta(\Delta) = \frac{r(\Delta)}{d(\Delta)}$$ ： Δ の thickness という。

K' を complex K の first barycentric subdivision とする。

dを普通の euclidean metric としたとき

$$U_\eta(x) = \{ y \varepsilon R^m \mid d(x, y) < \eta \}$$ とする

又ここでは特に断らない限り manifold は compact とする。

定義1. (M_i, W_i) $(i = 1, 2)$ を R^{n+k} の中の n−, (n+k) − monifold pairs とする。このとき (M_1, W_1) と (M_2, W_2) が ambient isotopic とは $f_0 = id$, $f_1 | (M_1, W_1) = (M_2, W_2)$ なる level preserving な homeo, $F ; R^{n+k} \times I \rightarrow R^{n+k} \times I$ が存在することである。但し, $F(x, t) = f_t(x)$, $I = [0, 1]$ とする。特に $d(f_1(x), x) < \varepsilon$ のとき F を ambient ε−isotopy という。

定義2. M_0^n : topological n−manifold

$\mathcal{g} : M_0^n \rightarrow R^{n+k}$ を topological imbedding とする。

このとき次の様な $\delta > 0$ が存在するなら $\mathcal{g}$ は locally ball imbedding という，即ち $^\forall\delta_1 \leqq \delta$ に対して $U_{\delta_1}(x) \cap M$ $(x \varepsilon M = \mathcal{g}(M_0))$ が topological n−ball，この δ を locally ball imbedding imbedding $\mathcal{g}$ に関する定数という。

定義3. $\mathcal{g} : M_0 \rightarrow R^{n+k}$ を const. δ をもった loc, ball imbedding とする。次の様な $\varepsilon > 0$ が存在するとき $\mathcal{g}$ を locally combinatorial imbedding という，即ち top, ball pair $(U_\delta(x) \cap M, U_\delta(x))$ が combinatorial ball pair (C^n, C^{n+k}) に ambient ε−isotopic である。ここで (C^n, C^{n+k}) は R^{n+k} のある simplicial division の subcomplex になっている。このとき (δ, ε) を loc, comb, imbedding に関する constant という。

定義4. M を constant (δ, ε) をもって R^{n+k} に locally combinatorial に imbed された top. n−manifold とする，すると M は $\{U_\delta(x_i) \cap M\}_{i=1}^N$ $(x_i \varepsilon M)$ で cover され $(\overline{U_\delta(x_i)} \cup M, \overline{U_\delta(x_i)})$ は combinatorial ball pair (C_i^n, C_i^{n+k}) に ε−isotopic である。

$$\theta(C_i^{n+k}) = \min_{\triangle \in C_i^{n+k}} \theta(\triangle^{n+k}), \quad \theta(R_0^{n+k}) = \min_{1 \leq i \leq N} \theta(C_i^{n+k})$$ とする。

定義5. top. manifold M^n が R^{n+k} に imbed されているとする。$P^k(x)$を $x \in M$ を通る k－plane とする。そのとき $P^k(x)$が x で M に transverse であるとは $\exists W(x) \subset M$, $0 < r < \pi/2$;

$\alpha(\delta y, P^k(x)) > r$ for any $y, y+\delta y \in W(x)$, $\delta y \neq 0$ なることである。又 transverse k－plane field over M とは cont. map $\varphi : M \to G_{k,n}$ で各 $\varphi(x)$が M に transverse なもののことである。

定義6. $P^k(x)$を $x \in M$ を通る transverse k－plane としたとき

$$\alpha(P^k(x), St(x,K)) = \min\{\alpha(P^k(x), P(\sigma)) ; \sigma \in S_t(x,K), \dim\sigma = n\}$$

とする。但し $P(\sigma)$は σ に依って決定される n－plane,

定理1. $g : M_0 \to R^{n+k}$ を適当な const. (δ, ε) をもった locally combinatorial 且つ locally flat な imbedding とし $\theta(R_0^{n+k}) \geq r$ for some $r > 0$ なら local transverse k－plane field $\varphi_i : U_i \to G_{k,n}$ をもつ M の finite open covering $\{U_i\}$ が存在する。

定理2. $\{U_i\}_{i=1}^{N}$ を定理1で得られた M の finite open covering とする。このとき $U_i \cap U_j \neq \phi$ なる任意の U_i, U_j を任意の $y, y+\delta y \in U_i$, $z, z+\delta z \in U_j$, $\delta y \neq 0$, $\delta z \neq 0$, $x \in U_i \cap U_j$ に対し $\alpha(\delta y, \varphi_i(x)) > r_i$, $\alpha(\delta z, \varphi_j(x)) > r_j$ とする。もし $r_i + r_j > \frac{\pi}{2}$, $r_i, r_j > 0$ 且つ $\varphi_i(y)$, $\varphi_j(z) \in N(P_{ij}, \pi/2)$ for some $P_{ij} \in G_{k,n}$ なら M は global transverse k－plane field $\phi : M \to G_{k,n}$ をもつ.

§ 2. Lemmata

Lemma 0. τ が $\min h(\tau)$ を与える n－simplex $\triangle$ の first barycentric subdivision の n－simplex であり, $h(\tau) = d(v, P(\sigma))$ とする。

ここで $\tau = v * \sigma$ で v は τ の vertex σ は v の opposite face とする。
すると v は $\triangle$ のvertex でない。

〔1〕により comb, n−manifold M が R^{n+k} で smoothable position にあるとは次の様な PL−homeo, ω_i が存在することである。$M = |K|$, $R^{n+k} = |L|$ とし K は L の full subcomplex であるとしておく, $\omega_i ; M_i \to \partial N(K'_i, L'_i)$ $0 \leqq i \leqq k-1$, ここで $M_0 = M$, $M_i = \omega_{i-1}(M_{i-1})$ $(1 \leqq i \leqq k)$, $|K_i| = M_i$, $|L_i| = \partial N(K'_{i-1}, L'_{i-1})$,

$\Omega_i = \omega_i \omega_{i-1} \cdots\cdots \omega_0$, $\partial N(K'_{i-1}, L'_{i-1}) = W_i$ とおくと W_i は combinatorial$(n+k-i)$ − manifold, もし $x \in W_i$ なら x を含んでいる L_{i-1} の $(n+k-i+1)$ −simplex $\triangle$ が存在し $\beta = \alpha \cap M_{i-1}$, η を β の $\triangle$ に於ける opposite face とする。$\triangle = v_0 * \cdots\cdots * v_q$ $(q = n+k-i+1)$ とし $\beta = v_0 * \cdots\cdots * v_e$, $\eta = v_{e+1} * \cdots\cdots * v_q$ とする。x の $\triangle$ に関する重心座標を $(a_0, \cdots\cdots, a_q)$ としたとき $y(x) \in \beta$, $z(x) \in \eta$ を次の様な重心座標をもつ点とする。

$$\left(\frac{a_0}{\sum_{i=0}^{e} a_i}, \cdots\cdots, \frac{a_e}{\sum_{i=0}^{e} a_i}, 0, \cdots\cdots, 0 \right), \left(0, \cdots\cdots, 0, \frac{a_{e+1}}{\sum_{i=e+1}^{q} a_i}, \cdots\cdots, \frac{a_q}{\sum_{i=e+1}^{q} a_i} \right),$$

line $\overleftrightarrow{y(x)Z(x)}$ を $\ell_i(x)$ とかく, $\ell_i(x)$は W_i にtransverseである〔1〕。
今 σ を $x \in W_i$ を含み, $St(x, Li)$ の中の $(n+k-i)$ −simplex で $\alpha(\ell_i(x), St(x, L_i))$ を与えているものとする。又 ξ を $y(x) * \sigma$ 又は $Z(x) * \sigma$ となる $(n+k-i+1)$ −simplex とする。ξ は$\triangle$に含まれている。

Lemma 1. $\sin \alpha(\ell_i(x), P(\sigma)) > \dfrac{n+k-i+2}{2(n+k-i+1)} \theta(\triangle)$

Lemma 2. τ を $\min r(\tau)$を与える $\triangle$ の first barycentric subdivision の n−simplex とすると $r(\tau) > \dfrac{r(\triangle)}{2(n+1)}$

又 σ が $\triangle$ のある $(n-1)$ −face なら $r(\sigma) \geqq \frac{n+1}{n} r(\triangle)$ が成り立つ。

Lemma 3. τ, σ は Lemma 2. と同じとすると

$$\theta(\tau) > \frac{\theta(\triangle)}{2n}, \quad \theta(\sigma) > \frac{n+1}{n}\theta(\triangle)$$ が成り立つ。

Lemma 4. $L = L_0$ の任意の $(n+k)$ −simplex に関して

$$\theta(\triangle) \geqq r > 0 \text{ なら } \sin\alpha(P^k(x), St(x, L_k)) \geqq \frac{(n+k+1)r}{2^k(n+1)^k}$$

ここで $P^k(x)$ は $x \in M_k$ を通る transverse k−plane。

$\varphi : M_0^n \to R^{n+k}$ は loc. flat, locally comb, imbedding with const, (δ, ε) だから $\forall\delta_1 \leqq \delta$ に対して $(U_{\delta_1}(x) \cap M, U_{\delta_1}(x))$ が standard combinatorial n−, $(n+k)$ −ball pair (C^n, C^{n+k}) に ε −isotopic である〔1〕の結果を boundary のある場合に拡張した〔2, Th. 2〕により C_k^n (smoothable position の定義の M_k に相当) は R^{n+k} で smoothable position にあるから C_k^n は transverse k−plane field $\varphi^* : C_k^n \to G_{k,n}$ をもつ， R^{n+k} を十分細かく細分すれば，ある ε_1 に対して $d(C_k^n, C^n) < \varepsilon_1$ と出来る。但し $\varepsilon_1 \leqq \frac{\text{mesh } L_0}{2}$， τ を K_k' の任意の n−simplex とする。但し $|K_k| = C_k^n$,

Lemma 5. $\alpha(\delta_2, P(x)) > Q > 0$ $(x \in C_k^n)$, $Z, Z+\delta Z \in St(x, K_k)$, for some Q なら $|\delta Z| \geqq \min(\delta - 2(\varepsilon+\varepsilon_1), \min h(\tau))$ と出来る。

但し $P(x)$ は x を通る transverse k−plame, (δ, ε) は loc, comb, imbedding $\varphi : M_0 \to R^{n+k}$ の constant

Lemma 6. 任意の $x \in U_\delta(a) \cap M \equiv B^n$ $(a \in M)$ に対して $\alpha(\delta_Z, \varphi^*(\Omega_k f_1(x)) > Q > 0$, $Z, Z+\delta_Z \in St(\Omega_k f_1(x), K_k)$, $\delta_Z \neq 0$ とする。但し $f_1(x) = F(x, 1)$, もし適当な $r_1 > 0$ が存在して $Q - R > r_1$ なら

$\varphi(x) = \varphi^{*}(\Omega_k f_1(x))$ で定義される cont, map $\varphi : B^n \to G_{km}$ は B^n 上の transverse k−plane field である。

ここで $R = \cos^{-1} \dfrac{2\mu^2 - 4(\varepsilon+\varepsilon_1)\mu - (\varepsilon+\varepsilon_1)^2}{2\mu(\mu - 2(\varepsilon+\varepsilon_1))}$,

$\mu = \min(\delta - 2(\varepsilon+\varepsilon_1),\ \min h(\tau))$ 　である。

定理 1 の証明

$\min \alpha(\delta z, \varphi^{*}\Omega_k f_1(x)) = \min \alpha(\varphi^{*}\Omega_k f_1(x), St(\Omega_k f_1(x), K_k))$, Z, $Z + \delta z \in St(\Omega_k f_1(x), K_k)$ であるから Lemma 4 に依って

$\min \alpha(\delta z, \varphi^{*}\Omega_k f_1(x)) > \sin^{-1} \dfrac{(n+k+1)\gamma}{2^k(n+1)^k}$ である。

$\sin^{-1} \dfrac{(n+k+1)\gamma}{2^k(n+1)^k} - R > \gamma_1$ なる $\gamma_1 > 0$ が存在する様に適当に (δ, ε), γ を選べば Lemma 6 に依って $U_i = U_\delta(x_i) \cap M$ は local transverse k−plane field $\varphi_i : U_i \to G_{k,n}$ をもつ，ここで R は Lemma 6 と同じ，$\{U_i\}$ が求める M の finite open covering である。

Lemma 7. W を R^m の open subset とし $\{U_i\}$ を W の countable locally finite open covering とする $\varphi_i : U_i \to R^n$ を連続写像とするとき，ある $\eta > 0$ に対して $|\varphi(x) - \varphi_i(x)| < \eta$ $(x \in U_i)$ なる様な連続写像 $\varphi : W \to R^n$ が存在する。

[3, p267] より local coordinate system

$K_p ; N(P, \pi/2) \to R^{nk}$

そこで定理 1 の $U_i \cup U_j$ $(U_i \cap U_j \neq \phi)$ に関して $\varphi_i(x), \varphi_j(y) \in N(P_{ij}, \pi/2)$ $(x \in U_i, y \in U_j)$ なら cont, maps

$$K_{P_{ij}}\varphi_i \ ; U_i \to R^{nk} \ , \quad K_{P_{ij}}\varphi_j \ ; U_j \to R^{nk}$$

が存在する。そこで Lemma 7 から，

$$\varphi'_{ij}(x) = k_i(x)\,K_{P_{ij}}\varphi_i(x) + k_j(x)\,K_{P_{ij}}\varphi_j(x) \qquad (x \in U_i \cup U_j)$$

で定義される cont，map $\varphi'_{ij} \ ; U_i \cup U_j \to R^{nk}$ が存在する。

$$\varphi_{ij} \ ; U_i \cup U_j \to G_{k,n} \text{ を } \varphi_{ij}(x) = K^{-1}_{P_{ij}}\,\varphi'_{ij}(x) \text{ で定義する。}$$

$\{U_i\}_{i=1}^{N}$ を定理1で得られた M の finite open covering とし $x, y, y+\delta y \in U_i \cap U_j$ に対して $\alpha(\delta y, \varphi_i(x)) > r_i$, $\alpha(\delta y, \varphi_j(x)) > r_j$ とする。

Lemma 8. $r_i + r_j > \frac{\pi}{2}$, $r_i, r_j > 0$ 且つ任意の $U_i \cup U_j$ $(U_i \cap U_j \neq \phi)$ に対して $\varphi_i(a)$, $\varphi_i(b) \in N(P_{ij}, \pi/2)$ $(a \in U_i, b \in U_j, P_{ij} \in G_{k,n})$ なら $\alpha(\delta_y, \varphi_{ij}(x)) > \min(r_i, r_j)$ $(x, y, y+\delta_y \in U_i \cap U_j)$ である。ここで φ_{ij} は上で定義されたもの。

定理2の証明

$\{U_i\}$ の i についての indnction により φ_{ij} から作られる cont，map $\varphi \ ; M \to G_{k,n}$ がある。Lemma 8 に依って φ は明らかに M 上の transverse k-plane field である。　　証明終

Reference

〔1〕 K. Kudo and H. Noguchi., A Geometric condition for smoothability of combinatorial manifolds. Kodai Math. Sem, Rep. 1963 vol. 15 pp 239 — 244

〔2〕 K. Kobayashi., A Geometric condition for smoothability of bounded combinatorial manifold, to Appear.

[3] J.H.C. Whitehead, Manifold with transverse field in ceuclidean space. Ann, of Math 73 (1961), pp 154 – 212.

"Hiegher dimensional PL knot について"

加 藤 十 吉 (都立大)

D^n により閉区間 [−1, 1] の n 重積を表わし, S^n により standard PL n−sphere (即ち, D^{n+1} の境界 ∂D^{n+1}) を表わす。Σ^n により S^n と PL 同相な多面体 (PL n−sphere) を表わす。(S^{n+k}, S^n) により standard PL (n+k, n)−sphere pair (即ち, (∂D^{n+k+1}, $\partial D^{n+1} \times 0^k$)) を表わす。

"Unknotting Problem"

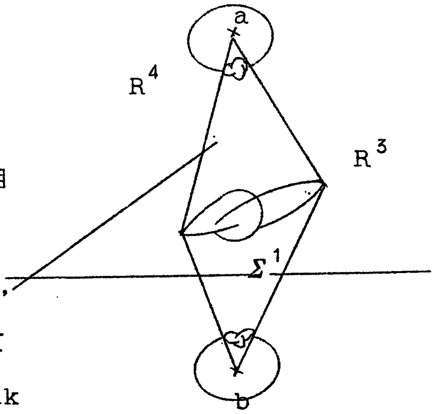
PL (n+k, n) − sphere pair (S^{n+k}, Σ^n) は, いかなるとき, (S^{n+2}, S^n) に pair として PL 同相となるか ?

これに対し, 次の強力な結果がある。

"Zeeman の定理", [12]

$k \geq 3$ に対し, (S^{n+k}, Σ^n) は (S^{n+k}, S^n) に PL 同相である。

$k = 1$ のときのこの類似は, generalized PL schoenflies conjecture と同値で, $n \leq 2$ のとき迄同様の結果が証明さえている。しかし, $n \geq 3$ のときは未だ証明されていない。



$k = 2$ のときは, $n = 1$ の場合でも, よく知られた, classical knot の反例がある。そこで, (S^3, Σ^1) が (S^3, S^1) に PL 同相でないとする。その幾何学的 suspension a∗(S^3, Σ^1)∗b = (S^4, Σ^2) を考えると, Σ^2 は, a 及び b で, locally に knot している。即ち, a の Σ^2, 及び S^4 における link knot (S^3, Σ^1) となる。このことから，Σ^2 の S^4 の中でのいかなる regular neighborhood U をとっても，(U, Σ^2) と $(S^2 \times D^2, S^2 \times 0^2)$ とは PL 同相とならないことがわかる。これは，PL embedding と differentiable embedding の1つの典型的相異を表わしている。（鈴木氏の解説参照）

かかる例の存在から，我々が扱う codimension 2 の PL manifold pair に対し，次の locally flat (locally unknotted) の条件を要求する。

定義： PL $(n+2, n)$ − manifold pair (W, M) が locally flat とは，M の各点 x に対し，x の W における PL 閉近傍B（即ち，B は W の subpolyhedron で，x の近傍である。）が存在して，$(B, B \cap M)$ が $(D^{n+2}, D^n \times 0^2)$ と PL 同相となるときをいう。とくに，locally flat PL $(N+2, n)$ − sphere pair (S^{n+2}, Σ^n) を PL n−knot と呼ぶ。ここでは，$n \geq 2$ のとき，PL n−knot を，higher dimensional PL knot と呼ぶことにする。

"Product Neighborhood Theorem"

PL n−knot (S^{n+2}, Σ^n) に対し，PL embedding $f : S^n \times D^2 \to S^{n+2}$ が存在し，

$$f(S^n \times 0^2) = \Sigma^n \text{ となる。}$$

この定理は，$n \leq 3$ のときは，本質的に，野口〔8〕，〔9〕により証明されている。$n \geq 5$ に対し，筆者は〔5〕において，Levine の unknotting Theorem〔7〕（後出）を使い証明を与えた。しかし，Wall は，〔12〕で，かってな n に対し，locally flat PL $(n+2, n)$ − manifold pair は PL normal cell bundle をもつことを証明している。PL_2 と O_2 が homotopy 同値であるという秋葉氏の結果（秋葉氏の解説参照）に注意すれば，

Σ^n の S^{n+2} の中での normal bundle の Euler class は消えることから，結局，Σ^n は S^{n+2} の中で trivial normal PL cell bundle，つまり，product neighborhood をもつことになる。

$n \neq 2$ のときの，codimension 2 の unknotting problem も次の形で解けている

"Unknotting Theorem"

$n \neq 2$ のとき，PL n－knot (S^{n+2}, Σ^n) が (S^{n+2}, S^n) と PL 同相となる為の必要十分条件は，$S^{n+2} - \Sigma^n$ と S^1 とが homotopy equivalent となることである。

この定理は，$n = 1$ のとき，Dehn の Lemma の特別な場合である。$n \geq 4$ のとき，Levine [7] は product neighborhood の存在を仮定し，証明を与えた。Wall も [13] において $n \geq 4$ に対して証明を与えたが，更に，[12]，p.6，↓22，で，$n = 3$ でも証明したと云っている。しかしながら，$n = 2$ のとき，果してどうなるかわからない。(柳川氏の解説参照)。 この様にして，$n \neq 2$，$k \geq 2$ の場合の unknotting problem は一応片づいたと云ってよい。そこで次が問題となる。

"Main Problem"

いつ，2つの PL knot は PL 同相となるか？

unknotting problem はこの特別な場合で，その analogy でこの問題を攻撃出来はしないかと考えるのは自然であろう。

更に，願わくは unknotting theorem へ reduce することができないものかと……。この解説の主定理（後に，main theorem と呼ばれるもの）は，実は，unknotting theorem へ reduce して証明される一つの例である。

それを述べる前に，次のことに注意しよう。2つの PL knot (S^{n+2}, Σ^n), (S^{n+2}, S^n) が PL 同相となるには，$S^{n+2}-\Sigma^n$, $S^{n+2}-S^n$ が homotopy 同値であれば十分であるとunknotting theoremは云っている。しかしながら，現在のところ，2つのかってな PL knot (S^{n+2}, Σ^n_1), (S^{n+2}, Σ^n_2) が与えられたとき，$S^{n+2}-\Sigma^n_1$ と $S^{n+2}-\Sigma^n_2$ とが homotopy 同値なら，その2つの PL knot は PL 同相かどうかは解っていない。とくに，$S^{n+2}-\Sigma^n$ が open manifold ということで難かしくなる。そこで，PL knot (S^{n+2}, Σ^n) に対し，Σ^n の S^{n+2} における regular neighborhood U を考える。そして，$E = S^{n+2} - \mathring{U}$ ($\mathring{U}$ は U の interior) とおき，PL knot (S^{n+2}, Σ^n) の U に関する exterior と呼ぶ。そのとき，regular neighlorhood U の (S^{n+2}, Σ^n) の PL 同相の下での一意性から，(S^{n+2}, Σ^n) の PL 同相類の中での，E の PL 同相類の一意性が出る。このように E は PL knot の一つの PL invariant になる。

（注意）　いかなる E が PL knot の exterior となりうるかという問題が当然考えられる。その問題の解は Browder により部分的に与えられている，$i.e.$, $\pi_1(E) \cong Z$ の場合，[1]．そして，M. Kervaire は，knot の exterior E の基本群 $\pi_1(E)$ となる為の群の必要十分条件を $n \geq 3$ に対し与えている，[6]．それ以外のことは，著者は知らない。

Eをある PL n－knot の exterior とし，$K^n_{PL}(E)$により，E と PL 同相な exterior をもつ PL n－knot の PL 同相類の全体を表わす。$\# K^n_{PL}(E)$ で $K^n_{PL}(E)$の元の数を表わす。

"Main Theorem"

$n \geq 2$ のとき，$\# K^n_{PL}(E) \leq 2$ である。

この定理は $n=2$ のとき，Gluck [3]，Theorem 15.2，により証明された。$n \geq 3$ に対しては，Gluck の方法を拡大して証明する。その為に，Gluck の目指した $S^n \times S^1$ の PL 同相の isotopy 分類を弱めて，pseudo − isotopy 分類を行なう。

定義：　多面体Pに対し，PL(P) により，P の PL 同相全体が結合に関してなす群を表わす。$f, g \in PL(P)$ が pseudo − isotopic（或いは concordant）といわれるのは，$k \in PL(I \times P)$，（$I = [0,1]$），が存在して，

$$h(0, x) = (0, f(x)), \quad h(1, x) = (1, g(x)) \quad (x \in P)$$

となるときをいう。更に，lerel preserving の条件：$h(\{t\} \times P) = \{t\} \times P$，（$t \in I$），が充たされているとき，f と g は isotopic という。pseudo − isotopy という関係は同値関係で，PL(P)の pseudo − isotopy class の全体は pseudo − isotopygroup $\tilde{\pi}_0(PL(P))$ をなす。（佐藤氏の解説と比較されたし，）

"Fundamental Theorem"

$n \geq 2$ に対し，$\tilde{\pi}_0(PL(S^n \times S^1) \cong Z_2 + Z_2 + Z_2$.

$n = 2$ のときは，本質的に Gluck [3]，Theorem 5.1 である。初めの Z_2 は，$\pi_1(O_{n+1}) \cong Z_2$（$n \geq 2$）に対応し，残りの $Z_2 + Z_2$ は，S^n の reflection と S^1 の reflection により生成される群に対応する。Browder も $n \geq 5$ に対し，[2] で [1] の方法によって同様の結果を得ている。この Fundamental theorem は，$n \geq 3$ のとき，unknottine theorem から，多少の pseudo − isotopy group の計算を行なって得られる。この定理から main theorem が次の様にして証明される。実際，(S^{n+2}, Σ_1^n)，(S^{n+2}, Σ_2^n) が，夫々，Σ_1^n の S^{n+2} における regular neighborhood U_1 に関する exterior E_1 Σ_2^n の S^{n+2} における regular neighglorhood

U_2 に関する exterior E_2 をもつとする。このとき，E_1 と E_2 とが PL 同相であるとし，$h_2 : E_1 \to E_2$ を PL 同相とする。product neighborhood theorem から，(U_1, Σ_1) と (U_2, Σ_2) は $(S^n \times D^2, S^n \times 0^2)$ へPL 同相だから，PL同相 $h_1 : (U_1, \Sigma_1) \to (U_2, \Sigma_2)$ がとれる。h_1, h_2 の境界 $\partial E_1 = \partial U_1 \cong S^n \times S^1$ 上でのくいちがいは $PL(S^n \times S^1)$ の元に対応する。このくいちがいを，h_1, h_2 をとり直し，修正して，全く一致するように出来れば 2 つの PL knot の間に PL 同相が得られることになる。ところが，本質的なくいちがいは，高々，その pseudo − isotopy 類のくいちがいだけとなる。Fundamental theorem から，$\widetilde{\pi}_0(PL(S^n \times S^1)) \cong Z_2 + Z_2 + Z_2$ となっている。この後の $Z_2 + Z_2$ は S^n の reflection，S^1 (or D^2) の reflection で生成されるので，$(U_1, \Sigma_1) \cong (U_2, \Sigma_2) \cong (S^n \times D^2, S^n \times 0^2)$ の PL 同相で相殺できる。必要なら，h_1 をとり直して，この $Z_2 + Z_2$ の元の違いを無視することができる。残るのは，$Z_2 \cong \pi_1(O_{n+1})$ に対応するものである。これは $(S^n \times D^2, S^n \times 0^2)$ 上でとり直すことができないことが解る。結局，本質的なくいちがいは，高々 $Z_2 \cong \pi_1(O_{n+1})$ に対応するものが残ることになる。従って，$\# K^n_{PL}(E) \leq 2$ が云えた。

（注意） もし，$\pi_1(O_{n+1}) \cong Z_2$ に対応する $PL(S^n \times S^1)$ の元が E 上へ拡大可能なら，$\# K^n_{PL}(E) = 1$ が得られる。このことについては，Gluck [3]，Theorem 22.1 を参照。

多面体 P に対し，$G(P)$ により，P の homotopy equivalence の全体がなす H − space を表わす。すると自然な homomorphism $i : \widetilde{\pi}_0(PL(P)) \to \pi_0(G(P))$ が得られる。とくに，$i_n : \widetilde{\pi}_0(PL(S^n \times S^1)) \to \pi_0(G(S^n \times S^1))$ とおく。

"Corollary to Fundamental Theorem"

$n \geq 2$ に対し，i_n は同型写像である。

（注意）　P が manifold のときでも，一般に，i は 1：1 とならない。例えば，$i: \widetilde{\pi}_0(PL(S^3 \times S^5)) \to \pi_0(G(S^3 \times S^5))$ がその一例である，〔4〕.

さて，PL knot の Hauptvermutung なるものが考えられる。

"Hauptvermutung for PL knots"

2つの PL knot が同相なら PL 同相か？

これは，manifold pair に対する Hauptvermutung の特別な場合である，$n = 1$ のときは肯定的である。又，Siebenmann－Sondow〔9〕は，locally flat でない PL $(n+2, n)$－sphere pair で，$n \geq 3$ に対し，pair の Hauptvermutung の反例をみつけている。上の PL knot（locally flat ✓）の場合は，上の問題は，PL knot の exterior という単一の，但し non－simply connected であるが，PL manifold に対する次の Strong Hurewicz conjecture（ここだけの仮称）に reduce できる。

"Strong Hurewicz Conjecture for exteriors of PL knots"

2つの PL knot の exterior E_1, E_2 の間に pair の homotopy 同値 $h:(E_1, \partial E_1) \to (E_2, \partial E_2)$ が存在すれば，h は PL 同相 $g:(E_1, \partial E_1) \to (E_2, \partial E_2)$ に pair の写像として homotope になる。

我々の reduction に対し，次の Lemma は基本的に重要である。

"Lemma"

2つの closed PL manifold pair (W_1, M_1), (W_2, M_2) が同相であるとする。

そのとき，M_1 の W_1 における regular neighborhood U_1, M_2 の W_2 における regular neighborhood U_2, 及び，連続写像

$$f:(W_1, U_1, M_1) \rightarrow (W_2, U_2, M_2)$$

で次を充たすものが存在する。

$f/(E_1, \partial E_1) = g : (E_1, \partial E_1) \rightarrow (E_2, \partial E_2)$, 及び，$f/(U_1; \partial U_1, M_1) = h : (U_1; \partial U_1, M_1) \rightarrow (U_2; \partial U_2, M_2)$ は夫々，各対の間の homotopy 同値である。

但し，$E_1 = W_1 - \mathring{U}_1$, $E_2 = W_2 - \mathring{U}_2$

とくに，$(W_1, M_1) = (S^{n+2}, \Sigma_1^n)$, $(W_2, M_2) = (S^{n+2}, \Sigma_2^n)$ のとき，g は，PL 同相

$$g_1 : (U_1; \partial U_1, \Sigma_1^n) \rightarrow (U_2, \partial U_2, \Sigma_2^n)$$

に homotope となる。これは product neighborhood theorem と covering homotopy theorem を使うことにより得られる。又，Strong Hurewicz Conjecture for exteriors of PL knots を仮定すれば，h は，PL 同相

$$h_1 : (E_1, \partial E_1) \rightarrow (E_2, \partial E_2)$$

に homotope になる。ところが，g_1 と h_1 とのくいちがいは $\partial U_1 = \partial E_1 \cong S^n \times S^1$ 上 homotopy の差しかない。従って，$in : \tilde{\pi}_0(PL(S^n \times S^1)) \rightarrow \pi_0(G(S^n \times S^1))$ が同型であることから，pseudo − isotopy) の差しかない。かくして，必要なら g_1 をとり直して，h_1 と g_1 とは $\partial E_1 = \partial U_1$ 上一致するようにとれる。よって，(S^{n+2}, Σ_1^n) と (S^{n+2}, Σ_2^n) とは PL 同相となる。かくして次が云えた。

"A reduction of Hauptvermutung for PL knots"

もし，Strong Hurewicz conjecture for exteriors of PL knots が正しいなら，Hauptvermutung for PL knots は正しい。

simply connected PL manifold に対しては，homotopy 同値写像を homotopy 類の中で，PL 同相とする為の障害の理論が Sullivan [11] により与えられている。(Peterson 氏の解説参照)，残念なことに，PL knot の exterior E の基本群 $\pi_1(E)$ は消えることはない。ところが，$\pi_1(E) \cong Z$ のとき，Browder [1]，Corollary 2.4 により次の結果が得られている。

"Theorem (Browder)"

2つの PL (differentiable) n-knot ($n \geq 5$) の exterior E_1, E_2 に対し，pair $(E_1, \partial E_1)$, $(E_2, \partial E_2)$ の間の homotopy 同値が存在すれば，E_1 と E_2 は PL 同相（微分同相）となる。

よって，Main Theorem 及び Lemma から，今のところ次が云える。

"Corollary"

$\pi_1(E) \cong Z$ なる exterior E をもつ PL n-knot ($n \geq 2$) の同相類の中で，相異なる PL 同相類は高々 2つしかない。

(注意)　dosed PL manifold pair (W, M) に対し，その exterior E という概念が拡大定義される。そのとき，Lemma から，Hauptvermutung reduction した議論は，そのまま，manifold pair に対する場合へ拡大される。

そのとき，次の条件 (1), (2), (3) を与えれば良い。

(1) (W_1, M_1) と (W_2, M_2) は isoneighboring である。即ち，(U_1, M_1) と (U_2, M_2) は PL 同相。

(2) $i : \widetilde{\pi}_0(PL(U_1 ; \partial U_1, M_1) \to \pi_0(G(U_1 ; \partial U_1, M_1))$ は surjective. ($\widetilde{\pi}_0(PL(\quad))$, $\pi_0(G(\quad))$ は pair へ自然に拡大定義される。)

(3) $i : \widetilde{\pi}_0(PL(\partial U_1)) \to \pi_0(G(\partial U_1))$ は injective.

manifold pair の Hauptvermutung の場合は，Sullivan の障害の理論が，Strong Hurewicz conjecture の成立，及び，i の kernel を調べる為に使える。

References

[1] W. Browder, Manifolds with $\pi_1 = Z$, Bull. Amer, Math. Soc., 72 (1966) 225 − 231.

[2] W. Browder, Diffeomorphisms of 1−connected manifolds, Trans, Amer, Math. Soc., 128 (1967) 155 − 163.

[3] H. Gluck, The embedding two spheres in the foar sphere, Trans. Amer, Math. Soc., 104 (1964) 303 − 333.

[4] M. Kato, A pseudo − isotopy classification of PL homeomorphisms of $S^p \times S^q$, (mimeographed).

[5] M. Kato, Combinatorial prebundles, II, (to appear).

[6] M. Kerraire, Les noeuds de dimensions superieures, Bull. Soc. Math. France., 93 (1965) 225 − 271.

[7] J. Levine, Unknotting spheres in codimension two, Topology, 3 (1965) 9 − 16.

[8] H. Noguchi, A classification of orientable surfaces in 4−space, Proc. Japan Acad., 39 (1963) 422 − 423.

[9] H. Noguchi, One flat 3−manifolds in 5−space, Osaka J. Math., 1 (1964) 117 − 125.

[10] L. Siebemann and J. Sondow, Some homeomorphic sphere paiss that are combinatorial distinct, Com. Math. Helv., 41 (1966 – 67) 261 – 272.

[11] D. Sullivan, Triangulating homotopy equivalences, Thesis, Princeton Univ., 1965.

[12] C. T. C. Wall, Locally flat PL submanifolds with codimension two, Proc. Camb. Phil. Soc., 63 (1967) 5 – 8.

[13] C. T. C. Wall, Unknotting tori in codimension one and spheres in codimension two, Proc. Camb. Phil. Soc., 61 (1965) 659 – 664.

[14] E. C. Zeeman, Unknotting combinatorial balls, Ann. of Math., 78 (1962) 501 – 526.

$\pi_2(R^4 - V_k)$ について

柳 川 高 明 (神戸大)

R^4 内の locally flat な 2−sphere K^2 (spherical knot) の regular neighborhood V_k にたいし，$\pi_2(R^4 - V_k)$ を計算したい，一般に，$R^4 - V_k$ の universal covering space を $\widetilde{R^4 - V_k}$ とすれば，$\pi_2(R^4 - V_k) \approx H_2(\widetilde{R^4 - V_k})$ となるが，これを計算することが難しい。

以下，D^2，K^2 等は，すべて locally flat な 2−disk，− sphere とする。

1. lemma，上半空間 R^4_+ 内の 2−disk D^2 が

(1.1) $R^3_0 = \partial R^4_+ \supset \partial D^2$

(1.2) D^2 の saddle point は唯一つである。

を満たすならば，$\pi_2(R^4_+ - V_D) = (0)$ である。

Theorem R^4 内の spherical knot K^2 が

(2.1) $D^2_+ = R^4_+ \cap K^2$ と $D^2_- = R^4_- \cap K^2$ とは R^3_0 に関し対称

(2.2) $\pi_1(R^4 - V_k)$ は単位元以外に位数有限の元なし

(2.3) (D^2_+, R^4_+) の pair は (1.2) をみたす。

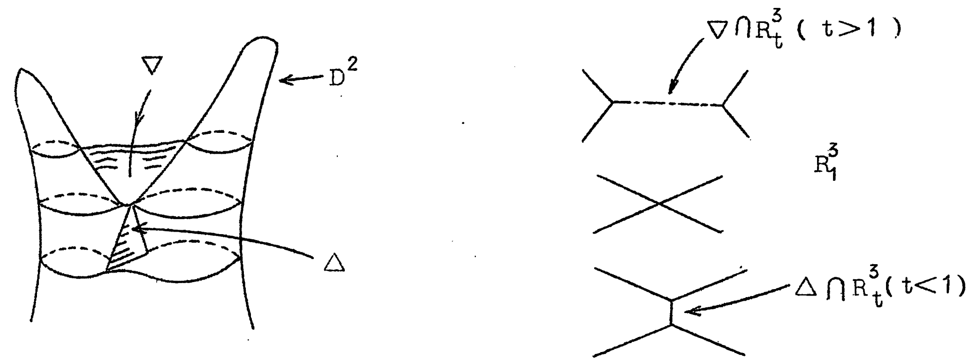
を満たすならば，$\pi_2(R^4 - V_k) \approx {}^J\!/_{[J,J]}$ である。

ここに，$R^3_t = \{(x, j, z, t) \mid t = t\}$ は超平面で，R^4_- は下半空間，J は inclnsion homomorphism ; $\pi_1(R^3_0 - R^3_0 \cap V_k) \to \pi_1(R^4 - V_k)$ の kernel，$[J, J]$ は J の commntator snbgronp とする。

2. $\pi_1(R^4 - V_k) = Z$，$\pi_2(R^4 - V_k) = (0)$ かつ $\pi_1(R^3_0 - R^3_0 \cap V_k) \neq Z$ で (2.1) の条件を満たす spherical knot K^2 が存在する。

3. 1に於ける難点は lemma の証明にある。

π_1 を operator とみて $\pi_2(R^4_+ - V_D)$ の元は，standard な 2−sphere Σ^2 を $R^4_+ - V_D$ に continuous に map した image $f(\Sigma^2) = X$ とみることが出来る，が，D^2 の唯一つの saddle point の近くで，2つの3角形 △ と ▽ を下図の様に作るとき。



$X \cap \triangle = \phi$，または $X \cap \nabla = \phi$ ならば X は $R^4_+ - V_D$ で contractible であることが knot complementary の asphericity 等より比較的容易に説明される。しかし，$X \cap \triangle \neq \phi$ といった場合には，その証明は困難であり，X を homotopicel に変形して，X'を作くり，$X' \cap \triangle = \phi$ といった様にすることが望ましいが，その過程は相当複雑になる。

Thcorem の証明は lemma の結果ならびに（2.1）（2.2）等を用いて，universal covernig space $\widetilde{R^4 - V_k} \to R^4 - V_K$，その restriction として，$\widetilde{R^4_+ - V_{D_+}}$，$\widetilde{R^4_- - V_{D_-}}$，$\widetilde{R^3_0 - R^3_0 \cap V_k}$ を考えて，これらに Mayer − Vietories seqnence を適用すれば，比較的きれいに導くことが出来る。

4. 最後に，lemma の証明について講演直前にミスに気づき，そのむねを申し上げてお許しを願いましたが，後日，訂正につとめ条件を強めた（1.2）の形で証明出来たように思います。なお，それによって生じた問題として，

(1)　(1.2) の条件は seddle point の数が増しても，"離れ形"の seddle points ならば同様の結果が与えられるか？

(2)　(2.2) の条件は必要か？　すなわち，(1.2) の条件を満たす D_{+}^{2} について $\pi_1(R_{+}^{4}-D_{+}^{2})$ に torsion element があるか？

ということが疑問となります。

なお，Top. Seminar Wisconsin 1965, edit. by Bing and Bean Ann. of Math Stndy 60. に report されている。C. H. Giffen の論文 "On aspherical embeddings of 2-sphcres in tho 4 space" についてはくわしい証明が出ないと判らないが，ややギャップがあり，それが1の lemma に対応する所があると思われます。