

第 52 回
トポロジーシンポジウム
講演集

2005 年 8 月

於 高知大学朝倉キャンパス

平成 17 年度科学研究費 基盤研究 (A)

課題番号 15204002



序

この講演集は2005年8月6日から9日の間、高知大学（朝倉キャンパス）において開催される第52回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。

その目的は、シンポジウム参加者が各講演をよりよく理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこの講演集は、

平成17年度科学研究費 基盤研究A

研究代表者 泉屋 周一（北海道大学大学院理学研究科）

研究題目 特異点論からみた様々な幾何学の研究

課題番号 15204002

により作成されたものである。

世話人：逸見 豊（高知大学理学部）

下村克己（高知大学理学部）

中居 功（お茶の水女子大学理学部）

作間 誠（大阪大学大学院理学研究科）

第52回トポロジーシンポジウム

プログラム

8月6日(土)

- 15:00-16:00 森本 雅治 (岡山大学大学院自然科学研究科)
ホモロジー同値写像を得るための同変手術理論とその応用 1
- 16:30-17:30 Gilles Robert (Universite Bordeaux I)
Webs drawn on cubic surfaces 1 3

8月7日(日)

- 9:30-10:30 下村 克己 (高知大学理学部)
小さな素数で局所化した安定ホモトピー圏の特異性について 2 5
- 11:00-12:00 濱中 裕明 (兵庫教育大学大学院学校教育研究科)
On Samelson products in p -localized unitary groups 3 3
- 13:30-14:30 Edward D. Tymchatyn (Univ. Saskatchewan)
Milutin maps and topological uniqueness of fiberwise measures 4 1
- 15:00-16:00 阿部 孝順 (信州大理学部)
同変微分同相群とその周辺 5 1
- 16:30-17:30 森田 茂之 (東京大学大学院数理科学研究科)
微分同相群とトポロジー —いくつかの問題と展望— 6 3

8月8日(月)

- 9:30-10:30 尾國 新一 (京都大学大学院理学研究科)
ラプシアンの特ラムと離散群 7 5
- 11:00-12:00 松田 浩 (広島大学大学院理学研究科)
Heegaard splittings and knot invariants 8 5
- 13:30-14:30 逆井 卓也 (東京大学大学院数理科学研究科)
曲面のホモロジー同境全体が作る群の構造について 9 7
- 15:00-16:00 山本 稔 (北海道大学大学院理学研究科)
平面への安定写像の不変量について 1 0 7
- 16:30-17:30 梅原 雅顕 (大阪大学大学院理学研究科)
波面の幾何学 1 1 7

8月9日(火)

- 9:30-10:30 秋吉 宏尚 (大阪市立大学数学研究所)
穴あきトラスライン群のフォード基本多面体 1 2 5
- 11:00-12:00 Brian Bowditch
(Univ. Southampton, 東京工業大学大学院情報理工学研究科)
The curve complex and hyperbolic 3-manifolds 1 3 9

ホモロジー同値写像を得るための同変手術理論とその応用

森本 雅治 (岡山大学大学院自然科学研究科)

1. INTRODUCTION

ここでは G は有限群を表す. 多様体 (manifold) や群の作用 (group action) は特に断らないかぎり滑らか (smooth) なものとする. G が作用する多様体 X, Y の間の G -写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき, それが equivariant surgery により homology equivalence に変形できるか否かを判定する理論を研究しよう. 後述するように, このような理論は球面上の有限群の作用の研究に役立つ.

すでに知られている結果をふり返ってみると, G が trivial group の場合, つまり G の作用を考えない場合, には

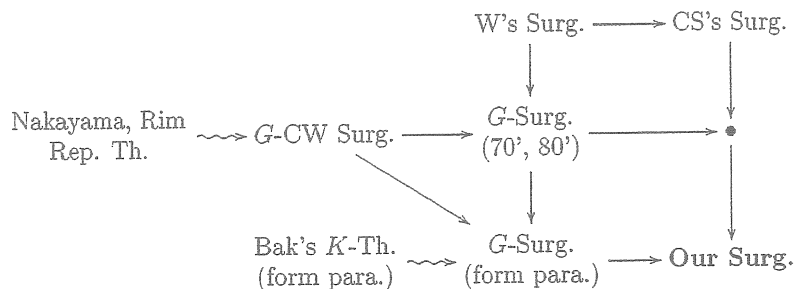
- Wall [14] の surgery theory (homotopy equivalence を得るための理論)

を一般化した

- Cappell-Shaneson [2] の surgery theory (homology equivalence を得るための理論) がある. そこで Cappell-Shaneson の surgery theory の equivariant analogy を

- Oliver-Petrie [11] の G -CW surgery theory 等 ([12], [3])

を参考にしながら作ることが自然な流れである.



我々がもともと意図している球面上の群作用へ応用 [4] は G -写像

$$f_1: X_1 \rightarrow Y, f_2: X_2 \rightarrow Y \quad (\partial f_2 = id_{\partial Y})$$

の G -連結和

$$f_1 \#_G G \times_H (id_Y \cup_\partial f_2) : X_1 \#_G G \times_H (-Y \cup_\partial X_2) \rightarrow Y$$

の surgery obstruction を f_1, f_2 の surgery obstructions から計算できることを必要とする。しかし Cappell-Shaneson による surgery obstruction の定義では $G = \{e\}$ であってもこの計算が行えない (少なくとも簡単に実行できるものではない) ので, Cappell-Shaneson の理論は我々にとって十分なものとは言えない。このため, 単に Cappell-Shaneson の理論を真似れば良いわけではなく, nonequivariant な場合には彼らの理論の改善になっている equivariant surgery theory を構築しなければならない。

我々の equivariant surgery theory の詳細に入る前に, 球面上の作用における応用に触れておきたい。そこで, 次の問題を考えてみよう。

Problem 1.1. Let F be a closed manifold such that there exists a G -action on a disk D with $D^G = F$. We ask whether there exist G -actions on spheres X such that $X^G = F$.

F が disk 上の作用の不動点集合であることから

$$(1.1) \quad \bar{\chi}(F) \equiv 0 \pmod{n_G}$$

という必要条件が得られる。ここで $n_G \geq 0$ は Oliver number と呼ばれる整数で,

$$\bar{\chi}(F) := \chi(F) - 1$$

である ($\chi(-)$ は Euler characteristic)。もし $X^G \neq \emptyset$ ならば, $x \in X^G$ を任意に取り $V = T_x(X)$ と置けば, degree-one G -map

$$f : X \rightarrow Y := S(\mathbb{R} \oplus V) \quad (V \text{ の one pt. compactification})$$

を得ることができる。 f は homotopy 同値写像であるので, その写像錐 C_f は可縮である。 $\bar{\chi}(C_f^G)$ を計算して

$$(1.2) \quad \bar{\chi}(Y^G) - \bar{\chi}(X^G) \equiv 0 \pmod{n_G}$$

を得る。 $\bar{\chi}(Y^G) = \pm 1$ なので, $F = X^G$ のとき (1.1), (1.2) から $n_G = 1$ を得る。

有限群 G で $n_G = 1$ を満たすものを **Oliver group** という。Oliver [9] は次の (1)-(3) が互いに同値であることを証明している。

- (1) $n_G = 1$.
- (2) G -不動点を全く持たない, disk 上の G -作用が存在する。
- (3) G には次の (条件) を満たす正規部分群列 $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ が存在しない:
(条件) $P, G/H$ は素数巾位数の群で, H/P は巡回群である。

Example 1.2. Nonsolvable group は Oliver group である。Nilpotent group G が Oliver group である必要十分条件は G が少なくとも 3 つの異なる noncyclic Sylow subgroups を含むことである (例: $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_r$, ここで p, q, r は異なる素数とする)。

G が素数中位数の群ではないとき, G -作用の一般的なあるクラスについて考えたい。 X 上の G -作用が G -action* であるとは G の任意の Sylow subgroup P に対し $X^G \neq X^P$ が成り立つときとしよう。我々の新しい surgery theory を応用して次の結果を得ることができる。

Theorem 1.3 ([5]). *Let G be a nontrivial perfect group or a nilpotent Oliver group, F a closed manifold. Then the following three statements are equivalent to one another.*

- (1) F is realizable as the fixed point set of a smooth G -action* on a sphere.
- (2) F is realizable as the fixed point set of a smooth G -action* on a disk.
- (3) F is realizable as the fixed point set of a smooth G -action on a disk.

有限群 G が指定されたとき, 実際にどのような多様体 F がディスク上の滑らかな G -作用の不動点集合になりうるかは, F の tangent bundle $T(F)$ の $\widetilde{KO}(F)$ における条件を記述することにより完全に解明されている (Oliver [10])。それを用いると次を得る。

Corollary 1.4 ([5]). *Let G be a nilpotent Oliver group, F a closed manifold. Then the following two statements are equivalent.*

- (1) F is realizable as the fixed point set of a G -action* on a sphere.
- (2) F is stably complex, namely $T(F) \in r(\widetilde{K}(F))$.

これらの結果は「 F の各連結成分が simply connected or stably parallelizable である」という仮定のもとでは Pawalowski-M. [7] で得られていたものである。Theorem 1.3 の証明は Theorems 4.3, 5.1, 6.2 を用いて行われる。

2. FREE ACTIONS の場合

Cappell-Shaneson の surgery theory の equivariant analogy を多様体の次元 n が偶数 ($n = 2k \geq 6$) で作用が free の場合に概説しよう。 X, Y は n -次元のコンパクト, 連結, 向き付けられた多様体で free G -actions を持つものとする。また f は X から Y への degree-one G -map で $f(\partial X) \subset \partial Y$ を満たし, 制限によって得られる写像 $\partial f: \partial X \rightarrow \partial Y$ が homology equivalence であるものとする。今後 f は Y 上の G -vector bundles ξ, η と G -vector bundle isomorphism $b: T(X) \oplus f^*\eta \rightarrow f^*\xi$ が指定されているものとする, つまり f は G -framed

map とする. X 上の i -次元の G -surgery とは G -embedding $j : G \times (S^i \times D^{n-i}) \rightarrow \text{Int}(X)$ に対して, X から $G \times \text{Int}(S^i \times D^{n-i})$ を取り除き, 境界 $G \times \text{Int}(S^i \times S^{n-i-1})$ に沿って $G \times (D^{i+1} \times S^{n-i-1})$ を貼り付け, $G \times \text{Int}(S^i \times S^{n-i-1})$ の近傍内で G -smoothing を行い G -多様体 X' を得る操作をいう:

$$X' = (X \setminus G \times \text{Int}(S^i \times D^{n-i})) \cup_{\partial} G \times (D^{i+1} \times S^{n-i-1}).$$

f の $\{e\} \times (S^i \times D^{n-i})$ への制限が null homotopic である場合には, f の $X \setminus G \times \text{Int}(S^i \times D^{n-i})$ への制限は G -map $f' : X' \rightarrow Y$ に拡張し, さらに b の $X \setminus G \times \text{Int}(S^i \times D^{n-i})$ 上にある全空間への制限は G -vector bundle isomorphism $b' : T(X') \oplus f'^* \eta \rightarrow f'^* \xi$ に拡張する. G -framed map f の G -surgery とは, このようにして f', b' を得ることを意味する.

Comment. X の universal covering \tilde{X} には群

$$\tilde{G} := \pi_1(EG \times_G X)$$

が作用しているので, X 上の G -surgery は \tilde{X} 上の \tilde{G} -surgery とみなす方が surgery theory を自然に理解できる.

G -framed map f は次元 $0-(k-1)$ の G -surgery を繰り返して, k -connected G -framed map に変形できる. そこで, f 自身が k -connected, すなわち $f_{\#} : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ が $i \leq k-1$ では全単射, $i = k$ では全射, であるとしよう. この状況で, もし

$$K_k(f; \mathbb{Z}) := \text{Ker}[f_* : H_k(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(Y; \mathbb{Z})]$$

が trivial であれば $f : X \rightarrow Y$ が homology equivalence であることが判る. そこで, どのような $K_k(f; \mathbb{Z})$ であれば, 次元 k の G -surgery を行い得られた写像 f' の $K_k(f'; \mathbb{Z})$ が trivial になるか (すなわち f' が homology equivalence になるか) を考えてみたい. 簡単な考察によって

$$K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z}) = \text{Ker}[\tilde{f}_* : H_k(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(\tilde{Y}; \mathbb{Z})]$$

が stably $\mathbb{Z}[\tilde{G}]$ -free, つまり

$$K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}[\tilde{G}] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[\tilde{G}] \cong \mathbb{Z}[\tilde{G}] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[\tilde{G}]$$

がわかる. 従って,

$$K_k(f; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[\tilde{G}]} K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z})$$

である. $K_k(f; \mathbb{Z})$ は Poincaré pairing つまり intersection form

$$B_0 : K_k(f; \mathbb{Z}) \times K_k(f; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

を持っている.

Comment. G -作用込みで考えるには $B : K_k(f; \mathbb{Z}) \times K_k(f; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ を

$$B(x, y) = \sum_{g \in G} B_0(x, g^{-1}y)g$$

と定義して、これを扱うのが便利である。Wall の surgery theory のアイデアを活かそうとすれば、環 $\mathbb{Z}[G]$ は X から定まる orientation homomorphism $w : G \rightarrow \{\pm 1\}$ から誘導される involution $-$ ($\bar{g} = w(g)g^{-1}$ for $g \in G$) が指定されていると考えるのが良い。

Wall の surgery theory の analogy により次の (1)–(4) を満たす embeddings

$$h_1, \dots, h_m : S^k \rightarrow X \quad (2m = \text{rank}_{\mathbb{Z}[G]} K_k(f; \mathbb{Z})) \text{ が存在すれば}$$

X 上の G -surgery により $K_k(f; \mathbb{Z})$ を消去して homology equivalence $f' : X' \rightarrow Y$ を作る事が可能である。

- (1) 各 h_i の normal bundle は trivial である。
- (2) 任意の $a, b \in G$, 任意の $1 \leq i, j \leq m$ に対して $a \neq b$ あるいは $i \neq j$ ならば $a \cdot \text{Image}(h_i)$ と $b \cdot \text{Image}(h_j)$ は disjoint.
- (3) 各 $1 \leq i \leq n$ に対して $f \circ h_i$ は null homotopic.
- (4) $y_1, \dots, y_m \in K_k(f; \mathbb{Z})$ で $B_0(a[h_i], by_j) = \delta_{a,b} \delta_{i,j}$ (for all $a, b \in G, 1 \leq i, j \leq m$) を満たすものが存在する。

このような h_1, \dots, h_m の存在を intersection form と selfintersection form とを用いて判定できれば良いのである。intesection form や selfintersetion form で与えられた代数的情報から 球面 S^k の embeddings の存在という幾何的情報への変換には、いわゆる **Whitney tric** という手法を必要とする。このため作業を行う空間は単連結でなければならぬ。従って X ではなく \tilde{X} で作業をするのが良い。よって $K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z})$ 上の intersection form と selfintersection form を扱うのが正攻法といえる。実際、 $K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z}) = \pi_{k+1}(M_{\tilde{f}}, \tilde{X})$ なので、 $K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z})$ 上には selfintersection form が存在する。代数的な見栄えを良くするために、nonsingular $(-1)^k$ -Hermitian form

$$\tilde{B} : K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z}) \times K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[\tilde{G}]$$

と quadratic form

$$\tilde{q} : K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[\tilde{G}]/\tilde{\Lambda}$$

を扱う。ここで $\tilde{\Lambda}$ は $\mathbb{Z}[\tilde{G}]$ 上の minimum form parameter と呼ばれるもので、

$$\tilde{\Lambda} = \{x - (-1)^k \bar{x} \mid x \in \mathbb{Z}[\tilde{G}]\}$$

で定義される。

Cappell-Shaneson のアイデアに沿って考察を進めると, $(K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z}), \tilde{B}, \tilde{\mu})$ のある同値関係による同値類 $\sigma_{CS}(f)$ が surgery obstruction になることが判る.

3. CAPPELL-SHANESON の OBSTRUCTION GROUP $\Gamma_{CS}(\mathcal{F})$

R は \mathbb{Z} かあるいは

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, (b, p) = 1 \right\}$$

を表すものとする. $A = \mathbb{Z}[\tilde{G}]$, $A' = R[G]$ とおくと, 自然に定義される ring homomorphism

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\tilde{G}} : A \rightarrow A'$$

は involution を保つ. これから \mathcal{F} 上の quadratic modules と同値関係 \sim を定義し, その同値類の全体として $\Gamma_{CS}(\mathcal{F})$ を定義する.

Definition 3.1 ([2]). A quadratic module α over \mathcal{F} is a tuple (H, φ, q) consisting of an A -module H , a biadditive map $\varphi : H \times H \rightarrow A$, and a map $q : H \rightarrow A/\tilde{\Lambda}$ fulfilling (1)–(4):

- (1) $H_{A'} := A' \otimes_A H$ is a stably free A' -module.
- (2) φ is a $(-1)^k$ -Hermitian form, namely $\varphi(x, ay) = a\varphi(x, y)$, $\varphi(x, y) = (-1)^k \overline{\varphi(y, x)}$ ($x, y \in H, a \in A$).
- (3) The induced $(-1)^k$ -Hermitian form $\varphi_{A'} : H_{A'} \times H_{A'} \rightarrow A'$ is nonsingular, namely the associated map $H_{A'} \rightarrow \text{Hom}_{A'}(H_{A'}, A')$; $x \mapsto \varphi_{A'}(x, -)$, is bijective.
- (4) q is a quadratic map related to φ , namely $q(ax) = aq(x)\bar{a}$, $\varphi(x, x) = \widetilde{q(x)} + (-1)^k \overline{q(x)}$, $q(x+y) = q(x) + q(y) + \varphi(x, y)$ ($a \in A, x, y \in H$).

Comment. この $\alpha = (H, \varphi, q)$ は nonsingular $(-1)^k$ -quadratic module $\alpha_{A'} = (H_{A'}, \varphi_{A'}, q_{A'})$ を定める. ただし, Λ を A' の minimal form parameter とするとき $q_{A'} : H_{A'} \rightarrow A'/\Lambda$ である.

G -surgery がうまくできる場合を思い浮かべると, 次の presubkernel あるいは pre-Lagrangian なる概念を定義したくなる. 上の H の A -submodule L が α の presubkernel あるいは pre-Lagrangian であるとは次の (1)–(2) を満たすときをいう.

- (1) L は totally isotropic である. つまり $\varphi(L, L) = \{0\}$ かつ $q(L) = \{0\}$.
- (2) $H_{A'}$ における $L_{A'}$ の自然な像 L' が Wall の意味で $\alpha_{A'}$ の subkernel である. つまり $H_{A'}$ のある A' -basis $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$ が $\{x_1, \dots, x_m\}$ は L' の A' -basis となり, さらに $\varphi_{A'}(x_i, y_j) = \delta_{i,j}$ を満たす.

もし \mathcal{F} 上の quadratic module α が presubkernel を持てば α は **null module** と呼ばれる。2つの \mathcal{F} 上の quadratic module α, β に対し $\alpha \oplus -\beta \oplus \gamma$ が null module となる null module γ が存在するとき、 α と β は同値であるとい

$$\alpha \sim \beta \text{ と書く。}$$

ここで $\beta = (K, \phi, r)$ に対し $-\beta = (K, -\phi, -r)$ である。この同値関係による \mathcal{F} 上の quadratic modules の同値類の全体を $\Gamma_{\text{CS}}(\mathcal{F})$ と定義する。orthogonal sum によって定まる加法により $\Gamma_{\text{CS}}(\mathcal{F})$ は可換群になる。定義から自然に homomorphism $\Gamma_{\text{CS}}(\mathcal{F}) \rightarrow L_n^h(A')$ が誘導される。

4. NEW OBSTRUCTION GROUP $\Gamma(\mathcal{F})$

Introduction で述べたように connected sum の surgery obstruction をより良く理解するために、Cappell-Shaneson の quadratic module を一般化することが望まれる。

Definition 4.1 ([6]). A **generalized quadratic module** α over \mathcal{F} is a tuple $(\kappa : H \rightarrow \underline{H}, \varphi, q, \varphi)$ satisfying (1)–(7):

- (1) H is a finitely generated A -module.
- (2) \underline{H} is a stably free A' -module.
- (3) $A' \otimes_A \kappa : H_{A'} \rightarrow \underline{H}$ is surjective.
- (4) $\varphi : H \times H \rightarrow A$ is a $(-1)^k$ -Hermitian form.
- (5) $q : H \rightarrow A/\tilde{\Lambda}$ is a quadratic map related to φ .
- (6) $\underline{\varphi} : \underline{H} \times \underline{H} \rightarrow A'$ is a nonsingular $(-1)^k$ -Hermitian form.
- (7) $\underline{\varphi}(\kappa(x), \kappa(x')) = \mathcal{F}(\varphi(x, x'))$ ($x, x' \in H$).

もし (H, φ, q) が Cappell-Shaneson の意味で quadratic module であれば、 $(H \rightarrow H_{A'}, \varphi, q, \varphi_{A'})$ が generalized quadratic module になる。

$\alpha = (\kappa : H \rightarrow \underline{H}, \varphi, q, \varphi)$ を \mathcal{F} 上の generalized quadratic module とする。 H の A -submodule L が α の presubkernel あるいは pre-Lagrangian とは次の (1)–(2) を満たすときをいう。

- (1) L は totally isotropic である。つまり $\varphi(L, L) = \{0\}$ かつ $q(L) = \{0\}$.
- (2) \underline{H} のある A' -basis $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m\}$ が $\{x_1, \dots, x_m\}$ は $(\kappa(L))_{A'}$ の A' -basis となり、さらに $\underline{\varphi}(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ を満たす。

もし \mathcal{F} 上の generalized quadratic module α が presubkernel を持てば α は **null module** と呼ばれる。2つの \mathcal{F} 上の generalized quadratic module α, β に対し $\alpha \oplus -\beta \oplus \gamma$ が null

module となる null module γ が存在するとき, α と β は同値であるという ($\alpha \sim \beta$ と書く). この同値関係による \mathcal{F} 上の generalized quadratic modules の同値類の全体を $\Gamma(\mathcal{F})$ と書く. $\Gamma(\mathcal{F})$ は orthogonal sum によって定まる加法により可換群になる. 定義から自然に homomorphisms $\Gamma_{\text{CS}}(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}), \Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow L_n^h(A')$ が誘導される.

次の2つの定理は surgery theory を理解, 応用する上で重要である.

Theorem 4.2 ([6]). *The canonical map $\Gamma_{\text{CS}}(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F})$ is an isomorphism*

Theorem 4.3 ([5], [6]). *If $\tilde{G} = \pi \times G, |\pi| < \infty, R = \mathbb{Z}_{(p)}$, and $(|\pi|, p) = 1$ then the canonical map $\Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow L_n^h(A')$ is an isomorphism.*

Comment. これまで minimal form parameter の場合に述べてきたが, 一般の form parameter の場合にも拡張できる. その際 Wall 群は Bak 群に取り替えなければならない (cf. [3]).

5. G -SURGERY OBSTRUCTIONS

この節では Cappell-Schaneson [2] の analogy により

• G -surgery obstruction $\sigma_{\text{CS}}(f, b) \in \Gamma(\hat{\mathcal{F}})$ ($\hat{G} = \pi_1(EG \times_G Y), \hat{\mathcal{F}} : \mathbb{Z}[\hat{G}] \rightarrow R[G]$)

を, また新たに

• G -surgery obstruction $\sigma(f, b) \in \Gamma(\tilde{\mathcal{F}})$ ($\tilde{G} = \pi_1(EG \times_G X), \tilde{\mathcal{F}} : \mathbb{Z}[\tilde{G}] \rightarrow R[G]$)

を導入し ([6]), これらの obstructions の関係を述べる. 解説を単純にするため, $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ (p は素数) とし, G -surgery を行う連結多様体 X は gap condition

(GC) 任意の $g \in G, g \neq e$, に対して, $\dim X^g < k - 1$

を満たすものとする. また degree-one G -framed map (f, b) ($f : (X, \partial X) \rightarrow (Y, \partial Y)$, $\dim X = n = 2k, b : T(X) \oplus f^*\eta \rightarrow f^*\xi$) は次の条件を満たしているとする.

(1) $\partial f : \partial X \rightarrow \partial Y$ は R -homology equivalence である.

(2) 任意の p -巾位数の部分群 $P \neq \{e\}$ に対して, $f^P : X^P \rightarrow Y^P$ は R -homology equivalence である.

(3) 任意の $g \in G, g \neq e$, に対して, $\chi(X^g) = \chi(Y^g)$ である.

これらの条件 (2)–(3) は「必要条件」であり, 人工的なものではない. X の universal covering \tilde{X} と Y の universal covering \tilde{Y} にはそれぞれ $\tilde{G} = \pi_1(EG \times_G X)$ と $\hat{G} = \pi_1(EG \times_G Y)$ が作用し, f を cover する $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ は \tilde{G} -map と見なされる. G -framed map (f, b) が (つまり $f : X \rightarrow Y$ が) k -connected であるとき, $\tilde{G} = \hat{G}$ であり, 作用が free である場合 (§2) と同様に $\sigma_{\text{CS}}(f, b) = [K_k(\tilde{f}; \mathbb{Z}), \tilde{B}, \tilde{\mu}] \in \Gamma(\hat{\mathcal{F}})$ が定義される. 一般

に、 f が k -connected でないときには、 (f, b) と G -framed cobordant rel. $\partial X \cup \bigcup_{g \neq e} X^g$ である k -connected な (f', b') をとり、 $\sigma_{\text{CS}}(f', b') = [K_k(\tilde{f}'; \mathbb{Z}), \tilde{B}', \tilde{\mu}'] \in \Gamma(\tilde{\mathcal{F}})$ をもって $\sigma_{\text{CS}}(f, b)$ であると定義する。この定義が well defined であることは、 $\sigma_{\text{CS}}(-, -)$ が k -connected G -framed maps に対して G -framed cobordism invariant であることから従う。Cappell-Shaneson [2] の analogy により次の定理を得る。

Theorem 5.1. *Let (f, b) be a degree-one G -framed map satisfying (1)–(3) above. Then following (1)–(3) are equivalent.*

- (1) $\sigma_{\text{CS}}(f, b) = 0$ in $\Gamma(\tilde{\mathcal{F}})$.
- (2) (f, b) is G -framed cobordant rel. the boundary and the singular set to (f', b') such that $f' : X' \rightarrow Y'$ is an R -homology equivalence.
- (3) (f, b) is G -framed cobordant rel. the boundary and the singular set to (f', b') such that $f' : X' \rightarrow Y'$ is a $(k-1)$ -connected R -homology equivalence.

また、次の条件 (1)–(4) を満たす G -framed map (f, b) を R -suitable という。 (f, b) が R -suitable であれば、 $\tilde{\mathcal{F}} : \mathbb{Z}[\tilde{G}] \rightarrow R[G]$ 上の generalized quadratic module

$$(\pi_{k+1}(\tilde{f}) \rightarrow K_k(f; R), \tilde{B}, \tilde{\mu}, B)$$

が得られる。

- (1) f は one-connected である ($f_{\#} : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ が全射)。
- (2) $f_* : H_i(X; R) \rightarrow H_i(Y; R)$ ($0 \leq i \leq k-1$) は同型写像。
- (3) $K_k(f; R)$ は $R[G]$ 上 stable free である。
- (4) $R \otimes \pi_{k+1}(\tilde{f}) \rightarrow K_k(f; R)$ は全射。

各 $x \in \pi_{k+1}(\tilde{f})$ は次のような可換図式で代表される。

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{h} & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ D^{k+1} & \longrightarrow & \tilde{Y} \end{array}$$

ただし h は normal bundle が trivial である immersion とする。この h を使って \tilde{G} -equivariant intersection form $\tilde{B} : \pi_{k+1}(\tilde{f}) \times \pi_{k+1}(\tilde{f}) \rightarrow \mathbb{Z}[\tilde{G}]$ と \tilde{G} -equivariant self-intersection map $\tilde{\mu} : \pi_{k+1}(\tilde{f}) \rightarrow \mathbb{Z}[\tilde{G}]/\tilde{\Lambda}$ が定まる。そこで、 $\sigma(f, b) = [\pi_{k+1}(\tilde{f}) \rightarrow K_k(f; R), \tilde{B}, \tilde{\mu}, B] \in \Gamma(\tilde{\mathcal{F}})$ と定義する。Wall の surgery theory (あるいは Cappell-Shaneson の surgery theory) と同様に次の定理を得る。

Theorem 5.2 ([6]). *If $\sigma(f, b) = 0$ then one can perform $(k-1)$ - and k -dimensional G -surgery on the regular part of X so that for the resulting G -framed map (f', b') , $f' : X' \rightarrow Y$ is an R -homology equivalence.*

自然な全射 $\mathbb{Z}[\widehat{G}] \rightarrow \mathbb{Z}[\widehat{G}]$ があるので, $\mathbb{Z}[\widehat{G}] \otimes_{\mathbb{Z}[\widehat{G}]} \alpha$ を施すことにより, 自然な準同型写像 $\Gamma(\widetilde{\mathcal{F}}) \rightarrow \Gamma(\widehat{\mathcal{F}})$

$$\alpha = (H \rightarrow \underline{H}, \varphi, q, \underline{\varphi}) \mapsto \alpha_{A'} = (H_{A'} \rightarrow \underline{H}, \varphi_{A'}, q_{A'}, \underline{\varphi}),$$

$A' = \mathbb{Z}[\widehat{G}]$, を得る.

Theorem 5.3 ([6]). *Let (f, b) be an R -suitable degree-one G -framed map as above. Then $\sigma(f, b)_{\mathbb{Z}[\widehat{G}]} = \sigma_{CS}(f, b)$.*

6. EQUIVARIANT CONNECTED SUM

2つの G -framed map $f = (f, b)$ ($f : X \rightarrow Y$) $f' = (f', b')$ があるとき, その G -connected sum $f \#_G (-id_Y \cup_\partial f')$ を定めたい. このためには $f, f' = (f', b')$ がある条件を満たしていなければならない.

Context 6.1. Let $f = (f, b)$ and $f' = (f', b')$, where $f : (X, \partial X) \rightarrow (Y, \partial)$, $b : \varepsilon_X(\mathbb{R}) \oplus T(X) \oplus f^*\eta \rightarrow f^*\tau$, $f' : (X', \partial X') \rightarrow (Y, \partial)$, and $b' : \varepsilon_{X'}(\mathbb{R}) \oplus T(X') \oplus f'^*\eta \rightarrow f'^*\tau$, be degree-one, G -framed maps such that $\tau = \varepsilon_Y(\mathbb{R}) \oplus T(Y) \oplus \eta$, $\partial X' = \partial Y$ and $f'|_{\partial X'} = id_{\partial Y}$.

接着多様体 $(-Y) \cup_\partial X'$ と attached G -framed map

$$-id_Y \cup_\partial f' = (id_Y \cup_\partial f', id_\tau \cup_\partial b'), \text{ where } id_Y \cup_\partial f' : (-Y) \cup_\partial X' \rightarrow Y$$

が自然に構成される. $y_0 \in Y^G$ を Y の内部にある基点とし, V_{y_0} を y_0 の G -linear slice neighborhood とする. 点 x_1 は $f^{-1}(y_0)$ にあり $G \times_H V$ は Gx_1 の X における G -tubular neighborhood で $H = G_{x_1}$, V は x_1 の H -linear slice neighborhood とする. さらに $f|_V : V \rightarrow V_{y_0}$ は線形同型とする. このとき G -connected sum $X \#_{G, x_1} (G \times_H (-Y \cup_\partial X'))$ が構成できる. $f|_V : V \rightarrow V_{y_0}$ を identity map とみなすとき $b|_V = id_{\tau|_{V_{y_0}}}$ であれば G -connected sum

$$f \#_{G, x_1} (G \times_H (-id_Y \cup_\partial f')) = (f \#_{G, x_1} (G \times_H (id_Y \cup_\partial f')), b \#_{G, x_1} (G \times_H (id_\tau \cup_\partial b')))$$

(see Section 3 of [5]) を構成できる.

$\widehat{H} = \pi_1(EG \times_H Y)$ と置くと、標準的な準同型写像 $\widehat{\mathcal{F}}_H : \mathbb{Z}[\widehat{H}] \rightarrow R[H]$ が得られる。自然な morphism $\psi = (\widetilde{\psi}, \psi)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\widehat{H}] & \xrightarrow{\widetilde{\psi}} & \mathbb{Z}[\widehat{G}] \\ \widehat{\mathcal{F}}_H \downarrow & & \downarrow \widehat{\mathcal{F}} \\ R[H] & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z}[G] \end{array}$$

が準同型写像

$$\text{Ind}_{(\widehat{H}, H)}^{(\widehat{G}, G)} : \Gamma_{(-1)^k}(\widehat{\mathcal{F}}_H) \rightarrow \Gamma_{(-1)^k}(\widehat{\mathcal{F}})$$

を定める。次の定理は Theorem 1.3 の証明において重要である。

Theorem 6.2. *Let R denote either \mathbb{Z} or $\mathbb{Z}_{(p)}$ for a prime p , and let f and f' be degree-one, one-connected, G -framed maps as above. Suppose that Y and ∂Y are R -homology equivalent to D^n and S^{n-1} respectively, and the induced homomorphism $\pi_1(\partial Y) \rightarrow \pi_1(Y)$ by the inclusion map is an isomorphism. Let $y_0 \in Y$, V_{y_0} , $x_1 \in X$ and V be as above. Then*

$$\sigma_{\text{CS}}(f \#_{G, x_1} (G \times_H (-id_Y \cup_{\partial} f'))) = \sigma_{\text{CS}}(f) + \text{Ind}_{(\widehat{H}, H)}^{(\widehat{G}, G)} \sigma_{\text{CS}}(\text{Res}_H^G f').$$

REFERENCES

- [1] A. Bak, *K-theory of Forms*, Annals of Math. Studies 98, Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.
- [2] S. E. Cappell and J. L. Shaneson, *The codimension two placement problem and homology equivalent manifolds*, Ann. of Math. **99** (1974), 277–348.
- [3] M. Morimoto, *Bak groups and equivariant surgery*, *K-Theory* **2** (1989), 465–483.
- [4] M. Morimoto, *Equivariant surgery theory: Deleting-inserting theorems of fixed point manifolds on spheres and disks*, *K-Theory* **15** (1998), 13–32.
- [5] M. Morimoto, *Deleting and inseting fixed-point sets on disks under the strong gap condition*, *K-theory Preprint Archives* no. 707 (September, 2004).
- [6] M. Morimoto, *Equivariant surgery theory for homology equivalences under the gap condition*, to appear in *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*
- [7] M. Morimoto and K. Pawałowski, *Smooth actions of finite Oliver groups on spheres*, *Topology* **42** (2003), 395–421.
- [8] T. Nakayama, *On modules of trivial cohomology over a finite group, II*, *Nagoya Math. J.* **12** (1957), 171–176.

- [9] R. Oliver, *Fixed point sets of group actions on finite acyclic complexes*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 155–177.
- [10] B. Oliver, *Fixed point sets and tangent bundles of actions on disks and euclidean spaces*, Topology **35** (1996), 583–615.
- [11] R. Oliver and T. Petrie, *G -CW-surgery and $K_0(\mathbb{Z}[G])$* , Math. Z. **179** (1982), 11–42.
- [12] T. Petrie and J. D. Randall, *Transformation Groups on Manifolds*, Dekker, New York, 1984.
- [13] D. S. Rim, *Modules over finite groups*, Ann. of Math. **69** (1959), 700–712.
- [14] C. T. C. Wall, *Surgery on Compact Manifolds*, Academic Press, London–New York, 1970.

Webs drawn on cubic surfaces

Gilles F. ROBERT

July 1, 2005

Abstract

Every nonsingular cubic surface in the projective space of dimension 3 contains twenty-seven straight lines. The section of the surface by a plane containing one of these lines consists therefore of the line itself and a conic. Varying the plane in the pencil of planes containing one fixed line, we thus obtain a foliation of the surface into conics. The twenty-seven foliations hence define a web known as Burau's web.

The main classifying tool in web theory is the space of Abelian relations, which is a finite dimensional vector space of functional relations canonically related to the web, and whose dimension (the rank of the web) is bounded by $(1/2)(d-1)(d-2)$, where d is the number of foliations of the web (for $d = 27$, this bound is 325).

We present a way to produce 280 independent such Abelian relations, using repeated integration of logarithmic differentials, and study the consequences of the presence of Eckhardt points or singularities.

1 Webs

1.1 Abelian relations; weave

A d -web \mathcal{W} on a surface Σ is a collection of d foliations $(\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_d)$ on Σ .

The singular locus of \mathcal{W} consists in

- the singular points of the foliations \mathcal{W}_i and
- the points of Σ at which two or more foliations have the same tangent.

We shall denote $X \subset \Sigma$ the complementary of the singular locus.

Note that, if a curve is contained in a leaf of two foliations, then it lies entirely in the singular locus.

A (local) Abelian relation of the web \mathcal{W} is a family of d holomorphic functions (F_1, \dots, F_d) defined on (an open subset of) X with the properties that

- the leaves of \mathcal{W}_i are level sets of F_i and
- the sum $F_1 + \dots + F_d$ is constant.

Analytic continuation along a path joining two points p and q can be used to derive Abelian relations around q from relations around p .

We shall assume that this analytic continuation is always possible, which will be the case in the examples.

Clearly, if we perform analytic continuation around a close path, there is no need to come back to the original relation ; so we shall have to cope with monodromy problems and choice of a representative in multiform functions.

Let $Ab(\mathcal{W})$ denote the space of Abelian relations defined on a small (simply connected) open subset $V \subset X$. Provided that the previous assumption on analytic continuation holds, then these relations can also be interpreted as relations defined on the universal cover \tilde{X} of X . Therefore, the dimension of this space doesn't depend on V .

If \mathcal{W}' is a sub-web of \mathcal{W} , clearly every Abelian relation on \mathcal{W}' is an Abelian relation on \mathcal{W} , so that $Ab(\mathcal{W}') \subset Ab(\mathcal{W})$.

Let $Ab_k(\mathcal{W})$ be the subspace of $Ab(\mathcal{W})$ spanned by the $Ab(\mathcal{W}')$ for all extracted sub-webs \mathcal{W}' with k foliations.

The space $Ab_1(\mathcal{W}) = Ab_2(\mathcal{W}) \simeq \mathbf{C}^d$ consists of trivial relations, for which all functions are constant, and we have a filtration

$$\mathbf{C}^d \simeq Ab_2(\mathcal{W}) \subset \dots \subset Ab_d(\mathcal{W}) = Ab(\mathcal{W}).$$

For $3 \leq k \leq d$, define

$$\rho_k(\mathcal{W}) = \dim Ab_k(\mathcal{W}) - \dim Ab_{k-1}(\mathcal{W}).$$

The *weave* of \mathcal{W} is the list $(\rho_3(\mathcal{W}), \dots, \rho_d(\mathcal{W}))$; its *rank* is the sum

$$\rho_3(\mathcal{W}) + \dots + \rho_d(\mathcal{W}) = \dim Ab(\mathcal{W}) - d.$$

This rank is controlled by the following result:

Theorem 1 (*W. Blaschke, G. Bol, [1]*)

The rank of a d -web is at most $(d-1)(d-2)/2$.

This implies that three-webs are of two different types : the ones admitting only trivial Abelian relations, and the ones admitting essentially only one extra Abelian relation. These three-webs will be called *hexagonal*.

1.2 Iterated integrals

In case the foliations \mathcal{W}_i are level sets of functions U_i , we have an equivalent definition of Abelian relations as families of functions (g_1, \dots, g_d) in one variable such that

$$g_1(U_1) dU_1 + \dots + g_d(U_d) dU_d = 0.$$

Indeed, if $F_1 + \dots + F_d = Cste$ is an Abelian relation, the fact that F_i can be written as $f_i(U_i)$ gives the result after a differentiation of the equation.

Reciprocally, integration of the closed one-forms $g_i(U_i) dU_i$ give functions F_i constant along the leaves of \mathcal{W}_i and satisfying $F_1 + \dots + F_d = Cste$. Therefore,

since integration depends on an additive constant, we associate to any relation of the form $\sum g_i(U_i) dU_i = 0$ an Abelian relation defined up to a trivial one.

If $\omega_1, \dots, \omega_k$ are one-forms on X , repeated integrations along a path $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ gives a meaning to the iterated integral

$$\begin{aligned} & \left(\int \omega_1 \int \omega_2 \int \dots \int \omega_k \right) (\gamma) \\ &= \int_0^1 \omega_1(\gamma'(t)) \left(\int \omega_2 \int \dots \int \omega_k \right) (\gamma_t) dt, \end{aligned}$$

where $\gamma_t(s) = \gamma(t, s)$ represents the restriction of γ to the interval $[0, t]$.

This process of iterated integration gives a k -linear map sending families of k one-forms to functions defined on the space $P(X)$ of paths in X

$$\begin{aligned} \Omega^1(X)^k &\longrightarrow \mathcal{O}[P(X)] \\ (\omega_1, \dots, \omega_k) &\longmapsto \int \omega_1 \int \dots \int \omega_k. \end{aligned}$$

We thus obtain a linear map defined on the space of k -tensor products of one-forms over X

$$\Phi_k : \begin{cases} \bigotimes_{\mathbb{C}}^k [\Omega^1(X)] \longrightarrow \mathcal{O}[P(X)] \\ \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k \longmapsto \int \omega_1 \int \dots \int \omega_k. \end{cases}$$

The collection of these Φ_k gives a map defined on the whole tensor algebra $T[\Omega^1(X)]$ over the space of one-forms.

The behaviour of these iterated integrals with respect to homotopy of paths has been studied

Theorem 2 (*K.T. Chen [4]*)

If all two-forms $\omega_i \wedge \omega_{i+1}$ and $d\omega_i$ are zero, then the resulting function is homotopy invariant, and hence defines a function on the universal cover \tilde{X} of X .

Note that this will always be the case if the one-forms ω_i can be written as $g_i(U) dU$ for rational functions g_i in one parameter, and U a fixed function on two parameters.

1.3 Tensor relations

Assume that we already know some Abelian relations

$$\begin{cases} F_1^{(1)} + \dots + F_d^{(1)} = Cste, \\ \dots \\ F_1^{(m)} + \dots + F_d^{(m)} = Cste. \end{cases}$$

We thus have, setting $\alpha_i^{(k)} = dF_i^{(k)}$

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} + \dots + \alpha_d^{(1)} = 0, \\ \dots \\ \alpha_1^{(m)} + \dots + \alpha_d^{(m)} = 0. \end{cases}$$

These equations can be interpreted as linear dependence relations between vectors lying in a finite dimensional subspace $A \subset \Omega^1(X)$.

For $n \geq 2$, the n -tensor products

$$\alpha_i^{(k_1)} \otimes \dots \otimes \alpha_i^{(k_n)} \in \bigotimes_{\mathbb{C}}^n (A) \subset \bigotimes_{\mathbb{C}}^n [\Omega^1(X)]$$

all belong to the same finite-dimensional subspace.

Every relation between these products carries through the map Φ_n to a Abelian relation involving iterated integrals.

Therefore the problem of finding Abelian relations of this particular type is reduced to a problem of linear algebra, i.e. finding all linear dependencies of a family of vectors in a finite-dimensional vector space.

The obvious starting point is the space of relations of extracted three-webs. Many such relations involve logarithmic functions of the form $\log(U_i - \lambda)$, and hence the tensorial relations will involve iterated integrals of the form

$$\int \frac{dU_i}{U_i - \lambda_1} \int \frac{dU_i}{U_i - \lambda_2} \int \dots \int \frac{dU_i}{U_i - \lambda_n}.$$

For $n = 2$, such integrals can be expressed using dilogarithms; for $n = 3$, the integrals of this type for which $\lambda_1 = \lambda_2$ or $\lambda_2 = \lambda_3$ can be expressed using trilogarithms.

This is no longer the case for $n \geq 4$: for instance, the integral

$$\int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z-1} \int \frac{dz}{z-1}$$

cannot be expressed using only four-logarithms.

2 Cubic surfaces

2.1 The 27 lines; Eckhardt points

Cubic surfaces (in the projective space \mathbf{P}^3) have been studied at length in the second half of the nineteenth century (A. Cayley [3], L. Schläfli [10], L. Cremona [6], F. Klein [8] etc.) and later (B. Segre [11], Yu. Manin [9]).

Theorem 3 (Cayley, Schläfli)

Every nonsingular cubic surface admits 45 tritangent planes. The section of the surface by any of these tritangent planes consists of three straight lines. There are thus 27 straight lines upon the cubic surface, each of which belonging to 5 tritangent planes.

If the three lines belonging to a tritangent plane have a point in common, then this point is called a Eckhardt point of the surface and the plane is called a Eckhardt plane [7].

A general cubic surfaces does not have any Eckhardt points. The surface having the maximum number of such points is the equianharmonic surface of projective equation

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0.$$

The twenty-seven lines have as equations

$$x_i + \zeta x_j = x_k + \zeta' x_l = 0.$$

where $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, and ζ and ζ' are cube roots of unity.

The eighteen Eckhardt planes are $x_i + \zeta x_j = 0$, with a Eckhardt point satisfying $x_k = x_l = 0$.

The twenty-seven other tritangent planes are

$$\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 + \zeta_4 x_4 = 0,$$

where $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ are cube roots of 1.

Each of the 27 lines belongs to two Eckhardt planes and three other tritangent planes.

2.2 Planar setting

An important property of cubic surfaces lies in the fact that they are the simplest examples of Del Pezzo surfaces, which are special projective surfaces birationally equivalent to the projective plane.

Theorem 4 (Cremona, Clebsch [5])

Every nonsingular cubic surface is birationally equivalent to the blow-up of \mathbf{P}^2 at six points (a_1, \dots, a_6) in general position (no three on the same line, and no six on the same conic). Through this birational equivalence, the 27 lines correspond to

- the blow-up points a_i themselves,
- the straight lines c_{ij} joining a_i and a_j and
- the conics b_i passing through all points except a_i

Clearly, performing a projective transformation on the points a_i or a Cremona transformation with three of them as base points induces a birational transformation between the surfaces obtained by blowing up the six points.

The sets of lines corresponding to the blow-up points consist of six mutually skew lines, and we can verify that there are exactly 72 such sets, and that every such realization is obtained from the first one via a sequence of Cremona transforms.

The intersection table in this setting is easy to derive :

- the lines intersecting a_i are the c_{ij} and b_j for $j \neq i$,
- the lines intersecting c_{ij} are a_i, a_j, b_i, b_j and the c_{kl} for k and l different from i and j ,
- the lines intersecting b_i are the c_{ij} and a_j for $j \neq i$.

2.3 Burau webs

To every line on a cubic surface, we can associate the pencil of planes passing through this line, and the foliation of the surface defined by the family of sections of the surface by these planes. These sections are cubic curves containing the given straight line, so the foliation consists a pencil of conics lying upon the surface.

For computations, we shall use the planar setting; in this setting, these foliations are

- the pencils of cubic curves passing through all six points with one as double point,
- the pencils of conics passing through four of the six points and
- the pencils of lines passing through one of the six points.

These 27 foliations define a 27-web, which was first studied by W. Burau [2] who proved

Theorem 5 *Among the extracted three-webs, those corresponding to three mutually skew lines are always hexagonal.*

In the planar setting, these 720 three-webs are

$a_i a_j a_k (20)$	$a_i a_j c_{kl} (90)$	$a_i c_{jk} c_{jl} (180)$
$a_i c_{jk} b_i (60)$	$c_{ij} c_{ik} c_{il} (60)$	$c_{ij} c_{ik} c_{jk} (20)$
$c_{ij} c_{ik} b_l (180)$	$c_{ij} b_k b_l (90)$	$b_i b_j b_k (20)$

Every 27-web with foliations named a_i, b_i and c_{ij} such that the 720 extracted three-webs in the previous table are hexagonal is locally diffeomorphic either to the one associated with a nonsingular cubic surface or to 27 pencils of straight lines.

Burau erroneously asserts that no other extracted three-web is hexagonal. This is not always true for those three-webs corresponding to sets of coplanar lines. We have instead

Theorem 6 *The extracted three-web associated with a set of three lines belonging to the same tritangent plane is hexagonal if and only if that plane is a Eckhardt plane.*

3 Abelian relations

3.1 Extracted three-webs

We shall use the planar setting: (a_1, \dots, a_6) are six points in general position, and we assume further that none is at infinity.

Let $l_{ij}(x, y) = u_{ij}x + v_{ij}y + w_{ij} = 0$ be an equation of the line $c_{ij} = (a_i a_j)$ and set

$$\delta_{ij} = d \log(l_{ij}) = \frac{u_{ij} dx + v_{ij} dy}{u_{ij}x + v_{ij}y + w_{ij}}.$$

Similarly, let $P_i(x, y) = 0$ be an equation of the conic b_i passing through all points except a_i and set $\gamma_i = d \log(P_i)$.

Keep in mind that the Blaschke bound for the rank of a 27-web is $26.25/2 = 325$.

The pencil of straight lines passing through a_i can be defined as level set of any one of the functions l_{ij}/l_{ik} , and we have the obvious relations

$$\frac{l_{ij} l_{jk} l_{ki}}{l_{ik} l_{ji} l_{kj}} = 1.$$

These relations also read (between one-forms)

$$(\delta_{ij} - \delta_{ik}) + (\delta_{jk} - \delta_{ji}) + (\delta_{ki} - \delta_{kj}) = 0.$$

The 700 other relations of hexagonal three-webs are of the form

$$\begin{aligned} \frac{l_{km} l_{ln} l_{kn} l_{lm}}{l_{kn} l_{lm} l_{km} l_{ln}} &= \frac{l_{kl} l_{mn}}{P_i} \frac{P_i l_{lj}}{l_{jl} l_{mn} l_{lk}} = 1, \\ \frac{P_i P_k P_j}{P_j P_i P_k} &= \frac{l_{kl} l_{mn} l_{jm} l_{ln} l_{km} l_{jl}}{l_{km} l_{ln} l_{jl} l_{mn} l_{kl} l_{jm}} = 1, \\ \frac{P_j l_{ij} P_k l_{ik}}{P_k l_{ik} P_j l_{ij}} &= \frac{P_k l_{ik} l_{il} l_{mn}}{P_l l_{il} P_k l_{ik} l_{mn}} = 1, \\ \frac{P_m l_{im} P_n l_{jn} l_{in} l_{jm}}{P_n l_{in} P_m l_{jm} l_{im} l_{jn}} &= \frac{P_j l_{ij} P_k l_{jk} P_i l_{ki}}{P_k l_{ik} P_i l_{ji} P_j l_{kj}} = 1. \end{aligned}$$

These relations reflect the fact that the differences between one-forms

- $\gamma_j + \delta_{ij}$ associated with the foliation a_i ,
- $\delta_{kl} + \delta_{mn}$ or γ_i (or γ_j) associated with the foliation c_{ij} ,
- δ_{ij} associated with the foliation b_i

all belong to a hyperplane inside a space of dimension $6 + 15 = 21$.

The one-forms associated with each foliation make up a space of dimension $5 - 1 = 4$, hence these 720 Abelian relations span a vector space $Ab_3^{\log}(\mathcal{W})$ of dimension $27.4 - 20 = 88$.

If three lines belong to a Eckhardt plane, then we can choose projective coordinates so that the lines have equations $x = t = 0$, $y = t = 0$ and $x + y = t = 0$, in the plane $t = 0$.

Therefore, we have the obvious relation

$$x/t + y/t = (x + y)/t.$$

This proves that the three-web associated with the three lines belonging to a Eckhardt plane is hexagonal.

This way, we obtain 18 (independent) other relations for the Burau web associated with the equianharmonic surface.

3.2 Other relations

The symmetric group S_n acts (by permutation of factors) on the n -th tensor products, and this action can be decomposed into irreducible representations.

For $n = 2$, this decomposition is simply the usual one between symmetric and anti-symmetric tensors; for $n = 3$, it involves symmetric, antisymmetric tensors as well as mixed tensors of the form $\alpha \otimes (\beta \wedge \gamma)$.

Of course, as n grows, then the situation becomes more and more involved.

The following table summarizes the results concerning relations between n -tensors, showing a total of $88 + 141 + 50 + 1 = 280$ independent Abelian relations.

For each line, n is the type of tensor involved, d_i is the number of such independent tensor products for each foliation, r is the dimension of the space of associated relations, and d is the dimension of the total space in which they lie.

n	d_i	r	$27d_i - r$	d
1	4	88	20	21
2_s	10	60	210	231
2_a	6	81	81	210
2	16	141	291	441
3_s	20	0	540	1771
3_{as}	20	15	525	3080
3_a	4	20	88	1330
3	64	50	1678	9261
4_a	1	1	26	5985

To understand the Abelian equation related with the last equation between antisymmetric 4-tensors, introduce

$$G_\lambda = \int \frac{dz}{z - \lambda_1} \int \frac{dz}{z - \lambda_2} \int \frac{dz}{z - \lambda_3} \int \frac{dz}{z - \lambda_4}.$$

Then set H_λ the antisymmetrized version of G_λ

$$H_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} = \sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon(\sigma) G_{\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \lambda_{\sigma(3)}, \lambda_{\sigma(4)}}.$$

The function occurring on each of the foliations is, provided that the values $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ correspond to the sections by the tritangent planes,

$$H_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} + H_{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5} + H_{\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_1} \\ + H_{\lambda_4, \lambda_5, \lambda_1, \lambda_2} + H_{\lambda_5, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}.$$

3.3 Singular cases

If a cubic surface contains a simple conical singularity, then the intersection of the surface with the tangent cone at the singularity is formed by six straight lines lying upon the surface.

If we deform the surface in order to make the singularity disappear, then each of these six lines gives rise to two lines lying upon the non-singular surface. Therefore, the lines passing through a conical singularity have multiplicity 2.

Likewise, lines passing through a biplanar singularity have multiplicity 3.

Cubic surfaces have been classified regarding the number and type of their singularities into 21 species.

3.3.1 The surface with four nodes

All cubic surfaces with four conical singularities are projectively equivalent to one another, a model being the one defined by the equation

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0.$$

It contains nine lines: six passing through two of the singularities (with equations $x_i = x_j = 0$) and three other lines with equations

$$x_i + x_j = x_k + x_l = 0.$$

Setting $x_i = 1/z_i$, we obtain a birational equivalence between this surface and the projective hyperplane $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

This surface therefore admits a natural nine-web, and this web has maximal rank 28, and its weave is $(17, 3, 3, 3, 0, 0, 2)$.

Twelve independent logarithmic relations can be written, with $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$,

$$\left(\frac{x_i + x_j}{x_i} \right)^2 = \frac{S}{x_i + x_k} \frac{S}{x_i + x_l} \frac{x_i + x_j}{S}.$$

These relations give rise to six independent relations between products of logarithms (symmetric 2-tensors) and three between dilogarithms (anti-symmetric 2-tensors), and two relations between 3-tensors, one of which is Spence-Kummer equation for the trilogarithm.

Five other relations complete the claimed total of 28 independent relations:

$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{x_k} + \frac{x_i}{x_l} = -1,$$

$$\arctan \sqrt{\frac{x_i + x_l}{x_j + x_k}} + \arctan \sqrt{\frac{x_i + x_k}{x_j + x_l}} + \arctan \sqrt{\frac{x_i + x_j}{x_k + x_l}} = \frac{\pi}{2}.$$

This last equation holds for the usual determination near the point of projective coordinates $[x_i, x_j, x_k, x_l] = [-1, 3, 3, 3]$.

3.3.2 Surfaces with two biplanar nodes

These surfaces depend, up to projective equivalence, on one parameter λ , and a model is given by the surface of equation

$$xzw = y(y - x)(y - \lambda x).$$

The two biplanar nodes are on the line $x = y = 0$ which lies upon the surface. There are six other lines with equations

$$\begin{aligned} y = z = 0, & & y = w = 0, \\ y - x = z = 0, & & y - x = w = 0, \\ y - \lambda x = z = 0, & & y - \lambda x = w = 0. \end{aligned}$$

Every surface of this family therefore admits a natural seven-web; these webs have maximal rank 15, and their weave is $(11, 0, 2, 2, 0)$.

The fifteen three-webs containing the foliation associated with the line joining the two singularities are hexagonal; their relations are logarithmic and span a space of dimension 5. There are eight other hexagonal three-webs, whose relations are

$$\begin{aligned} (\lambda - 1) \frac{y}{z} - \lambda \frac{y - x}{z} + \frac{y - \lambda x}{w} &= 0, \\ (\lambda - 1) \frac{y}{z} + \frac{z}{y - x} - \frac{z}{y - \lambda x} &= 0, \\ -\frac{w}{y} - \lambda \frac{y - x}{z} + \frac{w}{y - \lambda x} &= 0, \\ \frac{w}{y} - \frac{w}{y - x} + \frac{y - \lambda x}{z} &= 0, \end{aligned}$$

and similarly with an exchange of z and w . These relations span a space of dimension 6.

Two other relations are

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)^3 \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \lambda^3 \left(\frac{y - x}{z}\right)^2 - \left(\frac{y - \lambda x}{z}\right)^2 + \\ (1 - \lambda)^3 \left(\frac{w}{y}\right)^2 + \lambda^3 \left(\frac{w}{y - x}\right)^2 + \left(\frac{w}{y - \lambda x}\right)^2 &= 0, \\ (1 - \lambda)^3 \left(\frac{y}{w}\right)^2 + \lambda^3 \left(\frac{y - x}{w}\right)^2 - \left(\frac{y - \lambda x}{w}\right)^2 + \\ (1 - \lambda)^3 \left(\frac{z}{y}\right)^2 + \lambda^3 \left(\frac{z}{y - x}\right)^2 + \left(\frac{z}{y - \lambda x}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

These two relations, together with the previous ones, prove that the six-web formed by all foliations except the one associated with the line passing through both singularities has maximal rank 10 and weave $(6, 2, 0, 2)$.

The entire seven-web also admits two other relations

$$\begin{aligned} & \log^2\left(\frac{y}{z}\right) - \log^2\left(\frac{y-x}{z}\right) - \log^2\left(\frac{y}{w}\right) + \log^2\left(\frac{y-x}{w}\right) \\ &= 2 \log\left(\frac{y-x}{y}\right) \log\left(\frac{y(y-x)(y-\lambda x)}{x^3}\right), \\ & \log^2\left(\frac{y}{z}\right) - \log^2\left(\frac{y-\lambda x}{z}\right) - \log^2\left(\frac{y}{w}\right) + \log^2\left(\frac{y-\lambda x}{w}\right) \\ &= 2 \log\left(\frac{y-\lambda x}{y}\right) \log\left(\frac{y(y-x)(y-\lambda x)}{x^3}\right). \end{aligned}$$

Three extracted five-webs have maximal rank 6 and their weave is $(3, 2, 1)$.

References

- [1] Blaschke W.- Bol G.- *Geometrie der Gewebe*, Grundlehren der Math., **49**, Springer, Berlin, 1938.
- [2] Burau W.- *Die Kegelschnittscharen einer Fläche 3. Ordnung*, Abh. Hamburg **11** (1936), 381–386.
- [3] Cayley A.- *A memoir on cubic surfaces*, Philos. Trans. Royal Soc., vol. CLIX (1869), 231–326.
- [4] Chen K.T.- *Iterated integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 831–879.
- [5] Clebsch A.- *Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematic (Crelle), vol. LXV (1865), 359–380.
- [6] Cremona L.- *Mémoire sur les surfaces du troisième ordre*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematic (Crelle), vol. LXVIII (1868), 1–133.
- [7] Eckhardt F.E.- *Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden*, Math. Ann. **10** (1876), 227–272.
- [8] Klein F.- *Ueber Flächen dritter Ordnung*, Math. Ann. **6** (1873), 551–581.
- [9] Manin Y.- *Cubic forms*, North Holland, 1986.
- [10] Schläfli L.- *On the distribution of surfaces of the third order into species, in reference to the presence or absence of singular points and the reality of their lines*, Philos. Trans. Royal Soc., vol. CLIII (1863), 193–241.
- [11] Segre B.- *The non-singular cubic surfaces*, Clarendon, Oxford, 1942.

小さな素数で局所化した安定ホモトピー圏の特異性について

下村 克己 (高知大学理学部)

1. 球面の安定ホモトピー群の β 族について

球面の安定ホモトピー群 $\pi_n(S) = \text{colim}_k \pi_{n+k}(S^k)$ についてを考える。これが分かればその後は各素数に対して EHP 列と呼ばれる完全列

$$\dots \rightarrow \pi_{n+k}(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{n+k+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{n+k+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \pi_{n+k-1}(S^n) \rightarrow \dots$$

により、非安定な球面のホモトピー群が計算できる。ここに、 E は懸垂、 H は Hopf 不変量、 P は Whitehead 積である。(奇素数の場合は少し異なることに注意) 球面の安定ホモトピー群に関して、次のような重要な定理が知られている。

定理 1.1 (Serre [29]) $\pi_n(S)$ は $n > 0$ のとき有限群である。

さらに $\pi_*(S)$ は合成を積として次数付き環になるがその積に関して、

定理 1.2 (西田 [18]) $\pi_0(S)$ の元以外はすべて冪零である。

球面の安定ホモトピー群を計算する手段として、その p 成分に収束するアダムススペクトル系列 $E_2^{s,t} = \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \Rightarrow {}_p\pi_{t-s}(S)$ がある。ここに A は Steenrod 代数である。これにより、Hopf 不変量の問題は $E_2^{1,2p^i(p-1)}$ の元 h_i が永久輪体になるか否かという問題に帰着される。同様に $E_2^{2,2p^{j+1}(p-1)}$ の元 b_j の永久輪体性の問題も考えられるが、素数が 2 の場合には Kervaire 不変量の問題として知られている。これらの問題に関しては素数が 2 でないと結果は自明なものになる。即ち、奇素数のときは Hopf 不変量の h_0 を除いて全て永久輪体ではなく、素数 2 の場合は Hopf 不変量は $i \leq 2$ のときだけ h_i が永久輪体であり、Kervaire 不変量については $j \leq 4$ のときは $b_j = h_j^2$ は永久輪体であることが知られておりそのほかはまだ未解決である。このようにアダムススペクトル系列は有効であるので、Steenrod 代数の部分代数の実現問題が考えられる。Steenrod 代数の双対は

$$A^* = \begin{cases} \Lambda(\tau_0, \tau_1, \dots) \otimes \mathbb{F}_p[\xi_1, \xi_2, \dots] \\ \quad (|\xi_n| = 2(p^n - 1), |\tau_n| = 2p^n - 1) & p > 2 \\ \mathbb{F}_2[\xi_1, \xi_2, \dots] \quad (|\xi_n| = 2^n - 1) & p = 2 \end{cases}$$

となっている。戸田-Smith 複体 $V(n)$ は \mathbb{F}_p -係数ホモロジー群により $H_*(V(n)) = \Lambda(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$ を、Brown-Peterson 複体 BP は $H_*(BP) = \mathbb{F}_p[\xi_1, \xi_2, \dots]$ ($p = 2$ のときは $= \mathbb{F}_2[\xi_1^2, \xi_2^2, \dots]$) を満たすものとして定義される。

定理 1.3

- (1) (cf. Smith[37], 戸田 [41], Ravenel[28]) $n < 4$ のとき、 $V(n)$ が存在する必要十分条件は $2n < p$ である。
- (2) (Brown-Peterson[3]) BP は存在する。

$n \geq 4$ については

定理 1.4 (L. Nave [17]) $p > 5$ のとき、 $n \geq \frac{p+3}{2}$ に対して $V(n)$ は存在しない。

が知られているだけである。この定理は Hopkins-Miller の固定点スペクトル系列を用いて示された。

BP については複素コボルディズム論を与える MU を素数 p で局所化したときの直和成分としても得られる事を形式群を用いて Quillen[24] が示した。特に

$$BP_* = \pi_*(BP) = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots]$$

となる。環変換定理により、 $\text{Ext}_A^*(\mathbb{F}_p, H_*(BP)) = \text{Ext}_{\Lambda(\tau_0, \tau_1, \dots)}^*(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$ となるので、 τ_i と v_i が関係していることが分かる。特に戸田-Smith 複体 $V(n)$ は次と同値である。

$$BP_*(V(n)) = BP_*/(p, v_1, \dots, v_n).$$

ここに BP_* -ホモロジー群は $BP_*(X) = \pi_*(BP \wedge X)$ で与えられる。アダムススペクトル系列の構成を \mathbb{F}_p -係数ホモロジー群の代わりに BP_* -ホモロジー群を用いてまねして得られる Adams-Novikov スペクトル系列 $E_2^{s,t}(X) = \text{Ext}_{BP_*(BP)}^{s,t}(BP_*, BP_*(X)) \Rightarrow \pi_{t-s}(X)$ が考えられる。Adams [1] は J -準同型 $J: \pi_k(SO) \rightarrow \pi_k(S)$ の像 $\text{Im } J$ を決定したが、Novikov [19] は奇素数の場合、 $\text{Im } J$ は Adams-Novikov スペクトル系列の E_2 -項 $E_2^{1,*}(S)$ と同型であることを示した。素数 2 の場合は $E_2^{1,*}(S)$ だけでなく $E_2^{3,*}(S)$ までに現れ複雑さが窺い知れる。

定理 1.5 (幾何的境界定理 cf. [28]) コファイバー列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ が $BP_*(h) = 0$ を満たすと仮定する。このとき $x \in E_2^{s,t}(Z)$ が永久輪体で、 $\xi \neq 0 \in \pi_{t-s}(Z)$ に収束するなら、コファイバー列から誘導される連結準同型 $\delta: E_2^{s,t}(Z) \rightarrow E_2^{s+1,t}(X)$ の像 $\delta(x)$ は $h_*(\xi) \in \pi_{t-s-1}(X)$ に収束する。

この定理により、球面の安定ホモトピー群のギリシャ文字族 $\{\alpha_t\}, \{\beta_t\}$ が Adams-Novikov スペクトル系列の E_2 -項に次のように定義できる。短完全列 $0 \rightarrow BP_* \xrightarrow{p} BP_* \rightarrow BP_*/(p) \rightarrow 0$ に同伴する連結準同型 δ による $v_1^s \in \text{Ext}_{BP_*(BP)}^{0,2s(p-1)}(BP_*, BP_*/(p))$ の像 $\delta(v_1^s) \in E_2^{1,*}(S)$ を α_s と書く。さらに、短完全列 $0 \rightarrow BP_*/(p) \xrightarrow{v_1} BP_*/(p) \rightarrow BP_*/(p, v_1) \rightarrow 0$ に同伴する連結準同型 δ' を用いて $v_2^s \in \text{Ext}_{BP_*(BP)}^{0,2s(p^2-1)}(BP_*, BP_*/(p, v_1))$ の像 $\delta'(v_2^s) \in E_2^{2,*}(S)$ を β_s と書く。次に mod p Moore スペクトラム M と戸田-Smith スペクトラム $V(1)$ をコファイバー列

$$S \xrightarrow{p} S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} \Sigma S \quad \text{と} \quad \Sigma^{2p-2}M \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{i_1} V(1) \xrightarrow{j_1} \Sigma^{2p-1}M$$

で定義する。ここに、 M 上の自己射 $\alpha: \Sigma^{2p-2}M \rightarrow M$ は $BP_*(\alpha) = v_1$ となるもので $p > 2$ のとき存在する。これを用いて、

$$\alpha_t = j\alpha^t i \in \pi_{2t(p-1)-1}(S)$$

が定義できる。素数 2 に対しては、奇素数のような α は存在しないが、 $BP_*(\alpha) = v_1^4$ を満たす $\alpha: \Sigma^8 M \rightarrow M$ が存在する。 $v_1 \in E_2^{0,2}(M)$ が永久輪体であることはすぐにわかり、これが収束する元も $v_1 \in \pi_2(M)$ と書く。この Spanier-Whitehead 双対 $v_1^s \in [M, S]_1$ を用いて

$$\alpha_{4t} = j\alpha^t i \in \pi_{8t-1}(S), \quad \alpha_{4t+1} = j\alpha^t v_1 \in \pi_{8t+1}(S), \quad \alpha_{4t+2} = v_1^s \alpha^t v_1 \in \pi_{8t+3}(S)$$

と定義すると、定理 1.5 より、次が分かる。

定理 1.6 (戸田 [39]) $p > 2$ のときは α_t は永久輪体であり、 $p = 2$ のときは α_t が永久輪体になる必要十分条件は $t \equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$ である。

この定理で α_{4t+3} については、 $d_3(v_1^2) = v_1 h_1^3 \in E_2^{3,8}(M)$ が分かるので、 $d_3(v_1^{4t+3}) = \alpha_t^* d_3(v_1^3) = v_1^{4t+1} h_1^3$ が得られ Adams-Novikov スペクトル系列の微分の自然性から $d_3(\alpha_{4t+3}) = \alpha_{4t+1} h_1^3 \in E_2^{4,2(4t+3)}$ となり、 α_{4t+3} は永久輪体でないことが分かる。

ここまでは素数 2 と奇素数の違いであった。素数 3 とそれより大きい素数の違いの例を考える。Smith [37] は $BP_*(\beta) = v_2$ となる $V(1)$ 上の自己写像 $\beta: \Sigma^{2(p^2-1)}V(1) \rightarrow V(1)$ の存在を示した。このとき、 β 元を

$$\beta_t = jj_1 \beta^t i_1 i \in \pi_{2t(p^2-1)-2p}(S)$$

と定義できるので、定理 1.5 より、

定理 1.7 (L. Smith [37]) $p > 3$ のとき、 β_t は永久輪体である。

さらに、 $p = 3$ のときは α -族のように Ravenel [26] は次のように予想した：

予想 1.8 (Ravenel [26]) $p = 3$ のとき、 β_s が永久輪体である必要十分条件は $s \equiv 0, 1, 2, 3, 5, 6 \pmod{9}$ である。

必要条件であることは $L_2V(1)$ のホモトピー群の計算から得られた。

定理 1.9 (下村 [30]) $s \equiv 4, 7, 8 \pmod{9}$ のとき永久輪体ではない。

十分条件について考える。

定理 1.10 (Behrens-Pemmaraju [2]) $BP_*(\beta) = v_2^9$ となる $V(1)$ 上の自己写像 $\beta: \Sigma^{144}V(1) \rightarrow V(1)$ が存在する。

これは Hopkins-Miller の固定点スペクトラム e_{02} を用いて示された。

定理 1.11 (岡 [22]) $t = 1, 5$ に対して $BP_*(b_t) = v_2^t$ となる $b_t \in \pi_{16t}(V(1))$ が存在する。

これらの定理から、 b_1 の Spanier-Whitehead 双対を b_1^* と書くとき上のように

$$\begin{aligned} \beta_{9t} &= jj_1 \beta^t i_1 i \in \pi_{144t-6}(S), \\ \beta_{9t+1} &= jj_1 \beta^t b_1 \in \pi_{144t+10}(S), \quad \beta_{9t+2} = b_1^* \beta^t b_1 \in \pi_{144t+26}(S), \\ \beta_{9t+5} &= jj_1 \beta^t b_5 \in \pi_{144t+74}(S), \quad \beta_{9t+6} = b_1^* \beta^t b_5 \in \pi_{144t+90}(S). \end{aligned}$$

と定義出来るので

定理 1.12 $s \equiv 0, 1, 2, 5, 6 \pmod{9}$ のとき永久輪体である

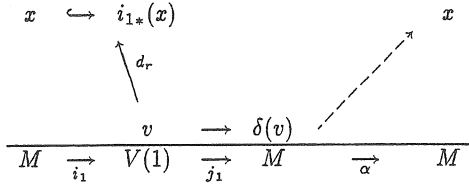
残りの β_{9t+3} について最近次が示せた。

定理 1.13 (下村 [33]) $t \geq 0$ に対して、 β_{9t+3} は永久輪体である。

この証明について少し解説する。これは Behrens-Pemmaraju の定理 1.10 と $E(2)$ -アダムススペクトル系列による。このスペクトル系列について次の補題がある。

補題 1.14 $v \in E_r^0(V(1))$ が $\xi \neq 0 \in \pi_*(M)$ に収束する元 $x \in E_r^t(M)$ に対し、 $d_r(v) = i_{1*}(x) \in E_r^t(V(1))$ となると仮定する。さらに、 $i_{1*}(\xi) = 0 \in \pi_*(V(1))$ ならば、 $\delta(v) \in E_2^t(M)$ は $\alpha\xi = \xi$ となる元 $\zeta \in \pi_*(M)$ に収束する。

この補題は次のような絵で表される。



補題 1.15 $d_5(v_2^{9t+3}) = i_{1*}(\beta'_{9t+2}\beta_1^2) \in E_5^{5,144t+52}(V(1))$

補題 1.16 (下村 [32]) $\beta_{9t+2}\beta_1^2 \neq 0 \in \pi_{144t+46}(S^0)$.

これらから $\beta'_{9t+3} \in \pi_{144t+43}(M)$ が $\alpha\beta'_{9t+3} = \beta'_{9t+2}\beta_1^2$ を満たすように取れる。
 $\beta_{9t+3} = j\beta'_{9t+3}\pi_{144t+42}(S)$ となり、定理 1.13 が示される。

γ -族も $V(2)$ を Smith の自己射 $\beta: \Sigma^{2(p^2-1)}V(1) \rightarrow V(1)$ のコファイバーとして定義すると

定理 1.17 (戸田 [42]) $p > 5$ のとき、 $BP_*(\gamma) = v_3$ となる $\gamma: \Sigma^{2(p^3-1)}V(2) \rightarrow V(2)$ が存在する。

があるので $p > 5$ のとき、上と同様に $\gamma_t \in \pi_*(S)$ が存在することが分かる。 $p = 5$ のときは、1,000 次元までの計算を元に、

定理 1.18 (Ravenel [28]) γ_i は $i < 3$ のとき永久輪体であり、 $d_{33}(\gamma_3) = \beta_1^{18}$ である。

が示されている。これらから

予想 $BP_*(\gamma) = v_3^{25}$ となる自己射 $\gamma: \Sigma^{6200}V(2) \rightarrow V(2)$ が存在する。

上と同じ議論から予想が正しければ $\gamma_{25t+1}, \gamma_{25t+2}$ は存在し、 γ_{25t+3} は存在しないことが分かる。

このような自己射については

定理 1.19 (Hopkins-Smith [6]) X を $k < n$ に対し $v_k BP_*(X) = 0$ となるスペクトラムのとき、 $BP_*(\eta) = v_n^l$ となる自然数 l と自己射 $\eta: \Sigma^{2p^l(p^n-1)}X \rightarrow X$ が存在する。

2. $v_n^{-1}BP$ 局所的安定ホモトピー圏の可逆スペクトラムについて

基点付き CW-複体とその間の連続写像のなす圏を CW と書く。このとき、懸垂関手 $S: CW \rightarrow CW$ を可逆にするような圏 S を安定ホモトピー圏といいその対象をスペクトラムという。この圏を素数 p で局所化する。 BP_* の生成元 v_n により BP を局所化したスペクトラム $v_n^{-1}BP$ で S を Bousfield 局所化した安定ホモトピー圏を \mathcal{L}_n と書き、関手 $L_n: S \rightarrow \mathcal{L}_n$ を考える。(cf. [25]) これは局所化した Johnson-Wilson スペクトラム $E(n)$ で局所化したものと同じであることがわかり、J.H.C. Whitehead の定理の類似

$$f: X \rightarrow Y \text{ が同型 } f_*: E(n)_*(X) \cong E(n)_*(Y) \text{ を誘導すれば } L_n X \simeq L_n Y$$

がある。ここに、 $E(n)_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots, v_n, v_n^{-1}] \subset v_n^{-1}BP_*$ 。 $E(n)$ は smashing なので、 $L_n X \wedge Y = L_n X \wedge L_n Y$ など、都合のよい性質をもつ。戸田-Smith 複体について、

定理 2.1 (下村-吉村 [36]) $n^2 + n < 2p$ なら、 $L_n V(n-1)$ は存在する。

$n^2 + n < 2p$ を満たす大きな素数ではある程度共通の性質がある。 $X \in \mathcal{L}_n$ は $X \wedge Y = L_n S$ となる $Y \in \mathcal{L}_n$ が存在するとき可逆であるという。

定理 2.2 (Hovey-Sadofsky [8], 上谷-下村 [13]) $X \in \mathcal{L}_n$ が可逆スペクトラムである必要十分条件は $E(n)_*(E(n))$ 余加群として $E(n)_*(X) = E(n)_*$ となることである。

Hovey-Sadofsky はこれを X が \mathcal{L}_n で有限であるという仮定を加えて証明し [13] ではその有限性を仮定しないで証明した。可逆なスペクトラムの同型類全体を Pic_n と書く。これが集合なら、スマッシュ積 \wedge を積とし、 $L_n S$ を単位元とする群になる。また、 $\mathbb{Z} = \{\Sigma^n S : n \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Pic}_n$ も直ぐに分かる。Hovey-Sadofsky [8] は、 Pic_n は集合であることや、直和解 $\text{Pic}_n = \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}_n^0$ があることを示した。さらに、 $n^2 + n < 2p-2$ のときは整数環 \mathbb{Z} と同型であることを示した。言い換えると $n^2 + n < 2p-2$ のときは可逆スペクトラムは球面だけであるということである。この例外として彼らは素数 2 で疑問符複体 $QM = S \cup_2 e^1 \cup_\eta e^3$ が球面以外の Pic_1 の生成元となることを示し、 $\text{Pic}_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ を示した。これらのことを $E(n)$ -アダムスペクトル系列の言葉で述べるために Pic_n^0 に

$$F_k = \{X \in \text{Pic}_n^0 : d_s(g_X) = 0 \in E_s^{s, s-1}(X) \text{ for } s < kq + 1\}$$

で定義されるフィルトレーション $\{F_k\}$ を考える。ここに、 $q = 2p-2$ であり、 $g_X \in E_2^{0,0}(X) = \mathbb{Z}_{(p)}$ は、定理 2.2 から、 $E_2^*(X) = E_2^*(S)$ であることが分かるので、その生成元を表す。 F_k 自体は、微分がスマッシュ積に関して derivative だからスマッシュ積に関して半群にはなるのであるが必ずしも群とはならない。しかしその剰余 F_k/F_{k+1} は群になる。そこで、同伴次数付き群 GPic_n^0 を $\bigoplus_{k>0} F_k/F_{k+1}$ と定義する。このとき、準同型 $\varphi: F_k/F_{k+1} \rightarrow E_{kq+1}^{kq+1, kq}$ が $\varphi(X) = d_{kq+1}(g_X)$ で定義でき、単射であることが分かる。したがって、

定理 2.3 (上谷-下村 [13]) 同伴次数付き群 GPic_n^0 は球面に収束する $E(n)$ -アダムスペクトル系列の E_r -項の直和 $\bigoplus_{r>2} E_r^{r, r-1}$ の部分群に同型である。

E_r -項の直和 $\bigoplus_{r>2} E_r^{r, r-1}$ に関しては次が知られている。

定理 2.4

- (1) (Morava の構造定理から。cf. [25]) $n^2 + n < 2p-2$ のとき、 $\bigoplus_{r>2} E_r^{r, r-1} = 0$
- (2) (Ravenel [28]) 素数 2 で $n = 1$ のとき $\bigoplus_{r>2} E_r^{r, r-1} = E_3^{3,2} = \mathbb{Z}/2$
- (3) (下村-王 [34]) 素数 3 で $n = 2$ のとき $\bigoplus_{r>2} E_r^{r, r-1} = E_5^{5,4} = \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$

この (1), (2) から、Hovey-Sadofsky の結果が得られる。一方、素数 3 で $n = 2$ のとき我々は戸田の $V(1\frac{1}{2})$ を基に $V(2)$ の非存在を用いて次を示した。

定理 2.5 (上谷-下村 [13]) 素数 3 で $n = 2$ のとき、球面以外の生成元 X が存在する。即ち、 $\text{Pic}_2 \neq \mathbb{Z}$ 。

実際、これは $E_2^{5,4} = \mathbb{Z}/3\{\xi_1, \xi_2\}$ と書くとき、 $Y = \Sigma^{-21}V(1\frac{1}{2})$ は $E(2)_*(Y) = E(2)_*/(3)$ を満たし、 $d_5(g_Y) = i_*(\xi_1) \in E_5^{5,4}(Y) = E_5^{5,4}(M)$ となることがわかる

ので、これを基に $f: X \rightarrow Y$ を $f_*: E(2)_* = E(2)_*(X) \rightarrow E(2)_*(Y) = E(2)_*/(3)$ が射影であるように構成する。すると、微分の自然性から、 $d_5(g_X) = \xi_1$ 、すなわち $\varphi(X) = \xi_1$ と ξ_1 に対応する可逆スペクトラムが得られる。この結果から、 Pic_2^0 は素数 3 のときは $\mathbb{Z}/3$ または $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$ となることが分かる。Goerss, Henn, Mahowald, Rezk たちは $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$ となると、彼らの $K(n)$ 局所化の議論から予想しているが、我々はもうひとつの生成元 ξ_2 に対応する可逆スペクトラムが存在するとして [11] で計算した結果、そのホモトピー一群の構造の不自然さから $\mathbb{Z}/3$ を予想している。実際、 X については

定理 2.6 (市木-下村 [10]) $v_2^3: X \wedge V(1) \simeq L_2V(1)$

のように構造が良さそうである。また、Ravenel の chromatic functor M^2 を任意のスペクトラム W に対してコファイバー列 $W \rightarrow L_0W \rightarrow N^1W, N^1W \rightarrow L_1N^1W \rightarrow M^2W$ で定義すると、 $\pi_*(L_2S)$ よりも、 $\pi_*(M^2S)$ の方が構造がきれいである。そこで、 $\pi_*(L_2W)$ の代わりに $\pi_*(M^2W)$ を考える。下村-王 [34] により $\pi_*(M^2S)$ が決定されている。それを

$$\pi_*(M^2S) = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$$

と書き、 X^k で X の k 個のスマッシュ積を表すとき

定理 2.7 (市木-下村 [9]) $\pi_*(M^2X^k) = A_0 \oplus A_1 \oplus v_2^{9-3k}A_2$ 。

と良い形をしている。一方もうひとつの生成元に対応する可逆スペクトラムを Z とすると、

定理 2.8 (市木-下村 [11]) $\pi_*(Z \wedge V(1)) \simeq \pi_*(Z^2 \wedge V(1))$ だけど $\pi_*(Z \wedge V(1)) \not\simeq \pi_*(Z^0 \wedge V(1)) = \pi_*(L_2V(1))$ 。

さらにこれから、一般戸田-Smith 複体を定義する。即ち、各 n に対して、 $\mathcal{V}_n(k)$ で $E(n)_*(V) = E(n)_*(p, v_1, \dots, v_{k-1})$ を満たすスペクトラム V の同型類の集まりとする。定理 2.2 より、 $\text{Pic}_n^0 = \{X: E(n)_*(X) = E_*\}$ だから、 $\mathcal{V}_n(-1) = \text{Pic}_n^0$ が分かる。

定理 2.9 (Strickland (cf. [12])) $\mathcal{V}_n(k)$ は集合をなす。

定理 2.1 により

定理 2.10 (市木-下村 [12]) $n^2 + n < 2p$ のとき $\mathcal{V}_n(k) = \{L_nV(k)\}$ である。

$\mathcal{V}_n(k)$ には Spanier-Whitehead 双対 D が作用する。実際 $V \in \mathcal{V}_n(k)$ に対し、 $D_*(V) = \Sigma^{v(n)}DV = \Sigma^{v(n)}F(V, L_nS)$ で定義できる。ここに $v(n) = \sum_{k=0}^n (2p^k - 1)$ 。さらに、 $\mathcal{V}_n(k)$ にはスマッシュ積により Pic_n^0 が作用する。

予想 2.11. $V \in \mathcal{V}_n(k)$ に対し、 $D_*(V) = V \wedge X$ となる $X \in \text{Pic}_n^0$ がある。

$k = -1$ のとき $D(V) = V^{-1}$ が [7] により知られているので $D_*(V) = V^{-1} = V \wedge V^{-2}$ であるから、これは成り立つ。 $k = 0$ のとき、一般戸田-Smith スペクトラムを一般 Moore 空間と呼ぶ。 $p \geq 5$ なら、 $\mathcal{V}_2(0) = \{L_2M\}$ なので、 $p = 3$ とする。このとき、 $\mathcal{V}_2(0)$ については決定まで行かないが考え付く方法で一般 Moore 空間を構成してみる。定理 1.11 から v_2^i は $i = 0, 1, 5$ のとき $\pi_*(V(1))$ の元 b_i を与える。これらは $B^i: M \rightarrow V(1)$ に拡張出来、 $BP_*(B^i) = v_2^i$ を満たすので、これらのコファイバーを $\Sigma^{16i+5}V_i$ とすると一般 Moore 空間であることが分かる。さらに、可逆スペクトラム X に対し、 $\iota_X \in \pi_0(X)$ を $3g_X \in E_2^{0,0} = \mathbb{Z}_{(3)}\{g_X\}$ により与えられる元とする。

WX で L_X のコファイバーを表す。定義から $V_0 = M$, $V_1 = V(1\frac{1}{2})$ が直ぐに分かり、さらに、 $WP^2 = L_2V_1$ が示される [9]。これらと Pic_2^0 とのスマッシュ積で得られる Pic_2^0 -集合

$$\mathcal{V}_2(0)^0 = \text{Pic}_2^0\{L_2V_0, L_2V_1, L_2V_5, WP, (WQ, WQ^2 : \text{存在するとき})\}$$

を考えると $\mathcal{V}_2(0)^0 \subset \mathcal{V}_2(0)$ が分かる。予想として

$$\text{予想 2.12.} \quad \mathcal{V}_2(0)^0 = \mathcal{V}_2(0)$$

が考えられる。これが正しければ関係式 $D(X) = X^{-1} = X^2$ を用いて一つ一つチェックすることにより予想 2.11 が $k = 0, n = 2$ のときが示せる。 $\mathcal{V}_2(0)^0$ の元に関して、市木-下村 [9] で

$$\pi_*(M^2V_0 \wedge P^k) = A \oplus v_2^{9-3k}B_h \oplus v_2^{9-3k}B_t \quad \text{と} \quad \pi_*(M^2V_1) = A \oplus v_2^3B_h \oplus v_2^6B_t$$

が示されている。このときこれらのホモトピー群は

定理 2.13 (市木-下村 [12])

- (1) $\pi_*(M^2V_1 \wedge P^k) = A \oplus v_2^{3-3k}B_h \oplus v_2^{6-3k}B_t.$
- (2) $\pi_*(M^2WP \wedge P^{k+1}) = A \oplus v_2^{6-3k}B_h \oplus v_2^{3-3k}B_t.$
- (3) $\pi_*(M_2V_5 \wedge P^k) = A \oplus v_2^{3-3k}B_h \oplus v_2^{9-3k}B_t.$

となっている。ここに $\pi_*(M^2V_5) = \pi_*(M^2WP \wedge P^2)$ だけれど $L_2V_5 \neq WP \wedge P^2$ である。実際、 $E_2^{5,4}(M) = \mathbb{Z}/3\{i_*(\xi_1), i_*(\xi_2), \xi_3\}$ であり、 $d_5(g_{V_5}) = \xi_3$ となるので、 E_2 -項 $E_2^{0,0}(V_5)$ の生成元の微分の行き先は可逆スペクトラムの微分の行き先とは違うからである。

References

- [1] J. F. Adams, On the groups $J(X)$, IV, *Topology* 5 (1966), 21–71.
- [2] M. Behrens and S. Pemmaraju, On the existence of the self map v_2^9 on the Smith-Toda complex $V(1)$ at the prime 3, *Contemp. Math.* 346 (2004), 9–49.
- [3] E. H. Brown and F. P. Peterson, A spectrum whose \mathbb{Z}_p cohomology is the algebra of reduced p -th powers, *Topology* 5 (1966), 149–154.
- [4] P. Goerss, H.-W. Henn and M. Mahowald, The homotopy of $L_2V(1)$ for the prime 3, Proceedings of the international conference in algebraic topology, Isle of Skye, UK, June 2001. Basel: Birkhäuser. *Prog. Math.* 215 (2004), 125–151.
- [5] M. J. Hopkins, M. E. Mahowald, and H. Sadofsky, Constructions of elements in Picard group, *Contemp. Math.* 158, *Amr. Math. Soc.*, 1994, 89–126.
- [6] M. J. Hopkins and J. H. Smith. Nilpotence and stable homotopy theory II, *Ann. of Math.*, 148 (1998), 1–49.
- [7] M. Hovey, J. H. Palmieri and H. Sadofsky, *Axiomatic Stable Homotopy Theory*, *Memoir of Amer. Math. Soc.* 610 (1997).
- [8] M. Hovey and H. Sadofsky, Invertible spectra in the $E(n)$ -local stable homotopy category, *J. London Math. Soc.* 60 (1999) 284–302.
- [9] I. Ichigi and K. Shimomura, The homotopy groups of $L_2V(1\frac{1}{2})$ and an invertible spectrum at the prime three, preprint.
- [10] I. Ichigi and K. Shimomura, $E(2)_*$ -invertible spectra smashing with the Smith-Toda spectrum $V(1)$ at the prime 3, *Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2004), 3111–3119.
- [11] I. Ichigi and K. Shimomura, On the homotopy groups of an invertible spectrum in the $E(2)$ -local category at the prime 3, *JP Jour. Geometry Topology* 3 (2003), 257–268.
- [12] I. Ichigi and K. Shimomura, Homotopy groups of a generalized $E(2)$ -local Moore spectrum at the prime three, to appear in *Hiroshima Math. J.* 35.

- [13] Y. Kamiya and K. Shimomura, A relation between the Picard group of the $E(n)$ -local homotopy category and $E(n)$ -based Adams spectral sequence, *Contemp. Math.* **346** (2004), 321–333.
- [14] Y. Kamiya and K. Shimomura, E_* -homology spheres for a connective spectrum E , *Contemp. Math.* **314** (2002), 153–159.
- [15] S. O. Kochman and M. E. Mahowald, On the computation of stable stems, *Contemp. Math.* **181** (1995), 299–316.
- [16] H. R. Miller, D. C. Ravenel, and W. S. Wilson, Periodic phenomena in Adams-Novikov spectral sequence, *Ann. of Math.* **106** (1977), 469–516.
- [17] L. Nave, On the nonexistence of Smith-Toda complex, preprint.
- [18] G. Nishida, The nilpotency of elements of the stable homotopy groups of spheres, *J. Math. Soc. Japan* **25** (1973), 707–732.
- [19] S. P. Novikov, The methods of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theories, *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat.* **31** (1967), 855–951.
- [20] S. Oka, The homotopy groups of spheres II, *Hiroshima Math. J.* **2** (1972), 99–161.
- [21] S. Oka, Ring spectra with few cells, *Japan J. Math.* **5** (1979), 81–100.
- [22] S. Oka, Note on the β -family in stable homotopy of spheres at the prime 3, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* **35** (1981), 367–373.
- [23] S. Oka, Derivations in ring spectra and higher torsions in Coker J , *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, **38** (1984), 23–46.
- [24] D. G. Quillen, On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, *Bull. Amer. Math.* **75** (1969), 1293–1298.
- [25] D. C. Ravenel, Localization with respect to certain periodic homology theories, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 351–414.
- [26] D. C. Ravenel, A novice's guide to the Adams-Novikov spectral sequence, *Lecture Notes in Math.* **658** (1977), 404–475.
- [27] D. C. Ravenel, The nonexistence of odd primary Arf invariant elements in stable homotopy, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **83** (1987), 429–433.
- [28] D. C. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres* (Academic Press, New York, 1986).
- [29] J.-P. Serre, Groupes d'homotopie et classes de groupes abélien, *Ann. of Math.* **58** (1953), 258–294.
- [30] K. Shimomura, The homotopy groups of the L_2 -localized Toda-Smith spectrum $V(1)$ at the prime 3, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 1821–1850.
- [31] K. Shimomura, The homotopy groups of the L_2 -localized mod 3 Moore spectrum, *J. Math. Soc. Japan*, **52** (2000), 65–90.
- [32] K. Shimomura, On the action of β_1 in the stable homotopy of spheres at the prime 3, *Hiroshima Math. J.* **30** (2000), 345–362.
- [33] K. Shimomura, The existence of β_{9t+3} in stable homotopy of spheres at the prime 3, preprint.
- [34] K. Shimomura and X. Wang, The homotopy groups $\pi_*(L_2S^0)$ at the prime 3, *Math. Z.* **241** (2002), 271–311.
- [35] K. Shimomura and A. Yabe, The homotopy groups $\pi_*(L_2S^0)$, *Topology* **34** (1995), 261–289.
- [36] K. Shimomura and Z. Yosimura, BP -Hopf module spectrum and BP_* -Adams spectral sequence, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **21** (1986), 925–947.
- [37] L. Smith, On realizing complex bordism modules, IV, Applications to the stable homotopy groups of spheres, *Amer. J. Math.* **99** (1971), 418–436.
- [38] N. P. Strickland, On the p -adic interpolation of stable homotopy groups, *Adams Memorial Symposium on Algebraic Topology, 2* (Manchester, 1990), 45–54, C
- [39] H. Toda, p -primary components of homotopy groups IV, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A*, **32** (1959), 288–332.
- [40] H. Toda, An important relation in homotopy groups of spheres, *Proc. Japan Acad.* **43** (1967), 839–942.
- [41] H. Toda, Algebra of stable homotopy of \mathbb{Z}_p -spaces and applications, *J. Math. Kyoto Univ.*, **11** (1971), 197–251.
- [42] H. Toda, On spectra realizing exterior parts of the Steenrod algebra, *Topology* **10** (1971), 53–65.

E-mail address: katsumi@math.kochi-u.ac.jp

On Samelson products in p -localized unitary groups

濱中 裕明 / 兵庫教育大学

要約. 素数 p で局所化したユニタリ群 $U(n)$ 上のある Samelson 積を決定し、これにより 3 つの元の多重 Samelson 積が 0 でないことを示して、 $SU(n)$ の自己ホモトピー集合の成す群の中零性についての結果を得た。すなわち、 n を 8 と異なる 4 以上の自然数とするとき、 $\text{nil}[SU(n), SU(n)] \geq 3$ である。

1. Samelson 積

G を弧状連結な位相群とすると、 G のホモトピー群の間に Samelson 積とよばれる双線形写像が定義される。すなわち、 G の交換子写像を $\gamma: G \wedge G \rightarrow G$ として、 $\alpha \in \pi_i(G)$ と $\beta \in \pi_j(G)$ に対して、その Samelson 積 $\langle \alpha, \beta \rangle \in \pi_{i+j}(G)$ を合成

$$S^{i+j} \cong S^i \wedge S^j \xrightarrow{\alpha \wedge \beta} G \wedge G \xrightarrow{\gamma} G$$

により定義する。Samelson 積は双線形であるだけでなく、ある種の交代性、および Jacobi 恒等式を満たしている。

$$\text{For } \alpha \in \pi_i(G), \beta \in \pi_j(G), \delta \in \pi_k(G)$$

$$\langle \beta, \alpha \rangle = (-1)^{ij+1} \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$(-1)^{jk} \langle \alpha, \langle \beta, \delta \rangle \rangle + (-1)^{ki} \langle \beta, \langle \delta, \alpha \rangle \rangle + (-1)^{ij} \langle \delta, \langle \alpha, \beta \rangle \rangle = 0$$

特に $G = U(n)$ の場合を考える (p は素数)。

$$\epsilon_i \in \pi_{2i+1}(U(n)) = \mathbb{Z} \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

$$\pi_{2i}(U(n)) = 0 \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

$$\tilde{\epsilon}_n \in \pi_{2n}(U(n)) = \mathbb{Z}/n!$$

$$\pi_{2i+1}(U(n))_{(p)} = 0 \quad (i = n, \dots, n+p-3)$$

$$\tilde{\epsilon}_i \in \pi_{2i}(U(n))_{(p)} = \mathbb{Z}/p^{\nu(i)} \quad (i = n, \dots, n+p-2)$$

$$\epsilon \in \pi_{2n+2p-3}(U(n))_{(p)} = \begin{cases} \mathbb{Z}/p & n \equiv 0 \pmod{p} \\ 0 & n \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

上の 2 つの式はユニタリ群のホモトピー群の安定部分で Bott の周期性に一致する部分であり、下の部分は Matsunaga [11] や Imanishi [8] 等による。

またこれらの間の Samelson 積の結果としては R. Bott による次の結果が有名である。

THEOREM 1.1. $U(n)$ において、 $i+j+1=n$ のとき、 $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = i!j!\tilde{\epsilon}_n$.

3つの元の多重 Samelson 積としては、次の結果がある。

THEOREM 1.2. [14, Ōshima] $U(4)$ において、 $\langle \epsilon_1, \langle \epsilon_2, \epsilon_3 \rangle \rangle \neq 0$.

以下、素数 p を固定して、空間や写像はすべて p で局所化して考える。Samelson 積に関して、今回報告するのは次の結果である。

THEOREM 1.3. i, j は 0 以上 $n-1$ 以下とする。このとき、 $U(n)$ において、

$$\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \begin{cases} 0 & i+j+1 < n, \\ i!j!\tilde{\epsilon}_{i+j+1} & i+j+1 \geq n. \end{cases}$$

THEOREM 1.4. n は素数 p の倍数とし、 $U(n)$ における Samelson 積を考える。 $0 \leq i \leq p-2, 0 \leq j \leq p-2$ かつ $i+j=p-2$ のとき、

$$\langle \epsilon_i, \tilde{\epsilon}_{n+j} \rangle \neq 0 \in \pi_{2n+2p-3}(U(n)) \cong \mathbb{Z}/p.$$

2. 生成元

上の結果の証明について述べる前に、ホモトピー群の生成元を明確にしておく必要がある。まず、コホモロジーの元をつぎのように定める。

$$H^*(U(n); \mathbb{Z}) = \bigwedge (x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}), \quad H^*(U(\infty); \mathbb{Z}) = \bigwedge (x_1, x_3, \dots).$$

ここで、 $x_{2i+1} = \sigma c_{i+1}$ 、 σ は cohomology suspension、 c_i は Chern 類。

生成元 $\epsilon_i \in \pi_{2i+1}(U(n))$ については $\tilde{K}^0(S^{2i+2})$ の生成元 $S^{2i+2} \rightarrow BU(n) \rightarrow BU$ の adjoint map $S^{2i+1} \xrightarrow{\epsilon_i} U(n) \rightarrow U(\infty)$ から得られ、球面のコホモロジーの生成元 $q_i \in H^i(S^i; \mathbb{Z})$ と表すと、 ϵ_i はコホモロジーにおいて

$$(2.1) \quad \epsilon_i^*(x_{2i+1}) = i!q_i$$

を満たす。

次に、 $W_n = U(\infty)/U(n)$ とおいて、ファイバー系列

$$(2.2) \quad \Omega U(\infty) \xrightarrow{\Omega\pi} \Omega W_n \xrightarrow{\delta} U(n) \xrightarrow{i} U(\infty) \xrightarrow{\pi} W_n.$$

を考える。ここで、 $W_n, \Omega W_n$ のコホモロジーは

$$H^*(W_n) = \bigwedge (\bar{x}_{2n+1}, \bar{x}_{2n+3}, \dots), \\ H^*(\Omega W_n) = \mathbb{Z}\langle a_{2n}, a_{2n+2}, \dots \rangle \text{ (in lower dimensions).}$$

ただし、 $\pi^*\bar{x}_{2i+1} = x_{2i+1}$ かつ $a_{2i} = \sigma\bar{x}_{2i+1}$ である。

$$E = \prod_{k=0}^{p-2} K(\mathbb{Z}_{(p)}, 2n+2k+1)$$

とおき、上記のコホモロジーの元をもちいて、写像 $\bar{x}: W_n \rightarrow E$ を

$$\bar{x} = \left(\prod_{k=0}^{p-2} \bar{x}_{2n+2k+1} \right) \circ \Delta,$$

と定めると、 $2n+2p-4$ 次元以下のCW複体 X に対して、写像 \bar{x} は同型

$$(2.3) \quad (\Omega \bar{x})_* : [X, \Omega W_n] \rightarrow [X, \Omega E] = \bigoplus_{k=0}^{p-2} H^{2n+2k}(X; \mathbb{Z}_{(p)}),$$

$$(2.4) \quad \bar{x}_* : [X, W_n] \rightarrow [X, E] = \bigoplus_{k=0}^{p-3} H^{2n+2k+1}(X; \mathbb{Z}_{(p)}),$$

を導き、ファイバー系列(2.2)よりつぎの完全列を得る ($\dim X < \infty$ より、 $[X, U(n)]$ は巾零群であることに注意).

$$\tilde{K}^0(X)_{(p)} \xrightarrow{\Omega x_*} \bigoplus_{k=0}^{p-2} H^{2n+2k}(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \rightarrow [X, U(n)]_{(p)} \rightarrow \tilde{K}^1(X)_{(p)} \xrightarrow{x_*} \bigoplus_{k=0}^{p-3} H^{2n+2k+1}(X; \mathbb{Z}_{(p)}).$$

ここで、上記の Ωx_* と x_* は群準同型になっており、上から導かれる短完全列

$$0 \rightarrow \text{Coker} \Omega x_* \rightarrow [X, U(n)]_{(p)} \rightarrow \text{Ker} x_* \rightarrow 0.$$

は中心拡大になっている. ($[X, U(n)]$ は一般に非可換である).

特にいま $X = S^{2n+2i}$ ($i = 0, \dots, p-2$) のときを考えると、 $\pi_{2n+2i}(U(n))$ の生成元 $\tilde{\epsilon}_{n+i}$ は次図のように ΩW_n を経由し、また $\tilde{\epsilon}_{n+i}$ はコホモロジー上で $\tilde{\epsilon}_{n+i}^*(a_{2n+2i}) = q_{2n+2i}$ となる、と特徴づけられる.

$$\begin{array}{ccc} & & \Omega W_n \\ & \nearrow \tilde{\epsilon}_{n+i} & \downarrow \delta \\ S^{2n+2i} & \xrightarrow{\tilde{\epsilon}_{n+i}} & U(n) \end{array}$$

最後に、 $CP_m^n = CP^n / CP^{m-1}$ とおいて、同型 $\pi_{2n+2p-3}(U(n)) \cong \pi_{2n+2p-2}(\Sigma CP_n^{n+p-1})$ ([11], [16]) を用いると、 $n \equiv 0 \pmod{p}$ のとき、 $\pi_{2n+2p-3}(U(n)) \cong \mathbb{Z}/p$ の生成元は合成 $S^{2n+2p-3} \xrightarrow{\alpha} S^{2n} \xrightarrow{\tilde{\epsilon}_n} U(n)$ であることがわかる. ただし、 α は $\pi_{2p}(S^3)$ の生成元の suspension を表す.

3. Theorem 1.3, 1.4 の証明の概要

$U(n)$ と $U(n)$ は $U(\infty)$ のなかではホモトピー可換であるから、 $U(n)$ の交換子写像 γ は下図のようにリフト $\tilde{\gamma}$ をもつ。

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Omega W_n \\
 & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow \delta \\
 U(n) \wedge U(n) & \xrightarrow{\gamma} & U(n) \\
 & & \downarrow \pi \\
 & & U(\infty)
 \end{array}$$

$\tilde{\gamma}$ のとり方は一意的ではないが、以下のようにとることが出来ることが証明されている。

THEOREM 3.1. [3, Hamanaka, Kono] リフト $\tilde{\gamma}$ を適当にとれば、 $\tilde{\gamma}$ の誘導するコホモロジー写像は次をみます。

$$(3.1) \quad \tilde{\gamma}^*(a_{2n+2i}) = \sum_{k+l+1=n+m} x_{2k+1} \otimes x_{2l+1} \quad (m=0, \dots, n-1)$$

Samelson 積 (ϵ_i, ϵ_j) は合成 $\gamma \circ (\epsilon_i \wedge \epsilon_j)$ であるから、(2.1), (3.1) および $\tilde{\epsilon}_n$ の定め方から Theorem 1.3 を得る。

Theorem 1.4 を示すために、 $\tilde{\epsilon}_{n+i}$ の別の特徴付けを考える。まず、埋め込み写像 $\Sigma CP^i \rightarrow U(n)$ を $\hat{\epsilon}_i$ と表す。また、 ΣCP_{m+1}^{m+p-1} は球面の和になるので、 ΣCP^{m+p-1} の最高次のセルの接着写像を $\hat{\alpha}_m : S^{2m+2p-2} \rightarrow \Sigma CP^m$ と表す。このとき、以下が成り立つ。

LEMMA 3.2. $i=0, \dots, p-2$ に対して、次の図式は可換。

$$\begin{array}{ccc}
 S^{2n+2i} & & \\
 \hat{\alpha}_{n+i-(p-1)} \downarrow & \searrow \tilde{\epsilon}_{n+i} & \\
 \Sigma CP^{n+i-(p-1)} & \xrightarrow{\hat{\epsilon}_{n+i-(p-1)}} & U(n)
 \end{array}$$

証明は次の図式が可換なことによる：

$$(3.2) \quad
 \begin{array}{ccccccc}
 S^{2n+2i} & \xrightarrow{j_1} & CP_{n+i-(p-1)+1}^{n+i} & \xrightarrow{j_2} & CP_n^\infty & \xrightarrow{\bar{k}} & \Omega W_n \\
 & \searrow \hat{\alpha}_{n+i-(p-1)} & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \delta \\
 & & \Sigma CP^{n+i-(p-1)} & \xrightarrow{j_3} & \Sigma CP^{n-1} & \xrightarrow{\hat{\epsilon}_{n-1}} & U(n)
 \end{array}$$

ここで、 j_1, j_2, j_3 は包含写像 (および包含写像から誘導される写像) で、 \bar{k} は埋め込み $\Sigma CP_n^\infty \rightarrow W_n$ の adjoint である。また、2つの ∂ はそれぞれ2つの cofibration

$$\begin{array}{l}
 CP^{n+i-(p-1)} \rightarrow CP^{n+i} \rightarrow CP_{n+i-(p-1)+1}^{n+i}, \\
 CP^{n-1} \rightarrow CP^\infty \rightarrow CP_n^\infty.
 \end{array}$$

の完全系列の連結写像である。

実際、 $\delta \circ \bar{k} \circ j_2 \circ j_1 = \tilde{\epsilon}_{n+i}$ 及び $\hat{\epsilon}_{n-1} \circ j_3 = \hat{\epsilon}_{n+i-(p-1)}$ であることから Lemma 3.2 が得られる。

以下 Theorem 1.4 を示す。 $0 \leq i \leq p-2$, $0 \leq j \leq p-2$ かつ $i+j = p-2$ のとき、 Lemma 3.2 から

$$\langle \epsilon_i, \tilde{\epsilon}_{n+j} \rangle = \langle \epsilon_i, \hat{\epsilon}_{n+j-(p-1)} \circ \hat{\alpha}_{n+j-(p-1)} \rangle = \langle \epsilon_i, \hat{\epsilon}_{(n-1)-i} \rangle \circ (\Sigma^{2i+1} \hat{\alpha}_{(n-1)-i}).$$

となる。ここで、 $\lambda = \tilde{\gamma} \circ (\epsilon_i \wedge \hat{\epsilon}_{(n-1)-i})$ とおき、また、 $S^{2i+1} \wedge \Sigma CP^{(n-1)-i}$ の $(2n-1)$ -skeleton を潰す写像を q' とおく。

$$\begin{array}{ccccc} S^{2i+1} \wedge S^{2n+2j} & \xrightarrow{(n-1-i)\alpha} & S^{2n} & \xrightarrow{i! \tilde{\epsilon}_n} & \Omega W_n \\ & \searrow 1 \wedge \hat{\alpha}_{(n-1)-i} & \uparrow q' & \nearrow \lambda & \downarrow \delta \\ & & S^{2i+1} \wedge \Sigma CP^{(n-1)-i} & \xrightarrow{\langle \epsilon_i, \hat{\epsilon}_{(n-1)-i} \rangle} & U(n) \end{array}$$

次元に着目すると、 $S^{2i+1} \wedge \Sigma CP^{(n-1)-i}$ が $2n$ 次元で、 ΩW_n が $(2n-1)$ -連結なので、 λ は S^{2n} を経由する。さらに、コホモロジー上の計算により、 $\lambda = (i! \tilde{\epsilon}_n) \circ q'$ となる。

一方、コホモロジー環 $H^*(CP^{n+j}; \mathbb{Z})$ の生成元を t とおくと、 $H^{2n-2i-1}(\Sigma CP^{n+j}; \mathbb{Z})$ において $P^1(\Sigma t^{(n-1)-i}) = (n-1-i)\Sigma t^{n+j}$ であるから、

$$q' \circ (\Sigma^{2i+1} \hat{\alpha}_{(n-1)-i}) = (n-1-i)\alpha.$$

よって、

$$\langle \epsilon_i, \tilde{\epsilon}_{n+j} \rangle = \delta \circ (i! \tilde{\epsilon}_n) \circ q' \circ (\Sigma^{2i+1} \hat{\alpha}_{(n-1)-i}) = \delta \circ (i! \tilde{\epsilon}_n) \circ (n-1-i)\alpha = i!(n-1-i)(\tilde{\epsilon}_n \circ \alpha).$$

となる。 $0 \leq i \leq p-2$ であったから、 $i!(n-1-i) \not\equiv 0 \pmod{p}$ 。つまり、 $\langle \epsilon_i, \tilde{\epsilon}_{n+j} \rangle \neq 0$ 。

COROLLARY 3.3. p を素数とし、 $0 \leq k_i \leq n-1 \leq p-1$ ($i=1, 2, 3$), $k_2 + k_3 \geq p-1$, $k_1 + k_2 + k_3 = 2p-3$ とする。このとき、 $U(n)$ において、

$$\langle \epsilon_{k_1}, \langle \epsilon_{k_2}, \epsilon_{k_3} \rangle \rangle \neq 0 \in \pi_{4p-3}(U(n)).$$

Proof. $n \leq p$ なので、Samelson 積の自然性から、 $U(p)$ において、

$$\langle \epsilon_{k_1}, \langle \epsilon_{k_2}, \epsilon_{k_3} \rangle \rangle \neq 0 \in \pi_{4p-3}(U(p)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

を示せば十分である。Theorem 1.3 から

$$\langle \epsilon_{k_1}, \langle \epsilon_{k_2}, \epsilon_{k_3} \rangle \rangle = k_2! k_3! \langle \epsilon_{k_1}, \tilde{\epsilon}_{k_2+k_3} \rangle$$

で、Theorem 1.4 より、 $\langle \epsilon_{k_1}, \tilde{\epsilon}_{k_2+k_3} \rangle \neq 0$ であるから主張がなりたつ。

特にここで、 $p=3$, $n=2$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ とすれば、Hilton の結果

$$\langle \iota_3, \langle \iota_3, \iota_3 \rangle \rangle \neq 0 \in \pi_9(S^3)$$

に一致する。

4. 自己ホモトピー集合の巾零性

連結でコンパクトなリー群 G に対して、ホモトピー集合 $[G, G]$ は G の群構造により群を成す. 特に、 $[G, G]$ はかならず巾零群で、その巾零性に関して多くの研究がなされてきた. 例えば、その非可換性に関しては次の結果がある.

THEOREM 4.1. [9, Kono, Ōshima] G が次の (i), (ii) とは異るとき、また、そのときに限り、 $[G, G]$ は非可換、つまり $\text{nil}[G, G] \geq 2$ である.

- (i) n 次元トーラス T^n .
- (ii) $T^n \times S^3$ ($0 \leq n \leq 2$).

また、Ōshima による次の予想がある.

予想: G が単純ならば、 $\text{nil}[G, G] \geq \text{rank} G$.

$U(n)$ に関しては、この予想に沿う形で

$$\text{nil}[SU(2), SU(2)] = 1, \quad \text{nil}[SU(3), SU(3)] = 2, \quad \text{nil}[SU(4), SU(4)] = 3$$

が知られている ([13, Mimura, Ōshima], [14, Ōshima, Yagita]).

さて、上記の Corollary 3.3 を用いると、次が示される.

THEOREM 4.2. n が 8 と異なる 4 以上の整数のとき、 $\text{nil}[SU(n), SU(n)] \geq 3$.

以下、証明の概略を述べる. $n = 4$ のときは [14] により示されているので、 $n \geq 5$ とする. このとき、素数 p 及び 整数 k_1, k_2, k_3 で、

$$\begin{aligned} 1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n-1 \leq p-1, & \quad k_1 + k_2 + k_3 = 2p-3. \\ k_1 \not\equiv k_2 \not\equiv k_3 \not\equiv k_1 \pmod{p-1}, & \end{aligned}$$

を満たすものが存在する. もしも、 $n \leq p \leq \frac{3}{2}n - 2$ の範囲に素数 p が存在すれば、 k_1, k_2, k_3 を

$$(k_1, k_2, k_3) = \begin{cases} (2m-2, 2m, 2m+1) & \text{if } p = 3m+1, \\ (2m-1, 2m, 2m+2) & \text{if } p = 3m+2. \end{cases}$$

のようにとることによって、存在がわかる. また、そのような素数 p の存在は [15] の次の結果から示される. (ただし $n = 8$ を除く)

THEOREM 4.3. x を越えない素数の個数を $\pi(x)$ とすると、 $x \geq 59$ の範囲で次の不等式が成り立つ:

$$\frac{x}{\log x} \left(1 + \frac{1}{2 \log x} \right) < \pi(x) < \frac{x}{\log x} \left(1 + \frac{3}{2 \log x} \right)$$

上記のような p, k_1, k_2, k_3 の存在を確認したうえで、次に、 $SU(n)$ の mod p 分解 ([18]) を用いる. すなわち、 p で局所化された $SU(n)$ はつぎのように直積分解される.

$$SU(n) \simeq \prod_{i=1}^{p-1} X_i$$

ただし、 X_s のコホモロジー環は

$$H^*(X_s; \mathbb{Z}_{(p)}) = \bigwedge (x_{2a_1+1}, \dots, x_{2a_{m_s}+1}),$$

で、 $a_i \equiv s \pmod{p-1}$ となっている。

いま、入射 $X_s \rightarrow SU(n)$ と射影 $SU(n) \rightarrow X_s$ をそれぞれ j_s, p_s とおき、3つの写像

$$\kappa_i : SU(n) \xrightarrow{p_{k_i}} X_{k_i} \xrightarrow{j_{k_i}} SU(n) \quad (i = 1, 2, 3).$$

を考えると、この3つの写像の $[SU(n), SU(n)]$ 内での多重交換子は

$$(4.1) \quad [\kappa_1, [\kappa_2, \kappa_3]] = \Gamma \circ (j_{k_1} \wedge j_{k_2} \wedge j_{k_3}) \circ (p_{k_1} \wedge p_{k_2} \wedge p_{k_3}) \circ \bar{\Delta}.$$

ただし、 Γ は多重交換子写像 $\gamma \circ (1 \wedge \gamma)$ で、 $\bar{\Delta}$ は reduced diagonal map である。

いま、ホモトピー群の元 ϵ_{k_i} はそれぞれ次のように X_{k_i} を経由する。

$$S^{2k_i+1} \xrightarrow{\epsilon'_{k_i}} X_{k_i} \xrightarrow{j_{k_i}} SU(n)$$

よって、次のような写像を考えることができる。

$$\epsilon_{k_1 k_2 k_3} : S^{2k_1+1} \times S^{2k_2+1} \times S^{2k_3+1} \xrightarrow{\epsilon'_{k_1} \times \epsilon'_{k_2} \times \epsilon'_{k_3}} X_{k_1} \times X_{k_2} \times X_{k_3} \hookrightarrow SU(n).$$

下の図式にしめすように、上の写像を (4.1) に合成することにより、

$$\begin{aligned} & [\kappa_1, [\kappa_2, \kappa_3]] \circ \epsilon_{k_1 k_2 k_3} \\ &= \Gamma \circ (j_{k_1} \wedge j_{k_2} \wedge j_{k_3}) \circ (\epsilon'_{k_1} \wedge \epsilon'_{k_2} \wedge \epsilon'_{k_3}) \circ \rho \\ &= \Gamma \circ (\epsilon_{k_1} \wedge \epsilon_{k_2} \wedge \epsilon_{k_3}) \circ \rho = \langle \epsilon_{k_1}, \langle \epsilon_{k_2}, \epsilon_{k_3} \rangle \rangle \circ \rho, \end{aligned}$$

となるが、 $\langle \epsilon_{k_1}, \langle \epsilon_{k_2}, \epsilon_{k_3} \rangle \rangle \neq 0$ であったから、 $[\kappa_1, [\kappa_2, \kappa_3]] \neq 0$ となり、 $\text{nil}[SU(n), SU(n)] \geq 3$ を得る。

$$\begin{array}{ccccc} SU(n) & \xrightarrow{\bar{\Delta}} & SU(n) \wedge SU(n) \wedge SU(n) & \xrightarrow{j_{k_1} \wedge j_{k_2} \wedge j_{k_3}} & SU(n) \wedge SU(n) \wedge SU(n) & \xrightarrow{\Gamma} & SU(n) \\ \uparrow \epsilon_{k_1 k_2 k_3} & & \uparrow \epsilon_{k_1} \wedge \epsilon_{k_2} \wedge \epsilon_{k_3} & & \uparrow j_{k_1} \wedge j_{k_2} \wedge j_{k_3} & & \\ S^{k_1} \times S^{k_2} \times S^{k_3} & \xrightarrow{\rho} & S^{k_1} \wedge S^{k_2} \wedge S^{k_3} & \xrightarrow{\epsilon'_{k_1} \wedge \epsilon'_{k_2} \wedge \epsilon'_{k_3}} & X_{k_1} \wedge X_{k_2} \wedge X_{k_3} & & \\ & & & \searrow p_{k_1} \wedge p_{k_2} \wedge p_{k_3} & & & \end{array}$$

5. Generalized Samelson 積

Samelson 積は ソースの空間を球面とせずとも、定義することができる。とくに suspension タイプの空間 $\Sigma A, \Sigma B$ に対しては

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : [\Sigma A, G] \times [\Sigma B, G] \rightarrow [\Sigma A \wedge \Sigma B, G]$$

も双線形写像となる。

Theorem 4.2 の証明においては、大きな素数 p で局所化することによって $\text{nil}[SU(n), SU(n)] \geq 3$ を示したが、Generalized Samelson 積を用いることによって、もっと小さな素数で局所化したときの巾零性についての結果を得ることができる。

$\hat{\epsilon}_{n-1}$ は埋め込み写像 $\Sigma CP^{n-1} \rightarrow U(n)$ であったが、これに関する Generalized Samelson 積について：

THEOREM 5.1. n を素数 p の倍数とし、 $1 \leq i \leq p-3$, $1 \leq j \leq p-3$ かつ $i+j = p-2$ とする。このとき、

$$\langle \epsilon_i, \langle \epsilon_j, \hat{\epsilon}'_{n-1} \rangle \rangle \neq 0 \text{ in } [\Sigma^{2p-1} CP^{n-1}, U(n)].$$

これを用いて、次の結果を得た。

THEOREM 5.2. n を素数 p の倍数とする。つぎのいずれかが成り立つとき、

$$\text{nil}[SU(n), SU(n)]_{(p)} \geq 3$$

である。

- (i) $p = 5$ かつ $n \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{4}$.
- (ii) $p \geq 7$.

参考文献

- [1] M.Arkowitz, H.Ōshima and J.Strom, *Noncommutativity of the group of self homotopy classes of Lie groups*, *Topology Appl.* 125 (2002), no. 1, 87–96.
 - [2] A.K.Bousfield and D.M.Kan, *Homotopy limits, completions and localization*, *Lecture Note in Math.* 304 Springer-Verlag (1972).
 - [3] H.Hamanaka and A.Kono, *On $[X, U(n)]$, when $\dim X$ is $2n$* , *J. Math. Kyoto Univ.* 43 (2003), no. 2, 333–348.
 - [4] H.Hamanaka, *On $[X, U(n)]$, when $\dim X$ is $2n + 1$* , *J. Math. Kyoto Univ.*, To appear.
 - [5] H.Hamanaka, *Adams e -invariant, Toda bracket and $[X, U(n)]$* , *J. Math. Kyoto Univ.* 43 (2003), no. 4, 815–828.
 - [6] H.Hamanaka, *Nilpotency of unstable K -theory*, To appear in *Topology and its applications*.
 - [7] M.J.Hopkins, *Nilpotence and finite H -spaces*, *Israel J. Math.* 66(1989), 233–246.
 - [8] H.Imanishi, *Unstable Homotopy Groups of Classical Groups (odd primary components)*, *J. Math. Kyoto Univ.* 7 (1967), no. 3, 221–243.
 - [9] A. Kono and H. Ōshima, *Commutativity of the group of self-homotopy classes of Lie groups*, *Bull. London Math. Soc.* 36 (2004), 37–52.
 - [10] H.Matsunaga, *Unstable homotopy groups of unitary groups*, *Osaka J. Math.* 1 (1964), 15–24.
 - [11] H.Matsunaga, *The homotopy groups $\pi_{2n+i}(U(n))$ for $i = 3, 4$ and 5* , *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser A* 15 1961/1962, 72–81.
 - [12] M.Mimura, G.Nishida, H.Toda, *Localization of CW-complexes and its applications*, *J. Math. Soc. Japan* 23 (1971), 593–624.
 - [13] M.Mimura, H.Ōshima, *Self Homotopy groups of Hopf spaces with at most three cells*, *J. Math. Soc. Japan* 51-1 (1999), 71–92.
 - [14] H. Ōshima and N. Yagita, *Non commutativity of self homotopy groups*, *Kodai Math. J.* 24 (2001), 15–25.
 - [15] J.Rosser and L.Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*. *Illinois J. Math.* 6 (1962), 64–94.
 - [16] H.Toda, *A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups*, *Mem. of Coll. Sci. Univ. Kyoto.*, 32 (1959) 103–119.
 - [17] G.W.Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Number 61 in GTM, Springer(1978).
 - [18] C.Wilkerson, *Self-maps of classifying spaces*, *Lecture Notes in Math.* 418 Springer (1974) 150–157.
- E-mail の宛て先: hammer@sci.hyogo-u.ac.jp

Milutin Maps and Topological Uniqueness of Fiberwise Measures

S. Ageev and E.D. Tymchatyn

2005

1 Introduction

If X is a metric space, then by a measure on X we mean a function μ which assigns to each Borel set A of X a non-negative number $\mu(A)$ such that $\mu(\emptyset) = 0$ and $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ if A and B are disjoint. We say μ is regular if for each Borel set A and for each positive number d there exist a compact set C in A and an open set U containing A so that $\mu(K) \leq d$ for each Borel set K in $U \setminus C$.

Octoby and Ulam [14] proved that if λ is the Lebesgue measure on the unit cube I^n in Euclidean n -space and μ is any other regular Borel measure on I^n so that $\mu(I^n) = 1$, $\mu(\partial(I^n)) = 0$, $\mu(\{x\}) = 0$ for each point $x \in I^n$, and μ assigns positive measure to each non-empty open subset of I^n , then μ is equivalent to λ in the sense that there is a homeomorphism $h : I^n \rightarrow I^n$ such that $\lambda(A) = \mu(h(A))$ for each Borel set $A \subset I^n$.

Octoby and Prasad [13] proved the same result for Lebesgue measure λ on the Hilbert cube Q in 1978. Among other interesting results they showed that λ is universal in the sense that if X is a compact metric space and μ is a regular Borel measure on X with $\mu(\{x\}) = 0$ for all $x \in X$, then there is an embedding $e : (X, \mu) \rightarrow (Q, \lambda)$ in the sense that e is a topological embedding of X into Q and such that $\mu(e(A)) = \lambda(A)$ for each closed set $A \subset X$ if $\mu(X) < 1$.

Kato, Kawamura, Tuncali, and Tymchatyn [9] obtained analogous results for the positive dimensional Menger cubes in their study of chaotic homeomorphisms on these spaces. The authors in the last named paper used Bing partitioning. Similar techniques are used in the proofs in Section 3 of this paper.

The notion of fiberwise measures is the natural expansion of measures from spaces onto continuous maps. This notion goes back at least to Milutin [12] and Birkhoff [3]. Milutin maps are maps which admit continuous families of measures on fibers. Pełczyński [16] in a major study of Milutin maps gave another proof of Milutin's theorem that $C(X)$, the space of continuous maps of X into the real line with sup norm, is linearly homeomorphic to $C(\mathcal{C})$ where \mathcal{C} is the Cantor set, if X is any uncountable, compact metric space. Many results on Milutin mappings are contained in the monograph of Repovš and Semenov [18].

In this talk, I will be concerned with two problems: (1) Characterization of (nice) Milutin mappings and (2) Existence of universal fiberwise measures. In particular we give a topological characterization of mappings admitting exact and atomless fiberwise measures.

2 Milutin Mappings

In this section, we deal with metric spaces and continuous maps except where otherwise indicated. Let $\mathbf{C}(X)$ denote the Banach space of all bounded continuous functions of X to the real line \mathbb{R}^1 equipped with the sup-norm and $\mathbf{C}^*(X)$ the dual space endowed with the weak topology with respect to $\mathbf{C}(X)$. The space of all regular, positive, finite, Borel measures on X is denoted by $\mathbf{M}(X)$ and equipped with the weak topology with respect to $\mathbf{C}(X)$. Every measure $\mu \in \mathbf{M}(X)$ generates a linear positive functional $u = \mathcal{R}(\mu)$ given by the formula $u(\phi) = \int_X \phi d\mu$ where $\phi \in \mathbf{C}(X)$. According to the Riesz representation theorem [2], for every compact space X , the correspondence $\mathcal{R} : \mu \mapsto \mathcal{R}(\mu)$ is a linear homeomorphism between $\mathbf{M}(X)$ and $\mathbf{C}_+^*(X) \subset \mathbf{C}^*(X)$ – the subspace of all linear positive functionals. Moreover, $\mathcal{R}(\mathbf{P}(X)) = \{u \in \mathbf{C}_+^*(X) \mid u(1_X) = 1\}$ where $\mathbf{P}(X) \subset \mathbf{M}(X)$ is the subspace of all probabilistic measures.

For every map $f : X \rightarrow Y$, a *fiberwise measure on f* is defined to be a family $\{\mu_y\}_{y \in Y}$ of measures $\mu_y \in \mathbf{M}(X)$ such that

- (1) μ_y continuously depends on $y \in Y$ (or, equivalently, $\int_X \phi d\mu_y$ is a continuous function on Y for every $\phi \in \mathbf{C}(X)$); and
- (2) $\text{supp } \mu_y = \bigcap \{A = \text{cl}(A) \subset X \mid \mu(A) = \mu(X)\}$ lies in $f^{-1}(y)$ for every $y \in Y$.

This notion is the natural expansion of measures from spaces onto continuous maps (see Theorem 2.1)

The space of all fiberwise measures on f is denoted by $\mathbf{M}(f)$ and equipped with the weak topology with respect to $\mathbf{C}(X) : \mathcal{O}_\varepsilon(\{\mu_y\}; \phi_1, \dots, \phi_n) = \{\{\nu_y\} \in \mathbf{M}(f) : \|\int_X \phi_i d\mu_y - \int_X \phi_i d\nu_y\| < \varepsilon \text{ for every } \phi_i\}$, where $\varepsilon > 0$ and $\phi_i \in \mathbf{C}(X)$, is an element of a *basis at $\{\mu_y\}$ in $\mathbf{M}(f)$* . Let $\mathbf{L}(\mathbf{C}(X), \mathbf{C}(Y))$ denote the space of all linear operators endowed with the weak topology with respect to $\mathbf{C}(X)$. And lastly, let $\mathbf{L}(f)$ denote the subspace of all linear positive operators $u : \mathbf{C}(X) \rightarrow \mathbf{C}(Y)$ such that

- (3) $u|_{\mathbf{C}(Y)} : \mathbf{C}(Y) \rightarrow \mathbf{C}(Y)$ is an operator of multiplication by some positive function $\alpha_u \in \mathbf{C}(Y)$, i.e., $u(\phi) = \alpha_u \cdot \phi$ for every $\phi \in \mathbf{C}(Y)$ (we assume that $\mathbf{C}(Y)$ naturally lies in $\mathbf{C}(X)$ by identifying each $\psi \in \mathbf{C}(Y)$ with $\psi \circ f \in \mathbf{C}(X)$).

Theorem 2.1 (Fiberwise Riesz representation theorem [16]). *Let $f : X \rightarrow Y$ be a surjection of compacta. If $\{\mu_y\} \in \mathbf{M}(f)$, then the map $u = \mathcal{R}(\{\mu_y\}) : \mathbf{C}(X) \rightarrow \mathbf{C}(Y)$ given by the formula*

$$(4) u(\phi)(y) = \int_X \phi d\mu_y, \phi \in \mathbf{C}(X), y \in Y,$$

is an element of $\mathbf{L}(f)$, and the corresponding function α_u is defined by $\alpha_u(y) = \int_X 1_X d\mu_y$. The correspondence $\mathcal{R} : \mathbf{M}(f) \rightarrow \mathbf{L}(f)$ is a linear homeomorphism. Moreover, $\mathcal{R}(\mathbf{P}(f)) = \{u \in \mathbf{L}(f) \mid u \text{ is a retraction}\}$ where $\mathbf{P}(f) \subset \mathbf{M}(f)$ is the subspace of all probabilistic fiberwise measures.

If $Y = \{pt\}$, then this theorem transforms into the usual Riesz representation theorem as $\mathbf{C}(\{pt\}) = \mathbb{R}^1$, and the map $f : X \rightarrow \{pt\}$ is naturally identified with the space X .

Some words should be said about the terminology. A map f admitting a probabilistic fiberwise measure is usually called a *Milutin map* [19]. A positive linear retraction $u : \mathbf{C}(X) \rightarrow \mathbf{C}(Y)$ is called an *averaging operator*. Therefore, Theorem 2.1 asserts that f is a Milutin map if and only if f admits an averaging operator.

It is known that each open surjection of complete metric spaces is a Milutin map (see [11]); the converse is false. The first example of fiberwise measure on a surjection $m : \mathcal{C} \rightarrow I$ (not open) of the Cantor set \mathcal{C} onto the unit segment I was discovered by Milutin in 1950s and then applied by him to solve the classical problem whether $\mathbf{C}(I)$ and $\mathbf{C}(I \times I)$ are linearly homeomorphic [12]. Pełczyński [16] posed the problem on topological characterization of Milutin maps which was settled first for metric compacta (see [5, 8]), and then for complete metric spaces (see [4, 20]). We add to the list of known characterizations a new one.

Theorem 2.2. *Let $f : X \rightarrow Y$ be an arbitrary map of a complete metric space X onto a metric space Y . Then f is a Milutin map if and only if there exists a complete subset $X_0 \subset X$ such that $f_0 = f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ is an open surjection.*

The proof of Theorem 2.2 essentially uses conditions under which an open preimage of a complete metric space is again complete. Recall that an open image of a complete metric space is complete (Sierpinski-Hausdorff Theorem [6, p. 341], [1, p. 53], [10, p. 45]), and the converse fails even if all point preimages are complete. To get a converse of the Sierpinski-Hausdorff Theorem, we should formulate it a bit differently.

Theorem 2.3 (Sierpinski-Hausdorff criterion). *Let $g : Z \rightarrow Y$ be a surjection of a complete space Z onto a metric space Y . Let Z_0 be a subset of Z such that $f_0 = g|_{Z_0} : Z_0 \rightarrow Y$ is an open surjection and $f^{-1}(y) \cap Z_0$ is closed in Z for every $y \in Y$. Then Y is complete if and only if Z_0 is complete.*

As an easy corollary of Theorem 2.3 we get the condition of completeness for the support of a fiberwise measure on a map.

Corollary 2.4. *Let $f : Z \rightarrow Y$ be an atomless Milutin map of complete spaces and $\{\mu_y\}$ the corresponding atomless fiberwise measure. Then $\text{supp}\{\mu_y\} = \bigcup\{\text{supp}\mu_y \mid y \in Y\}$ is complete.*

Depending on the type of fiberwise measures on maps, we distinguish special Milutin maps. A fiberwise measure $\{\mu_y\}$ on a map f is called *exact (atomless)*, provided that $\text{supp } \mu_y = f^{-1}(y)$ for every $y \in Y$ ($\mu_y(x) = 0$ for each $y \in Y$ and $x \in X$). Simultaneously, exact and atomless fiberwise measure is called exact atomless. Let $\mathbf{M}_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(f)$ ($\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(f)$ or $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}(f)$, respectively) denote the subspace of all exact atomless (exact or atomless, respectively) fiberwise measures on f , and $\mathbf{P}_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(f)$ ($\mathbf{P}_{\mathcal{E}}(f)$ or $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}(f)$, respectively) the subspace of all probabilistic exact atomless (exact or atomless, respectively) fiberwise measures on f . A map f admitting a probabilistic exact atomless (exact or atomless, respectively) fiberwise measure is called an *exact atomless (exact or atomless, respectively) Milutin map*. These notions seem to have been examined first in [19] where the topological characterization theorem of exact Milutin maps was established.

Theorem 2.5. *A continuous map $f : X \rightarrow Y$ of Polish spaces (i.e., completely metrizable separable spaces) is an exact Milutin map if and only if f is open.*

If a continuous map $f : X \rightarrow Y$ of Polish spaces is an exact atomless Milutin map then f is open and has perfect point preimages (i.e., the preimage of an arbitrary point contains no isolated points) (see, for instance, [5, p. 199]). The partial answer to the natural question on inversion of this fact was found in [19]. We develop a new approach to exact atomless Milutin maps and prove their topological characterization.

Theorem 2.6. *A continuous surjection $f : X \rightarrow Y$ of Polish spaces is an exact atomless Milutin map if and only if f is open with perfect point preimages.*

As is well-known [15], $P(X)$ is metric for any Polish space X . If $X_0 \subset X$ is Polish, then $P(X_0)$ naturally lies in $P(X)$ and $P(X_0) \hookrightarrow P(X)$ is a topological embedding. Therefore, the following topological characterization of atomless Milutin maps is an easy consequence of Theorem 2.6.

Theorem 2.7. *A continuous surjection $f : X \rightarrow Y$ of Polish spaces is an atomless Milutin map if and only if there exists a Polish subspace $X_0 \subset X$ such that $f_0 = f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ is an open surjection and $X_0 \cap f^{-1}(y)$ is perfect for every $y \in Y$.*

Another application of Theorem 2.6 is concerned with a possibility to assign continuously atomless exact measures to the point images of a multivalued mapping.

Theorem 2.8. *Let $F : Y \rightsquigarrow Z$ be a lower semicontinuous multivalued mapping of Polish spaces with nonempty closed values. If $F(y)$ is perfect for every $y \in Y$, then there exists a continuous map $\mu : Y \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{A}}(Z)$ such that $\text{supp } \mu(y) = F(y)$ for every $y \in Y$.*

Let 2^X be the hyperspace of compact subsets of a Polish space X endowed with the Hausdorff metric, and $\text{Perf}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ is perfect}\}$. Since $Y = \text{Perf}(X)$ is a G_δ -subset of 2^X , Y is complete. The following fact is an easy application of Theorem 2.8 for the lower semicontinuous mapping $F : Y \rightsquigarrow X$, $F(A) = A$.

Corollary 2.9. *There exists a continuous map $\mu : \text{Perf}(X) \rightarrow \mathbf{P}(X)$ such that $\mu(A) \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}}(X)$ and $\text{supp } \mu(A) = A$ for every $A \in \text{Perf}(X)$.*

It should be noted that our approach gives also an alternative proof of the topological characterization of exact Milutin maps (Theorem 2.5).

The proof of Theorem 2.6 is substantially based on the Michael zero-dimensional selection theorem [18]. Each probabilistic fiberwise measure $\{\mu_y\}$ on $f : X \rightarrow Y$ can be treated as a selection $s : Y \rightarrow \mathbf{P}(X)$ of the multivalued mapping $\mathcal{F} : Y \rightsquigarrow \mathbf{P}(X)$, $\mathcal{F}(y) = \mathbf{P}(f^{-1}(y))$. Clearly, a probabilistic, fiberwise, exact, atomless measure $\{\mu_y\}$ on f is a selection of the multivalued mapping $\mathcal{G} : Y \rightsquigarrow \mathbf{P}(X)$, $\mathcal{G}(y) = \mathbf{P}_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(f^{-1}(y))$. Therefore, at least in the case of zero-dimensional spaces X the proof of Theorem 2.6 is reduced to the verification of hypotheses of the mentioned selection theorem.

3 Topological Uniqueness of Fiberwise Measures

This section of the paper will be concerned with the investigation of topological uniqueness and universality properties of exact atomless fiberwise measures on a perfect open map $f : X \rightarrow Y$ of separable metric spaces. Since the function $\alpha : Y \rightarrow (0, \infty)$, $\alpha(y) = \|\mu_y\|$, $y \in Y$, is continuous, the general case of fiberwise measure $\{\mu_y\}$ is easily reduced by division on the corresponding continuous function defined on Y to a simpler one with $\|\mu_y\| \equiv a$ for some constant $0 < a < 1$.

In view of the above remark, we will investigate only fiberwise measures satisfying $\|\mu_y\| \equiv a$ for some $0 < a < 1$.

We say that a Milutin map f has a *topologically unique fiberwise measure* if for every pair of fiberwise measures $\{\mu_y\} \in \mathbf{P}_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(f)$ and $\{\nu_y\} \in \mathbf{P}_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(f)$, there exists a homeomorphism $H : X \rightarrow X$ such that

- (5) H is fiberwise, i.e. $f \circ H = f$; and
- (6) For every $y \in Y$, H transforms $\{\mu_y\}$ into $\{\nu_y\}$.¹

In this definition, there is no sense to mention the words “exact atomless” because the requirement of uniqueness outside the class of exact atomless fiberwise measures trivializes the notion.

The results of Octobry-Prasad-Weiss [17, 21] assert that the Hilbert cube Q has topologically unique measure – the Lebesgue measure λ . One of our main achievements is a parametric version of this theorem. Let $X = Y \times Q$ and $p : X \rightarrow Y$, $p(y, q) = y$, be the projection onto the metric space Y . Let $\{\lambda_y\}$, $\lambda_y = \delta_y \times \lambda$, be the standard exact atomless fiberwise measure on p .

¹i.e. $\mu_y(H^{-1}(A)) = \nu_y(A)$ for every Borel subset $A \subset X$. For brevity, we denote it by $\mu_y \circ H^{-1} = \nu_y$ or $\mu_y = \nu_y \circ H$. Since f is perfect, the Riesz representation theorem easily implies that $\mu_y = \nu_y \circ H$ iff $\int_X \phi \, d\mu_y = \int_X \phi \circ H \, d\nu_y$ for every $\phi \in \mathbf{C}(X)$.

Theorem 3.1. *The standard exact atomless fiberwise measure $\{\lambda_y\}$ on p is topologically unique.*

This theorem is equivalent to the Octoby-Prasad-Weiss Theorem if $Y = \{pt\}$. The method used in the proof of 3.1 can be applied also to the case in which we replace Q by the finite-dimensional cube I^n , $n \geq 1$, and Lebesgue measure λ_n on I^n . In this case, the corresponding Theorem, equivalent to the Octoby-Ulam Theorem [14] if $Y = \{pt\}$, asserts that any exact atomless fiberwise probabilistic measure $\{\nu_y\}$ on $p : X = Y \times I^n \rightarrow Y$, $p(y, q) = y$, with $\nu_y(Y \times \partial(I^n)) = 0$ for every $y \in Y$ can be transformed into the exact atomless fiberwise Lebesgue measure $\{\lambda_y\}$, $\lambda_y = \delta_y \times \lambda_n$, on p . As an immediate consequence of this result for $Y = \{\nu \in \mathbf{P}_{\mathcal{EA}}(I^n) \mid \nu(\partial(I^n)) = 0\} \subset \mathbf{P}_{\mathcal{EA}}(I^n)$, we prove that there is a continuous choice of a homeomorphism which transforms a $\mu \in \{\nu \in \mathbf{P}_{\mathcal{EA}}(I^n) \mid \nu(\partial(I^n)) = 0\}$ into λ_n (Fathi's question [7, 17]). In turn, Theorem 3.1 straightforwardly implies the validity of the following infinite-dimensional analog of Fathi's question.

Corollary 3.2. *There is a continuous map $\mathcal{F} : \mathbf{P}_{\mathcal{EA}}(Q) \rightarrow \mathcal{H}(Q)$ such that $\mu \circ \mathcal{F}(\mu) = \lambda$ for each $\mu \in \mathbf{P}_{\mathcal{EA}}(Q)$.*

Theorem 3.1 can be reformulated in terms of topological transformation groups. Let $\mathcal{H}^f(X)$ be the group of all homeomorphisms of $X = Y \times Q$ preserving fibers of p and equipped with the limitation topology. There is a natural action of $\mathcal{H}^f(X)$ on $\mathbf{P}_{\mathcal{EA}}(p)$. In particular Theorem 3.1 asserts that this action is transitive. We are able to prove that in fact this action is micro-transitive in the sense of [1].

An easy and standard consequence of Theorem 3.1 is the universal property of fiberwise measure $\{\lambda_y\}$ on $p : X = Y \times Q \rightarrow Y$. Given a map $f : X \rightarrow Y$, the fiberwise measure $\{\mu_y\} \in \mathbf{P}_{\mathcal{EA}}(f)$ is called *universal* if for every fiberwise measure $\{\omega_y\} \in \mathbf{M}_{\mathcal{EA}}(g)$ on a perfect map $g : Z \rightarrow Y$ with $0 < a \equiv \|\omega_y\| < 1$, there exists a fiberwise embedding $e : Z \hookrightarrow X$ (i.e. $f \circ e = g$) such that e preserves the fiberwise measures $\{\omega_y\}$ and $\{\mu_y\}$, i.e. $\omega_y(B) = \mu_y(e(B))$ for every $y \in Y$ and every Borel subset $B \subset Z$ ($\equiv \omega_y = \mu_y \circ e$).

Theorem 3.3 (Universal Property of Fiberwise Measure). *The standard exact atomless fiberwise measure $\{\lambda_y = \delta_y \times \lambda\}$ on the projection $p : X = Y \times Q \rightarrow Y$ onto a metric space Y is universal.*

The case of trivial Y is well-known [17]. In the general case, this Theorem permits us to produce a representation of fiberwise measures on perfect maps as the restriction of the Lebesgue measure λ on fibers. First, we describe particular examples of exact atomless fiberwise measures which turn out to be general. If $\{\omega_y\} \in \mathbf{M}_{\mathcal{EA}}(g)$ is a fiberwise measure on a perfect map $g : Z \rightarrow Y$ with $0 < \|\omega_y\| \equiv a < 1$, and $e : Z \hookrightarrow X = Y \times Q$ is an embedding fiberwisely preserving measures $\{\omega_y\}$ and $\{\lambda_y\}$, then each $e(g^{-1}(y)) = p^{-1}(y) \cap e(Z)$, $y \in Y$, belongs to the subspace $\mathcal{M}_a = \{A \in 2^Q \mid \lambda(A) = a \text{ and } \lambda|_A \in \mathbf{M}_{\mathcal{EA}}(A)\}$ of exponent 2^Q . Such a subspace \mathcal{M}_a can be defined with respect to arbitrary

exact atomless probabilistic measure λ' on Q . Since Q has topologically unique measure, the topological type of \mathcal{M}_a does not depend on the choice of λ' .

An arbitrary continuous map $\Phi : Y \rightarrow 2^Q$ where Y is a metric space generates the graph $\text{Gr } \Phi = \{(y, q) : q \in \Phi(y), y \in Y\} \subset Y \times Q$ of Φ , the projection $\pi_\Phi : \text{Gr } \Phi \rightarrow Y$, given by $\pi_\Phi(\{y\} \times \Phi(y)) = y$, and the fiberwise measure $\{\pi_y(\Phi)\}$ defined by $\pi_y(\Phi) = \delta_y \times \lambda|_{\Phi(y)}$. Below we give the typical example of atomless fiberwise measures.

Theorem 3.4. *If $\text{Im}(\Phi) \subset \mathcal{M}_a$ where $0 < a < 1$, then $\{\pi_y(\Phi)\}$ is an exact atomless fiberwise measure on the perfect map π_Φ .*

The inverse problem of representing an arbitrary exact atomless fiberwise measure on a map in a similar manner is more complicated, and it can be settled with help of 3.3.

Theorem 3.5 (Representation of Fiberwise Measure). *Let $0 < a < 1$ and $\{\omega_y\}$ be an exact atomless fiberwise measure on a perfect map $g : Z \rightarrow Y$ of metric spaces with $\|\omega_y\| = a$ for each $y \in Y$ (and therefore, g is open). Then there exists a continuous map $\Phi : Y \rightarrow \mathcal{M}_a$ such that g and $\{\omega_y\}$ are fiberwise homeomorphic to $\pi_\Phi : \text{Gr } \Phi \rightarrow Y$ and $\pi_y(\Phi)$, respectively.*

Indeed, by Theorem 3.3, there is a fiberwise embedding $e : Z \hookrightarrow Y \times Q$ preserving $\{\omega_y\}$ and $\{\lambda_y\}$. Now, the desired continuous map $\Phi : Y \rightarrow \mathcal{M}_a$ is defined by $\{y\} \times \Phi(y) = e(g^{-1}(y))$, $y \in Y$. It can easily be $H : Z \rightarrow \text{Gr } \Phi$, $H(z) = (g(z), e(z))$, $z \in Z$, is a fiberwise homeomorphism, and $H(\omega_y) = \pi_y(\Phi)$.

In view of Theorems 3.4 and 3.5, \mathcal{M}_a , $0 < a < 1$, can be called *classifying spaces for exact atomless fiberwise measures on perfect maps*. Next, we examine their topological structure.

Theorem 3.6. *For every $0 < a < 1$, \mathcal{M}_a is homeomorphic to the separable Hilbert space \mathfrak{l}_2 . Besides, $\mathcal{M}^0 = \{A \in 2^Q \mid \lambda(A) = 0\}$ is homeomorphic to \mathfrak{l}_2 .*

The following problem of extension of embeddings fiberwisely preserving measures seems to be of significant importance. Let $\{\omega_y\} \in \mathbf{M}_{\mathcal{E}A}(g)$ be a fiberwise measure on a perfect map $g : Z \rightarrow Y$ with $0 < a \equiv \|\omega_y\| < 1$, and $e_0 : Z_0 \hookrightarrow X = Y \times Q$, $Z_0 \hookrightarrow g^{-1}(Y_0)$, where Y_0 is closed in Y , a fiberwise embedding (i.e. $p \circ e = g$) fiberwisely preserving $\{\omega_y\}$ and $\{\lambda_y\}$. Does there exists a fiberwise embedding $e : Z \hookrightarrow X$ fiberwisely preserving $\{\omega_y\}$ and $\{\lambda_y\}$ and extending e_0 ? With the help of Theorem 3.1 we are able to give a partial answer to this question.

Theorem 3.7. *If there exists a fiberwise embedding $e' : Z \hookrightarrow X$ extending e_0 such that*

(7) The function $y \in Y \mapsto \lambda_y(e'(Z))$ is continuous,

then there exists a fiberwise embedding $e : Z \hookrightarrow X$ fiberwisely preserving $\{\omega_y\}$ and $\{\lambda_y\}$ such that $e = e_0$ on Z_0 and $e(g^{-1}(y))$ is a Z -set in $\{y\} \times Q$ for every $y \in Y \setminus Y_0$.

We are able to verify the property (7) only in the case of a projection $g : Z \rightarrow Y$ of a metric compactum $Z = [0, 1] \times Z'$ onto $Y = [0, 1]$ and $Y_0 = \{0\} : e' \equiv \text{id}_I \times e_0$. Then Theorem 3.7 easily implies the Z -approximation property of a measure-preserving embedding.

Corollary 3.8. *Let $\mu \in \mathbf{M}_A(Z')$ and $0 < \|\mu\| < 1$. Then every measure-preserving embedding $f' : (Z', \mu) \rightarrow (Q, \lambda)$ is arbitrarily closely approximated by a Z -embedding which preserves measures. Moreover, there exists a homotopy $h_t : (Z', \mu) \rightarrow (Q, \lambda)$, $0 \leq t \leq 1$, consisting of measure-preserving maps such that $h_0 = f'$ and h_t is a Z -embedding for every $t > 0$.*

In general, the verification of the hypothesis of Theorem 3.7 is an open, quite difficult problem.

References

- [1] F.D. Ancel, *An alternative proof and applications of a theorem of E.G. Effros*, Mich. Math. J. (1987), 37–55.
- [2] R.B. Ash, *Real analysis and probability*, Academic Press, New York, 1998.
- [3] G. Birkhoff, *Moyennes de fonctions bornées, Algèbre et Théorie des Nombres*, Colloques Internationaux du Centre Nation. de la Rech. Scient. **24** (1950), 143–153.
- [4] M.M. Choban, *Topological structure of subsets of topological groups and their quotient spaces*, Mat. Issled. **44** (1977), 117–163, 181, (in Russian).
- [5] S.Z. Ditor, *Averaging operators in $C(s)$ and lower semicontinuous sections of continuous maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **175** (1973), 195–208.
- [6] R. Engelking, *General topology*, Heldermann, Berlin, 1988.
- [7] A. Fathi, *Structure of the group of homeomorphisms preserving a good measure*, Ann. Scient. Ec. Norm. 4 serie **13** (1980), 45–93.
- [8] B. Hoffmann, *A surjective characterization of Dugundji spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), 151–156.
- [9] H. Kato, K. Kawamura, H.M. Tuncali, and E.D. Tymchatyn, *Measures and topological dynamics on Menger manifolds*, Topology Appl. **103** (2000), 249–282.
- [10] A.S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer, Berlin, 1995.
- [11] E. Michael, *A linear mapping between function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 407–409.

- [12] A.A. Milutin, *On spaces of continuous functions*, Dissertation, Moscow State University, 1952, (in Russian).
- [13] J.C. Octoby and V.S. Prasad, *Homeomorphic measures in the Hilbert cube*, Pac. J. Math. **77** (1978), 483–497.
- [14] J.C. Octoby and S.M. Ulam, *Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity*, Ann. of Math. **2** (1942), 874–920.
- [15] S.R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, New York, 1989.
- [16] A. Pełczyński, *Linear extensions, linear averaging, and their application to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissertationes Math. **58** (1968), 1–89.
- [17] V.S. Prasad, *A survey of homeomorphic measures*, Lect. Notes in Math. **945** (1982), 150–154.
- [18] D. Repovš and P.V. Semenov, *Continuous selections of multivalued mappings*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1998.
- [19] D. Repovš, P.V. Semenov, and E.V. Schepin, *On exact Milutin mappings*, Topology Appl. **81** (1997), 215–229.
- [20] V. Valov, *Milutin mappings and $AE(0)$ -spaces*, C. R. Acad. Bulg. Sci. **40** (1987), 9–11.
- [21] B. Weiss, *A note on topological measure theory*, preprint, 1977.

同変微分同相群とその周辺

信州大学理学部 阿部 孝順

§1. 序

M を連結な C^∞ -可微分多様体として、 $Diff_c(M)$ をコンパクトな台をもつ M の微分同相全体のなす群とする。 $Diff_c(M)$ に C^∞ -位相を入れるとき、その連結成分を $\mathcal{D}(M)$ と表すことにする。 $\mathcal{D}(M)$ は幾何学的に種々の構造をもち、また多くの分野に関連して研究されている。しかしながら $\mathcal{D}(M)$ は大変大きな群であるために、その具体的な構造について一般的な性質を調べることは非常に難しい問題である。

ここでは $\mathcal{D}(M)$ の位相を考えないで、群としての性質に注目して考察する。一般的に 2 つの連結な C^∞ -可微分多様体 M_1, M_2 に対して、 $\mathcal{D}(M_1)$ と $\mathcal{D}(M_2)$ が群として同型ならば M_1 と M_2 は微分同相なことが、Filipkiewicz [FI] により証明されている。従って $\mathcal{D}(M)$ は M の多様体の構造を決定するような豊富な群構造をもつことが分かる。一方でその群構造を具体的に調べることはまた難しい問題である。

$\mathcal{D}(M)$ の群構造については、Herman [HE], Thurston [TH] が完全群すなわち、 $\mathcal{D}(M)$ の交換子群 $[\mathcal{D}(M), \mathcal{D}(M)]$ が $\mathcal{D}(M)$ と一致することを証明した。この結果は葉層理論における Haefliger 分類空間の構造の研究に応用されることが知られている。

可微分多様体 M が幾何学的構造をもつとき、 M の幾何学的構造を保つ微分同相からなる $\mathcal{D}(M)$ の部分群についても多く研究がなされている (c.f. [BA2])。この講演では M がコンパクトリー群 G による可微分作用をもつ場合に、 M の同変微分同相群 $\mathcal{D}_G(M)$ についてその交換子群の構造を考察してこれまでに得られた結果を述べる。一般的に $\mathcal{D}(M)$ は完全群ではない。従って $\mathcal{D}(M)$ の交換子群による商群として定義される 1 次元ホモロジー群 $H_1(\mathcal{D}_G(M))$ を求めることが問題である。

可微分 G -多様体 M が唯一の軌道型もつ場合および余次元 1 の軌道をもつ場合にはこの構造を決定することができる。また G が有限群の場合にも $H_1(\mathcal{D}_G(M))$ の構造を完全に決定することができる。この結果は可微分軌道体の場合にも適用され、更に葉層構造を保つ微分同相群の場合やモジュラー群へも応用することができる。また同様な問題をリプシッツ同相群の場合にも考察して結果を得ることができる。

これらの大部分の結果は京産大の福井和彦氏との共同研究で得られたものである。

§2. $\mathcal{D}(M)$ の交換子部分群

以下では可微分多様体はすべて C^∞ 級であるとする。連結可微分多様体 M に対して、 $\mathcal{D}(M)$ をコンパクトな台をもつイソトピーにより M の恒等写像とイソトピックな M の微分同相全体のなす群とする。 $\mathcal{D}(M)$ は $\text{Diff}_c(M)$ の恒等写像の連結成分 $\text{Diff}_c(M)_0$ と一致する。

一般に群 K がその交換子群 $[K, K]$ と一致するとき完全群であるという。また $H_1(K) = K/[K, K]$ を K の 1 次元ホモロジー群という。 $\mathcal{D}(M)$ のもつ群の基本的性質としては、次のことが知られている。

Theorem 2.1 (Filipkiewicz [FI]) 2つの可微分多様体 M_1, M_2 が微分同相である必要十分条件は $\mathcal{D}(M_1)$ と $\mathcal{D}(M_2)$ が群として同型となることである。

Theorem 2.2 (Hermann [HE], Thurston [TH]) M が連結可微分多様体ならば $\mathcal{D}(M)$ 完全群である。

交換子群 $[\mathcal{D}(M), \mathcal{D}(M)]$ は単純群であるという Epstein [EP] の結果を用いると、Theorem 2.2 より $\mathcal{D}(M)$ も単純群となる。

境界をもつ可微分多様体については次のことが証明される。

Theorem 2.3 (Fukui [F]) $H_1([0, 1]) \cong \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$.

Theorem 2.4 ([AF5]) M が 2 次元以上の境界をもつ多様体ならば、 $\mathcal{D}(M)$ は完全群である。

N を M の部分多様体とすると、 $\mathcal{D}(M, N)$ を N を不変にする元からなる $\mathcal{D}(M)$ の部分群とする。

Theorem 2.5 ([AF5])

(1) $N = \{p_1, \dots, p_k\}$ ならば $H_1(\mathcal{D}(M, N)) \cong \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$

(2) N の次元が 1 次元以上ならば、 $\mathcal{D}(M, N)$ は完全群である。

§3. $\mathcal{D}_G(M)$ の 1 次元ホモロジー群

コンパクトリー群 G に対して、 M を可微分 G -多様体とする。 $h \in \text{Diff}(M)$ は $h(g \cdot x) = g \cdot h(x)$ ($g \in G, x \in M$) を満たすとき M の同変微分同相であるという。コンパクトな台をもつ M の同変微分同相のなす群を $\text{Diff}_{G,c}(M)$ とし、 $\text{Diff}_{G,c}(M)$ の恒等写像の連結成分を $\mathcal{D}_G(M)$ と表す。

Theorem 3.1 (Banyaga [BA1]) q -次元トーラス群 T^q が M に可微分かつ自由に作用をしているとする。このとき $\dim M/T^q \geq 1$ ならば $\mathcal{D}_{T^q}(M)$ は完全群である。

M が可微分 G -多様体のとき、 $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ を $x \in M$ の等方部分群という。 G_x の G における共役類を (G_x) と表すとき、 $\{(G_x) \mid x \in M\}$ を M の軌道型という。

Theorem 3.2 ([AF1])

- (1) M がコンパクトリー群 G が自由作用をもつ可微分 G -多様体で $\dim M/G \geq 1$ ならば $\mathcal{D}_G(M)$ は完全群である。
- (2) M を唯一つの軌道型をもつ可微分 G -多様体で $\dim M/G \geq 1$ とする。このとき $\mathcal{D}_G(M)$ は完全群である。

一般的に $\mathcal{D}_G(M)$ は M の軌道を保つ正規部分群をもつために単純群ではない。次の補題はここでの研究において基本的である。

Lemma 3.3 δ を正数とする。 $u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $(-\delta, \delta)$ に台をもち、 C^1 -位相で零写像に十分近い C^∞ -関数とする。このとき C^∞ -関数 $v: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ と C^∞ -微分同相 $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ で次の (1), (2), (3) を満たすものが存在する。

- (1) $\text{supp}(v) \subset (-2\sqrt{3}\delta, 2\sqrt{3}\delta)$, $|v(x)| \leq 3\delta$.
- (2) $\text{supp}(\phi) \subset (-\delta, \delta)$ で ϕ は $(-\delta, \delta)$ に台をもつ C^∞ -イソトピーで恒等写像にイソトピックなものが存在する。
- (3) $u = v \circ \phi - v$.

Theorem 3.2 の証明には Theorem 2.2 と Lemma 3.3 を用いる。

・余次元 1 軌道をもつ場合

次に M を余次元 1 軌道をもつ可微分 G -多様体とする。このとき M/G は S^1 または $[0, 1]$ と同相である。 M/G が S^1 と同相なときは、Theorem 3.2 により、 $\mathcal{D}_G(M)$ は完全群である。 M/G が $[0, 1]$ と同相なときは、 M は 2 または 3 個の軌道型をもつ。 (H) を $(0, 1)$ に対応する軌道型 (主軌道型) で、 (K_i) ($i = 0, 1$)

を i に対応する軌道型 (特異軌道型) とする。 H の G における正規化群を $N(H)$ とする。このとき次の結果を得る。

Theorem 3.4 ([AF2])

$$H_1(\mathcal{D}_G(M)) \cong \mathbf{R}^2 \times H_1(((N(H) \cap N(K_0))/H \times (N(H) \cap N(K_1))/H))_0).$$

Theorem 3.4 の証明には、Bredon [BR], Bierstone [BI], Schwarz [SC] により証明された可微分 G -多様体 M の軌道空間 M/G のイソトピーを M の同変イソトピーへのリフトできるという結果と、[AB] の方法と結果および Baker-Campbell-Hausdorff の定理による同変微分同相の特異軌道の回りの解析を用いる。

V をコンパクトリー群 G の表現空間で V の単位球面 $S(V)$ に G が推移的に作用していると仮定する。 H を $S(V)$ の点 p の等方部分群とする。 $M = S(V \oplus \mathbf{R})$ とおくと M は線形な G -作用をもつ球面で、 (H) を主軌道型として $G \cdot p \cong G/H$ は M の余次元 1 の主軌道である。また M の北極と南極が固定点で $K_0 = K_1 = G$ となる。このとき Theorem 3.4 より次の表を得る。

G	H	M	$N(H)/H$	$H_1(\mathcal{D}_G(M))$
$SO(n)$ ($n \geq 3$)	$SO(n-1)$	S^n	\mathbf{Z}_2	\mathbf{R}^2
$SU(n)$ ($n \geq 2$)	$SU(n-1)$	S^{2n}	$U(1)$	$\mathbf{R}^2 \times U(1) \times U(1)$
$U(n)$ ($n \geq 1$)	$U(n-1)$	S^{2n}	$U(1)$	$\mathbf{R}^2 \times U(1) \times U(1)$
$Sp(n)$ ($n \geq 1$)	$Sp(n-1)$	S^{4n}	$Sp(1)$	\mathbf{R}^2
$Sp(n) \times_{\mathbf{Z}_2} S^3$ ($n \geq 1$)	N_1	S^{4n}	\mathbf{Z}_2	\mathbf{R}^2
$Sp(n) \times_{\mathbf{Z}_2} S^1$ ($n \geq 1$)	N_2	S^{4n}	S^1	$\mathbf{R}^2 \times S^1 \times S^1$
G_2	$SU(3)$	S^7	\mathbf{Z}_2	\mathbf{R}^2
$Spin(7)$	G_2	S^8	\mathbf{Z}_2	\mathbf{R}^2
$Spin(9)$	$Spin(7)$	S^{16}	\mathbf{Z}_2	\mathbf{R}^2

ここで N_1 and N_2 は次のように与えられるリー群である。

$$\begin{aligned} N_1 &= \{[(q, A), q^{-1}] \in Sp(n) \times_{\mathbf{Z}_2} S^3; (q, A) \in Sp(1) \times Sp(n-1) \subset Sp(n)\}, \\ N_2 &= \{[(z, A), z^{-1}] \in Sp(n) \times_{\mathbf{Z}_2} S^1; (z, A) \in S^1 \times Sp(n-1) \subset Sp(n)\}. \end{aligned}$$

・余次元 2 軌道をもつ場合

ρ_n を $U(n)$ の $2n$ 次元の標準的表現とし、 θ を 1 次元の自明な表現とする。 $U(n)$ の $2n+2$ 次元表現 $\rho_n \oplus 2\theta$ の表現空間の単位球面を $S(\rho_n \oplus 2\theta)$ とする。このとき $S(\rho_n \oplus 2\theta)$ は $U(n)$ の線形作用をもつ $2n+2$ 次元球面で余次元 2 軌道を持ち、軌道空間は D^2 と同相である。このとき

Theorem 3.5 $\mathcal{D}_{U(n)}(S(\rho_n \oplus 2\theta))$ は完全群である。

Theorem 3.4 により $H_1(\mathcal{D}_{U(n)}(S(\rho_n \oplus 2\theta))) \cong \mathbf{R}^2 \times U(1) \times U(1)$ となる。

$W = W^{2n-1}(d)$ ($n \geq 2, d \geq 0$) を次の式で与えられる Brieskorn 多様体とする。 $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} z_0^d + z_1^2 + \dots + z_n^2 &= 0 \\ |z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 &= 2 \end{aligned}$$

また $W = W^{2n-1}(d)$ への $O(n)$ 作用を次のように与える。

$A \in O(n)$, $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$ に対して

$$A \cdot (z_0, z_1, \dots, z_n) = (z_0, A \cdot (z_1, \dots, z_n))$$

$O(n)$ -多様体 $W = W^{2n-1}(d)$ は Hirzebruch-Mayer [HM] により研究されていて、その軌道空間は D^2 と同相である。

Theorem 3.6 $\mathcal{D}_{O(n)}(W)$ は完全群である。

Theorem 3.5, 3.6 は、Theorem 2.4 と Hirzebruch-Mayer が $O(n)$ -多様体の構造を調べた方法を用いて、特異軌道の回りでの $\mathcal{D}_{O(n)}(W)$ の元の振る舞いを調べることで証明できる。

§4. 有限群作用および可微分軌道体

この節では最初に有限群 G の線形表現空間の場合を考察して、次にその結果を有限群が作用する可微分 G -多様体および可微分軌道体の場合に応用する。

V を有限群 G の表現空間とする。 $\text{Aut}_G(V)$ を V の G -同変な自己線形同型写像全体の集合とし、 $\text{Aut}_G(V)_0$ を $\text{Aut}_G(V)$ の恒等写像の連結成分とする。 V^G を V の固定点の集合とする。

Theorem 4.1 ([AF7]) (1) $\dim V^G > 0$ ならば $\mathcal{D}_G(V)$ は完全群である。
 (2) $\dim V^G = 0$ ならば $H_1(\mathcal{D}_G(V)) \cong H_1(\text{Aut}_G(V)_0)$.

G の表現空間 V を既約表現に分解して $V = \bigoplus_{i=1}^d k_i V_i$ と表される。ここで $\{V_i\}$ は互いに同値でない G の既約表現で、 k_i は正の整数である。 $\text{Hom}_G(V_i)$ を V_i の G -同変な自己線形写像全体の集合とする。

Corollary 4.2 ([AF7]) $\dim V^G = 0$ ならば $H_1(\mathcal{D}_G(V)) \cong \mathbf{R}^d \times \overbrace{U(1) \times \cdots \times U(1)}^{d_2}$ 。
 ここで d_2 は $\dim \text{Hom}_G(V_i) = 2$ となる V_i の個数である。

Example 4.3 V を $O(2)$ に含まれる有限群 G の表現空間とすると、 G は巡回群 \mathbf{Z}_k ($k \geq 2$) または 2 面体群 D_l ($1 \geq l$) である。

$$H_1(\mathcal{D}_G(V)) \cong \begin{cases} \mathbf{R} & \text{if } G \cong \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{R} \times U(1) & \text{if } G \cong \mathbf{Z}_n \ (n \geq 3) \\ 0 & \text{if } G \cong D_1 \\ \mathbf{R}^2 & \text{if } G \cong D_2 \\ \mathbf{R} & \text{if } G \cong D_n \ (n \geq 3). \end{cases}$$

Theorem 4.1 の証明には、Theorem 2.2、Tsuboi [TS] による葉層構造の葉を保つ微分同相群の完全性および Sternberg [S1], [S2] の方法を用いる。

Definition 4.4 (可微分軌道体)

パラコンパクト、ハウスドルフ空間 M が次の条件を満たす開被覆 $\mathcal{O} = \{U_i \mid i \in \Lambda\}$ をもつとき n 次元可微分軌道体であるという。

(0) $U_i, U_j \in \mathcal{O}$ ならば $U_i \cap U_j \in \mathcal{O}$,

(1) 各 $U_i \in \mathcal{O}$ に対して、有限群 Γ_i の効果的な可微分作用をもつ \mathbf{R}^n の開集合 \tilde{U}_i および同相写像 $\phi_i: \tilde{U}_i/\Gamma_i \rightarrow U_i$ が存在する,

(2) $U_i \subset U_j$ ならば、可微分な埋め込み $\phi_{ij}: \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_j$ が存在して次の可換図式を満たす。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_i & \xrightarrow{\phi_{ij}} & \tilde{U}_j \\ \downarrow \pi_i & & \downarrow \pi_j \\ \tilde{U}_i/\Gamma_i & & \tilde{U}_j/\Gamma_j \\ \downarrow \phi_i^{-1} & & \downarrow \phi_j^{-1} \\ U_i & \xrightarrow{\subset} & U_j \end{array}$$

上記の (U_i, ϕ_i) を M の局所座標という。 f を M 上の実数値関数とすると、 M の各局所座標 (U_i, ϕ_i) に対して、 $\tilde{U}_i \xrightarrow{\pi_i} \tilde{U}_i/\Gamma_i \xrightarrow{\phi_i} U_i \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ が可微分写像であるとき、 f は可微分であるという。 $h: M \rightarrow M$ が可微分であるとは、各可微分関数 $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ に対して $f \circ h$ が可微分であることとする。また $h: M \rightarrow M$ が微分同相とは h と h^{-1} が可微分写像であることと定義する。 M が可微分軌道体のときにも可微分多様体の場合と同様に、コンパクトな台をもつイソトピーにより恒等写像とイソトピックな M の微分同相全体のなす群を $\mathcal{D}(M)$ と表す。

$p \in M$ が孤立特異点であるとは、 p の回りの局所座標 (U_i, ϕ_i) に対して、 $\pi_i(\tilde{p}) = \phi_i(p)$ を満たす点 $\tilde{p} \in \tilde{U}_i$ が可微分作用 (Γ_i, \tilde{U}_i) の孤立不動点であることとする。 Strub [ST], Theorem A より p が孤立特異点であるという定義は、 p を含む局所座標の選び方によらない。

Theorem 4.1 と Fragmentation lemma により次の結果を得る。

Theorem 4.5 ([AF7]) 連結可微分軌道体 M に対して、 $\{p_1, \dots, p_k\}$ が M の孤立特異点の集合であるとき、

$$H_1(\mathcal{D}(M)) \cong H_1(\text{Aut}_{\Gamma_{p_1}}(V_{p_1})_0) \times \cdots \times H_1(\text{Aut}_{\Gamma_{p_k}}(V_{p_k})_0).$$

Theorem 4.6 ([AF7]) M を有限群 G が作用する可微分 G -多様体とする。このとき軌道空間 M/G が $\{G \cdot p_1, \dots, G \cdot p_k\}$ を孤立特異点の集合とするとき

$$H_1(\mathcal{D}_G(M)) \cong H_1(\text{Aut}_{G_{p_1}}(T_{p_1}M)_0) \times \cdots \times H_1(\text{Aut}_{G_{p_k}}(T_{p_k}M)_0).$$

§5. 応用

§4 の結果は様々なことに適用できるが、最初に次のような S^3 上の $U(1)$ 作用をを考える。

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(w_1, w_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1\} \\ z \cdot (w_1, w_2) &= (zw_1, z^2w_2), \quad z \in U(1). \end{aligned}$$

このとき S^3 は2つの軌道型 $\{(1), Z_2\}$ をもち、軌道空間 $S^3/U(1)$ は tear drop として知られている1点の孤立特異点をもつ2次元球面である。

Theorem 5.1 ([AF7]) $H_1(\mathcal{D}_{U(1)}(S^3)) \cong \mathbf{R} \times U(1)$.

上の作用を Z_n に制限するとき $\mathcal{D}_{Z_n}(S^3)$ は完全群である。Theorem 5.1 は、Theorem 4.6 および Bierstone [BI] の結果を用いて、軌道空間の微分同相の孤立特異点の回りの振る舞いを調べることで得られる。

次にモジュラー群への応用を考察する。 \mathcal{H} を複素上半平面とする。 \mathcal{H} 上の $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ の作用は次のようにメビウス変換として与えられる。

$$g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{for } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, z \in \mathcal{H}.$$

この作用の核は $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ で、射影化群 $\bar{\Gamma} = PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ は \mathcal{H} 上に効果的で固有な作用を与える。Theorem 4.5, 4.6 を用いると次を得る。

Theorem 5.2 $H_1(\mathcal{D}_{\bar{\Gamma}}(\mathcal{H})) \cong H_1(\mathcal{D}(\mathcal{H}/\bar{\Gamma})) \cong U(1) \times \mathbb{R}^2.$

この同型の右辺は Γ の位数 2 と 3 の双曲的部分群が Γ の等方部分群となる \mathcal{H} 点の軌道に対応している。

上の作用はリーマン球面 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に拡張される。 Γ の放物的部分群が Γ の等方部分群となる $\bar{\mathbb{C}}$ の点は尖点と呼ばれて、尖点の集合は $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ と一致することが知られている。

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \quad \mathcal{R}_{\Gamma} = \mathcal{H}^*/\bar{\Gamma} = \mathcal{H}/\bar{\Gamma} \cup \{*\}$$

とおく。 \mathcal{R}_{Γ} は自然な位相で S^2 と同相であるが、可微分軌道体ではない。

Proposition 5.3 $\bar{\mathbb{C}}$ における $\bar{\Gamma}_{\infty}$ -不変な ∞ の開近傍 \tilde{U} が存在して次の条件を満たす。

- (1) $\bar{\Gamma}_{\infty} = \{g \in \bar{\Gamma} \mid g \cdot \tilde{U} \cap \tilde{U} \neq \emptyset\}.$
- (2) 写像 $\varphi: \tilde{U}/\bar{\Gamma}_{\infty} \rightarrow \mathbb{C}$ を $\varphi(\bar{\Gamma}_{\infty} \cdot z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ ($z \in \tilde{U}$) と定義すると、 φ は \mathbb{C} の開集合の上への同相写像である。

Proposition 5.3 より自然な写像 $\iota: \tilde{U}/\bar{\Gamma}_{\infty} \rightarrow \mathcal{R}_{\Gamma}$ は $*$ の開近傍 U 上への同相写像で、 $\phi = \varphi \circ \iota^{-1}$ は U の局所座標系を与えていると考えられる。

$h: \mathcal{R}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{R}_{\Gamma}$ が微分同相であるとは次の (1), (2), (3) を満たすこととする。

- (1) $h|_{(\mathcal{H}/\bar{\Gamma})}$ は $\mathcal{H}/\bar{\Gamma}$ の可微分軌道体として微分同相、
- (2) $\phi \circ h \circ \phi^{-1}$ は $\phi(*)$ の近傍で微分同相写像、
- (3) \mathcal{H} の $\bar{\Gamma}_{\infty}$ -不変な微分同相 \tilde{h} が存在して \tilde{h} から引き起こされる $\mathcal{H}/\bar{\Gamma}$ の微分同相写像は $*$ のある除外近傍で h と一致する。

$\mathcal{D}(\mathcal{R}_{\Gamma})$ を恒等写像とイソトピックな \mathcal{R}_{Γ} の微分同相全体のなす群とする。

Theorem 5.4 $H_1(\mathcal{D}(\mathcal{R}_{\Gamma})) \cong U(1) \times \mathbb{R}^3.$

階数 N の主合同部分群

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

に対しても同様に次のことが示される。

Theorem 5.5 $N \geq 2$ のとき $t(N)$ を \bar{C} の尖点の同値類の個数とすると

$$H_1(\mathcal{D}(\mathcal{R}_{\Gamma(N)})) \cong \mathbf{R}^{t(N)}.$$

$t(N)$ の値は以下のようになることが知られている:

$$t(1) = 1, \quad t(2) = 3, \quad t(N) = \frac{N^2}{2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \quad (N > 2).$$

Theorem 5.4, 5.5 は、Theorem 4.5 および Theorem 2.5 を用いて証明される。

§4 の結果は葉層構造を保つ微分同相の場合にも応用される ([AF7])。

また上記の問題をリプシッツ同相群の場合にも展開して結果を得た ([AF1], [AF3], [AF4], [AF6], [AFM])。

参考文献

- [AB] K. Abe, *On the homotopy type of the groups of equivariant diffeomorphisms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 16(1980), 601-626.
- [AF1] K. Abe and K. Fukui, *On commutators of equivariant diffeomorphisms*, Proc. Japan Acad., 54 (1978), 52-54.
- [AF2] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms of G -manifolds with codimension one orbit*, Topology, 40 (2001), 1325-1337.
- [AF3] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups*, J. Math. Soc. Japan, 53 (2001), 501-511.
- [AF4] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups II*, J. Math. Soc. Japan, 55 (2003), 947-956.

- [AF5] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of diffeomorphisms of manifolds with boundary and its applications*, preprint.
- [AF6] K. Abe and K. Fukui, *On the first homology of automorphism groups of manifolds with geometric structures*, to appear in Central European Jour. Math.
- [AF7] K. Abe and K. Fukui, *The first homology of the group of equivariant diffeomorphisms and its applications*, preprint.
- [AFM] K. Abe, K. Fukui and T. Miura, *On the first homology of the group of equivariant Lipschitz homeomorphisms*, submitted.
- [BA1] A. Banyaga, *On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms*, Topology, 16(1977), 279-283.
- [BA2] A. Banyaga, *The Structure of Classical Diffeomorphism Groups*, Kluwer Academic Publishers, (1997).
- [BI] E. Bierstone, *Lifting isotopies from orbit spaces*, Topology, 14(1975), 245-252.
- [BR] B. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York-London, (1972).
- [EP] D.B.A.Epstein, *The simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Compos. Math. 22(1970), 165-173.
- [FI] R.P. Filipkiewicz, *Isomorphisms between diffeomorphism groups*, Ergodic Theory Dynamical Systems, 2(1982), 159-171.
- [F] K. Fukui, *Homologies of the group of $Diff^\infty(\mathbb{R}^n, 0)$ and its subgroups*, J. Math. Kyoto Univ., 20(1980), 475-487.
- [HE] M.R.Herman, *Simplicité du groupe des difféomorphismes de classe C^∞ , isotopes L'identité, du tore de dimension n*, CR. Acad.Sci. Paris, Sér. A-B., 273(1971) A 232-234.
- [HM] F.Hirzebruch and K.H.Mayer, *$O(n)$ -Manigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten*, Springer Lecture Notes 57,(1968).

- [SC] G.W. Schwarz, *Lifting smooth homotopies of orbit spaces*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 51(1980) 37-135.
- [S1] S. Sternberg, *Local contractions and a theorem of Poincaré*, Amer. Jour. of Math., 79 (1957), 809-823.
- [S2] S. Sternberg, *The structure of local homeomorphisms, II*, Amer. Jour. of Math., 80 (1958), 623-632.
- [ST] R. Strub, *Local classification of quotients of smooth manifolds by discontinuous groups*, Math. Zeitschrift 179(1982), 43-57.
- [TH] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., 80(1974), 304-307.
- [TS] T. Tsuboi, *On the perfectness of groups of diffeomorphisms of the interval tangent to the identity at the endpoints*, preprint

微分同相群とトポロジー —いくつかの問題と展望—

森田 茂之

1 はじめに

C^∞ 多様体 M に対して, その C^∞ 微分同相群を $\text{Diff } M$ と書くことにする. 位相は C^∞ 位相とし, 同じ群に離散位相を入れたものは $\text{Diff}^\delta M$ と書く. 本講演では $\text{Diff } M$ をキーワードとして, これまでのトポロジーの発展の一つの側面を振り返り, またいくつかの未解決問題を考える中から, (この側面からの) 将来の展望を試みたいと思う.

究極の目標は, $\text{Diff } M$ のホモトピー型の決定, さらに分類空間 $\text{BDiff } M$, $\text{BDiff}^\delta M$ のコホモロジー群の決定であるが, もちろん一般の M に対しては, これは極めて難しい (あるいはほとんど不可能な) 問題である. $M = S^1$ の場合は, $\text{Diff } S^1$ がその部分群である S^1 (回転の全体) に変位レトラクトすることは簡単に証明できるが, $M = S^2$ の場合には, 包含写像

$$O(3) \subset \text{Diff } S^2$$

がホモトピー同値であることは, すでに Smale の初期の定理 [48] となる. さらに $M = S^3$ の場合に, 包含写像

$$O(4) \subset \text{Diff } S^3$$

がホモトピー同値であることは Hatcher の深い結果 [19] である. $n \geq 4$ に対しては, $\text{Diff } S^n$ のホモトピー型の決定は n が大きくなるにつれてますます難しい問題となる. まして一般の M に対しては言うまでもない. しかし, それでは意味のある一般論を考えることはできないのか? という, そういう訳ではない.

ここでは (時間の許す範囲で) $\text{Diff } M$ およびその重要な部分群について, いくつかの具体的な問題を考えてみることにする. (ただし, $\text{Diff } M$ に関しては, 例えば $\text{Diff } M$ の個々の元, あるいは適当な族についての微分可能力学系の立場からの研究等, 種々の立場からの研究が考えられるが, ここでは $\text{Diff } M$ の大局的な幾何学的構造の観点からの問題を考える.)

2 微分同相群の連結成分の成す群 — diffeotopy 群 —

$\text{Diff } M$ のトポロジーで, まず初めに考えるべきことは, その連結成分のなす群

$$\mathcal{D}(M) = \pi_0 \text{Diff } M \cong \text{Diff } M / \text{Diff}_0 M$$

であろう. これを M の diffeotopy 群という. ここで $\text{Diff}_0 M$ は $\text{Diff } M$ の単位元の連結成分を表す.

2.1 球面の場合

M が球面の場合には, Cerf の基本的な結果 [7][8] と Smale による一般 Poincaré 予想の解決 [49] により, 同型

$$\mathcal{D}_+(S^n) \cong \Gamma_{n+1} \cong \theta_{n+1} \quad (n \geq 5)$$

が存在する. ここで $\mathcal{D}_+(S^n) = \pi_0 \text{Diff}_+ S^n$ は球面の向き付けられた diffeotopy 群, $\Gamma_n = \pi_n \text{PL}/O$ は組み合わせ n 次元球面 S^n 上の smoothing (平滑化) のなす群であり, θ_n は Kervaire と Milnor [25] による n 次元ホモトピー球面のなす群である. 微分トポロジーの古典的な成果の一つである [25] と, その後の仕事により, 完全系列

$$0 \longrightarrow bP_{n+1} \longrightarrow \theta_n \longrightarrow \text{coker } J_n \begin{cases} \longrightarrow 0 & (n \neq 2^* - 2) \\ \longrightarrow 0 \text{ or } \mathbb{Z}/2 & (n = 2^* - 2) \end{cases}$$

が存在することが示されている. ここで bP_{n+1} は π 多様体の境界となるようなホモトピー球面,

$$J_n : \pi_n(\text{SO}) \longrightarrow \pi_n^S$$

は J 準同型写像を表す. 有名な Kervaire 球面は bP_{4n+2} を生成し

$$bP_{4n+2} = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & (2n+1 \neq 2^* - 1) \quad (\text{Browder}[6]) \\ 0 & (2n+1 = 3, 7, 15, 31) \\ 0? \text{ or } \mathbb{Z}/2 & (2n+1 = 63, 127, \dots) \end{cases}$$

となっている. 上記の第二行が 0 となる場合を決定する問題 (すなわち Kervaire 球面が通常の球面と微分同相となる場合, あるいは同じことであるが, Kervaire 不変量が 1 となるような framed manifold が (その次元+1 のところで) 存在するか? という問題) は, 大変な難問であり, 多くの数学者の努力にもかかわらず, 未解決のままである. なお, 上記 0 となることが分かっている中の次元が最大の場合 (すなわち 62 次元) は Barratt-Jones-Mahowald [3] により 80 年代前半に得られた結果である. Kervaire 不変量 1 の多様体の存在については, $2^* - 2$ の形のすべての次元での存在を予想 (あるいは期待) する人がいる一方, 南範彦氏 [37] は反対に有限個に限ることを予想している. この問題に関連して, 最近の安定ホモトピー論の展開については, 例えば Hopkins [20] を参照.

2.2 閉曲面の場合

つぎに向き付けられた種数 g の閉曲面 Σ_g の場合を考える. Σ_g の向き付けられた diffeotopy 群は, 通常写像類群と呼ばれる. ここではこの群を \mathcal{M}_g と書くことにする:

$$\mathcal{M}_g = \pi_0 \text{Diff}_+ \Sigma_g.$$

種数 0 すなわち球面 S^2 の場合は, 上記 Smale の結果により \mathcal{M}_0 は自明な群となる. 種数が 1 すなわちトーラス T^2 の場合には, \mathcal{M}_1 は $H_1(T^2; \mathbb{Z})$ への作用のみで特徴付けられること, 言い換えれば

$$\mathcal{M}_1 \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

となることが知られている. これに対して $g \geq 2$ の場合には, $\pi_1 \Sigma_g$ が非可換であることを反映して, \mathcal{M}_g は $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ への作用だけでは特徴付けることはできず, 群の完全系列

$$1 \longrightarrow \mathcal{I}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g \longrightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

が得られる。ここで、 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ は \mathcal{M}_g の $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ への作用を記述する役割を果たし、 \mathcal{I}_g は Torelli 群と呼ばれ、その作用では記述できない部分を表す \mathcal{M}_g の重要な正規部分群である。

種数 $g \geq 2$ のとき、写像類群 \mathcal{M}_g は Σ_g 上の複素構造（あるいは双曲構造）のイソトピー類全体のなす空間である Teichmüller 空間 \mathcal{I}_g に自然に作用し、その商空間 $\mathcal{M}_g = \mathcal{I}_g / \mathcal{M}_g$ は種数 g の Riemann 面の moduli 空間と呼ばれる空間となる。 \mathcal{M}_g は代数幾何、函数論、トポロジー、微分幾何、さらには数理物理において極めて重要な空間であり、様々な観点からの研究がなされて来た。多くのことが分かって来たが、一方未解決の問題も数多い。将来にわたって重要な研究テーマであり続けるものと思われる。しかし、これについてはいろいろな機会に話してきたので、今回はこれ以上立ち入らないことにする（写像類群および関連する種々の群の最近の研究については [40] 参照）。

なお、上記では $\pi_0 \mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ のみを考えたが、実際には $\mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ のホモトピー型は完全に分かっている。すなわち

$$\begin{aligned} \mathrm{Diff}_+ S^2 &\sim \mathrm{SO}(3) && (\mathrm{Smale}[48]) \\ \mathrm{Diff}_0 T^2 &\sim T^2 && (\mathrm{Earle-Eells}[9]) \\ \mathrm{Diff}_0 \Sigma_g &\sim * \quad (\text{可縮}) && (\mathrm{Earle-Eells}[9]) \end{aligned}$$

2.3 3次元多様体の場合

3次元多様体 M の diffeotopy 群 $\mathcal{D}(M)$ は M の幾何学をよく反映する。ここではそのうちのいくつかを挙げてみることにする。まず M が Haken の場合には、Waldhausen[54] により

$$\mathcal{D}(M) \cong \mathrm{Out} \pi_1 M$$

となる。ここで Out は群の外部自己同型群を表す。つぎに、 M が双曲構造をもつ場合には、よく知られているように Mostow 剛性定理 [43] により

$$\mathcal{D}(M) \cong \mathrm{Isom}(M) \cong \mathrm{Out} \pi_1 M$$

となる ([12] も参照)。Gabai[13] は、この場合さらに $\mathrm{Diff}_0 M$ が可縮であることを示した。小島氏 [27] は任意の有限群 G に対して $\mathrm{Isom}(M) \cong G$ となるような 3次元双曲多様体 M が存在することを証明した（この結果の任意の次元への一般化については [5] 参照）。

一方、ハンドル体の写像類群の具体的な有限表示を与えた鈴木氏の結果 [50] は、3次元多様体の Heegaard 分解および写像類群を用いた記述において、重要な役割を果たし続けている。また Laudénbach [31] の結果

$$\begin{aligned} \mathrm{Out} F_n &\cong \mathcal{D}_+(S^1 \times S^2 \text{ の } n \text{ 個の連結和}) \\ \mathrm{Aut} F_n &\cong \mathcal{D}_+(S^1 \times S^2 \text{ の } n \text{ 個の連結和, } \mathrm{rel} D^3) \end{aligned}$$

は、ここ 20 年程の間に、自由群 F_n の自己同型群の研究が大きな成果を見せてきた中で、基本的な役割を果たしてきている。

最近曲面の写像類群 \mathcal{M}_g と自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut} F_n, \mathrm{Out} F_n$ の種々の性質の比較が大変重要な研究テーマとなってきた。前者は 2次元、後者は 3次元の diffeotopy 群であり、一方前者は曲面バンドル（Riemann 面の族）を、後者はグラフ（1次元の図形）の族を統制する群であるという事実は、示唆的であり、上記の比較研究の中で興味深い性質の違いが見られる（Vogtmann の survey[53] や河澄氏の論文 [24] 等参照）。

3 M バンドルの特性類

一般の M バンドル $\pi: E \rightarrow B$ に対する特性類の理論として, higher torsion の理論がここ 10 年程の間に活発に展開されてきた. ただし, いまのところ, 底空間の基本群 $\pi_1 B$ のファイバーである M のホモロジー群への作用のべき零性あるいは各ファイバー上で Morse 関数となるような関数 $E \rightarrow \mathbb{R}$ の存在を仮定する等の条件をつける必要があり, これらの条件をいかに弱めることができるかが課題である. 大きな流れは二つあり, 一つは K. Igusa, Klein による higher Franz-Reidemeister torsion の理論であり ([21] 参照), もう一つは Bismut, Lott, Goette による higher analytic torsion の理論である ([5][15] 参照). これらの理論は, 両者の関連の解明も含めて一般論が現在まだ進展中である. しかし, 最近 Igusa 氏は論文 [22] において, かなりはっきりとした全体像を提示している. 詳細はこの論文を読んでいただくとして, ここで極く簡単にまとめてみたい. Igusa 氏は, higher torsion 類の特徴付けとして二つの公理 (additivity と transfer) を挙げ, 彼の定義による一般化された Miller-Morita-Mumford 類:

$$M_{2k}(E) = \frac{(2k)!}{2} \int_{\text{fiber}} ch_{4k}(T\pi \otimes \mathbb{C}) \cup e(T\pi) \in H^{4k}(B; \mathbb{Z})$$

(\int_{fiber} は Gysin 写像, $T\pi$ はファイバーに沿う接バンドル, $e(T\pi)$ はその Euler 類), および higher Franz-Reidemeister torsion 類

$$\tau_{2k}(E) \in H^{4k}(B; \mathbb{R})$$

はこれらの公理を満たすことを示した. 一方, higher analytic torsion $T_{2k}(E) \in H^{4k}(B; \mathbb{R})$ が transfer 性質を満たすことは Ma[32] により証明され, additivity については open であったが, [22] によれば Goette の最近の主張からはこれも従うようである. さて Igusa 氏は, 公理を満たす任意の higher torsion 類 τ は, even part τ^+ ($\dim M$ が偶数のときのみ非自明) と odd part τ^- ($\dim M$ が奇数のときのみ非自明) の和に分解することを示し, さらに主定理として

τ^+ は各次数 $4k$ 毎に一般 Miller-Morita-Mumford 類 M_{2k} の定数倍

τ^- は各次数 $4k$ 毎に higher Franz-Reidemeister torsion 類 τ_{2k} の odd part の定数倍

であることを証明した. 従って, 上記の Goette の最近の主張からは higher analytic torsion は higher Franz-Reidemeister torsion の odd part と (スカラーを除き) 一致するということが従う.

他方, 具体的な M に対しての higher Franz-Reidemeister torsion class の非自明性は, ベクトルバンドルに同伴する球面バンドルの場合, Pontrjagin 類のある定数 (それは $\zeta(2k+1)$ を含む) 倍となることや, Hatcher による S^{4k} 上の exotic な S^{2n-1} バンドルで非自明となることなどが [21] に証明されている. しかし, 一般の M についてはまだまだ未知のことが多いようである.

例えば, §2.3 との関連で言えば, 自然な全射準同型写像 $\text{Aut } F_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{Z})$ の核として定義される群 IAut_n のコホモロジー群の元として定義される, Igusa の higher Franz-Reidemeister torsion class

$$\tau_{2k} \in H^{4k}(\text{IAut}_n; \mathbb{R})$$

が非自明であるかどうかは, 極めて重要な未解決問題である. 近い将来の解決が期待される.

次節では, M が球面の場合のいくつかの問題を挙げてみる.

3.1 球面バンドルの特性類

よく知られているように、実ベクトルバンドルの有理数係数の安定特性類の全体は、Pontrjagin 類 p_i の生成する多項式代数として表される。すなわち

$$H^*(BGL(\infty, \mathbb{R}); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$$

である。一方、 $\pi_i PL/O \cong \Gamma_i$ がすべての i に対して有限群であること、および Kirby-Siebenmann[26] の有名な結果 $Top/PL = K(\mathbb{Z}/2, 3)$ から、自然な写像 $BGL(\infty, \mathbb{R}) \rightarrow BTop$ は有理数係数コホモロジー群の同型

$$H^*(BTop; \mathbb{Q}) \cong H^*(BGL(\infty, \mathbb{R}); \mathbb{Q})$$

を誘導する。一方、球面上の錐をとることにより、準同型写像

$$Diff S^n \longrightarrow Homeo D^n \longrightarrow Homeo \mathbb{R}^n$$

が定義される。従って、通常の記法 $Top = \lim Homeo \mathbb{R}^n$ を使えば、準同型写像

$$H^*(BTop; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots] \longrightarrow H^*(BDiff S^n; \mathbb{Q})$$

が得られる。すなわち、球面バンドルに対して Pontrjagin 類が定義される。

一方、Waldhausen の理論 [55] を使って Farrell-Hsiang [10] は $Diff S^n$ の (有理) ホモトピー群に関するつぎの結果を得た。安定域 ($i < \frac{n}{6} - 7$) で

$$\pi_i Diff S^n \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} 0 & i \neq 4k - 1 \\ \mathbb{Q} & i = 4k - 1 \quad n \text{ 偶数} \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & i = 4k - 1 \quad n \text{ 奇数} \end{cases}$$

上記で n が奇数のときの $\pi_{4k-1} Diff S^n \otimes \mathbb{Q}$ の二つの生成元は、それぞれ Pontrjagin 類 p_k とある exotic class q_k に対応する。これらの特性類については、十分に幾何学的な定義がまだ知られておらず、たいへん興味深く難しい問題を提供している。

3.2 シンプレクティック微分同相群の特性類

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする。すなわち M 上に閉じた 2 形式 ω で ω^n が M の体積要素となるようなものが与えられているものとする。シンプレクティック多様体の研究は、昔から重要なテーマであるが、ここ 20 年程の間に急激に進展してきた。トポロジーとも深く関連し、シンプレクティック・トポロジーと呼ばれる分野が生まれ、活発な研究が続いている ([35][11] 等参照)。例えば極く最近も、懸案の一つであった Flux 予想が小野氏 [44] によって肯定的に解かれた。

ここでは、微分同相群や特性類の観点から、シンプレクティック幾何学の一側面を考える。シンプレクティック多様体 M のシンプレクティック形式 ω を保つ微分同相の全体を $Symp(M, \omega) \subset Diff M$ と書き、これをシンプレクティック微分同相群 (symplectomorphism group) という。簡単に $Symp M$ と書く場合もある。 $Symp M$ の単位元の連結成分 $Symp_0 M$

による商を $SD(M)$ と書き, これをシンプレクティック diffeotopy 群 (あるいはシンプレクティック写像類群) と呼ぶ. こうして, つぎの群の拡大が得られる.

$$1 \longrightarrow \text{Symp}_0 M \longrightarrow \text{Symp } M \longrightarrow SD(M) \longrightarrow 1.$$

§4.2 で後述する体積保存微分同相群の場合と異なり, 一般には包含写像 $\text{Symp } M \subset \text{Diff}_+ M$ はホモトピー同値ではないし, また自然な準同型写像 $SD(M) \rightarrow D_+(M)$ は全射でも単射でもない (但し, $M = \Sigma_g$ の場合は, 次元の特殊性から $\text{Symp } M$ は対応する面積要素に関する面積保存微分同相群と一致するので, 上記はそれぞれホモトピー同値あるいは同型となる). このことは, Gromov が有名な論文 [17] において $S^2 \times S^2$ 上のパラメーター λ つきのシンプレクティック構造を考察して $\text{Symp } S^2 \times S^2$ のホモトピー型が λ によって変化することを指摘したときに遡る. その後, この流れは論文 [1][23][2] によって引き継がれ, 多くのことが解明されてきた. Seidel [47] は $CP^m \times CP^n$ 上の標準的なシンプレクティック構造に関してシンプレクティック微分同相群のホモトピー型を考察している.

一般にシンプレクティック・ファイブレーションの特性類, すなわち分類空間 $B\text{Symp } M$ のコホモロジー群 $H^*(B\text{Symp } M)$ の研究は, これから盛んになってくるものと思われる. これまでに知られている結果や一般論については [33][34] を参照. また, Reznikov の論文 [45][46] では, 多くの示唆に富む記述により新しい理論が創められているが, 残念ながら未完成に終わってしまった.

4 離散位相をもった微分同相群の特性類

$\text{Diff } M$ に離散位相を入れた群 $\text{Diff}^\diamond M$ の分類空間 $B\text{Diff}^\diamond M$ は葉層 M バンドル, すなわち微分可能 M バンドル $\pi: E \rightarrow B$ で, 各ファイバーに横断的な (余次元 = $\dim M$) 葉層構造の与えられているものを分類する. 自然な準同型写像 (恒等写像) $\iota: \text{Diff}^\diamond M \rightarrow \text{Diff } M$ の誘導する連続写像 $B\text{Diff}^\diamond M \rightarrow B\text{Diff } M$ のホモトピーファイバーを $\overline{B\text{Diff } M}$ とすれば, ファイブレーション

$$\overline{B\text{Diff } M} \longrightarrow B\text{Diff}^\diamond M \longrightarrow B\text{Diff } M$$

が得られる. $\overline{B\text{Diff } M}$ は葉層 M 積, すなわち自明な M バンドルとファイバーに横断的な葉層構造の組を分類する空間である.

また, $\text{Diff } M$ の種々の部分群 G に関しても, それに離散位相を入れた群 G^\diamond の分類空間 BG^\diamond のトポロジー (とくにコホモロジー群) の研究, さらにファイブレーション

$$\overline{BG} \longrightarrow BG^\diamond \longrightarrow BG$$

のトポロジーの研究は, これからますます活発になってくるものと思われる. 部分群 G としては, たとえば体積保存微分同相群 $\text{Diff}^\nu M$ (§4.2) や上述のシンプレクティック微分同相群 $\text{Symp } M$ 等が考えられる.

4.1 葉層 M バンドル

葉層 M バンドルに対しては, 1970 年代に Gel'fand-Fuks 理論による特性類の理論が建設された (例えば [18] 参照). すなわち M の Gel'fand-Fuks コホモロジー代数 $H_{GF}^*(M)$ から

分類空間 $\overline{\text{BDiff } M}$ の実コホモロジー代数への準同型写像 Φ が定義された。こうして次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
 H_{GF}^*(M) & \xrightarrow{\Phi} & H^*(\overline{\text{BDiff } M}; \mathbb{R}) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H^*(\text{BDiff } M) \otimes \int_{\text{fiber}} (\text{ch. classes of } T\pi \otimes H_c^*(\mathfrak{a}_n; \mathcal{O}(n))) & \longrightarrow & H^*(\text{BDiff}^\delta M; \mathbb{R}) \quad (1) \\
 \uparrow & & \uparrow p^* \\
 \int_{\text{fiber}} (\text{ch. classes of } T\pi) \otimes \text{higher torsion classes} & \longrightarrow & H^*(\text{BDiff } M; \mathbb{R}).
 \end{array}$$

ここで $\pi: \text{EDiff } M \rightarrow \text{BDiff } M$ は分類空間上の普遍 M バンドル, $T\pi$ はそのファイバー方向の接バンドル (tangent bundle along the fibers), ch. classes of $T\pi$ はその (Pontrjagin 類や Euler 類等の) 特性類を表すものとする。また \mathfrak{a}_n は \mathbb{R}^n 上の形式的ベクトル場全体のなす位相 Lie 代数を表す。

これまでの研究では, M バンドルの特性類と葉層 M バンドルの特性類は別々に研究されてきたが, 上記の図式をもとに互いの関係を考える視点を加えれば, 双方の研究に有益なものではないかと思う。一例として, 筆者は [39] において M が曲面の場合に上記の図式を考察し, Bott 消滅定理を適用することにより, Mumford-Morita-Miller 類 e_i の $H^*(\text{BDiff}_+^\delta \Sigma_g; \mathbb{Q})$ における像がすべての $i \geq 3$ に対して消えることを証明した。一方, Kotschick 氏と筆者の最近の共同研究 [28] では, 第一 MMM 類 e_1 の $H^2(\text{BDiff}_+^\delta \Sigma_g; \mathbb{Q})$ における像が, すべての $g \geq 3$ で非自明であることを示し (e_2 の非自明性は未解決である), 一般の M (とくに M が球面の場合) に対しても, Bott 消滅定理と M バンドルの特性類との関わりを研究中である ([30])。

4.2 体積保存葉層 M バンドルとシンプレクティック葉層 M バンドル

前節 §4.1 の問題は, $\text{Diff } M$ の種々の部分群に対しても意味をもつ。まず M 上に与えられた体積要素 v を保つ微分同相全体のなす群 $\text{Diff}^v M$ (体積保存微分同相群) の場合を考える。この場合, よく知られた Moser の定理 [42] により, 包含写像

$$\text{Diff}^v M \subset \text{Diff } M$$

はホモトピー同値である。従って, 分類空間 $\text{BDiff}^v M$ は $\text{BDiff } M$ と同じホモトピー型をもつ。一方図式(1)の第二行には, transverse volume class $\in H^n(\text{BDiff}^{v,\delta} M; \mathbb{R})$ ($n = \dim M$) が定義される。そして, M バンドルの特性類がどの程度体積保存葉層 M バンドル上で自明あるいは非自明であるかという問題が考えられる。つぎに図式(1)の第一行に関しては, $\text{Diff}^v M$ の Lie 代数は, 発散のない M 上のベクトル場全体 $\mathfrak{X}^v(M)$ である。しかし対応する Gel'fand-Fuks コホモロジー $H_c^*(\mathfrak{X}^v(M))$ の計算はいまのところ不可能である。実際, 形式的ベクトル場 $\mathfrak{a}_n^{\text{div.free}}$ の段階ですでにそのコホモロジー $H_c^*(\mathfrak{a}_n^{\text{div.free}}; \text{SL}(n))$ がどうなるか全く分からない状態である。近い将来の新しい展開が待たれる。

つぎに M がシンプレクティック多様体の場合を考える。この場合は §3.2 で述べたようにシンプレクティック微分同相群 $\text{Symp } M$ は一般には $\text{Diff } M$ と異なるホモトピー型をもち, 従ってまずシンプレクティック M バンドルの特性類がどの程度シンプレクティック葉層 M

バンドル上で自明あるいは非自明であるかという問題が生ずる。つぎに図式(1)の第一行に関しては, $\text{Symp } M$ の Lie 代数は, M 上のシンプレクティックベクトル場全体 $\mathfrak{X}^\omega(M)$ である。しかしこの場合も, 対応する Gel'fand-Fuks コホモロジー $H_c^*(\mathfrak{X}^\omega(M))$ の計算はもちろんのこと, 形式的ハミルトンベクトル場の全体 $\mathfrak{a}_{2n}^{\text{ham}}$ のなす位相 Lie 代数のコホモロジー $H_c^*(\mathfrak{a}_{2n}^{\text{ham}}; \text{Sp}(2n))$ がどうなるか全く分からない状態である。ここでも近い将来の新しい展開が待たれる。

上記で形式的ベクトル場のなす位相 Lie 代数 $\mathfrak{a}_n^{\text{div.free}}, \mathfrak{a}_{2n}^{\text{ham}}$ のコホモロジーは全く分からない状態であると言ったが, 2次元の場合には Gel'fand-Kalinin-Fuks の結果 [14] がある。この場合, 二つの Lie 代数は一致し ($\mathfrak{a}_2^{\text{div.free}} = \mathfrak{a}_2^{\text{ham}}$), 上記の論文では, ある exotic class $\in H_c^7(\mathfrak{a}_2^{\text{ham}}; \text{Sp}(2))$ の存在が証明されている。その後, 目時氏 [36] は彼等の計算を進めてもう一つの exotic class $\in H_c^9(\mathfrak{a}_2^{\text{ham}}; \text{Sp}(2))$ の存在を示した。コホモロジー代数 $H_c^*(\mathfrak{a}_{2n}^{\text{ham}}; \text{Sp}(2n))$ は無限生成であることが予想されており, ここにトポロジーとシンプレクティック幾何学にまたがる未知の新しい幾何学が存在することは確実と思われる。論文 [14] からすでに 30 年以上が経過してしまったのであるが, 近い将来に新しい発想による研究の進展が待たれる。

一方, 同じ $M = \Sigma_g$ の場合に Kotschick 氏と筆者は [28] で拡張された Flux 準同型写像 (実際には crossed-homomorphism)

$$\widetilde{\text{Flux}} : \text{Symp } \Sigma_g \longrightarrow H^1(\Sigma_g; \mathbb{R})$$

を用いて $H^*(\text{BSymp}^\delta \Sigma_g; \mathbb{R})$ の多くの元を構成し, その非自明性を証明した ([29])。これは上記の問題の $M = \Sigma_g$ の場合の第一歩ではあるが, 準同型写像

$$\mathbb{Q}[\tilde{v}_1, e_1, e_2] \otimes \int_{\text{fiber}} H_c^*(\mathfrak{a}_2^{\text{ham}}; \text{Sp}(2)) \longrightarrow H^*(\text{BSymp}^\delta \Sigma_g; \mathbb{R})$$

を (左辺の未知の部分も含めて) 決定するという難問の解決にはまだまだ程遠い。

4.3 実解析的 M バンドル, 実解析的葉層 M バンドル

よく知られているように, Whitney [56] は任意の C^∞ 多様体を実解析的多様体の構造を許容することを示した。この論文で Whitney は有名な C^∞ 多様体の埋め込み定理の証明を与えたのであるが, 任意の実解析的多様体がユークリッド空間に実解析的に埋め込めるか? という問題を提示した。この問は, M がコンパクトな場合には Morrey [41] により, また一般の場合には, Grauert [16] により肯定的に解決された。両者の証明は異なるが, いずれも解析学の深い結果を使うものである。Grauert の証明からは, たとえば実解析的微分同相群 $\text{Diff}^\omega M$ が $\text{Diff } M$ の中で稠密であることが従う。さらに包含写像 $\text{Diff}^\omega M \subset \text{Diff } M$ が弱ホモトピー同値であることが, これまでの結果により知られている ([52])。しかし, 二つの群 $\text{Diff}^\omega M, \text{Diff } M$ の代数的な構造がどの程度似ているのか, あるいは異なる点があるのか, については分からないことがほとんどのようであり, 面白い研究課題となりうるのではないか。

例えば, Thurston [51] は一般に $\text{Diff}_0 M$ が完全群 (さらには単純群) であることを示したが, その証明は (基にあるトーラスに関する Hermann の深い結果を除き) 実解析的な場合には適用できない。これに関しては最近の坪井氏の研究 [52] がある。

ここでは, これ以外のいくつかの具体的な問題を挙げてみる。筆者は [51] の結果を用いて, 葉層 S^1 バンドルの Euler 類 $\chi \in H^2(\text{BDiff}_+^{\delta} S^1; \mathbb{Q})$ のべき χ^k ($k = 1, 2, 3, \dots$) はすべて

非自明であることを証明したが ([38]), 実解析的な場合にも同じことが成立するかどうかは未知である. 具体的には

$$\chi^k \in H^{2k}(\text{BDiff}_+^{\omega, \delta} S^1; \mathbb{Q})$$

はすべて非自明であることが予想される. より一般的な問として, 包含写像 $\text{Diff}_+^{\omega} S^1 \subset \text{Diff}_+ S^1$ がコホモロジー群に誘導する準同型写像

$$H^*(\text{BDiff}_+^{\delta} S^1; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(\text{BDiff}_+^{\omega, \delta} S^1; \mathbb{Q})$$

は同型であろうか? 関連して, $\text{B}\bar{\Gamma}_1$ を余次元 1 の transversely oriented な C^∞ Haefliger 構造の分類空間, $\text{B}\bar{\Gamma}_1^\omega$ を実解析的な場合の対応する Haefliger 構造の分類空間とする. Mather-Thurston により前者は 2 連結であることが知られており, 一方 Haefliger により後者は Eilenberg-MacLane 空間であることが示されている. 従って, 両者はホモトピー的には全く異なる空間である. ところが, いまのところコホモロジー的性質の違いは一つも知られていない. そこで問として, 自然な準同型写像

$$H^*(\text{B}\bar{\Gamma}_1; \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(\text{B}\bar{\Gamma}_1^\omega; \mathbb{R})$$

は同型であろうか?

つぎに曲面の場合を考える. §4.1 で述べたように, Kotschick 氏との共同研究 [28] で葉層 Σ_g バンドルに対して第一 MMM 類 e_1 が非自明であること:

$$e_1 \neq 0 \in H^2(\text{BDiff}_+^{\delta} \Sigma_g; \mathbb{Q}) \quad (g \geq 3)$$

を示した. この結果は実解析な場合にも成立するだろうか? もし $\text{Diff}_0^{\omega, \delta} \Sigma_g$ が完全群, すなわち

$$H_1(\text{Diff}_0^{\omega, \delta} \Sigma_g) = 0?$$

ならば, 答えは肯定的である.

参考文献

- [1] M. Abreu and D. McDuff, *Topology of symplectomorphism groups of rational ruled surfaces*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 971–1009.
- [2] S. Anjos and G. Granja, *Homotopy decomposition of a group of symplectomorphisms of $S^2 \times S^2$* , Topology 43 (2004), 599–618.
- [3] M. Barratt, J. Jones and M. Mahowald, *Relations amongst Toda brackets and the Kervaire invariant in dimension 62*, J. London Math. Soc. 30 (1984), 533–550.
- [4] M. Belolipetsky and A. Lubotzky, *Finite groups and hyperbolic manifolds*, preprint 2004.
- [5] J.-M. Bismut, J. Lott, *Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion*, J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), 291–363.
- [6] W. Browder, *The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization*, Ann. of Math. 90 (1969), 157–186.

- [7] J. Cerf, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Math., Vol. 53, Springer Verlag 1968.
- [8] J. Cerf, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Publ. Math. I. H. E. S. 39 (1970), 5–173.
- [9] C.J. Earle and J. Eells, *The diffeomorphism group of a compact Riemann surface*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 557–559.
- [10] F.T. Farrell and W.C. Hsiang, *On the rational homotopy groups of the diffeomorphism groups of discs, spheres and aspherical manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math. 32, American Mathematical Society, 1978, 325–337.
- [11] 深谷賢治, シンプレクティック幾何学, 岩波書店, 1999.
- [12] D. Gabai, *On the geometric and topological rigidity of hyperbolic 3-manifolds*, Jour. Amer. Math. Soc. 10 (1997), 37–74.
- [13] D. Gabai, *The Smale conjecture for hyperbolic 3-manifolds: $\text{Isom}(M^3) \simeq \text{Diff}(M^3)$* , Jour. Diff. Geom. 58 (2001), 113–149.
- [14] I. M. Gelfand, D. I. Kalinin, D. B. Fuks, *The cohomology of the Lie algebra of Hamiltonian formal vector fields*, Funkcional. Anal. i Pril. 6, (1972), no. 3, 25–29.
- [15] S. Goette, *Morse theory and higher torsion invariants, I, II*, preprints.
- [16] H. Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, Ann. of Math. 68 (1958), 460–472.
- [17] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307–347.
- [18] A. Haefliger, *Sur les classes caractéristiques des feuilletages*, Séminaire Bourbaki, 1971/72, Lecture Notes in Mathematics, vol. 317, Springer Verlag, 1973, 239–260.
- [19] A. Hatcher, *A proof of a Smale conjecture $\text{Diff } S^3 \simeq \text{O}(4)$* , Ann. of Math. 117 (1983), 553–607.
- [20] M. Hopkins, *Algebraic topology and modular forms*, Proceedings of ICM 2002, Beijing, Vol I, 283–309.
- [21] K. Igusa, *Higher Franz-Reidemeister Torsion*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society, 2002.
- [22] K. Igusa, *Axioms for higher torsion invariants of smooth bundles*, preprint 2005.
- [23] T. Januszkiewicz and J. Kedra, *Characteristic classes of smooth fibrations*, preprint 2002.
- [24] N. Kawazumi, *Cohomological aspects of Magnus expansions*, preprint 2005.

- [25] M. Kervaire and J. Milnor, *Groups of homotopy spheres, I*, Ann. of Math. 77 (1963), 504–537.
- [26] R. Kirby and L. Siebenmann, *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 742–749.
- [27] S. Kojima *Isometry transformations of hyperbolic 3-manifolds*, Topology and its Appl. 29 (1988), 297–307.
- [28] D. Kotschick and S. Morita, *Signature of foliated surface bundles and the group of symplectomorphisms of surfaces*, Topology 44 (2005), 131–149.
- [29] D. Kotschick and S. Morita, *Characteristic classes of foliated surface bundles with area preserving holonomy*, preprint 2004.
- [30] D. Kotschick and S. Morita, in preparation.
- [31] F. Laudenbach, *Sur les 2-sphère d'une variété de dimension 3*, Ann. of Math. 97 (1973), 57–81.
- [32] X. Ma, *Formes de torsion analytique et familles de submersions*, C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1997), 205–210.
- [33] D. McDuff, *A survey of the topological properties of symplectomorphism groups*, in *Topology, Geometry and Quantum Field Theory*, Proceedings of 2002 Symposium in honor of G.B. Segal, ed. U. Tillmann, Cambridge Univ. Press (2004), 173–193.
- [34] D. McDuff, *Enlarging the Hamiltonian group*, preprint 2005.
- [35] D. McDuff and D.A. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, second edition, Oxford University Press, 1998.
- [36] S. Metoki, *Non-trivial cohomology classes of Lie algebras of volume preserving formal vector fields*, thesis, University of Tokyo, 2000.
- [37] N. Minami, *On the Kervaire invariant problem*, Contemporary Mathematics 220 (1998), American Mathematical Society, 229–253.
- [38] S. Morita, *Nontriviality of the Gelfand-Fuchs characteristic classes for flat S^1 -bundles*, Osaka J. Math. 21 (1984), 545–563.
- [39] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. 90 (1987), 551–577.
- [40] S. Morita, *Cohomological structure of the mapping class group and beyond*, preprint 2005.
- [41] C.B. Morrey, *The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds*, Ann. of Math. 68 (1958), 159–201.

- [42] J. Moser, *On the volume forms*, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965), 286–294.
- [43] G.D. Mostow, *Quasiconformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publ. I.H.E.S. 34 (1968), 53–104.
- [44] K. Ono, *Floer-Novikov cohomology and the flux conjecture*, preprint 2004.
- [45] A. Reznikov, *Characteristic classes in symplectic topology*, Selecta Math. 3 (1997), 601–642.
- [46] A. Reznikov, *Continuous cohomology of the group of volume-preserving and symplectic diffeomorphisms, measurable transfer and higher asymptotic cycles*, Selecta Math. 5 (1999), 181–198 .
- [47] P. Seidel, *On the group of symplectic automorphisms of $\mathbb{C}P^m \times \mathbb{C}P^n$* , Northern California Symplectic Geometry Seminar, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 196, 1999, 237–250.
- [48] S. Smale, *Diffeomorphisms of the 2-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 621–626.
- [49] S. Smale, *Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. 74 (1961), 391–406.
- [50] S. Suzuki, *On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody*, Canad. J. Math. 29 (1977), 111–124.
- [51] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 304–307.
- [52] T. Tsuboi, private communication.
- [53] K. Vogtmann, *Automorphisms of free groups and Outer Space*, Geometricae Dedicata 94 (2002), 1–31.
- [54] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. 87 (1968), 56–88.
- [55] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of topological spaces, I*, Proc. Sympos. Pure Math. 32 , American Mathematical Society, 1978, 35–60.
- [56] H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. 37 (1936), 645–680.

ラプラシアンの特クトラムと離散群

尾國 新一*

京都大学大学院理学研究科

概要

この論説は、主に [7] の内容の紹介である。零スペクトラム予想の代数版を定式化し、有限表示群でそれを満たさない例がたくさんあることを示す。また、バウム・コンヌ予想との関係も考察する。そのために、有限表示群 G を別の有限表示群 G_{Ψ} に変換するある具体的なアルゴリズムを与える。

1 研究対象

この節では、はじめにいくつか定義などを準備し、その後、何を問題とするかを述べることにする。

定義 1.1.

G を離散群、 BG を G の分類空間、 EG を BG の普遍被覆空間とし、さらに、 $C_*(EG)$ を EG の CW 鎖複体、その境界写像を c_p と書く。このとき、 $C_*(EG)$ は右 $\mathbb{Z}G$ 加群であることに注意して、 $C_*^{(2)}(EG) := C_*(EG) \otimes_{\mathbb{Z}G} l^2(G)$ と定義する。

定義 1.2.

n を 0 以上の整数、又は ∞ とする。 n 以下の各次元のセルが有限個となるような CW 複体として、 BG を取れるとき、 G は \mathcal{F}_n に属するという。特に、 \mathcal{F}_∞ に属す群を有限型と呼ぶ。さらに BG として閉多様体でとれるとき、 $\mathcal{F}_{d,m}$ に属すると書くことにする。

例 1.3.

$$G \in \mathcal{F}_0 \Leftrightarrow G : \text{離散群}$$

$$G \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow G : \text{有限生成群}$$

$$G \in \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow G : \text{有限表示群}$$

*oguni@math.kyoto-u.ac.jp

G が有限型のときには、 $C_*(EG)$ が右 $\mathbb{Z}G$ 加群として有限生成で自由であるから、 $C_p(EG) \otimes_{\mathbb{Z}G} CG$ の基底であるセルたちを正規直交基底とする内積を入れることで、この完備化として $C_p^{(2)}(EG)$ をヒルベルト空間とみなせる。また、 c_p は $C_p^{(2)}(EG)$ 上に拡張しておき、同じ記号を使う。このとき、ラプラス作用素が $\Delta_p^c := c_p^* c_p + c_{p+1} c_{p+1}^*$ として定義される。さらに、このスペクトラル密度関数が群フォンノイマン代数とそのトレースを用いて、 $F_p^\Delta(G)(\lambda) := \text{tr}_{\mathcal{N}(G)} E_\lambda^{\Delta_p^c}$ と定義される。

ここで、どのような事をやりたいかはっきりさせるために、次のような形で問題を述べておこう。

問題 1.4.

G が有限型のとき、 $F_p^\Delta(G)(\lambda)$ は $\lambda = 0$ の近傍でどのような‘ふるまい’をするか？また、そこから G のどのような性質を読み取れるか？

例 1.5.

$F_p^\Delta(G)(0)$ は G の L^2 -ベッチ数に他ならず、測度同値のもとで比例不変であることが知られている。また、その交代和は BG のオイラー数である。しかし、これらは $\lambda = 0$ での値しか使っていない。一方で、 $\lambda = 0$ の近傍を、真に用いて定義される量としてノビコフシュービン不変量などがあるが、計算が難しいこともあって研究が進んでいるとはいえない。しかし、0次に関してはよくわかっており、高次のところではどうなっているか気になるころではあるがここでは述べない。[4],[8]を参照せよ。

ここでは、次のような問題を中心に考えたい。

問題 1.6.

G が有限型のとき、すべての $p \geq 0$ で $F_p^\Delta(G)(\lambda)$ が $\lambda = 0$ の近傍において0となることはあるか？

これは、グロモフによる零スペクトラム予想の位相版というべきもので、次の節で説明したい。

2 零スペクトラム予想について

もともとのグロモフによる零スペクトラム予想はつぎのようなものである。

予想 2.1.

高次ホモトピー群が消えている閉多様体 M の普遍被覆多様体に、 $\pi_1(M)$ 不変な内積を入れたとき、その L^2 -微分形式の空間に作用するラプラシアンは、スペクトラムに0を持つ。

これはかなり広いクラスで成り立つことが知られているが、[4]に詳しい解説がなされているのでここでは述べない。

さて、零スペクトラム予想が位相版、代数版へと自然に一般化されることが次の補題([4, p.438])によりわかる。

補題 2.2.

(1),(2)は $G \in \mathcal{F}_{clm}$ について考えると同値で, (2),(3)は $G \in \mathcal{F}_\infty$ について考えると同値.

(1) 閉多様体 BG の普遍被覆多様体 EG に, G 不変な内積を入れたとき, その L^2 -微分形式の空間に作用するラプラシアンは, スペクトラムに 0 を持たない.

(2) すべての $p \geq 0$ で $F_p^\Delta(G)(\lambda)$ が $\lambda = 0$ の近傍において 0 となる.

(3) すべての $p \geq 0$ で $H_p(G; \mathcal{N}(G)) = 0$ が成り立つ.

ここで $\mathcal{N}(G)$ は G の群フォンノイマン代数である.

n を 0 以上の整数, 又は ∞ , 又は clm とするとき, 次を \mathcal{F}_n に関する代数版零スペクトラム予想と呼ぼう.

予想 2.3.

G が \mathcal{F}_n に属するとき, ある $p \geq 0$ が存在して, $H_p(G; \mathcal{N}(G)) \neq 0$ が成り立つ.

つまり, \mathcal{F}_{clm} に関する代数版零スペクトラム予想は普通の意味の零スペクトラム予想のことで, \mathcal{F}_∞ に関する代数版零スペクトラム予想が位相版零スペクトラム予想のことである.

今, 代数版零スペクトラム予想として形式的に一般化されたものを述べたわけだが, これは予想と呼ぶのにふさわしいものなのだろうか? わたしは, そうは思わない. 実際, \mathcal{F}_0 の場合には反例がたくさんあり, また, \mathcal{F}_1 の場合の反例も簡単に与えることができる. この論説では, \mathcal{F}_2 の場合の反例を与えることが目標である. 私は位相版零スペクトラム予想にも反例があるだろうと思っているが, どうやればいいのか今のところわからない.

ここでバウム・コンヌ予想との関係を書いておこう. バウム・コンヌ予想に関しては [6] を見よ.

定理 2.4.

$G \in \mathcal{F}_{clm}$ がバウム・コンヌ予想を満たすとき, 普通の意味の零スペクトラム予想も満たす.

当然, 次のような問題を考えるべきであろう.

問題 2.5.

$G \in \mathcal{F}_n$ がバウム・コンヌ予想を満たすとき, 代数版零スペクトラム予想も満たすか?

これに関しても, \mathcal{F}_2 の場合には成り立たないことを示す.

3 アルゴリズム Ψ の構成

記号として, $[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh, g^h := h^{-1}gh$ ($g, h \in G$) を使う.

今から

$$\Psi : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0; G \mapsto G_\Psi$$

の構成を3ステップで行う.

アルゴリズム Ψ の構成.

$G^{(k)}$ ($k \in \mathbb{Z}$) を G の無限個のコピーとし, $G^{(0)}$ と G は同一視しておく. まず

$$G_0 := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} G^{(k)}, H_0 := \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} G^{(2l)} \oplus G^{(2l+1)}, K_0 := \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} G^{(3l)} \oplus G^{(3l+1)}$$

とおく. 次に $G_1 := G_0 \rtimes \mathbb{Z}$ を $G_0 = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} G^{(k)}$ の

$$G_0 \xrightarrow{\sim} G_0; g^{(k)} \mapsto g^{(k+1)}.$$

による HNN 拡大, $H_1 := H_0 \rtimes \mathbb{Z}$ を $H_0 = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} G^{(2l)} \oplus G^{(2l+1)}$ の

$$H_0 \xrightarrow{\sim} H_0; g^{(k)} \mapsto g^{(k+2)}.$$

による HNN 拡大, さらに, $K_1 := K_0 \rtimes \mathbb{Z}$ を $K_0 = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} G^{(3l)} \oplus G^{(3l+1)}$ の

$$K_0 \xrightarrow{\sim} K_0; g^{(k)} \mapsto g^{(k+3)}.$$

による HNN 拡大とする. このとき次のように書ける.

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle G, a \mid [G, G^{a^k}] (0 \neq k \in \mathbb{Z}) \rangle, \\ H_1 &= \left\langle G^{(0)}, G^{(1)}, b \left| \begin{array}{l} [G^{(0)}, (G^{(1)})^{b^k}] (k \in \mathbb{Z}), \\ [G^{(0)}, (G^{(0)})^{b^k}], [G^{(1)}, (G^{(1)})^{b^k}] (0 \neq k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \right\rangle, \\ K_1 &= \left\langle G^{(0)}, G^{(1)}, c \left| \begin{array}{l} [G^{(0)}, (G^{(1)})^{c^k}] (k \in \mathbb{Z}), \\ [G^{(0)}, (G^{(0)})^{c^k}], [G^{(1)}, (G^{(1)})^{c^k}] (0 \neq k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \right\rangle. \end{aligned}$$

ここで, H_1 と K_1 は

$$H_1 \hookrightarrow G_1; g^{(0)}, g^{(1)}, b \mapsto g, g^a, a^2,$$

$$K_1 \hookrightarrow G_1; g^{(0)}, g^{(1)}, c \mapsto g, g^a, a^3.$$

によって, G_1 の部分群である. 最後に

定義 3.1.

G_Ψ を G_1 の

$$H_1 \xrightarrow{\sim} K_1; g^{(0)}, g^{(1)}, b \mapsto g^{(0)}, g^{(1)}, c.$$

による HNN 拡大とする.

これは次のように書ける.

$$G_{\Psi} = \left\langle G, a, t \left| \begin{array}{l} [G, G^{a^k}] (0 \neq k \in \mathbb{Z}), \\ g^t = g, (g^a)^t = g^a (g \in G), (a^2)^t = a^3 \end{array} \right. \right\rangle.$$

□

主張 3.2.

$$g^t = g, (g^a)^t = g^a (g \in G), (a^2)^t = a^3, 1 = [G, G^a],$$

から

$$1 = [G, G^{a^k}] (0 \neq k \in \mathbb{Z})$$

は従う.

Proof.

$$1 = [G, G^a]^{ata^{-1}} = [G^a, G^{a^2}]^{ta^{-1}} = [G^a, G^{a^3}]^{a^{-1}} = [G, G^{a^2}]$$

と

$$1 = [G, G^{a^2}]^t = [G, G^{a^3}]$$

がわかる. $1 \leq k \leq 3N$ ($N \geq 1$) に対して $1 = [G, G^{a^k}]$ と仮定すると, $2N+1 \leq 3N$ だから,

$$1 = [G, G^{a^{2N+1}}]^t = [G, G^{a^{3N+1}}],$$

$$1 = [G, G^{a^{2N+1}}]^{ata^{-1}} = [G^a, G^{a^{2(N+1)}}]^{ta^{-1}} = [G^a, G^{a^{3(N+1)}}]^{a^{-1}} = [G, G^{a^{3N+2}}]$$

となる. このとき $2(N+1) \leq 3N+1$ より,

$$1 = [G, G^{a^{2(N+1)}}]^t = [G, G^{a^{3(N+1)}}].$$

である. 従って $1 \leq k \leq 3(N+1)$ ($N \geq 1$) に対して $1 = [G, G^{a^k}]$. よって $k \geq 1$ に対して $1 = [G, G^{a^k}]$. さらに $k \geq 1$ に対して

$$1 = ([G, G^{a^k}]^{a^{-k}})^{-1} = [G^{a^{-k}}, G]^{-1} = [G, G^{a^{-k}}]$$

であるから $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ に対して $1 = [G, G^{a^k}]$ となる. □

系 3.3.

$$G = \langle s_i (1 \leq i \leq m) \mid r_i (1 \leq i \leq n) \rangle$$

のとき,

$$G_{\Psi} = \left\langle s_i (1 \leq i \leq m), a, t \left| \begin{array}{l} r_i (1 \leq i \leq n), [s_i, s_j^a] (1 \leq i, j \leq m), \\ s_i^t = s_i, (s_i^a)^t = s_i^a (1 \leq i \leq m), (a^2)^t = a^3 \end{array} \right. \right\rangle.$$

となる.

特に G が有限表示群なら, G_{Ψ} もそうである.

もし G が階数 $m \geq 1$ の自由群なら,

$$H_1(G_\Psi; \mathbb{Z}) \cong G_\Psi / [G_\Psi, G_\Psi] = \langle s_i (1 \leq i \leq m), t \rangle \cong \mathbb{Z}^{m+1}.$$

であるから,

系 3.4.

Ψ は自由群全体上では単射である.

ここで出て来た群を列挙しておこう.

$$\begin{aligned} G &= \langle s_i (1 \leq i \leq m) \mid r_i (1 \leq i \leq n) \rangle, \\ G_0 &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} G^{(k)} \\ &= \left\langle s_i^{(k)} (1 \leq i \leq m, k \in \mathbb{Z}) \left| \begin{array}{l} r_i^{(k)} (1 \leq i \leq n, k \in \mathbb{Z}), \\ [s_i^{(k)}, s_j^{(l)}] (1 \leq i, j \leq m, k \neq l \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \right\rangle, \\ H_0 &= \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} G^{(2l)} \oplus G^{(2l+1)} = G_0, \\ K_0 &= \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} G^{(3l)} \oplus G^{(3l+1)}, \\ G_1 &= G_0 \rtimes \mathbb{Z} \\ &= \langle s_i (1 \leq i \leq m), a \mid r_i (1 \leq i \leq n), [s_i, s_j^{a^k}] (1 \leq i, j \leq m, 0 \neq k \in \mathbb{Z}) \rangle, \\ H_1 &= H_0 \rtimes \mathbb{Z} \\ &= \left\langle s_i^{(0)}, s_i^{(1)} (1 \leq i \leq m), b \left| \begin{array}{l} r_i^{(0)}, r_i^{(1)} (1 \leq i \leq n), [s_i^{(0)}, (s_j^{(1)})^{b^k}] (1 \leq i, j \leq m, k \in \mathbb{Z}), \\ [s_i^{(0)}, (s_j^{(0)})^{b^k}], [s_i^{(1)}, (s_j^{(1)})^{b^k}] (1 \leq i, j \leq m, 0 \neq k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \right\rangle, \\ K_1 &= K_0 \rtimes \mathbb{Z} \\ &= \left\langle s_i^{(0)}, s_i^{(1)} (1 \leq i \leq m), c \left| \begin{array}{l} r_i^{(0)}, r_i^{(1)} (1 \leq i \leq n), [s_i^{(0)}, (s_j^{(1)})^{c^k}] (1 \leq i, j \leq m, k \in \mathbb{Z}), \\ [s_i^{(0)}, (s_j^{(0)})^{c^k}], [s_i^{(1)}, (s_j^{(1)})^{c^k}] (1 \leq i, j \leq m, 0 \neq k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right. \right\rangle, \\ G_\Psi &= \left\langle s_i (1 \leq i \leq m), a, t \left| \begin{array}{l} r_i (1 \leq i \leq n), [s_i, s_j^a] (1 \leq i, j \leq m), \\ s_i^t = s_i, (s_i^a)^t = s_i^a (1 \leq i \leq m), (a^2)^t = a^3 \end{array} \right. \right\rangle. \end{aligned}$$

命題 3.5.

G_Ψ がねじれ元をもたないことと G がねじれ元をもたないことは同値である.

Proof. G_Ψ は G_1 の HNN 拡大で, G_1 は G_0 の HNN 拡大である. HNN 拡大がねじれ元をもたないという性質を保つことからよい. ([5, p.185]). \square

命題 3.6.

G_Ψ のコホモロジー次元が無限であることと G が自明でないことは同値.

Proof. G , あるいは同じ事だが G_{Ψ} がねじれ元を持つときには共にコホモロジー次元が無限となるから良い. そうでないときを考える. もし G がねじれ元を持たず, 自明でないときには, $G \supset \mathbb{Z}$ である. 従って, $G_{\Psi} \supset \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ だから G_{Ψ} のコホモロジー次元が無限である. 一方 G が自明なら $G_{\Psi} = \langle a, t \mid (a^2)^t = a^3 \rangle$ であるから G_{Ψ} はねじれ元を持たない 1 パラメーター群である. よって G_{Ψ} のコホモロジー次元は 2. \square

4 代数版零スペクトラム予想の反例

有限表示群に対する代数版零スペクトラム予想の反例を与えよう.

定義 4.1.

d を非負整数, または ∞ とする. 任意の $p \leq d$ に対して $H_p(G; \mathcal{N}(G)) = 0$ を満たす群全体を \mathcal{Z}_d と書く.

補題 4.2.

d, e を非負整数, または ∞ とする. このとき

(1) G を部分群 $G_i \subset G$ による帰納極限 $\bigcup_{i \in I} G_i$ とする. 任意の $i \in I$ に対して $G_i \in \mathcal{Z}_d$

とすると, $G \in \mathcal{Z}_d$ となる.

(3) $G \in \mathcal{Z}_d$ かつ $H \in \mathcal{Z}_e$ なら $G \times H \in \mathcal{Z}_{d+e+1}$.

(4) \mathcal{Z}_0 はアメナブルでない群の全体である.

(6) $G = H *_A = \langle H, t \mid \theta(a) = a^t \rangle$ を考える. ただし, $A \subset H, \theta: A \rightarrow H$ である. $H \in \mathcal{Z}_d$ と $A \in \mathcal{Z}_{d-1}$ なら $G \in \mathcal{Z}_d$ である.

証明は [4, p.448], [7] を見よ.

定理 4.3.

G がアメナブルでない群のとき, G_{Ψ} は $H_*(G_{\Psi}; \mathcal{N}(G_{\Psi})) = 0$ を満たす.

特に G がアメナブルでない有限表示群なら, G_{Ψ} は \mathcal{F}_2 に関する代数版零スペクトラム予想を満たさない.

これは上の補題より従う.

定理 4.4.

G がハーゲラップの性質を持つなら, G_{Ψ} はバウム・コンヌ予想を満たす.

Proof. G がハーゲラップの性質を持つなら, $\bigoplus_{-K \leq k \leq K} G^{(k)}$ もその性質を持つ. 従って

$\bigoplus_{-K \leq k \leq K} G^{(k)}$ はバウム・コンヌ予想を満たす ([6, p.43]). G_0 と H_0 はすべての $K \in \mathbb{Z}$ に

関する $\bigoplus_{-K \leq k \leq K} G^{(k)}$ の帰納極限だから, やはりバウム・コンヌ予想を満たす ([6, p.38]).

G_1 と H_1 はそれぞれ G_0 と H_0 の HNN 拡大だからバウム・コンヌ予想を満たす ([6,

p.40]). さらに G_Ψ は G_1 の H_1 上での HNN 拡大だからバウム・コンヌ予想を満たす ([6, p.40]). \square

従って, たとえば階数 2 の自由群から得られる G_Ψ を考えることで次が分かる.

系 4.5.

バウム・コンヌ予想は \mathcal{F}_2 に関する代数版零スペクトラム予想を誘導しない.

今, \mathcal{F}_2 に関する代数版零スペクトラム予想の反例は手にしたわけだが, G_Ψ で普通の意味の零スペクトラム予想を得ることはできないのだろうかと考えてみると, それは不可能であることが直ちにわかる. 実際, G が自明でない群のときには, G_Ψ のコホモロジー次元が無限になってしまうし, G が自明群のときには, G_Ψ がバウム・コンヌ予想を満たしている. では, \mathcal{F}_3 に関する代数版零スペクトラム予想ならどうかと考えてみると, これもうまくいきそうにない. 例えば, 自由群から得られる G_Ψ の群ホモロジーを計算してみると次のようになるからである. 証明はホモロジーの良い演習である ([7]).

命題 4.6.

G を階数 $m \geq 1$ の自由群とするとき, G_Ψ は次を満たす.

$$\begin{aligned} H_p(G_\Psi; \mathbb{Z}) & \text{ は 無限階数 } (\forall p \geq 3), \\ H_2(G_\Psi; \mathbb{Z}) & \cong \mathbb{Z}^{2m+m^2}, \\ H_1(G_\Psi; \mathbb{Z}) & \cong \mathbb{Z}^{m+1}, \\ H_0(G_\Psi; \mathbb{Z}) & \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

特に G_Ψ 有限表示だが \mathcal{F}_3 には属さない.

5 問題

最後にこれからやるべきであろう問題をまとめて終わることにする.

問題 5.1.

n を 0 以上の整数, 又は ∞ とするとき, \mathcal{F}_n に関する代数版零スペクトラム予想の反例を与えよ.

この問題は $n = clm$ でももちろん意味があり, 最も重要だろうが, 最も難しいだろう.

問題 5.2.

n を 0 以上の整数, 又は ∞ とするとき, バウム・コンヌ予想は \mathcal{F}_n に関する代数版零スペクトラム予想を誘導しないことを示せ.

これは上の問題と同時に解かれるべき問題である思う.

参考文献

- [1] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate texts in Mathematics 87, Springer 1982
- [2] K. S. Brown, Finiteness properties of groups, in: *Journal of Pure and Applied Algebra* 44, 45-75 North-Holland, 1985
- [3] M. Gromov, Asymptotic invariants of infinite groups, in: *Geometric Group Theory* (G. Niblo and M. Roller, eds), *London Math Soc. Lecture Note Ser* 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993
- [4] W. Lück, *L^2 -Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* 44, Springer 2002
- [5] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* 89, Springer 1977
- [6] G. Mislin and A. Valette, *Proper Group Actions and the Baum-Connes conjecture*, *Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona*, Birkhäuser Verlag Basel·Boston·Berlin, 2003
- [7] S. Oguni, The zero-in-the-spectrum conjecture and finitely presented groups. Preprint, 2004.<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/preprint/2004/oguni19.pdf>
- [8] S. Oguni, The secondary Novikov-Shubin invariants of groups and quasi-isometry. Preprint, 2005.<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/preprint/2005/5oguni.pdf>

HEEGAARD SPLITTINGS AND KNOT INVARIANTS

松田 浩 (広島大学 大学院 理学研究科)

本稿では3次元球面 S^3 内の結び目 K の不変量, 特にコンパクト3次元多様体である結び目補空間 $C(K) = \mathcal{cl}(S^3 - N(K))$ の Heegaard 分解を用いて定義される K の不変量を紹介します. Heegaard 分解とは多様体を2つの因子に分解する方法の1つです. §1 では3次元多様体 Y の Heegaard 分解を, §2 では $C(K)$ の3種類の Heegaard 分解を定義します. §3 では Ozsváth 氏と Szabó 氏が定義した閉3次元多様体 Y の Heegaard Floer homology [20], Y 内の結び目 K の knot Floer homology [21] と呼ばれる不変量を定義します. これらの不変量は3次元多様体論や結び目理論に 응용があり, 例えば「taut foliation を許容しない閉3次元多様体がたくさん存在する」, 「 S^3 内の non-trivial な結び目に沿った non-trivial な Dehn surgery によって S^3 や $\mathbb{R}P^3$ は得られない」[22], 「交点数が9以下の全ての結び目について結び目解消数を決定する」[19] など多くの革命的な定理を示すのに役立っています. §4 では Heegaard 分解の一種である $C(K)$ のハンドル分解から構成する結び目 K の不変量 [5] を定義します. この不変量は結び目理論において最古の不変量の1つである Alexander 多項式 [1] に新しい視点からの解釈を与えています.

1. HEEGAARD SPLITTINGS

全ての閉有向3次元多様体 Y を構成, 表示できる方法として Heegaard 分解, S^3 内の絡み目に沿った Dehn surgery (c.f. [12]), S^3 内の絡み目に沿って分岐した3重分岐被覆 (c.f. [24]) の3つの方法がすぐに思い浮かびます. 本稿では Heegaard 分解による方法を取り上げます.

1.1. 閉3次元多様体の Heegaard 分解

B^3 を3次元球体とします. ∂B^3 上に互いに交わらない disc D_1, \dots, D_{2g} を選び, D_{2i-1}, D_{2i} ($i = 1, \dots, g$) に沿って1-handle を attach して得られる向き付け可能なものを種数 g の handlebody といいます. 閉有向3次元多様体 Y の種数 g の Heegaard 分解とは $Y = V_1 \cup V_2$ となるように Y を2つの種数 g の handlebody $V_1, V_2 (= -V_1)$ に分解することです. このとき $\partial V_1 = \partial V_2 = \Sigma$ は種数 g の有向閉曲面であり Heegaard 曲面と呼ばれます.

Theorem 1.1. [9] 全ての閉有向3次元多様体は Heegaard 分解を許容する.

S^3 の種数1の標準的な Heegaard 分解を $S^3 = U_1 \cup U_2$ とすると, $Y = V_1 \cup V_2$ と $S^3 = U_1 \cup U_2$ から $Y \# S^3 \cong Y$ の種数 $g+1$ の Heegaard 分解が得られます. このように

Y の種数 g の Heegaard 分解から $Y \# S^3 \cong Y$ の種数 $g + 1$ の Heegaard 分解を得る操作を *stabilization* といいます。

Theorem 1.2. [27], [28] Y の Heegaard 分解が任意に 2 つ与えられたとき それらに *stabilization* を有限回 施すと Y 内で互いに isotopic な Heegaard 曲面が得られる, つまり同値な Heegaard 分解が得られる。

Heegaard 曲面上に V_1 と V_2 それぞれ g 個の 1-handle の cocore disc (meridian disc ともいいます) の境界を同時に描いたものを Heegaard 図式 といいます。Heegaard 曲面と Heegaard 図式が与えられると 元の多様体と同相なものを構成することができます。Heegaard 図式の情報から Heegaard 図式と同値類の不変量 $I(Y; V_1, V_2)$ を構成し, $I(Y; V_1, V_2)$ が *stabilization* によって不変であることが示せると, $I(Y; V_1, V_2)$ は Heegaard 分解 $(Y; V_1, V_2)$ に依らない Y の不変量 $I(Y)$ であることがわかります。このような考えに基づいて構成された不変量として [20] などがあります。

1.2. コンパクト 3 次元多様体の Heegaard 分解

次に境界があってもよいコンパクト有向 3 次元多様体の Heegaard 分解を定義します。 $\partial_- W$ をコンパクト曲面とします。 $\partial_- W \times [0, 1]$ から, $\partial_- W \times \{1\}$ 上の互いに交わらない disc に沿っていくつかの 1-handle を attach して得られる向き付け可能なものを compression body といい W と書くことにします。本節では $\partial_- W$ は閉曲面と仮定します。($\partial_- W$ が境界のあるコンパクト曲面の場合については §2.3 を参照してください。) $\partial_- W \times \{1\}$ から得られる曲面を $\partial_+ W$ と書くことにすると $\partial_+ W = \partial W - \partial_- W$ です。handlebody は $\partial_- W = \emptyset$ を満たす compression body であるとみなすことにします。

W_1, W_2 を compression body とし, $\partial_+ W_1$ と $\partial_+ W_2$ は同相であると仮定します。コンパクト有向 3 次元多様体 Y が $Y = W_1 \cup W_2$ と 2 つの compression body に分解され $\partial_- W_1 \cup \partial_- W_2$ が Y の境界成分 $\partial Y = \partial_1 Y \cup \partial_2 Y$ と対応しているとき この分解を (本稿では便宜的に) Y または $(Y; \partial_1 Y, \partial_2 Y)$ の 第 2 種 Heegaard 分解 と呼びます。(§1.1 で定義した Heegaard 分解を本稿では便宜的に Y の 第 1 種 Heegaard 分解 と呼ぶことにします。)

1.3. Heegaard 分解と Morse 関数

$Y = W_1 \cup W_2$ を Y の第 1 種または第 2 種 Heegaard 分解とします。この分解から次の条件を満たす self-indexing Morse 関数 $f: Y \rightarrow [0, 3] \subset \mathbb{R}$ が構成されます [17];

- (a) $f^{-1}([0, \frac{3}{2}]) = W_1, f^{-1}([\frac{3}{2}, 3]) = W_2$ である,
- (b) f の任意の index i ($i = 1, 2$) の critical point p に対し $f(p) = i$ である,
- (c) $\partial_1 Y \neq \emptyset$ (resp. $\partial_2 Y \neq \emptyset$) であれば $f(\partial_1 Y) = 0$ (resp. $f(\partial_2 Y) = 3$) である,
- (d) $\partial_1 Y = \emptyset$ (resp. $\partial_2 Y = \emptyset$) であれば f の index 0 (resp. index 3) の critical point p (resp. q) に対し $f(p) = 0$ (resp. $f(q) = 3$) である。

2. HEEGAARD SPLITTINGS OF KNOT COMPLEMENTS

本節では結び目補空間 $C(K) = cl(S^3 - N(K))$ の3種類の Heegaard 分解を定義します. 結び目補空間 $C(K)$ の同相類と結び目 K の ambient isotopy 類との対応 [8] から, $C(K)$ の不変量は K の不変量を定めます. 成分数が2以上の絡み目の場合の対応については [7]などを参照してください. K の不変量を構成する方法として他に K の closed braid 表示を用いる方法や K の S^2 上の diagram を用いる方法 (c.f. [10], [11]) などが知られています.

コンパクト3次元多様体 $C(K)$ の Heegaard 分解を考えると「第1種 Heegaard 曲面 Σ と K の位置」に着目すると $K \cap \Sigma = \emptyset$, $K \cap \Sigma$, $K \subset \Sigma$ に応じて以下の3種類の分解が考えられます.

2.1. トンネル分解 ($K \cap \Sigma = \emptyset$)

W は ∂W が1つの torus から成る compression body, V は種数 g の handlebody とします. $\partial W = \partial N(K)$ を満たす第2種 Heegaard 分解 $C(K) = V \cup W$ は トンネル分解 [2] と呼ばれ, S^3 内の任意の結び目 K に対し トンネル分解できる整数 $g \geq 1$ が存在します. $W' = W \cup N(K)$ とすると $S^3 = V \cup W'$ は S^3 の第1種 Heegaard 分解を与えていて, K は第1種 Heegaard 曲面 $\partial V = \partial W' = \Sigma$ と disjoint であること, $K \cap \Sigma = \emptyset$, を注意しておきます. $C(K)$ のトンネル分解を用いて構成される K の不変量として [13], [29], [21] などがあります.

2.2. (g, b) -分解 ($K \cap \Sigma$)

V を種数 g の handlebody とし t^i ($i = 1, \dots, b$) を V 内に proper に埋め込まれた arc とします. 次の3条件を満たす b 枚の埋め込まれた disc C^1, \dots, C^b が V 内に取れるとき, b 本の arc t^1, \dots, t^b は V 内で trivial であるといえます;

- (i) $C^i \cap t^i = t^i \subset \partial C^i$ である,
- (ii) $i \neq j$ ならば $C^i \cap C^j = \emptyset$ である,
- (iii) $C^i \cap \partial V = cl(\partial C^i - t^i)$ は $\partial t^i = t^i \cap \partial V$ の2点をつなぐ ∂V 上の arc である.

V_j ($j = 1, 2$) を種数 g の handlebody とし t_j^i ($i = 1, \dots, b$) を V_j 内の trivial arc とします. S^3 内の任意の結び目 K に対し $(S^3, K) = (V_1, t_1^1 \cup \dots \cup t_1^b) \cup (V_2, t_2^1 \cup \dots \cup t_2^b)$ と分解できる整数 $g \geq 0$ と $b \geq 1$ が存在し, この分解は (g, b) -分解 [3] と呼ばれます. $(0, b)$ -分解は特に b -橋分解 と呼ばれることもあります. $S^3 = V_1 \cup V_2$ は S^3 の種数 g の第1種 Heegaard 分解を与えていて, K は第1種 Heegaard 曲面 $\partial V_1 = \partial V_2 = \Sigma$ と横断的に交わっていること, $K \cap \Sigma$, を注意しておきます. (g, b) -分解を用いて構成される K の不変量として [29] などがあります.

Remark 2.1. 種数1の Seifert 曲面を張り $(1, 1)$ -分解を許容する結び目の集合は3つの整数を使って分類することができます [16].

2.3. ハンドル分解 ($K \subset \Sigma$)

R を $\partial R \neq \emptyset$ である 種数 g の連結なコンパクト曲面とします. 本節では簡単のため $|\partial R| = 1$ とします. $R \times [0, 1]$ から $R \times \{1\}$ に N 個の 1-handle を attach して得られる compression body を W とします. $\partial_- W = R \times \{0\}$, $\partial_\nu W = \partial R \times [0, 1]$, $\partial_+ W = \text{cl}(\partial W - (\partial_- W \cup \partial_\nu W))$ と書くことにします.

S^3 内の任意の結び目 K に対し 次の 3 条件を満たすように $C(K)$ を 2 つの compression body $W_1, W_2 (= -W_1)$ に分解できる 整数 $g \geq 0$ と $N \geq 0$ が存在し, この分解は $C(K)$ の ハンドル分解 [4] と呼ばれます (本稿では便宜的に $C(K)$ の 第 3 種 Heegaard 分解 と呼びます);

- (i) $\partial_- W_1$ と $\partial_- W_2$ は恒等写像によってはり合わされている,
- (ii) $\partial_+ W_1$ と $\partial_+ W_2$ は向きを保つ同相写像によってはり合わされている,
- (iii) $\partial N(K) = \partial_\nu W_1 \cup \partial_\nu W_2$ である.

$\partial_- W_i, \partial_+ W_i$ ($i = 1, 2$) の像をそれぞれ R, S と書くことにします. この分解から S^3 の種数 $2g + N$ の第 1 種 Heegaard 分解 $S^3 = W'_1 \cup W'_2$ が得られ, K は第 1 種 Heegaard 曲面 $\partial W'_1 = \partial W'_2 = \Sigma$ 上に乗っている, $K \subset \Sigma$, ことを注意しておきます. $C(K)$ の第 3 種 Heegaard 分解を用いて定義される K の不変量の 1 つを §4 で紹介します.

$C(K) = W_1 \cup W_2$ を $C(K)$ の第 3 種 Heegaard 分解とします. この分解から次の条件を満たす写像 $f: C(K) \rightarrow S^1 = \{\exp(i\theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ が存在することがわかります. この写像 f は $H_1(C(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であることと対応しています.

- (a) $f^{-1}(\{\exp(i\theta) \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}) = W_1, f^{-1}(\{\exp(i\theta) \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi\}) = W_2,$
- (b) f の任意の index 1 (resp. index 2) の critical point p (resp. q) に対し, $f(p) = \exp(i\pi/2), f(q) = \exp(3i\pi/2)$ である,
- (c) $f(R) = \exp(0), f(S) = \exp(i\pi)$ である.

3. OZSVÁTH-SZABÓ THEORY

Ozsváth 氏と Szabó 氏は 閉有向 3 次元多様体 Y と Y 上の Spin^c -構造 \mathfrak{t} の対 (Y, \mathfrak{t}) に対し Heegaard Floer homology [20] と呼ばれる不変量 $\widehat{HF}(Y, \mathfrak{t})$ を Y の第 1 種 Heegaard 分解を用いて定義しました. その後, 閉有向 3 次元多様体 Y 内の null-homologous な結び目 K に対し $C(K; Y) = \text{cl}(Y - N(K))$ のトンネル分解から得られる Y の第 1 種 Heegaard 分解を用いて Y の Heegaard Floer chain を構成し, そこに K を使って filtration を入れることにより knot Floer homology [21] と呼ばれる K の不変量 $\widehat{HFK}(Y, K, \mathfrak{t})$ ($\mathfrak{t} \in \text{Spin}^c(Y(K; 0))$) を定義しました. Rasmussen 氏 [25] も同様の不変量を独立に定義しています. §3.1 では $H_1(Y; \mathbb{Q}) = 0$ の場合について Heegaard Floer homology を, §3.2 では $Y \cong S^3$ の場合について knot Floer homology を定義します.

3.1. Heegaard Floer homology

本節では閉3次元多様体 Y と Y 上の Spin^c -構造 t の対 (Y, t) の不変量 Heegaard Floer homology $\widehat{HF}(Y, t)$ が Y の第1種 Heegaard 分解を用いてどのように定義されるかを紹介します. ここでは簡単のため $H_1(Y; \mathbb{Q}) = 0$ と仮定します.

Y の種数 g の第1種 Heegaard 分解を $Y = V_\alpha \cup V_\beta$ とし Σ を Heegaard 曲面とします. V_α, V_β の meridian disc をそれぞれ $D_\alpha^1, \dots, D_\alpha^g; D_\beta^1, \dots, D_\beta^g$ とし, $\partial D_\alpha^i = \alpha_i, \partial D_\beta^j = \beta_j$, $\alpha = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_g, \beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_g$ とします. 1点 $z \in \Sigma - (\alpha \cup \beta)$ を選び $(\Sigma; \alpha, \beta, z)$ を点付き Heegaard 図式と呼びます. この分解に対応する self-indexing Morse 関数 f から D_α^i, D_β^j ($i, j = 1, \dots, g$) 上に f の index 1, 2 の critical point がそれぞれ1つずつ存在し, $V_\alpha - \bigcup_{i=1}^g D_\alpha^i, V_\beta - \bigcup_{j=1}^g D_\beta^j$ 内に f の index 0, 3 の critical point がそれぞれ1つずつ存在する gradient-like ベクトル場 \vec{v} を構成できます.

Σ の g 個の直積 $\Sigma^{\times g} = \Sigma \times \dots \times \Sigma$ を g 次対称群で割って得られる空間を $\text{Sym}^g(\Sigma) = \Sigma^{\times g}/\sim$ と書きます. Σ に複素構造を定めると $\text{Sym}^g(\Sigma)$ に自然に複素構造が定まり, $\mathbb{T}_\alpha = \alpha_1 \times \dots \times \alpha_g/\sim, \mathbb{T}_\beta = \beta_1 \times \dots \times \beta_g/\sim$ はそれぞれ $\text{Sym}^g(\Sigma)$ に埋め込まれた totally real 部分多様体になります.

まず $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ の代数的交点数を数えてみるとこれは $H_1(Y; \mathbb{Z})$ の位数に一致するので Y についての新しい情報は得られません. 次に $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ の交わりを Whitney disc を使わずに (はずせない度合を量ること) を考えてみます. この度合を量るもの1つとして, Lagrange 交叉の Floer 理論を使って定義される Heegaard Floer homology [20] が導入されました. 以下に $\widehat{HF}(Y, t)$ を求めるために必要な chain 群, boundary 写像を定義します.

$x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ に対応する Σ 上の相異なる g 個の点はそれぞれ $\alpha_i \cap \beta_j$ の交点の1つです. 1点 x を選ぶと f の index 1 と index 2 の critical point をつなぎ, x に対応する Σ 上の g 個の点を通る \vec{v} の g 本の flow-line γ_x が定まります. 2点 $x, y \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ を選ぶと $\gamma_x - \gamma_y \in H_1(Y; \mathbb{Z})$ が得られます. f の index 0 と index 3 の critical point をつなぎ, $z \in \Sigma - (\alpha \cup \beta)$ を通る \vec{v} の flow-line を γ_z とします. $\gamma_x \cup \gamma_z$ の集合と Y 上の Spin^c -構造の集合との間には ベクトル場のホモロジー類という概念を通して対応があることが知られています. この対応から写像 $s_z: \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \rightarrow \text{Spin}^c(Y)$ が構成されます. ここで $\text{Spin}^c(Y)$ は Y 上の Spin^c -構造の集合を表します.

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \partial\mathbb{D} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) \geq 0\} = e_1, \partial\mathbb{D} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) \leq 0\} = e_2$ とします. $\text{Sym}^g(\Sigma)$ に概複素構造を定め, $u(-i) = x, u(i) = y, u(e_1) \subset \mathbb{T}_\alpha, u(e_2) \subset \mathbb{T}_\beta$ を満たす擬正則写像 $u: \mathbb{D} \rightarrow \text{Sym}^g(\Sigma)$ の集合を $\pi_2(x, y)$ とします. $\pi_2(x, y) \neq \emptyset$ であれば $\gamma_x - \gamma_y = 0 \in H_1(Y; \mathbb{Z})$ を満たすので $s_z(x) = s_z(y)$ です.

$u \in \pi_2(x, y)$ の像 $u(\mathbb{D}) \subset \text{Sym}^g(\Sigma)$ と $\{z\} \times \text{Sym}^{g-1}(\Sigma) \subset \text{Sym}^g(\Sigma)$ との交わりを数えることにより $n_z: \pi_2(x, y) \rightarrow \mathbb{Z}$ という写像を得ます. φ を $\pi_2(x, y)$ のホモトピー類

の1つとし, $\mu(\varphi)$ を φ の Maslov 指数とします. $\varphi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ となる $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ の grading の差を $\text{gr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\varphi) - 2n_z(\varphi)$ と定めます.

これらを使って $\widehat{HF}(\alpha, \beta, t)$ ($t \in \text{Spin}^c(Y)$) を定義します. $\widehat{CF}(\alpha, \beta, t)$ を $s_z(\mathbf{x}) = t$ を満たす点 $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ の全体によって生成される自由 Abel 群とします. ホモトピー類 φ をあらかず擬正則写像の moduli 空間を $\mathcal{M}(\varphi)$ とし, $\mathcal{M}(\varphi)$ を \mathbb{R} -action ($i, -i$ と e_1, e_2 を保つ \mathbb{D} の正則自己同型) で割って得られる空間を $\widehat{\mathcal{M}}(\varphi)$ とします. $\mu(\varphi) = 1$ ならば $\widehat{\mathcal{M}}(\varphi)$ がコンパクト有向0次元多様体となるような $\text{Sym}^g(\Sigma)$ 上の概複素構造の摂動の族が存在することが知られています. ここで $c(\varphi)$ を次のように定義します: $\mu(\varphi) = 1$ ならば $c(\varphi)$ は $\widehat{\mathcal{M}}(\varphi)$ の点の個数を符号つきで数えたもの, $\mu(\varphi) \neq 1$ ならば $c(\varphi) = 0$ とします. $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ に対し $\widehat{\partial}\mathbf{x} = \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \\ s_z(\mathbf{y}) = t}} \sum_{\substack{\varphi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ n_z(\varphi) = 0}} c(\varphi) \cdot \mathbf{y}$ と定めることにより写

像 $\widehat{\partial}: \widehat{CF}(\alpha, \beta, t) \rightarrow \widehat{CF}(\alpha, \beta, t)$ を定義します. このとき $\widehat{\partial} \circ \widehat{\partial} = 0$ であることがわかり, $(\widehat{CF}(\alpha, \beta, t), \widehat{\partial})$ のホモロジーを $\widehat{HF}(\alpha, \beta, t)$ とします.

Theorem 3.1. [20] $\widehat{HF}(\alpha, \beta, t)$ は (Y, t) の不変量である, つまり点付き Heegaard 図式の選び方などに依らず定まる. これを $\widehat{HF}(Y, t)$ と書く.

Remark 3.2. この不変量 $\widehat{HF}(Y, t)$ と類似の構成により (Y, t) の不変量 $HF^\infty(Y, t)$, $HF^-(Y, t)$, $HF^+(Y, t)$, $HF_{\text{red}}(Y, t)$ が得られます. これらの不変量を使うと $b_2^+(X) > 1$ を満たす閉有向4次元多様体 X と X 上の Spin^c -構造 s の対 (X, s) の不変量 $\Phi_{X,s}: \mathbb{Z}[U] \rightarrow \mathbb{Z}$ も得られます. Y が lens 空間や Seifert fibred 空間の場合の Heegaard Floer homology の計算や X がシンプレクティック4次元多様体の場合の $\Phi_{X,s}$ の計算などについては [23] の参考文献を参照してください.

Remark 3.3. 閉4次元多様体 X と X 上の Spin^c -構造 s の対 (X, s) の不変量 $\Phi_{X,s}$ は Seiberg-Witten 方程式の解と一致すると予想され, 閉3次元多様体 Y と Y 上の Spin^c -構造 t の対 (Y, t) の不変量 Heegaard Floer homology は Seiberg-Witten Floer homology と一致すると予想されています. これらの予想については [14], [15]などを参照してください.

Remark 3.4. 有理ホモロジー3次元球面 Y が lens 空間と同じ Heegaard Floer homology をもつとき Y は L -空間と呼ばれます. 例えば $S^3(K; r)$ (S^3 内の結び目 K に沿って係数 $r \in \mathbb{Q}$ の Dehn surgery をして得られる閉有向3次元多様体) が lens 空間とすると任意の $s \in \mathbb{Q}$, $s \geq r$ について $S^3(K; s)$ は L -空間になります. また S^3 内の交代結び目に沿って分岐した2重分岐被覆空間も全て L -空間です. L -空間は「taut foliation を許容しない」という性質をもっています (c.f. [22], [14]).

3.2. Knot Floer homology

Ozsváth 氏と Szabó 氏は 閉有向 3 次元多様体 Y 内の null-homologous な結び目 K に対し knot Floer homology を定義しました. 本節では簡単のため $Y \cong S^3$ として knot Floer homology $\widehat{HFK}(S^3, K, i) = \widehat{HFK}(S^3, K, \mathfrak{t}_i)$ ($\mathfrak{t}_i \in \text{Spin}^c(S^3(K; 0))$) を定義します.

K のトンネル分解から得られる S^3 の種数 g の第 1 種 Heegaard 分解を $S^3 = V_\alpha \cup V_\beta$ ($K \subset V_\beta$) とします. このとき次の条件を満たす V_β の meridian disc D_m と annulus A_ℓ が V_β 内に取れます;

- (i) K は D_m に 1 点 p で transverse に交わる,
- (ii) ∂A_ℓ の 1 つの成分は K に一致する,
- (iii) ∂A_ℓ のもう 1 つの成分は ∂V_β 上の loop であり ∂D_m と 1 点 q で transverse に交わる,
- (iv) $D_m \cap A_\ell$ は p と q をつなぐ arc である.

交点 $K \cap D_m$ を止めたまま K を A_ℓ に沿って V_α に向かって isotope していくと (S^3, K) の $(g, 1)$ -分解が得られます. この分解において $K \cap \partial V_\beta$ の 2 点 w, z は $N(\partial D_m; \partial V_\beta) \cap A_\ell$ 上にあります. このように選んだ w, z も込めた Heegaard 図式 $(\Sigma; \alpha, \beta, w, z)$ を 2 点付き Heegaard 図式 といいます. γ_z, γ_w を §3.1 と同様に定義すると K は $\gamma_z \cup \gamma_w$ に isotopic であるとみなせ, S^3 内の K の位置は Heegaard 曲面 Σ 上の 2 点 w, z の位置と対応していることがわかります.

まず 点付き Heegaard 図式 $(\Sigma; \alpha, \beta, w)$ を使って $\widehat{CF}(\alpha, \beta, t)$ を構成します. (t は $\text{Spin}^c(S^3)$ の唯一の元です.) 次に K を使って $\widehat{CF}(\alpha, \beta, t)$ に filtration を入れることを考えます. ここでは K そのものを使う代わりに Heegaard 曲面 Σ 上の 2 点 w, z を使います. 次の 2 条件を満たす写像 $\mathcal{F}: \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在し, さらにこのような \mathcal{F} は一意に定まることが知られています;

- (a) $x, y \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$, $\varphi \in \pi_2(x, y)$ に対し $\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y) = n_z(\varphi) - n_w(\varphi)$ である,
- (b) $\mathcal{F}(x) = i$ となる点 x の個数と $\mathcal{F}(y) = -i$ となる点 y の個数の偶奇が一致する.

このとき $(\widehat{CF}(\alpha, \beta, t), \widehat{\partial})$ の $\widehat{\partial}_x$ の表示に y が 0 でない係数をもって表れたとすると, $n_w(\varphi) = 0$ となる $\varphi \in \pi_2(x, y)$ は $n_z(\varphi) \geq 0$ を満たすので $\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y) \geq 0$ であることがわかります. そこで $\mathcal{F}(x) \leq i$ を満たす点 $x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ の全体によって生成される $\widehat{CF}(\alpha, \beta, t)$ の subcomplex を $\mathcal{F}(K, i)$ とすると, \mathcal{F} を使って $\widehat{CF}(\alpha, \beta, t)$ に filtration を入れることができます; $\dots \subseteq \mathcal{F}(K, i) \subseteq \mathcal{F}(K, i+1) \subseteq \dots \subseteq \widehat{CF}(\alpha, \beta, t)$. (この filtration は Spin^c -構造 $\mathfrak{t}_i \in \text{Spin}^c(S^3(K; 0))$ を使って定義することもできます.) そこで $\mathcal{F}(K, i)/\mathcal{F}(K, i+1)$ のホモロジー $H_*(\mathcal{F}(K, i)/\mathcal{F}(K, i+1))$ を knot Floer homology $\widehat{HFK}(S^3, K, i)$ と定義します. $\widehat{HFK}(S^3, K, i)$ の各元には $\widehat{HF}(S^3, t) \cong \mathbb{Z}$ の生成元の grading を 0 と定めた $\widehat{CF}(\alpha, \beta, t)$ の grading を対応させ, grading が d である $\widehat{HFK}(S^3, K, i)$ の元全体を $\widehat{HFK}_d(S^3, K, i)$ と書きます. この grading は absolute grading とも呼ばれます.

Theorem 3.5. [21] $\widehat{HFK}_d(S^3, K, i)$ は K の不変量である.

講演では K が $(-2, 3, 7)$ -pretzel 結び目のときを例にして, K が $(1, 1)$ -分解を許容するという事実を用いた $\widehat{HFK}_d(S^3, K, i)$ の計算 [6] を紹介します.

Remark 3.6. \mathcal{F} の定義から i が十分小さいとき $\mathcal{F}(K, i) = \emptyset$ であり, i が十分大きいとき $\mathcal{F}(K, i) = \widehat{CF}(\alpha, \beta, t)$ であることが分かります. $\tau(K) = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid H_*(\mathcal{F}(K, i)) \rightarrow \widehat{HF}(S^3, t) \text{ が non-trivial}\}$ と定義すると, $\tau(K)$ は K の不変量になり, K の 4 次元種数や結び目解消数の下からの評価を与えます (c.f. [23]).

Remark 3.7. K が fibred 結び目のとき (すなわち $C(K)$ が S^1 上の surface bundle のとき) $C(K)$ の第 3 種 Heegaard 分解から第 2 種 Heegaard 分解を構成し Heegaard 図式を調べると, $\widehat{HFK}(S^3, K, i)$ は K の genus $g(K)$ を決定する, $\max\{i \in \mathbb{Z} \mid \widehat{HFK}(S^3, K, i) \neq 0\} = g(K)$, ことがわかります. この関係は全ての結び目 K について成立します [22].

Remark 3.8. Knot Floer homology は Khovanov homology [11] と何らかの関係があると考えられています. この関係については [26] などを参照してください.

4. KNOT INVARIANT FROM HANDLE DECOMPOSITION

本節では $C(K)$ の第 3 種 Heegaard 分解 (ハンドル分解) を用いて結び目 K の不変量を構成する方法を 1 つ定義します. そして K が 5_2 という結び目のとき この不変量の計算を示します. 本節の内容は合田氏との共同研究 [5] です.

4.1. 不変量 $I(K)$

K を S^3 内の結び目とし R を K の 1 つの Seifert 曲面とします. $C(K)$ 内の曲面 $R \cap C(K)$ も R と書くことにします. R を $\partial_- W_i$ ($i = 1, 2$) (の像) として得られる $C(K)$ の第 3 種 Heegaard 分解を $C(K) = W_1 \cup W_2$ とし $\partial_+ W_i$ (の像) を S とします. $\partial_- W_1$ 上にシンプレクティック基底 \overline{a}_p^1 ($p = 1, \dots, 2g$) を向きを込めて選びます. これらは $C(K)$ 内の R 上の loop とみなすことができ, $\partial_- W_2$ 上の向きのついた loop とみなしたとき \overline{a}_p^2 と書くことにします. $\partial_+ W_i$ 上の loop a_p^i を $(\overline{a}_p^i \times [0, 1]) \cap \partial_+ W_i = a_p^i$ で定義します. このとき W_i を構成するときに attach した 1-handle h_q^i ($q = 1, \dots, N$) の attaching disc は a_p^i たちと disjoint にあると仮定できます. $\partial_+ W_i$ 上の loop m_q^i を 1-handle h_q^i の cocore disc の境界とします. $\partial_+ W_i$ 上の loop ℓ_q^i を, m_q^i と横断的にちょうど 1 回交わり $m_j^i \cap \ell_q^i = \emptyset$, $\ell_j^i \cap \ell_q^i = \emptyset$ ($j \neq q$), $a_p^i \cap \ell_q^i = \emptyset$ を満たすものとします. a_p^i, m_q^i, ℓ_q^i は $\partial_+ W_i$ 上の向き付けられた loop とします. このような m_q^i, ℓ_q^i の構成については [5] を参照してください. a_p^i, m_q^i, ℓ_q^i を S 上に描いたものを $C(K)$ の第 3 種 Heegaard 分解の Heegaard 図式と呼ぶことにします. $C(K)$ の Heegaard 図式から $\varphi: S \rightarrow S$ という写像が得られます. φ が $H_r(S; \mathbb{Z})$ ($r = 0, 1$) に誘導する写像を $\varphi_{r*}: H_r(S; \mathbb{Z}) \rightarrow H_r(S; \mathbb{Z})$ とします. 上で選んだ $\partial_+ W_1, \partial_+ W_2$ の基底を使って $\varphi_{1*}: H_1(S; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S; \mathbb{Z})$ を $a_p^2 = \varphi_{1*}(a_p^1), m_q^2 = \varphi_{1*}(m_q^1)$,

$\ell_q^2 = \varphi_{1*}(\ell_q^1)$ と定めると

$$(\varphi(a_1^1) \varphi(a_2^1) \cdots \varphi(a_{2g}^1) \varphi(m_1^1) \varphi(\ell_1^1) \cdots \varphi(m_N^1) \varphi(\ell_N^1))^T = \Phi_1 (a_1^1 a_2^1 \cdots a_{2g}^1 m_1^1 \ell_1^1 \cdots m_N^1 \ell_N^1)^T$$

から φ_{1*} を表す行列 Φ_1 を得ることが出来ます. そこで $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$(\varphi^k(a_1^1) \varphi^k(a_2^1) \cdots \varphi^k(a_{2g}^1) \varphi^k(m_1^1) \varphi^k(\ell_1^1) \cdots \varphi^k(m_N^1) \varphi^k(\ell_N^1))^T$$

$$= \Phi_1^k (a_1^1 a_2^1 \cdots a_{2g}^1 m_1^1 \ell_1^1 \cdots m_N^1 \ell_N^1)^T$$

と定義します. Φ_1 の (i, j) -成分を $f_{i,j}$, Φ_1^k の (i, j) -成分を $f_{i,j}^{(k)}$ と書くことにします.

まず $C(K)$ の第3種 Heegaard 分解に対応する写像 $f: C(K) \rightarrow S^1$ から構成される gradient-like ベクトル場 \vec{v} について closed orbit の本数を数えることを考えてみます. \vec{v} の closed orbit で S と k 回交わるものが1つあればそれは $\varphi^k: S \rightarrow S$ の不動点を1つ定めます. そこで φ^k の不動点の数を (ホモロジーの範囲で) 数えるために $\Lambda(\varphi^k) = \text{trace}(\Phi_0^k) - \text{trace}(\Phi_1^k) = 1 - \text{trace}(\Phi_1^k)$ とし, これらをまとめて数えるために Lefschetz zeta 関数を使って $\zeta(R, S)_\varphi = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda(\varphi^k) \cdot \frac{t^k}{k}\right)$ と定義します.

次に f の index 1 と index 2 の critical point をつなぐ \vec{v} の flow-line の本数を数えることを考えてみます. f の index 1 と index 2 の critical point をつなぎ, S と1回交わる \vec{v} の flow-line が1つあれば, それは m_i^1 と m_j^2 の交点の1つに対応します. $m_j^2 = \varphi_{1*}(m_j^1)$ と m_i^1 の代数的交点数は Φ_1 の $(2g+2i-1, 2g+2j)$ -成分 $f_{2g+2i-1, 2g+2j}$ に一致します. この類推として f の index 1 と index 2 の critical point をつなぎ, S と k 回交わる \vec{v} の flow-line の本数を (ホモロジーの範囲で) 数えることは, $\varphi_{1*}^k(m_j^1)$ と m_i^1 の代数的交点数を S 上で数えることに対応すると考えられます. この交点数は Φ_1^k の $(2g+2i-1, 2g+2j)$ -成分 $f_{2g+2i-1, 2g+2j}^{(k)}$ に一致します. これらをまとめて数えるために $h_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{2g+2i-1, 2g+2j}^{(k)} \cdot t^{k-1})$ とし, 行列 $H(t) = (h_{i,j}(t))_{i,j}$ を使って $\tau(R, S)_\varphi = \det(H(t))$ と定義します.

Theorem 4.1. [5] $I(R, S)_\varphi = \zeta(R, S)_\varphi \cdot \tau(R, S)_\varphi$ とする.

(1) $I(R, S)_\varphi$ は $t=0$ の周りで正の収束半径を持つ.

(2) $I(R, S)_\varphi$ は K の不変量である.

(3) $I(K) = I(R, S)_\varphi$ の収束半径内において $I(K) = \frac{\Delta(K)}{1-t}$ が成立する.

ここで $\Delta(K)$ は K の Alexander 多項式を表す.

4.2. $I(K)$ の計算例

本節では K が Figure 1 に示す 5_2 という結び目のとき 前節で定義した不変量 $I(K)$ の計算例を [5] から紹介します. 結び目 5_2 は Figure 1 に示すように種数1の Seifert 曲面を張ります. この Seifert 曲面を R とし $g=1, N=1$ であるような $C(5_2)$ の第3種 Heegaard 分解があります. この分解の1つの Heegaard 図式を Figure 1 に示します.

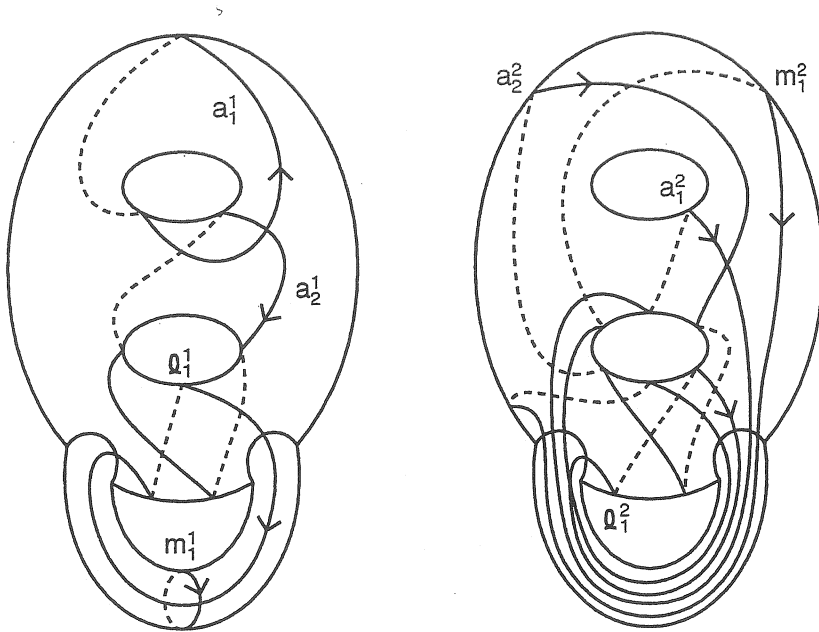
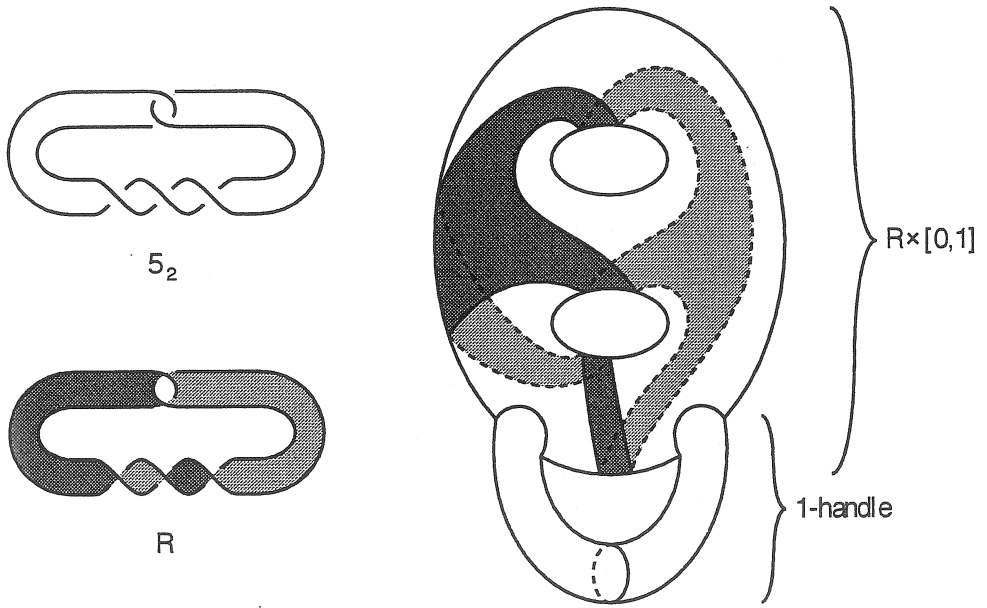


FIGURE 1

Figure 1 の Heegaard 図式から行列 Φ_1 を求めると $\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ です。

$$n \geq 0 \text{ のとき } \Phi_1^{6n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 6n+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_1^{6n+2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 6n+3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1^{6n+3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 6n+3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_1^{6n+4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 6n+3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1^{6n+5} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 6n+4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_1^{6n+6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6n+6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とわかります。定義から}$$

$$\zeta(R, S)_\varphi = \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1-3) \frac{t^{6n+1}}{6n+1} + (1-1) \frac{t^{6n+2}}{6n+2} + (1-0) \frac{t^{6n+3}}{6n+3} \right. \right. \\ \left. \left. + (1-1) \frac{t^{6n+4}}{6n+4} + (1-3) \frac{t^{6n+5}}{6n+5} + (1-4) \frac{t^{6n+6}}{6n+6} \right\} \right],$$

$$\tau(R, S)_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \{ (6n+2)t^{6n} + (6n+3)t^{6n+1} + (6n+3)t^{6n+2} \\ + (6n+3)t^{6n+3} + (6n+4)t^{6n+4} + (6n+6)t^{6n+5} \}$$

となります。 $t \in \mathbb{R}$ とすると $\zeta(R, S)_\varphi$ は $t=0$ の周りで正の収束半径をもち、この半径内に

$$\text{において } \zeta(R, S)_\varphi = \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{-t^{6n+1}}{6n+1} + \frac{t^{6n+2}}{6n+2} + \frac{-t^{6n+3}}{6n+3} + \frac{t^{6n+4}}{6n+4} + \frac{-t^{6n+5}}{6n+5} + \frac{t^{6n+6}}{6n+6} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1} + \frac{t^{6n+2}}{6n+2} + \frac{t^{6n+3}}{6n+3} + \frac{t^{6n+4}}{6n+4} + \frac{t^{6n+5}}{6n+5} + \frac{t^{6n+6}}{6n+6} \right) + \left(\frac{3t^{6n+3}}{6n+3} + \frac{-3t^{6n+6}}{6n+6} \right) \right\} \right]$$

$$= \exp \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i} \right) - \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i} \right) - \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-t^3)^j}{j} \right) \right] = \frac{1}{1+t} \cdot (1-t) \cdot (1+t^3) = (1-t+t^2) \cdot$$

$(1-t)$ となります。また $(1-t+t^2) \cdot (1-t)^2 \cdot \tau(R, S)_\varphi = 2-3t+2t^2$ であることから $\tau(R, S)_\varphi$

は $t=0$ の周りで正の収束半径をもつことがわかります。以上の結果を使って $I(5_2)$ を

$$\text{求めると, } I(5_2) = \zeta(R, S)_\varphi \cdot \tau(R, S)_\varphi = \{(1-t+t^2) \cdot (1-t)\} \cdot \left\{ \frac{2-3t+2t^2}{(1-t+t^2) \cdot (1-t)^2} \right\}$$

$$= \frac{2-3t+2t^2}{1-t} \text{ となり } I(5_2) = \frac{\Delta(5_2)}{1-t} \text{ が成り立つことを確認できます。}$$

謝辞

本稿を書くにあたり助言をいただいた東京農工大学の合田 洋 氏に感謝します。

REFERENCES

- [1] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928) 275–306
- [2] B. E. Clark, *The Heegaard genus of manifolds obtained by surgery on links and knots*, Internat. J. Math. Math. Sci. **3** (1980) 583–589
- [3] H. Doll, *A generalized bridge number for links in 3-manifolds*, Math. Ann. **294** (1992) 701–717
- [4] H. Goda, *Heegaard splitting for sutured manifolds and Murasugi sum*, Osaka J. Math. **29** (1992) 21–40
- [5] H. Goda, H. Matsuda, *Counting closed orbits and flow-lines via Heegaard splittings*, in preparation
- [6] H. Goda, H. Matsuda, T. Morifuji, *Knot Floer homology of $(1, 1)$ -knots*, to appear in Geom. Dedicata
- [7] C. McA. Gordon, *Links and their complements*, Topology and geometry: commemorating SISTAG, 71–82, Contemp. Math., **314**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002
- [8] C. McA. Gordon, J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **20** (1989) 83–87; *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 371–415
- [9] P. Heegaard, *Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhaeng*, Dissertation, Copenhagen, 1898; translation in *Sur l'“Analysis Situs”*, Bull. Soc. Math. France **44** (1916) 161–242
- [10] V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985) 103–111; *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. (2) **126** (1987) 335–388
- [11] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101** (2000) 359–426
- [12] R. C. Kirby, *A calculus for framed links in S^3* , Invent. Math. **45** (1978) 35–56
- [13] T. Kohno, *Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups. II, Estimating tunnel number of knots*, Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups (South Hadley, MA, 1992), 193–217, Contemp. Math., **175**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994
- [14] P. B. Kronheimer, T. S. Mrowka, P. S. Ozsváth, Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*, to appear in Ann. of Math.; also available at math.GT/0310164
- [15] Y.-J. Lee, *Heegaard splittings and Seiberg-Witten monopoles*, available at math.GT/0409536
- [16] H. Matsuda, *Genus one knots which admit $(1, 1)$ -decompositions*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002) 2155–2163
- [17] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1965
- [18] E. S. Munkholm, H. J. Munkholm, *Poul Heegaard, History of Topology, 925–946*, North-Holland, Amsterdam, 1999; also available at <http://www.imada.sdu.dk/~hjm/heegaard.html>
- [19] B. Owens, *Unknotting information from Heegaard Floer homology*, available at math.GT/0506485
- [20] P. S. Ozsváth, Z. Szabó, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. (2) **159** (2004) 1027–1158
- [21] P. S. Ozsváth, Z. Szabó, *Holomorphic disks and knot invariants*, Adv. Math. **186** (2004) 58–116
- [22] P. S. Ozsváth, Z. Szabó, *Holomorphic disks and genus bounds*, Geom. Topol. **8** (2004) 311–334
- [23] P. S. Ozsváth, Z. Szabó, *Heegaard diagrams and holomorphic disks*, Different faces of geometry, 301–348, Int. Math. Ser. (N.Y.), Kluwer/Plenum, New York, 2004
- [24] R. Piergallini, *Covering moves*, Trans. Amer. Math. Soc. **325** (1991) 903–920
- [25] J. A. Rasmussen *Floer homology and knot complements*, Ph.D. Thesis at Harvard University, 2003; also available at math.GT/0306378
- [26] J. A. Rasmussen, *Knot polynomials and knot homologies*, to appear in Proceedings of the Fields Institute/McMaster Conference on Geometry and Topology of Manifolds; also available at math.GT/0504045
- [27] K. Reidemeister, *Heegaarddiagramme und Invarianten von Menningfaltungen*, Hamburg Abh. **110** (1933) 109–118
- [28] J. Singer, *Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933) 88–111
- [29] Y. Yokota, *On quantum $SU(2)$ invariants and generalized bridge numbers of knots*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **117** (1995) 545–557

曲面のホモロジー同境全体が作る群の構造について

逆井 卓也 (東京大学大学院数理科学研究科)

1 はじめに

$\Sigma_{g,n}$ を種数 $g \geq 0$ の向き付けられた閉曲面から n 個の開円板を取り去った曲面とし, (M, i_+, i_-) を境界 ∂M のマーキング $i_+, i_- : \Sigma_{g,n} \hookrightarrow \partial M$ をもつ $\Sigma_{g,n}$ から $\Sigma_{g,n}$ への向き付けられたホモロジー同境とする. このようなマーキングつきホモロジー同境を $\Sigma_{g,n}$ 上のホモロジーシリンダーと呼ぶ¹. それらの微分同相類全体の集合 $\mathcal{C}_{g,n}$ には自然な方法でモノイドの構造が入る. ホモロジーシリンダーは葉廣和夫氏 [9] によって, クラスパー手術の理論の応用に非常に適した対象のひとつとして導入され, それをきっかけとして, $n = 0, 1$ のときを中心に, 閉 3 次元多様体の有限型不変量との関連と共に, 体系的な研究がなされてきた [7], [8], [13], [16].

ホモロジー 3 球面 (にマーキングをつけたもの) や n 本の弦の pure string link (純くみひもの一般化) の補空間はそれぞれ $\Sigma_{0,1}$, $\Sigma_{0,n+1}$ のホモロジーシリンダーとみることができる. また, 与えられた $\Sigma_{g,n}$ 上のホモロジーシリンダーに対し, マーキングを $\Sigma_{g,n}$ の写像類群の元を用いて変えることにより異なるホモロジーシリンダーができる. このように, ホモロジーシリンダーは, ホモロジー 3 球面, string link, 曲面の写像類群といった 3 次元多様体論において重要な役割を担っている対象を同時に考えることができるものであり, それ故, モノイド $\mathcal{C}_{g,n}$ をその構造をふまえた上で調べていくことは非常に有用であると思われる. その際に, 個々の対象で用いられていた研究手段が $\mathcal{C}_{g,n}$ においても適用可能となることが多く, いろいろな角度から $\mathcal{C}_{g,n}$ の研究を行っていくことができる.

以下, $n = 1$ とし, 扱う多様体はすべて smooth (または piecewise linear) であるとする. ホモロジーシリンダーの研究の 1 つの方法として, [7], [13] において導入されたホモロジーシリンダーのホモロジー同境群 $\mathcal{H}_{g,1}$ を考察するというものがある. これは, ホモロジー 3 球面のホモロジー同境群や string link の concordance 群を考えることにちょうど対応している. また, ホモロジーシリンダーを閉じるという操作により, $\mathcal{H}_{g,1}$ を調べることは閉 3 次元多様体をホモロジー同境を法として考えることも繋がっている. 本稿では, この群 $\mathcal{H}_{g,1}$ の構造について, その不変量や, 不変量たちの間の関係を中心として, これまでに知られている事柄を含め, 新たに得られたいくつかの結果について紹介する.

謝辞 この研究を行うにあたり, 有益な助言, 励ましを頂いた森田茂之先生, 河澄響矢先生, そして森田研究室, 河澄研究室の皆様へ深く感謝致します. また, この度の講演に関して, その機会を与えて下さったシンポジウムの主催者の皆様へ深く感謝致します.

2 ホモロジーシリンダーとそのホモロジー同境群

この節では, [9], [7], [13] に従って, ホモロジーシリンダーのなすモノイドや, それから得られる群についての定義を簡単にまとめる.

¹人によって呼び名や定義が少しずつ異なっている. 以降, ホモロジー同境のホモロジー同境群を考える都合上, 混乱を防ぐため, この呼び名を採用する.

種数 $g \geq 0$ の向き付けられた閉曲面から開円板を 1 つ取り去った曲面 $\Sigma_{g,1}$ に対し, $2g$ 個のループ $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ を下図のようにとる.

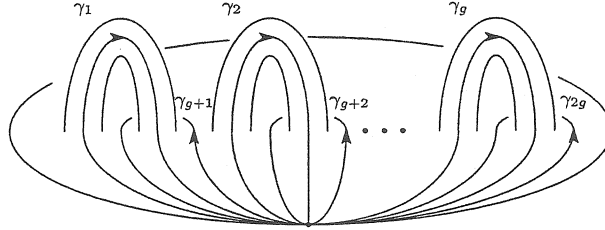


図 1

これらのループを円周 $2g$ 個からなるブーケ R_{2g} の埋め込みと思い, R_{2g} を 1-骨格の一部にもつ, 1 個の 0-セル, $2g+1$ 個の 1-セル, 1 個の 2-セルからなる $\Sigma_{g,1}$ の標準的なセル分割をとる. この分割を通して, $\Sigma_{g,1}$ の基本群 $\pi_1 \Sigma_{g,1}$ と階数 $2g$ の自由群 $F_{2g} = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{2g} \rangle$ の同型がひとつ固定される. この同型の下で, $\Sigma_{g,1}$ の境界を一周するループに対応する語 ζ は $\prod_{i=1}^g [\gamma_i, \gamma_{g+i}]$ で与えられる. $\Sigma_{g,1}$ 上のホモロジーシリンダー (以下, 単にホモロジーシリンダーと呼ぶ) とは, 向き付けられたコンパクトな 3 次元多様体 M と 2 つの埋め込み $i_+, i_- : (\Sigma_{g,1}, p) \rightarrow (M, p)$ の対 (M, i_+, i_-) であって,

1. i_+ は向きを保ち, i_- は向きを保たない,
2. $\partial M = i_+(\Sigma_{g,1}) \cup i_-(\Sigma_{g,1})$ かつ $i_+(\Sigma_{g,1}) \cap i_-(\Sigma_{g,1}) = i_+(\partial \Sigma_{g,1}) = i_-(\partial \Sigma_{g,1})$,
3. $i_+|_{\partial \Sigma_{g,1}} = i_-|_{\partial \Sigma_{g,1}}$,
4. $i_+, i_- : \Sigma_{g,1} \rightarrow M$ はホモロジーの同型を誘導する,

を満たすようなものである (これは境界をもつ多様体のホモロジー同境の定義にほかならない). ここで, p は $\Sigma_{g,1}$ の境界上にとった共通の基点である. 2 つのホモロジーシリンダー $M_1 = (M_1, i_+, i_-)$, $M_2 = (M_2, j_+, j_-)$ に対し,

$$M_1 \cdot M_2 := (M_1 \cup_{i_- \circ j_+^{-1}} M_2, i_+, j_-)$$

と定めることにより, ホモロジーシリンダーたちの向きを保つ微分同相類のなす集合 $\mathcal{C}_{g,1}$ には自然なモノイドの構造が入る. $\mathcal{C}_{g,1}$ の単位元は $1_{\mathcal{C}_{g,1}} := (\Sigma_{g,1} \times I, \text{id} \times 1, \text{id} \times 0)$ で与えられる.

例 2.1 写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の元 φ に対し, その代表元 (再び φ と書く) をとり,

$$M_\varphi := (\Sigma_{g,1} \times I, \text{id} \times 1, \varphi \times 0)$$

とすると, M_φ はホモロジーシリンダーとなる. この構成によって $\mathcal{M}_{g,1}$ から $\mathcal{C}_{g,1}$ へのモノイド準同型が得られる. この準同型は単射となっている.

例 2.2 ホモロジー 3 球面 M に対し, 連結和 $1_{\mathcal{C}_{g,1}} \# M$ はホモロジーシリンダーとなる. この構成はホモロジー 3 球面に連結和によって積構造を入れたモノイドから $\mathcal{C}_{g,1}$ へのモノイド準同型を与えている. 実際, ホモロジー 3 球面のモノイドは $\mathcal{C}_{0,1}$ と同型であることがわかる (逆写像は次節で述べる closing によって与えられる). とくに, $\mathcal{C}_{0,1}$ は $\mathcal{C}_{g,1}$ の中心に含まれている.

例 2.3 (Levine [13]) g 本の弦からなる pure string link $L \subset D^2 \times I$ に対し、以下のようにしてホモロジーシリンダーを作ることができる。まず、図 1 の中の g 個のループ $\gamma_{g+1}, \gamma_{g+2}, \dots, \gamma_{2g}$ の閉管状近傍を、下図のように g 個の穴をもつ円板 D_g の埋め込み $\iota: D_g \hookrightarrow \Sigma_{g,1}$ の像とみる。

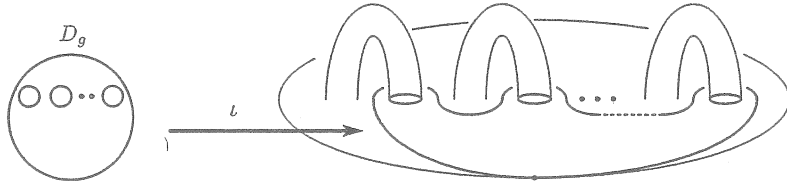


図 2

C を $D^2 \times I$ の中で L の管状近傍の補空間とする。 L の framing を指定することにより、同相 $h: \partial C \xrightarrow{\cong} \partial(\iota(D_g) \times I)$ がひとつ定まる (framing によって meridian たちの同一視の方法が決まる)。 $\Sigma_{g,1} \times I$ から $\iota(D_g) \times I$ を取り除いたものに、 h を用いて C をはり直して得られる多様体を考えると、それはホモロジーシリンダーとなっている。この構成は (framed) pure string link のモノイドから $\mathcal{C}_{g,1}$ へのモノイド準同型を与える。

いま、2つのホモロジーシリンダー (M_1, i_+, i_-) , (M_2, j_+, j_-) がホモロジー同境であるということ、コンパクトな4次元多様体 W であって、

1. $\partial W = M_1 \cup (-M_2) / (i_+(x) = j_+(x), i_-(x) = j_-(x)) \quad x \in \Sigma_{g,1}$,
2. $M_1 \hookrightarrow W, M_2 \hookrightarrow W$ がともにホモロジーの同型を誘導する

を満たすものが存在することとして定め、 $\mathcal{H}_{g,1}$ を $\mathcal{C}_{g,1}$ をこのホモロジー同境による同値関係でわって得られる集合とすると、 $\mathcal{H}_{g,1}$ は群の構造をもつ。上の例との関連について見てみると、

- $M_{g,1}$ はそのまま $\mathcal{H}_{g,1}$ に埋め込まれる (この事実を通して [13] では $\mathcal{C}_{g,1}$ や $\mathcal{H}_{g,1}$ を $M_{g,1}$ の enlargement と呼んでいる),
- ホモロジー3球面のホモロジー同境群は $\mathcal{H}_{0,1}$ と同型,
- g 本の弦の (framed) pure string link の concordance 群が $\mathcal{H}_{g,1}$ に埋め込まれる,

といった形になっている。なお、 $g \geq 3$ に対し、 $M_{g,1}$ は $\mathcal{H}_{g,1}$ の正規部分群ではないことがわかっている [19].

3 群 $\mathcal{H}_{g,1}$ の降下列とその不変量

3.1 ホモロジーシリンダーのモノドロミー

一般に、ホモロジーシリンダー (M, i_+, i_-) に対して、 $\pi_1 \Sigma_{g,1}$ と $\pi_1 M$ は同型とは限らない。しかしながら、 M が $\Sigma_{g,1}$ のホモロジー同境であることより、次の Stallings の定理を効果的に用いることができる。

定理 3.1 (Stallings [20]) A, B を群とし、 $f: A \rightarrow B$ を2-連結な準同型とする。このとき、

$$f: N_k(A) \longrightarrow N_k(B)$$

は任意の $k \geq 2$ に対し同型となる.

ここで, 準同型 f が 2-連結であるとは, f が誘導する群のホモロジーの間の準同型が 1 次のところで同型, 2 次のところで全射であるということである. また, 群 G に対し, $\Gamma^1 G = G$, $\Gamma^{i+1} G = [\Gamma^i G, G]$ で定義される G の降中心列の k 番目の群とし, $N_k(G) := G/(\Gamma^k G)$ とする. (以下, 空間 X に対し, $N_k(\pi_1 X)$ を $N_k(X)$ と略記する. また, $N_k := N_k(\Sigma_{g,1}) = N_k(F_{2g})$ とする.)

いま, ホモロジーシリンダーの定義から 2 つの連続写像 $i_+, i_- : \Sigma_{g,1} \rightarrow M$ は 2-連結な準同型 $\pi_1 \Sigma_{g,1} \rightarrow \pi_1 M$ を誘導することがわかる. これから $\Phi_k : \mathcal{C}_{g,1} \rightarrow \text{Aut} N_k$ を

$$\Phi_k(M, i_+, i_-) := (i_+)^{-1} \circ i_-$$

によって定めると, これはモノイド準同型となることがわかる. また, $\Phi_k(M, i_+, i_-)$ は, (M, i_+, i_-) のホモロジー同境界類のみによっており, 結果として群準同型 $\Phi_k : \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \text{Aut} N_k$ が誘導される. この準同型 Φ_k の像については次が知られている.

定理 3.2 (Garoufalidis-Levine [7], Habegger [8]) $\Phi_k : \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \text{Aut} N_k$ の像は

$$\text{Aut}_0 N_k := \left\{ \varphi \in \text{Aut} N_k \mid \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(\zeta) \equiv \zeta \pmod{\Gamma^{k+1} F_{2g}} \text{ となる} \\ \varphi \text{ のリフト } \tilde{\varphi} \in \text{End} F_{2g} \text{ が存在する.} \end{array} \right\}$$

で与えられる.

ホモロジーシリンダーの定義より, Φ_k の像が $\text{Aut}_0 N_k$ に入ることはすぐにわかる. 逆は, 任意の元 $\varphi \in \text{Aut}_0 N_k$ に対して, $\Phi_k(M, i_+, i_-) = \varphi$ となるようなホモロジーシリンダーを構成する方法を具体的に与えることによって示される. その構成においてホモロジーシリンダーと手術理論との相性の良さが発揮される.

準同型 Φ_k たちを用いて, $\mathcal{H}_{g,1}$ の降下列を

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{g,1}[1] &:= \mathcal{H}_{g,1}, \\ \mathcal{H}_{g,1}[k] &:= \text{Ker} \left(\mathcal{H}_{g,1} \xrightarrow{\Phi_k} \text{Aut} N_k \right) \text{ for } k \geq 2 \end{aligned}$$

によって定義する. 定義より完全列

$$1 \longrightarrow \mathcal{H}_{g,1}[k] \longrightarrow \mathcal{H}_{g,1}[k-1] \xrightarrow{\Phi_k} \text{Aut}_0 N_k$$

が得られる. この周辺の議論そのものは写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の降下列を考えているときと全く同じであるが, 最も大きな違いは, 定理 3.2 でみたように, Φ_k の像が $\mathcal{H}_{g,1}$ のときには完全に決定されていることである (Johnson 準同型の像の決定の問題). また,

$$\mathcal{H}_{g,1}[\infty] := \bigcap_{k \geq 2} \text{Ker} \Phi_k$$

とおく. $\mathcal{M}_{g,1} \cap \mathcal{H}_{g,1}[\infty] = \{1\}$ であるのに対し, $\mathcal{H}_{g,1}[\infty]$ そのものは非常に多くの元を含んでいる. 実際, 例 2.2 で得られるホモロジーシリンダーはすべて $\mathcal{H}_{g,1}[\infty]$ に属している.

3.2 ボルディズム不変量

ホモロジーシリンダー $(M, i_+, i_-) \in \mathcal{C}_{g,1}[k]$ に対し, $i_+ = i_- : N_k \xrightarrow{\sim} N_k(M)$ であったので, 次のような連続写像の合成

$$f_M : M \longrightarrow K(\pi_1 M, 1) \longrightarrow K(N_k(M), 1) \xrightarrow{(i_+)^{-1} = (i_-)^{-1}} K(N_k, 1)$$

を考えると, (必要なら適当なホモトピーで調節して) $f_M \circ i_+ = f_M \circ i_- : \Sigma_{g,1} \rightarrow K(N_k, 1)$ とすることができる. これより, (M, i_+, i_-) に対して, M の *closing* と呼ばれる閉 3 次元多様体 C_M を

$$C_M := M / (i_+(x) = i_-(x)), \quad x \in \Sigma_{g,1}$$

で定義すると, $f_M : M \rightarrow K(N_k, 1)$ は連続写像 $\tilde{f}_M : C_M \rightarrow K(N_k, 1)$ を誘導する. (C_M は M と $1_{\mathcal{C}_{g,1}} = \Sigma_{g,1} \times I$ を境界で同一視することで得られる多様体とも思える. こちらの定義の方が, 以下に述べる写像の準同型性を確かめるときなどに都合がよい.) そこで, 写像 $\theta_k : \mathcal{C}_{g,1}[k] \rightarrow \Omega_3 N_k$ を

$$\theta_k([M, i_+, i_-]) := (C_M, \tilde{f}_M)$$

で定める. ここで, $\Omega_3 N_k$ は $K(N_k, 1)$ の 3 次のボルディズム群である. このとき次が成り立つ.

定理 3.3 各 $k \geq 2$ に対し, θ_k はホモロジー同境不変な準同型である. また, 誘導される準同型 $\theta_k : \mathcal{H}_{g,1}[k] \rightarrow \Omega_3 N_k$ について, 完全列

$$1 \longrightarrow \mathcal{H}_{g,1}[2k-1] \longrightarrow \mathcal{H}_{g,1}[k] \xrightarrow{\theta_k} \Omega_3 N_k \longrightarrow 1.$$

が存在する.

証明の概略 θ_k の全射性は具体的な構成を与えることによって示される. 実際には, $\Omega_3 N_k$ の元 (X, f) から始めて, それに手術を施し, 最終的には定理 3.2 の証明で用いられる構成に帰着させるというかたちになる.

一方, $(X, f) \in \Omega_3 N_k$ に対し, $f([X]) \in H_3 N_k$ を対応させることで, 自然な同型 $\Omega_3 N_k \cong H_3 N_k$ が得られるが, Igusa-Orr [11] において自然な準同型 $N_{2k-1} \rightarrow N_k$ が誘導する 3 次のホモロジーの間の準同型 $H_3 N_{2k-1} \rightarrow H_3 N_k$ は自明であることが示されている. これにより, $\mathcal{H}_{g,1}[2k-1] \subset \text{Ker } \theta_k$ が従う. 誘導される準同型 $\bar{\theta}_k : \mathcal{H}_{g,1}[k] / \mathcal{H}_{g,1}[2k-1] \rightarrow \Omega_3 N_k$ が同じ階数の自由アーベル群の間の全射となることから $\bar{\theta}_k$ は実際には同型で, とくに, $\mathcal{H}_{g,1}[2k-1] = \text{Ker } \theta_k$ となることがわかり, 主張が従う. \square

3.3 Magnus 表現

ホモロジーシリンダー $(M, i_+, i_-) \in \mathcal{C}_{g,1}[k]$ に対して, $i_+ = i_- : N_k \xrightarrow{\sim} N_k(M)$ となるので, N_k と $N_k(M)$ は自然に同一視することができる. このとき, 自明な準同型 $i_+^{-1} \circ i_- = \text{id} \in \text{Aut } N_k$ の“微分”を考えることで Magnus 表現が得られる.

以下の構成は, ねじれ係数の (コ) ホモロジーを用いて純組みひも群の Gassner 表現を string link の群に拡張した Kirk-Livingston-Wang [12] による仕事に基づいている.

一般に, 自由群のべき零商 N_k は torsion-free なべき零群であることが知られており, その群環 $\mathbb{Z}N_k$ は右分数体 \mathcal{K}_{N_k} に埋め込まれる. \mathcal{K}_{N_k} は平坦 $\mathbb{Z}N_k$ -加群となっている. いま, \mathcal{K}_{N_k} を $\Sigma_{g,1}$, M 上の局所系とみると, 被覆空間と \mathcal{K}_{N_k} の性質を用いた基本的な議論から次が従う.

補題 3.4 $H_*(M, i_{\pm}(\Sigma_{g,1}); \mathcal{K}_{N_k}) = 0$. とくに, $i_{\pm} : H_*(\Sigma_{g,1}, p; \mathcal{K}_{N_k}) \rightarrow H_*(M, p; \mathcal{K}_{N_k})$ は右 \mathcal{K}_{N_k} -同型写像である.

注意 3.5 上の補題において, ホモロジーの係数の局所化は必須であるが, 実際のところ, $\mathbb{Z}N_k$ -algebra A であって性質「任意の $\mathbb{Z}N_k$ -係数の行列 m に対し, m が augmentation map $\mathbb{Z}N_k \rightarrow \mathbb{Z}$ で \mathbb{Z} 上可逆な行列になるならば m は A 上で可逆」をみたすものを係数にすれば同じことが成立する. \mathcal{K}_{N_k} は確かにこの性質をもっている. 上の性質をもつものの中で initial object となる $\mathbb{Z}N_k$ -algebra Λ_{N_k} を Cohn localization [6] と呼ばれる手法を用いることによって構成することができ, 以下に述べる Magnus 表現 r_k は Λ_{N_k} -係数の行列として定義することができる. 群 G に対し Λ_G をとるという操作は関手的であり, r_k ($k = 2, 3, \dots$) たちを比較する上で都合がよい.

ブーケのうめこみ $R_{2g} \hookrightarrow \Sigma_{g,1}$ はホモトピー同値であり, それを用いて右 \mathcal{K}_{N_k} -同型

$$H_1(\Sigma_{g,1}, p; \mathcal{K}_{N_k}) \cong H_1(R_{2g}, p; \mathcal{K}_{N_k}) = C_1((R_{2g})_{N_k}) \otimes_{N_k} \mathcal{K}_{N_k} \cong \mathcal{K}_{N_k}^{2g}$$

をひとつ固定する ($\mathcal{K}_{N_k}^{2g}$ は列ベクトルの集合とみている). 実際, R_{2g} の N_k -被覆 $(R_{2g})_{N_k}$ に関して, $\overline{\gamma_i}$ を γ_i のリフトとなるようなセルとしたとき,

$$\{\overline{\gamma_1} \otimes 1, \dots, \overline{\gamma_{2g}} \otimes 1\} \subset C_1((R_{2g})_{N_k}) \otimes_{N_k} \mathcal{K}_{N_k}$$

が \mathcal{K}_{N_k} -ベクトル空間としての基底を与えている.

定義 3.6 ホモロジーシリンダー $M = (M, i_+, i_-) \in \mathcal{C}_{g,1}[k]$ に対し, その Magnus 行列 $r_k(M)$ を, 右 \mathcal{K}_{N_k} -同型

$$\mathcal{K}_{N_k}^{2g} \cong H_1(\Sigma_{g,1}, p; \mathcal{K}_{N_k}) \xrightarrow[i_-]{\cong} H_1(M, p; \mathcal{K}_{N_k}) \xrightarrow[i_+^{-1}]{\cong} H_1(\Sigma_{g,1}, p; \mathcal{K}_{N_k}) \cong \mathcal{K}_{N_k}^{2g}$$

の表現行列として定める.

定理 3.7 $r_k : \mathcal{C}_{g,1}[k] \rightarrow GL(2g, \mathcal{K}_{N_k})$ はホモロジー同境不変な準同型である.

例 3.8 $M_{\varphi} \in \mathcal{M}_{g,1} \cap \mathcal{H}_{g,1}[k]$ を満たすような写像類群の元 $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1} \subset \text{Aut} F_{2g}$ に対し, その Magnus 行列は, Fox の自由微分を用いて,

$$r_k(M_{\varphi}) = \overline{\rho_k \left(\frac{\partial \varphi(\gamma_j)}{\partial \gamma_i} \right)}_{i,j},$$

と表せる. ここで, $\rho_k : \mathbb{Z}F_{2g} \rightarrow \mathbb{Z}N_k$ は自然な準同型であり, $\overline{\cdot}$ は $(x \mapsto x^{-1})$ から誘導される対合である. 上の式はそれらを行列の各成分に施すことを意味している. 式の形から, 上で述べた Magnus 表現の定義が $\mathcal{M}_{g,1}$ の Magnus 表現 [17] の拡張になっていることがわかる.

4 Atiyah-Patodi-Singer の ρ -不変量

この節では, Atiyah-Patodi-Singer の ρ -不変量 [1], [2] について簡単に復習する.

(M, g) を $2l-1$ 次元の向き付けられたリーマン多様体とし, $\alpha : \pi_1 M \rightarrow U(n)$ をユニタリ表現とする. M の偶数次の複素数値微分形式の空間 $\Omega^{\text{even}}(M; \mathbb{C})$ 上の自己共役作用素 $B : \Omega^{\text{even}}(M; \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{\text{even}}(M; \mathbb{C})$ を $\varphi \in \Omega^{2p}(M; \mathbb{C})$ に対し

$$B\varphi := (\sqrt{-1})^l (-1)^{p+1} (*d - d*)\varphi$$

で定義すると、 B は α によって定義される平坦ベクトル束に値を持つ偶数次の微分形式の空間上の自己共役作用素 B_α に自然に拡張する。この B_α に対して、スペクトル関数 $\eta_\alpha(s)$ を

$$\eta_\alpha(s) := \sum_{\lambda \neq 0} (\text{sign } \lambda) |\lambda|^{-s}$$

で定義する。ここで、 λ は B_α の 0 でない固有値全体を重複度をこめて動く。この関数は $s = 0$ において有限の値となるように、全複素数平面に有理形に解析接続される。このとき $\eta_\alpha(0)$ を α に対応するリーマン多様体 (M, g) の η -不変量という。 B に関する η -不変量を単に $\eta(0)$ と書く。

定理 4.1 (Atiyah-Patodi-Singer [2]) $\rho_\alpha(0) := \eta_\alpha(0) - n \cdot \eta(0)$ は M の計量によらず、 α によって決まる M の微分同相不変量となる (これを M の α に対応する ρ -不変量と呼ぶ)。さらに、 $M = \partial N$ で、 α が $\pi_1 N$ のユニタリ表現 $\tilde{\alpha}: \pi_1 N \rightarrow U(n)$ に拡張するとき、

$$\rho_\alpha(M) = n \cdot \text{sign}(N) - \text{sign}_{\tilde{\alpha}}(N)$$

が成立する。

Levine は [14] において、絡み目の不変量を得るために、次のような枠組みを用いて ρ -不変量を考察した。

$R_n(G)$ をユニタリ表現 $G \rightarrow U(n)$ 全体からなる集合とする。 G が l 個の元で生成される群ならば、 $R_n(G)$ は $U(n)$ の l 個の直積 $U(n)^{\times l}$ 中の部分実代数多様体となっていることに注意する。いま、 $R_n(G)$ には $U(n)^{\times l}$ の部分空間としての (Hausdorff な) 位相を入れておく。

奇数次元閉多様体 M と群準同型 $\alpha: \pi_1 M \rightarrow G$ の対 (M, α) に対し、関数

$$\sigma(M, \alpha): R_n(G) \rightarrow \mathbb{R}$$

を $\sigma(M, \alpha)(\theta) := \rho_{\theta \circ \alpha}(M)$ で定義する。この関数について次が成り立つ。

定理 4.2 (Levine [14]) (1) 対 (M, α) に対し、 $R_n(G)$ の真部分代数多様体 Σ が存在して、 $\sigma(M, \alpha)|_{R_n(G) \setminus \Sigma}$ は連続な実数値関数となる。

(2) 2 組の対 $(M, \alpha), (M', \alpha')$ がホモロジー G -同境であるとき、ある $R_n(G)$ の真部分代数多様体 Σ' であって、

$$\sigma(M, \alpha)|_{R_n(G) \setminus \Sigma'} = \sigma(M', \alpha')|_{R_n(G) \setminus \Sigma'}$$

となるものが存在する。

ここで、対 $(M, \alpha), (M', \alpha')$ がホモロジー G -同境²であるとは、対 $(N, \tilde{\alpha})$ であって、 $\partial N = M' \cup -M$ 、 $H_*(N, M) = H_*(N, M') = 0$ 、 $\tilde{\alpha}$ を $\pi_1 M, \pi_1 M'$ 上に引き戻すと α, α' と内部自己同型を法として一致する、をみたくものが存在することとして定義する。なお、[3] の議論より $\sigma(M, \alpha) \bmod \mathbb{Z}$ が $R_n(G)$ 上の連続関数であることがわかるが、それより、 $\sigma(M, \alpha)$ が $R_n(G)$ 上で有界であることが従う。

²群 G の作用を持つ多様体たちの、 G -作用込みの同境と紛らわしいですがご容赦ください。

5 ρ -不変量の $\mathcal{H}_{g,1}$ への応用

以下, $k=2, n=1$ として, 前節で述べた Atiyah-Patodi-Singer の ρ -不変量の $\mathcal{H}_{g,1}$ へ応用することを考える. いま, $N_2 = H_1 \Sigma_{g,1}$ の基底を用いて, 微分同相 $T_{2g} \cong R_1(N_2)$ を固定し, T_{2g} に標準的な測度 $d\theta$ で, $\int_{T_{2g}} d\theta = 1$ と正規化されたものを与えておく. このとき, $\rho_{N_2,1} : \mathcal{H}_{g,1}[2] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\rho_{N_2,1}(M, i_+, i_-) := \int_{T_{2g}} \sigma(C_M, \tilde{f}_M)(\theta) d\theta$$

で定義する. 対 (C_M, \tilde{f}_M) は $\mathcal{H}_{g,1}[2]$ の元に対し, ホモロジー N_2 -同境を法として一意に定まり, また, 前節より $\sigma(C_M, \tilde{f}_M)$ は T_{2g} 上のほとんどいたるところ連続な有界関数で, 2つのホモロジー N_2 -同境な対に対し, ほとんどいたるところ等しい値をとるので, この写像が well-defined であることがわかる.

定理 5.1 $\rho_{N_2,1} : \mathcal{H}_{g,1}[2] \rightarrow \mathbb{R}$ について次が成り立つ.

- (1) Magnus 表現 $r_2 : \mathcal{H}_{g,1}[2] \rightarrow GL(2g, \mathcal{K}_{N_2})$ の核 $\text{Ker } r_2$ に制限すると準同型となる.
- (2) $\rho_{N_2,1}(\mathcal{H}_{g,1}[\infty])$ は \mathbb{R} の中の \mathbb{Z} 上無限生成な部分群である.
- (3) $\text{Ker } r_2, \mathcal{H}_{g,1}[\infty]$ やそのアーベル化たちはどれも有限生成ではない.

証明の概略 以下, 3節で述べた不変量との関連を中心に, 定理の証明の概略を述べる.

いま, $k=2$ であるからボルディズム不変量より完全列

$$1 \longrightarrow \mathcal{H}_{g,1}[3] \longrightarrow \mathcal{H}_{g,1}[2] \xrightarrow{\theta_2} \Omega_3 N_2 \longrightarrow 1.$$

が得られる. これより, $(M, i_+, i_-) \in \mathcal{H}_{g,1}[3]$ であれば, closing によって得られる閉 3 次元多様体 C_M と連続写像 $\tilde{f}_M : C_M \rightarrow K(N_2, 1)$ が誘導する準同型 $\tilde{f}_M : \pi_1 C_M \rightarrow N_2$ の対 (C_M, \tilde{f}_M) はある 4 次元多様体 W_M と準同型 $f_{W_M} : \pi_1 W_M \rightarrow N_2$ の対の境界となっていることがわかる. このとき, 前節でみた関数 $\sigma(C_M, \tilde{f}_M)$ は signature defect としての解釈をもち,

$$\begin{aligned} \rho_{N_2,1}(M, i_+, i_-) &= \int_{T_{2g}} \sigma(C_M, \tilde{f}_M)(\theta) d\theta \\ &= \int_{T_{2g}} (\text{sign}(W_M) - \text{sign}_{\theta \circ f_{W_M}}(W_M)) d\theta \\ &= \text{sign}(W_M) - \int_{T_{2g}} \text{sign}_{\theta \circ f_{W_M}}(W_M) d\theta \end{aligned}$$

となる. ここで, $\text{sign}_{\theta \circ f_{W_M}}(W_M)$ は $\theta \circ f_{W_M} : \pi_1 W_M \rightarrow U(1)$ を通して, 左 $\pi_1 W_M$ -加群とみた \mathbb{C} (これを $\mathbb{C}_{\theta \circ f_{W_M}}$ と書く) によるねじれ係数ホモロジー $H_2(W_M; \mathbb{C}_{\theta \circ f_{W_M}})$ 上に誘導された交差形式の signature であることに注意する. 上の式より, (1) を示すには, $\text{sign}(W_M)$ と $\text{sign}_{\theta \circ f_{W_M}}(W_M)$ に関する加法性を示せばよいことがわかる.

$M_1 = (M_1, i_+, i_-), M_2 = (M_2, j_+, j_-) \in \text{Ker } r_2$ とする. $\text{Ker } r_2 \subset \mathcal{H}_{g,1}[3]$ であることに注意し, 上で述べたように $(C_{M_i}, \tilde{f}_{M_i}) = \partial(W_{M_i}, f_{W_{M_i}})$ となる多様体と準同型の対 $(W_{M_i}, f_{W_{M_i}})$ をとる. 必要ならば W_{M_i} に N_2 上の手術を施して, $\pi_1 W_{M_i} \cong H_1 W_{M_i} \cong N_2$ としておく. このとき, W_{M_1} と W_{M_2} をそれらの境界の一部分 $\Sigma_{g,1} \times I \subset C_{M_i}$ で接合し, 多様体

$$W := W_{M_1} \cup_{\Sigma_{g,1} \times I} W_{M_2}$$

と準同型 $f_W := f_{W_{M_1}} \cup f_{W_{M_2}}$ を作ると, $\partial(W, f_W) = (M_1 \cdot M_2, \tilde{f}_{M_1 \cdot M_2})$ となっている.

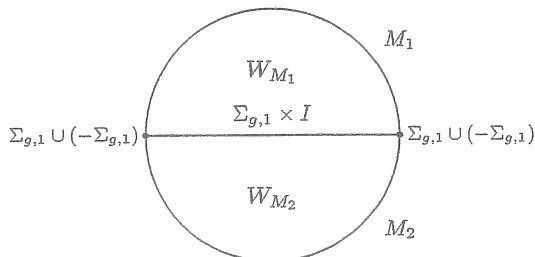


図 3

W, W_{M_1}, W_{M_2} について Wall による符号数に関する非加法性定理 [22] を適用すると, Meyer-cocycle [15] に関する標準的な議論により, $M_1, M_2 \in \mathcal{H}_{g,1}[2]$ ならば修正項が 0 であることがわかり, sign に関する加法性が従う.

$\text{sign}_{\theta \circ f_{W_M}}(W_M)$ の加法性については Wall の定理の局所系版 [15] を用いることにより示される. このとき, 修正項が 0 であるための十分条件として, Magnus 行列 r_2 が自明であるという仮定が使われる. 実際には, $C_{\theta \circ f_{W_{M_i}}}$ がほとんどいたるところの $\theta \in R_1(N_2)$ で K_{N_2} -ベクトル空間となることに注意して, Wall の定理に現れる修正項を計算するとき現れる 3 つのベクトル空間をみると, Magnus 行列が自明ならばそれらが一致していることがわかり, 修正項が 0 であるということが従う. よってほとんどいたるところ加法的であることからそれを積分することによって求める加法性が得られる.

(2) を示すために次のような例を考える. $C_{g,1}$ の単位元 $\Sigma_{g,1} \times I$ について, $\gamma_1 \in H_1(\Sigma_{g,1} \times I)$ を代表するループ l を $\Sigma_{g,1} \times I$ の内部にとり, 結び目 $K \subset S^3$ の補空間を用いて l に沿って手術を行う. こうして得られる多様体 M_K は $\mathcal{H}_{g,1}[\infty]$ に属するホモロジーシリンダーとなる. なお, この例は [4], [5], [10] において結び目や string link の concordance 群のある部分群の無限生成性を示すのに用いられたものをホモロジーシリンダーにあてはめたものとなっている. この例について $\rho_{N_2,1}$ を計算すると,

$$\rho_{N_2,1}(M_K) = \int_{\theta \in S^1} \sigma_\theta(K) d\theta$$

となることがわかる. ここで $\sigma_\theta(K)$ は結び目 K の $\theta \in S^1$ における Levine-Tristram signature と呼ばれるものである. 結び目 K をいろいろと変えると, 上の値が \mathbb{R} 中の無限生成な部分群を動くことが [5] において示されている. これより (2) が従う. (3) は (2) より従う. \square

注意 5.2 鈴木正明氏 [21] によって $\text{Ker } r_2$ は $\mathcal{H}_{g,1}[\infty]$ より確かに大きいことが示されている. 実際, [21] において, $\text{Ker } r_2 \cap \mathcal{M}_{g,1}$ が非自明であることが具体的な例を与えることにより示されている. なお, 純組みひも群と Gassner 表現については, 対応する事実は知られていない.

6 おわりに

現在のところ, $\mathcal{H}_{g,1}$ について, その (コ) ホモロジーや, 有限生成であるかなどの群論的性質はほとんどわかっていない. 主定理で述べたものも含め, $\mathcal{H}_{g,1}$ の部分群で有限生成でないものはいくつか確認されている. 実際, 森田茂之氏によって $\mathcal{H}_{g,1}[2]$ が有限生成でないことが示されている.

また, $C_{g,1}$ と $\mathcal{H}_{g,1}$ の差も非常に大きいことがわかっている. このことは, 例えば, (3.3 節でその非輪状性について述べた) 複体 $C_*(M, i_{\pm}(\Sigma_{g,1}); \mathcal{K}_{N_k})$ の Reidemeister torsion を調べることで確認することができる [19].

$\mathcal{H}_{g,1}$ に関する何らかの「有限性」にあたるものを示すことができれば面白いと思う. 期待されるのは, $\mathcal{H}_{g,1}$ の有限生成性や完全性といったところである.

参考文献

- [1] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77 (1975), 43–69
- [2] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78 (1975), 405–432
- [3] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 71–99
- [4] T. Cochran, K. Orr, P. Teichner, *Knot concordance, Whitney towers and L^2 -signatures*, Ann. of Math. 157(2) (2003), 433–519
- [5] T. Cochran, K. Orr, P. Teichner, *Structure in the classical knot concordance group*, Comment. Math. Helv. 79 (2004), 105–123
- [6] P. M. Cohn, *Free Rings and their Relations*, Academic Press, New York - London (1985)
- [7] S. Garoufalidis, J. Levine, *Tree-level invariants of three-manifolds, Massey products and the Johnson homomorphism*, Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics, Proc. Sympos. Pure Math. 73 (2005), 173–205
- [8] N. Habegger, *Milnor, Johnson, and tree level perturbative invariants*, preprint
- [9] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. 4 (2000), 1–83
- [10] S. Harvey, *Homology equivalence of groups and spaces*, transparencies of her talk
- [11] K. Igusa, K. Orr, *Links, pictures and the homology of nilpotent groups*, Topology 40 (2001), 1125–1166
- [12] P. Kirk, C. Livingston, Z. Wang, *The Gassner representation for string links*, Commun. Contemp. Math. 1(3) (2001), 87–136
- [13] J. Levine, *Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group*, Algebr. Geom. Topol. 1 (2001), 243–270
- [14] J. Levine, *Link invariants via the eta invariant*, Comment. Math. Helv. 69 (1994), 82–119
- [15] W. Meyer, *Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln*, Bonner Math. Schriften. 53 (1972)
- [16] G. Massuyeau, J.-B. Meilhan, *Characterization of Y_2 -equivalence for homology cylinders*, J. Knot Theory Ramifications 12 (2003), 493–522
- [17] S. Morita, *Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces*, Duke Math. J. 70 (1993), 699–726
- [18] T. Sakasai, *Homology cylinders and the acyclic closure of a free group*, preprint
- [19] T. Sakasai, *The Magnus representation for homology cylinders*, preprint
- [20] J. Stallings, *Homology and central series of groups*, J. Algebra 2 (1965), 170–181
- [21] M. Suzuki, *The Magnus representation of the Torelli group $\mathcal{I}_{g,1}$ is not faithful for $g \geq 2$* , Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 909–914
- [22] C. T. C. Wall, *Non-additivity of the signature*, Invent. Math. 7 (1969), 269–274

東京大学大学院数理科学研究科博士課程 3 年

逆井 卓也 (さかさい たくや)

sakasai@ms.u-tokyo.ac.jp

平面への安定写像の不変量について

山本 稔 (北海道大学大学院理学研究科)

1. 序

C^∞ 級閉多様体 M から C^∞ 級多様体 N への C^∞ 級写像を適当な同値関係で分類する事を考える。例えば、ホモトピー、アイソトピー、右左同値、右同値といった同値関係がよく知られている。写像の同値類に対する不変量を数多く見つけ分類を精密化する事で、各同値類の特徴付けをする事がこの研究の目標である。

この講演では、向き付け可能な 3 次元閉多様体 M から平面への C^∞ 級安定写像の Z 値アイソトピー不変量を見つける事を目標にする。特に Vassiliev complex という cochain complex を用いる事で、Vassiliev 不変量の一つである 1 次の半局所不変量と呼ばれるものが得られる事を報告する。

1980 年代後半に Vassiliev は結び目 (S^1 から \mathbf{R}^3 への埋め込み写像) のアイソトピー不変量として新たに階層型の不変量を導入した ([34])。これは現在、Vassiliev 不変量もしくは有限型不変量と呼ばれている。1990 年代前半に Arnold [3] と Goryunov [10] は Vassiliev complex を用いて安定写像の 1 次 (局所) 不変量を導入し、 S^1 から \mathbf{R}^2 への安定な埋め込み写像と向き付けられた閉曲面から \mathbf{R}^3 への安定写像の 1 次 (局所) 不変量をそれぞれ決定した。一方、同時に Birman と Lin [4] は結び目の i 次の有限型不変量をスケイン関係式を用いて再定式化した。Vassiliev complex を用いる方法は Aicardi [1], Goryunov [11], Tchernov [31, 32], Aicardi-Ohmoto [25, 26] 達によって曲面上の wave front, 閉曲面から \mathbf{R}^2 への安定写像の 1 次 (局所) 不変量を決定する研究に引き継がれた。スケイン関係式を用いる方法は Ekholm [5, 6, 7], Kamada [14], Ozawa [27], Arakawa-Ozawa [2], Januszkiewicz-Świątkowski [13], Habiro-Kanenobu-Shima [12], Nowik [22, 23, 24] 達によって埋め込み、埋め込み写像の i 次の有限型不変量を決定する研究に引き継がれた。また、Vassiliev complex は安定写像の 1 次 Vassiliev 不変量を決定するのに使われるだけではなく、ファイバーバンドルの特性類の研究や写像のコボルディズム不変量の決定に大いに役立つ。詳しくは Kazarian [16, 17], Saeki [29], Saeki-T. Yamamoto [30] を参照の事。

以下、多様体や写像は断らない限り全て C^∞ 級とする。

2. 安定写像と1次の VASSILIEV 不変量

M を n 次元閉多様体, N を p 次元多様体とする. C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow N$ に対して, $S(f) = \{q \in M \mid \text{rank } df_q < p\}$ を f の臨界点集合と呼び, この像 $f(S(f))$ を f の臨界値集合と呼ぶ. 臨界値 $y \in f(S(f))$ に対して $f^{-1}(y)$ を臨界ファイバー, 正則値 $y \in N \setminus f(S(f))$ に対して $f^{-1}(y)$ を正則ファイバーと呼ぶ. さらに臨界ファイバーで, 臨界点を含まない連結成分全体を非臨界成分と呼ぶ事にする.

2.1. **安定写像.** $C^\infty(M, N)$ を M から N への C^∞ 級写像全体からなる空間とする. 位相は Whitney C^∞ 位相を入れる. $f: M \rightarrow N$ が安定写像であるとは, f の開近傍 U が存在して, U 内の任意の写像 $g \in U$ に対して f と g が C^∞ 級右左同値, すなわち以下の図式を可換にする様な2つの微分同相写像 $\Phi: M \rightarrow M$ と $\varphi: N \rightarrow N$ が存在する時を言う.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & M \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

安定写像 f の臨界値 $y \in f(S(f))$ に対して, 写像芽 $f: (M, f^{-1}(y) \cap S(f)) \rightarrow (N, y)$ の C^∞ 級右左同値類を安定写像芽と呼び, y を安定臨界値と呼ぶ.

以下, 次元対 (n, p) が Mather [20] の意味で nice dimension, 即ち安定写像全体からなる空間 $S^\infty(M, N)$ が $C^\infty(M, N)$ 内 open dense になっているとする. 2つの安定写像 f と $g: M \rightarrow N$ がアイソトピックとは, f と g が安定写像の1-パラメータ族で結べる事を言う.

2.2. **1 次 Vassiliev 不変量.** 不安定写像からなる空間を $\Gamma = C^\infty(M, N) \setminus S^\infty(M, N)$ と置く. さらに Γ の部分空間として, Γ_1 を M から N への余次元1不安定写像全体からなる空間とする. ここで $f: M \rightarrow N$ が余次元1不安定写像であるとは, ただ1つ臨界値 $y \in f(S(f))$ が存在して,

- y 以外の臨界値は全て安定臨界値,
- 写像芽 $f: (M, f^{-1}(y) \cap S(f)) \rightarrow (N, y)$ の1次元開折が安定写像芽 (余次元1写像芽)

である時を言う. y を余次元1臨界値と呼ぶ.

$C^\infty(M, N)$ 内で Γ_1 の余方向が決まっているとする. この時, \mathbf{Z} 値アイソトピー不変量 $I: S^\infty(M, N) \rightarrow \mathbf{Z}$ が安定写像の1次の \mathbf{Z} 値 Vassiliev 不変量であるとは, I の拡張 $\bar{I}: C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbf{Z}$ が存在して,

- $\bar{I}|_{\Gamma_1} = \text{constant}$,
- $\bar{I}|_{(\Gamma \setminus \Gamma_1)} = 0$,

- $0 \in [-1, 1]$ でのみ Γ_1 に正の方向に横断的な C^∞ 級の道 $\tau : [-1, 1] \rightarrow C^\infty(M, N)$ に対して $\bar{I}(\tau(0)) = \bar{I}(\tau(1)) - \bar{I}(\tau(-1))$

が成り立つ時を言う¹。

3. 臨界ファイバーと余次元1不安定写像の同値関係

以下、定義域多様体の次元 n が値域多様体の次元 p より真に大きいとする。 n 次元閉多様体 M から p 次元多様体 N への2つの C^∞ 級写像 $f, g : M \rightarrow N$ に対して y_f と y_g を各々 f, g の臨界値とし、 U_f と U_g を各々 y_f, y_g の十分小さな円板近傍とする。

- (1) f と g は安定写像とする。臨界ファイバー $f^{-1}(y_f)$ と $g^{-1}(y_g)$ が弱同値であるとは同相写像 $\varphi : (U_f, y_f) \rightarrow (U_g, y_g)$ が存在して、 $\varphi(U_f \cap f(S(f))) = U_g \cap g(S(g))$ かつ各 $y \in U_f$ に対して $f^{-1}(y)$ と $g^{-1}(\varphi(y))$ が非臨界成分を法として微分同相になっている時を言う。
- (2) f と g を余次元1不安定写像で、 y_f と y_g を各々 f と g の唯一の余次元1臨界値とする。 τ_f と $\tau_g : [-1, 1] \rightarrow C^\infty(M, N)$ を各々 $\tau_f(0) = f$, $\tau_g(0) = g$ でのみ Γ_1 に横断的な C^∞ 級の道とする。臨界ファイバー $f^{-1}(y_f)$ と $g^{-1}(y_g)$ が弱同値であるとは $\varphi(t, y) = (\psi(t), \varphi_t(y))$ の形をしている同相写像 $\varphi : [-1, 1] \times U_f \rightarrow [-1, 1] \times U_g$ が存在して、 $\psi(0) = 0$, $\varphi_0(y_f) = y_g$, $\varphi_t(U_f \cap \tau_f(t)(S(\tau_f(t)))) = U_g \cap \tau_g(\psi(t))(S(\tau_g(\psi(t))))$ かつ各 $t \in [-1, 1]$, $y \in U_f$ に対して $\tau_f(t)^{-1}(y)$ と $\tau_g(\psi(t))^{-1}(\varphi_t(y))$ が非臨界成分を法として微分同相になっている時を言う。

ここで、2つの臨界ファイバー $A_1, A_2 \subset M$ において連続写像 $\Phi : A_1 \rightarrow A_2$ が C^∞ 級とは、任意の $q \in A_1$ において q の M 内の近傍 V で定義された C^∞ 級写像 $\bar{\Phi} : V \rightarrow A_2$ が存在し、 $\bar{\Phi}|_{V \cap A_1} = \Phi|_{V \cap A_1}$ が成り立つ事を言う。さらに C^∞ 級写像 $\Phi : A_1 \rightarrow A_2$ が同相写像かつ逆写像も C^∞ 級である時、 A_1 と A_2 は微分同相であると言う ([21, 29])。

f と $g : M \rightarrow N$ を余次元1不安定写像とし、 y_f と $y_g \in N$ を各々 f と g の余次元1臨界値とする。 f と g が弱同値であるとは $f^{-1}(y_f)$ と $g^{-1}(y_g)$ が (2) の意味で弱同値になっている時を言う。

4. 1次の半局所不変量

以下 $C^\infty(M, N)$ 内、余次元1の不安定写像全体からなる空間 Γ_1 の全ての弱同値類に余方向が与えられているものとする。

$C^1(W_{M,N}; \mathbb{Z})$ を Γ_1 の弱同値類によって生成される (有限生成) 自由 \mathbb{Z} 加群とする。 C^∞ 級の道 $\tau : [-1, 1] \rightarrow C^\infty(M, N)$ が、

¹ Γ_1 の余方向が決まらない場合でも、 \mathbb{Z}_2 値アイソトピー不変量が安定写像の1次の \mathbb{Z}_2 値 Vassiliev 不変量である事を上と同様にして定義する事が出来る。

- $(-1, 1)$ 内に $-1 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1$ を満たす有限集合が存在 (空集合でも良い),
- 任意の $t \in [-1, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$ において $\tau(t)$ は安定写像,
- 各 t_i において $\tau(t_i)$ は余次元 1 の不安定写像, かつ τ は各 t_i において Γ_1 に横断的 ($i = 1, \dots, k$)

である時, τ をジェネリックな道と呼ぶ. Θ を Γ_1 の一つの弱同値類, τ をジェネリックな道とする. $\Theta(\tau) \in \mathbf{Z}$ で τ と Θ の代数的交点数, 即ち τ が Θ を横断する全ての点 t_i において正の方向に横断する時 $+1$ を, 負の方向に横断する時 -1 を対応させ, これらを足し合わせる事で定義されたものとする. 同様にして任意の形式和 $c \in C^1(W_{M,N}; \mathbf{Z})$ に対しても $c(\tau) \in \mathbf{Z}$ が定義できる.

定義 4.1. 安定写像の 1 次の \mathbf{Z} 値 Vassiliev 不変量 $I : S^\infty(M, N) \rightarrow \mathbf{Z}$ が安定写像の 1 次の \mathbf{Z} 値半局所不変量であるとは, 任意の 2 つの安定写像 $f, g : M \rightarrow N$ に対して $c \in C^1(W_{M,N}; \mathbf{Z})$ が存在して $I(f) = c(\tau) + I(g)$ が成り立つ事である². ここで $\tau : [-1, 1] \rightarrow C^\infty(M, N)$ は $\tau(1) = f, \tau(-1) = g$ を満たすジェネリックな道とする.

「半局所」不変量とは次の意味である. M の次元が N の次元より真に大きいので, 臨界ファイバーは離散点でなくなる. 臨界ファイバーの弱同値という同値関係はファイバーを臨界点の周りの写像芽で分類するのではなく, ファイバー全体 (非臨界成分を法として) を見て分類しているので「大域的」な分類と言える. 一方, 余次元 1 の不安定写像の弱同値という同値関係とその余方向は余次元 1 臨界値の近傍の局所変形を見て分類しているので「局所的」な分類と言える. この事から「半局所」不変量と名付けた³.

5. 主定理

以下 M が向き付け可能な 3 次元閉多様体, N が平面の時に 1 次の \mathbf{Z} 値半局所不変量を決定する.

命題 5.1 ([18, 19, 29]). $f : M \rightarrow \mathbf{R}^2$ を安定写像とする. f の任意の臨界ファイバーは図 1 の 8 つのいずれかの一つに弱同値である.

図 1 において, 臨界値集合は太線でかいている.

² Γ_1 の余方向が決まらない場合でも, 安定写像の 1 次の \mathbf{Z}_2 値半局所不変量が定義できる.

³ 余次元 1 不安定写像に別の同値関係を定義して Γ_1 を分類し, 可能ならば余方向を与えて自由加群を構成する事で, 別の 1 次の \mathbf{Z} 値, \mathbf{Z}_2 値 Vassiliev 不変量を定義する事が出来る ([29]). また M の次元が N の次元と同じもしくは真に小さい場合, ファイバーは離散点になるため, 写像芽の右左同値類を用いて安定写像の 1 次の (局所) 不変量を定義する事が出来る ([1, 3, 10, 11, 25, 26, 31, 32]).

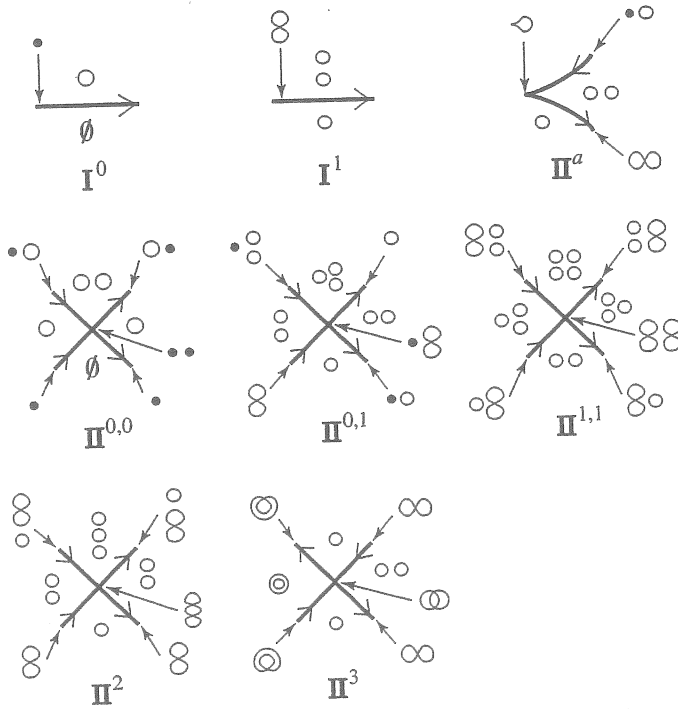


図 1. 安定写像の臨界ファイバーの弱同値類

命題 5.2 ([29, 36]). $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ を余次元 1 不安定写像, $y \in \mathbb{R}^2$ を余次元 1 臨界値とする. この時, 臨界ファイバー $f^{-1}(y)$ の弱同値類は $\text{III}^a(l), \text{III}^a(b), \text{III}^b, \text{III}^c, \text{III}^d, \text{III}_i^{0,a}, \text{III}_i^{1,a}, \text{III}_j^e, \text{III}_j^{0,0}, \text{III}_k^{0,1}, \text{III}_j^{1,1}, \text{III}_j^3, \text{III}_i^3, \text{III}_i^{0,0,0}, \text{III}_j^{0,0,1}, \text{III}_j^{0,1,1}, \text{III}_i^{1,1,1}, \text{III}_j^{0,2}, \text{III}_j^{1,2}, \text{III}_i^{0,3}, \text{III}_i^{1,3}, \text{III}_j^4, \text{III}_i^5, \text{III}_i^6, \text{III}_i^7, \text{III}_i^8$ の計 56 種類である ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3, 4$).

図 2 は命題 5.2 の弱同値類の一部を抜粋してかいた. この図において, 臨界値集合は太線でかいている. 安定写像芽, 余次元 1 写像芽の C^∞ 級右左同値による分類は [8, 9, 28] を参照の事. また f が安定写像もしくは余次元 1 不安定写像の時, 臨界値集合の各 edge には隣接する 2 次元領域上の正則ファイバーの連結成分を用いて自然に向きが入る (図 1, 2 参照).

C^∞ 級写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ において $f(q_1) = f(q_2)$ かつ $q_1, q_2 \in M$ が $f^{-1}(f(q_1))$ の同じ連結成分に入っている時, 2 点 q_1, q_2 は同値であると定める. W_f を M のこの同値関係による商空間とし, f のシュタイン分解と呼ぶ. $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ が安定写像の時, W_f は 2 次元多面体である事が知られている ([18, 19, 29]).

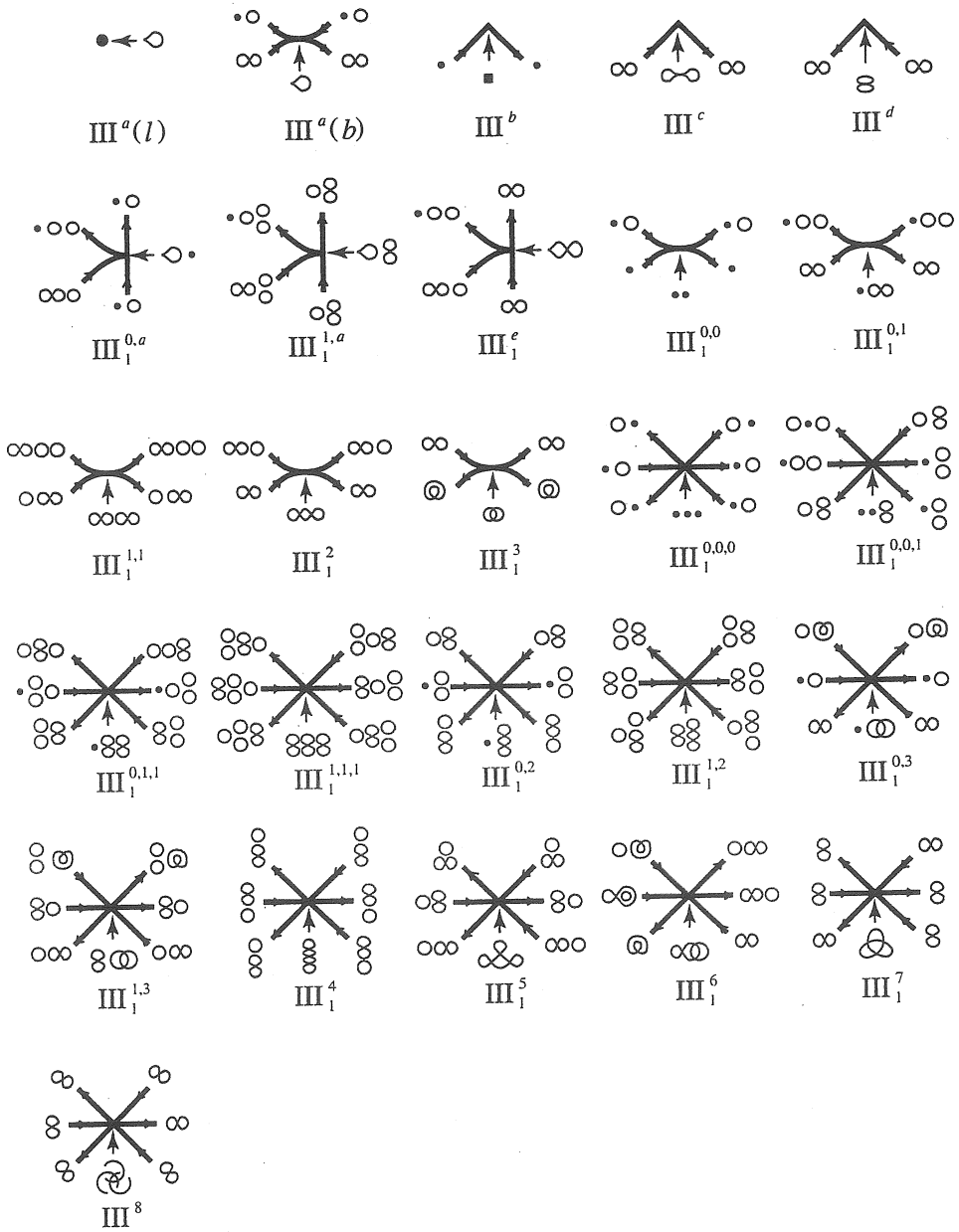


図 2. 余次元 1 不安定写像の臨界ファイバーの弱同値類 (抜粋)

定理 5.3 ([36]). 安定写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して次の 8 つの \mathbb{Z} 値アイソトピー不変量は安定写像の 1 次の \mathbb{Z} 値半局所不変量である。

- (1) $I_1(f) \equiv 1$, (2) $I_2(f) = \#\Pi^a(f)/2$, (3) $I_3(f) = \#\Pi^{0,0}(f)$,
- (4) $I_4(f) = \#\Pi^{0,1}(f)$, (5) $I_5(f) = \#\Pi^{1,1}(f)$, (6) $I_6(f) = \#\Pi^2(f)$,
- (7) $I_7(f) = \#\Pi^3(f)$, (8) $I_8(f) = \chi(W_f)$

ここで $\#\Pi^*(f)$ は f の Π^* 型の臨界ファイバーの数, $\chi(W_f)$ は W_f のオイラー数を表す.

命題 5.4 ([36]). 上の 1 次の \mathbf{Z} 値半局所不変量 I_1, \dots, I_8 は任意の向き付け可能 3 次元閉多様体 M に対して 1 次独立である. 即ち安定写像 $f_1, \dots, f_8 : M \rightarrow \mathbf{R}^2$

が存在して, 行列式
$$\begin{vmatrix} I_1(f_1) & \cdots & I_8(f_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_1(f_8) & \cdots & I_8(f_8) \end{vmatrix}$$
 が 1 になる.

例 5.5. $M = S^3$ の時,

$$\begin{pmatrix} I_1(f_1) & \cdots & I_8(f_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_1(f_8) & \cdots & I_8(f_8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を満たす安定写像 $f_1, \dots, f_8 : S^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を構成する事が出来る. 図 3 はそれらの臨界値集合と臨界ファイバーを表している.

命題 5.6 ([36]). 安定写像の 1 次の \mathbf{Z} 値半局所不変量 I_1, \dots, I_8 は全て安定写像の C^∞ 級右左同値不変量である.

6. VASSILIEV COMPLEX について

定理 5.3 で安定写像の 1 次の \mathbf{Z} 値半局所不変量となっているアイソトピー不変量を 8 つ与えたが, これらは次の様にして見つけた⁴.

Γ_2 を向き付け可能な 3 次元閉多様体から平面への余次元 2 不安定写像全体からなる空間とする. $f : M \rightarrow \mathbf{R}^2$ が余次元 2 不安定写像とは, ただ 1 つ余次元 2 臨界値 $y \in f(S(f))$ が存在して, y 以外の臨界値は全て安定臨界値かつ, 写像芽 $f : (M, f^{-1}(y) \cap S(f)) \rightarrow (\mathbf{R}^2, y)$ の 2 次元開折が安定写像芽である時を言う. $f, g \in \Gamma_2$ に対しても第 3 節と同様にして弱同値という同値関係が定義できる. $C^2(\mathcal{W}_{M, \mathbf{R}^2}; \mathbf{Z})$ を Γ_2 の弱同値類によって生成される有限生成自由 \mathbf{Z} 加群とする. $C^2(\mathcal{W}_{M, \mathbf{R}^2}; \mathbf{Z})$ の階数は 389 である. 余次元 2 不安定写像の各弱同値類に対し, 2 次元開折から得られる特異値集合の局所的な変形の様子とその周りの正則, 臨界ファイバーの大域的な変形の様子を併せて見る事で,

⁴ この節に関しては [35] を参照の事

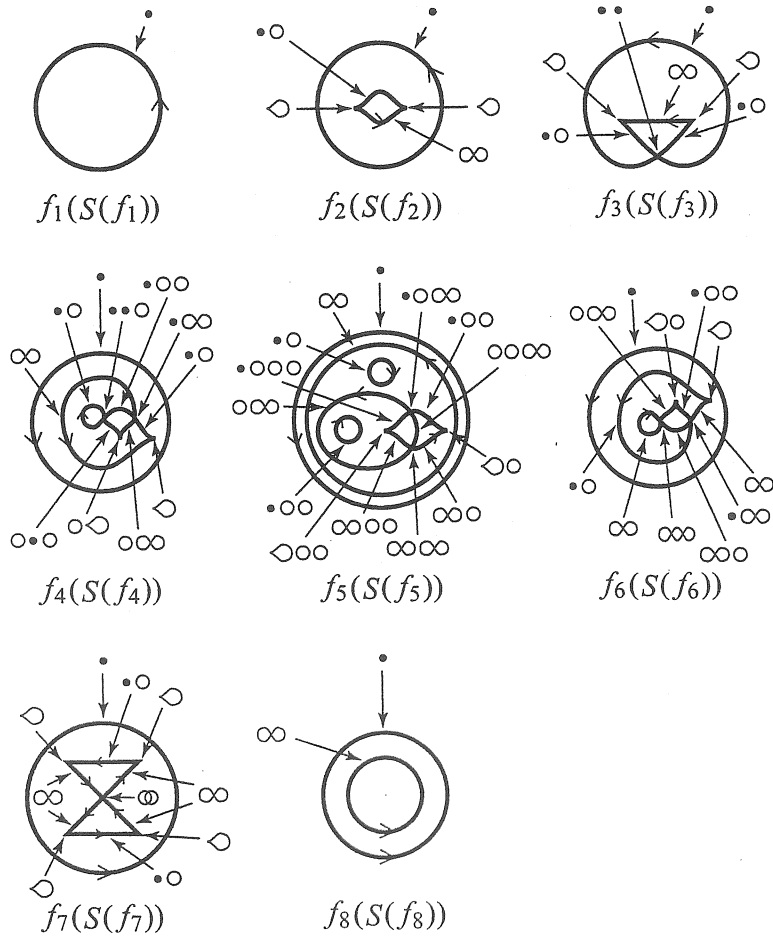


図 3. 安定写像 $f_1, \dots, f_8 : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の臨界値集合と臨界ファイバー

coboundary operator $\delta : C^1(W_{M, \mathbb{R}^2}; \mathbb{Z}) \rightarrow C^2(W_{M, \mathbb{R}^2}; \mathbb{Z})$ が定義される. 下の cochain complex

$$(6.1) \quad 0 \longrightarrow C^1(W_{M, \mathbb{R}^2}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} C^2(W_{M, \mathbb{R}^2}; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

を弱同値に関する Vasiliev cochain complex と呼ぶ⁵. 写像空間 $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ が可縮なので $\text{Ker}(\delta)$ の任意の元 c に対し, $c(\tau) \in \mathbb{Z}$ はジェネリックな道 $\tau : [-1, 1] \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ の選び方によらず始点, 終点各々の安定写像のアイソトピー類のみによる. 即ち, $c \in \text{Ker}(\delta)$ は安定写像の 1 次の半局所不変量を誘導する. (6.1) において, $\text{rank}(\text{Ker}(\delta)) = 7$ であり, 定理 5.3 の 7 つのアイソトピー不変量 I_2, \dots, I_8 は $\text{Ker}(\delta)$ の 7 つの基底から誘導されたものである.

⁵ Vasiliev cochain complex については [15, 33] を参照の事

また I_1 は $\text{Ker}(\delta)$ の自明な元 $c = 0$ から誘導されたものである。以上の事から次の事が分かる。

系 6.1 ([36]). 任意の安定写像の 1 次の \mathbf{Z} 値半局所不変量は I_1, \dots, I_8 の線形和で表される。

参考文献

- [1] F. Aicardi, *Discriminants and local invariants of planar fronts*, The Arnold-Gelfand mathematical seminars, pp. 1–76, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [2] H. Arakawa and T. Ozawa, *A generalization of Arnold's strangeness invariant*, J. Knot Theory Ramifications **8** (1999), 551–567.
- [3] V. I. Arnold, *Topological invariants of plane curves and caustics*, University Lecture Series, 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [4] J. S. Birman and Xiao-Song Lin, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. **111** (1993), 225–270.
- [5] T. Ekholm, *Regular homotopy and Vassiliev invariants of generic immersions $S^k \rightarrow \mathbf{R}^{2k-1}$, $k \geq 4$* , J. Knot Theory Ramifications **7** (1998), 1041–1064.
- [6] ———, *Self-intersection surfaces, regular homotopy, and finite order invariants*, St. Petersburg Math. J. **11** (2000), 909–929.
- [7] ———, *Differential 3-knots in 5-space with and without self-intersections*, Topology **40** (2001), 157–196.
- [8] C. G. Gibson and C. A. Hobbs, *Singularity and bifurcation for general two-dimensional planar motions*, New Zealand J. Math. **25** (1996), 141–163.
- [9] V. V. Goryunov, *Singularities of projections of complete intersections*, J. Soviet Math. **27** (1984), 2785–2811.
- [10] ———, *Local invariants of mappings of surfaces into three-space*, The Arnold-Gelfand mathematical seminars, pp. 223–255, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [11] ———, *Vassiliev type invariants in Arnold's J^+ -theory of plane curves without direct self-tangencies*, Topology **37** (1998), 603–620.
- [12] K. Habiro, T. Kanenobu and A. Shima, *Finite type invariants of ribbon 2-knots*, in 'Low-dimensional topology (Funchal, 1998)', Contemp. Math. **233**, Amer. Math. Soc., 1999, 187–196.
- [13] T. Januszkiewicz and J. Świątkowski, *Finite type invariants of generic immersions of M^n into \mathbf{R}^{2n} are trivial*, Differential and symplectic topology of knots and curves, pp. 61–76, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 190, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [14] S. Kamada, *Vanishing of a certain kind of Vassiliev invariants of 2-knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 3421–3426.
- [15] M. Kazarian, *Characteristic classes of singularity theory*, The Arnold-Gelfand mathematical seminars, pp. 325–340, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [16] ———, *Relative Morse theory of one-dimensional foliations, and cyclic homology*, Funct. Anal. Appl. **31** (1997), 16–24.
- [17] ———, *The Chern-Euler number of circle bundle via singularity theory*, Math. Scand. **82** (1998), 207–236.

- [18] L. Kushner, H. Levine and P. Porto, *Mapping three-manifolds into the plane I*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **29** (1984), 11–33.
- [19] ———, *Classifying immersions into \mathbb{R}^4 over stable maps of 3-manifolds into \mathbb{R}^2* , Lecture Notes in Math., 1157, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [20] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings*. VI. *The nice dimensions*, Proc. Liverpool Singularities - Symposium, I (1969/70), pp. 207–253, Lecture Notes in Math., 192, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [21] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [22] T. Nowik, *Finite order q -invariants of immersions of surfaces into 3-space*, Math. Z. **236** (2001), 215–221.
- [23] ———, *Order one invariants of immersions*, math., GT/0103157.
- [24] ———, *Higher order invariants of immersions of surfaces into 3-space*, math., GT/0207087.
- [25] T. Ohmoto, *Vassiliev type invariants of order one of generic mappings from a surface to the plane*, Topology of real singularities and related topics (Kyoto, 1997), Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, No. 1006 (1997), 55–68.
- [26] T. Ohmoto and F. Aicardi, *First order local invariants of apparent contours*, preprint, 2002, to appear in Topology .
- [27] T. Ozawa, *Finite order topological invariants of plane curves*, J. Knot Theory Ramifications **8** (1999), 33–47.
- [28] J. H. Rieger and M. A. S. Ruas, *Classification of A -simple germs from k^n to k^2* , Compositio Math. **79** (1991), 99–108.
- [29] O. Saeki, *Topology of singular fibers of differentiable maps*, Lecture Notes in Math., 1854, (Springer-Verlag, 2004).
- [30] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds*, preprint, 2004.
- [31] V. Tchernov, *Arnold-type invariants of curves on surfaces*, J. Knot Theory Ramifications **8** (1999), 71–97.
- [32] ———, *Arnold-type invariants of wave fronts on surfaces*, Topology **41** (2002), 1–45.
- [33] V. A. Vassiliev, *Lagrange and Legendre characteristic classes*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 3, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1988.
- [34] ———, *Cohomology of knot spaces*, Theory of singularities and its applications, pp. 23–69, Adv. Soviet Math., 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
- [35] M. Yamamoto, ‘First order semi-local invariants of stable maps of 3-manifolds into the plane’, Ph.D Thesis, Kyushu Univ., March 2004.
- [36] ———, *First order semi-local invariants of stable maps of 3-manifolds into the plane*, preprint, 2004, to appear in Proceedings of the London Mathematical Society.

波面の幾何学(佐治氏・山田氏との共同研究)

阪大・理 梅原雅顕

筆者は、佐治氏・山田氏との共同研究 [SUY] で、曲面の *cuspidal edge* とよばれる特異点に「特異曲率」という概念を導入し、その値と特異点のまわりのガウス曲率について調べた。ここでは、特に外の空間が3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に設定した場合に研究の概要を紹介するが、結果自体はすべて適当な言い換えによって、一般の3次元リーマン多様体内の曲面に対しても成立する。

1. 波面とは？

U は uv -平面 \mathbb{R}^2 の領域とし、 C^∞ -写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を考える。 f がはめ込みとなる点を正則点といいそうでない点を特異点という。いま f に対して、 C^∞ -写像 $\nu(u, v): U \rightarrow S^2$ が存在し、 f の正則点では ν が単位法線ベクトルとなっており、対 $(f, \nu): U \rightarrow \mathbb{R} \times S^2$ がはめ込みになるとき、 $f(u, v)$ を波面あるいは フロント (front, wave front) という。単位余接束 $T_1^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times S^2$ には自然な接触構造が存在するが、波面であることと $L: U \rightarrow T_1^*\mathbb{R}^3$ なるルジャンドルはめ込みが存在し、 f がその射影であることは同値である。波面については、その平行曲面を考えることができ、これも新しい波面となる。

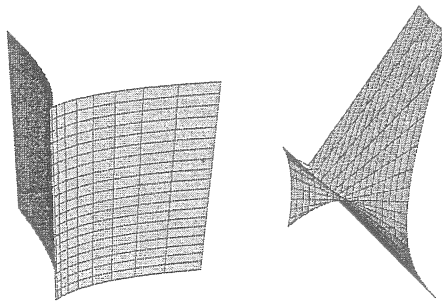


FIGURE 1. cuspidal edge と swallowtail

例 1.1. $f(u, v) = (u^2, u^3, v)$ で定義される写像は 3/2-カスプと \mathbb{R} との直積である。これは *cuspidal edge* (カスプ状曲面) と呼ばれ、典型的な波面の例を与える。

例 1.2. $f(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$ で定義される写像は、波面となり、原点は *swallowtail* (ツバメの尾) と呼ばれる特異点を定める。

例 1.3. $f(u, v) = (u^2, v, uv)$ で定義される写像は、*cross cap* (交叉帽) と呼ばれる特異点を定める。これはジェネリックな C^∞ -写像の特異点として有名である。しかし、法線ベクトルは、近づく方向により極限が異なるため波面にはならない。

例 1.4. $f(u, v) = (u, v^2, uv^3)$ で定義される写像は, *cuspidal cross cap* と呼ばれる特異点を定める. この特異点の近傍では, 単位法線ベクトル場 ν を滑らかにとることができるが, (f, ν) は, はめ込みにはならず, 波面にはならない.

cuspidal edge と swallow tail は, 波面のジェネリックな特異点であることが知られている.

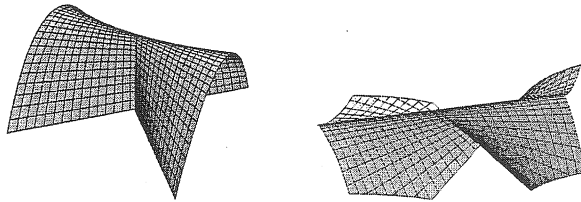


FIGURE 2. cross cap と cuspidal cross cap

2. 特異曲率

M^2 を向き付けられた 2次元多様体とし, $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ なる波面を考える. このとき上述のように, 滑らかな f の単位法ベクトル場 ν がとれるので, 必要に応じて波面を対 (f, ν) として表現する. いま (u, v) を正の座標とすると,

$$d\hat{A} := \det(f_u, f_v, \nu) du \wedge dv$$

を符号付き面積要素 とよぶ. また

$$dA := \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$$

で表される微分形式を面積要素 とよぶ. dA と $d\hat{A}$ は符号を除いて等しい. M^2 から特異点集合を除いた集合は dA と $d\hat{A}$ が同符号の部分 M_+ と異符号の部分 M_- に類別される. いま

$$\lambda(u, v) := \det(f_u, f_v, \nu) \left(= d\hat{A} / (du \wedge dv) \right)$$

とおくと, M_+ では $\lambda > 0$ であり, M_- では $\lambda < 0$ である. この λ を符号付き面積密度関数という.

定義 2.1. f の特異点 $p \in M^2$ が, 非退化 (non-degenerate) であるとは, $d\lambda \neq 0$ が点 p で成り立つときをいう.

非退化であるという条件は A-同値で不変な概念である. 非退化な特異点の集合の連結成分は M^2 上の正則曲線となる. これを特異曲線 といひ, その接ベクトル方向を特異方向という. また $df(v) = 0$ となる零でない接ベクトル $v \in T_p U$ の定める方向を退化方向という. 退化方向は, 非退化な特異点では一意に定まるので特異曲

線 $\gamma(t)$ にそって、至る所消えない滑らかな退化方向の場 $\eta(t)$ をとることができる。次が成り立つ。

(Fact) ([KRSUY], cuspidal edge と swallowtail の内的判定条件) $\gamma(t)$ を U 内の特異曲線で、各点が f の非退化な特異点に対応しているとする

- (1) $\gamma(t)$ が cuspidal edge と局所微分同相であるための必要充分条件は、退化方向と特異方向が横断的であることである。
- (2) $\eta(t) (\neq 0)$ を γ 上の退化方向の滑らかな場とすると、 $\gamma(t)$ がツバメの尾と局所微分同相であるための必要充分条件は、その点において退化方向と特異方向が一致し、 $\det(\eta(t), \gamma'(t))' \neq 0$ が成り立つことである。ただしプライムは t に関する微分を表す。

以下、断りない限り、特異曲線上には非退化な特異点は存在しないとする。また、特異曲線 $\gamma(t)$ は M^2 上の曲線と考え、その f による像は $\hat{\gamma}(t)$ と表示する。いま正則曲線 $\gamma(t)$ を、与えられた非退化なフロントの特異曲線とする。符号付き面積密度関数は特異曲線を夾んで符号を変える。このことは $\lambda_u = 0$ であることから、 $\lambda_v \neq 0$ となることから従う。

$\eta(t)$ を、特異曲線 $\gamma(t)$ に沿うベクトル場で退化方向を与えるものとする。 $\eta(t)$ の向きは \pm の不定性があるが、 (γ', η) が正の基底になるように指定する。このとき

$$\kappa_s(t) := \operatorname{sgn}(d\lambda(\eta)) \frac{\det(\hat{\gamma}', \hat{\gamma}'', \nu)}{|\hat{\gamma}'|^3} \quad (\lambda := \det(f_u, f_v, \nu))$$

とおく。但しプライムは t に関する微分を表す。cuspidal edge 上でこの値は有界であり、特異曲率 (singular curvature) とよぶ。特異曲率は、 M^2 の向き、 ν のとり方、 $\gamma(t)$ の進行方向に依存しない。

注意 2.2. 特異曲率の定義より

$$\kappa_s(t) = \operatorname{sgn}(d\lambda(\eta)) \frac{\det(\hat{\gamma}'', \nu, \hat{\gamma}'/|\gamma'|)}{|\gamma'|^2} = \operatorname{sgn}(d\lambda(\eta)) \frac{(\hat{\gamma}'', n)}{|\gamma'|^2}$$

ここで $n(t)$ は曲線の co-normal ベクトルの極限に相当する概念である。このことから $\gamma_\varepsilon(t)$ を $\gamma(t)$ の変分で、 $\varepsilon \neq 0$ のときには特異点を含まないとする

$$k_s = \operatorname{sgn}(d\lambda(\eta)) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_g(\varepsilon)$$

と書いて、特異曲率が、符号を除いて測地的曲率の極限であることがわかる。

命題 2.3. 特異曲線において、cuspidal edge 以外の点が孤立しているとき、非退化な峰 という。非退化な峰 (特に swallowtail) における特異曲率は $-\infty$ である。

ここでは厳密な言明は避けるが、下図のように特異曲率が負なら、特異点は反り返り、正なら丸くなることを、数学的に示すことができる。

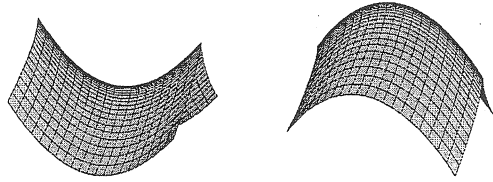


FIGURE 3. 負と正の cuspidal edges

3. Gauss-Bonnet の定理について

前節で定義した特異曲率は、以下のように曲面の位相と関係する。次の2つの定理が成り立つ。

定理 3.1. (*Kossowski [K]*) M^2 をコンパクトとすると、非退化な特異点しかもたなければ

$$(\text{全曲率}) + 2(\text{全特異曲率}) = 2\pi\chi(M^2)$$

が成り立つ。

但し、[K] では特異曲率は扱われておらず 1-form $\kappa_s ds$ の積分として全特異曲率を定義している。

定理 3.2. (*Langevin-Levitt-Rosenberg [LLR], Kossowski [K]*) M^2 をコンパクトとすると、*cuspidal edge* と *swallowtail* しかもたなければ

$$(\text{符号付き全曲率}) + 2\pi \left(\#(\text{正の swallowtail}) - \#(\text{負の swallowtail}) \right) = 4\pi \deg(\nu)$$

が成り立つ。但し、正の *swallowtail* とは、正の領域の側の内角が 2π となるものとし、内角が 0 となるものを負の *swallowtail* とよぶ。

注意 3.3. 上記の定理はより一般的に、「その点の除外近傍には (C^1 級の) 有限本の cuspidal edge しかなく、 df の階数が 1 となるような特異点」のみを許容する場合にまで拡張できる。このときには

$$(\text{全曲率}) + 2(\text{全特異曲率}) = 2\pi\chi(M^2) + 2\pi\chi(\Sigma_f)$$

$$(\text{符号付き全曲率}) + \sum_{p:\text{peak}} \left(\#(\text{正の内角の総和}) - \#(\text{負の内角の総和}) \right) = 4\pi \deg(\nu)$$

が成り立つ。ただし $\chi(\Sigma_f)$ は f の特異点集合 Σ_f のオイラー数である。

4. 特異曲率とガウス曲率との関係について

まず、特異点付近でガウス曲率が有界であることは、非常に強い制限を特異点に与える。以下が成り立つ。

定理 4.1. ([SUY]) $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面とする. さらに, $\gamma(t): (a, b) \rightarrow U$ を非退化な特異点を定める特異曲線とすると $\gamma(t)$ の近傍でガウス曲率が有界であるための必要充分条件は, 第二基本形式が特異曲線上で恒等的に零になることである.

この定理は, あとで generic な cuspidal edge や swallowtail の性質を調べるときに重要な役割を果たす.

Proof. $t = t_0$ が cuspidal edge の場合のみ証明を与える. この場合, 充分小さな正数 ε をとると $\gamma: (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow U$ はすべて cuspidal edge を定める. 特に, γ は u 軸に対応し, 退化方向が v -方向である uv -座標をとることができる. E, F, G をこの座標系に関する第一基本量, L, M, N を第二基本量とする. また $(,)$ で \mathbb{R}^3 の内積を表す. u -軸上で $f_u = 0$ となる. すると u -軸上で

$$M = -(f_u, \nu_v) = (f_{uv}, \nu) = -(f_v, \nu_u) = 0, \quad N = -(f_v, \nu_v) = 0$$

である. 特異曲線上で $LN - M^2$ は零であるから $LN - M^2 = v\psi(u, v)$ と書ける. したがって $K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$ で

$$EG - F^2 = v^2\varphi(u, v) \quad (\varphi(u, 0) \neq 0)$$

であるから, ガウス曲率 K が有界ならば $\psi(u, v)_v = 0$ でなければならない. したがって, K が有界であるための必要充分条件は

$$(*) \quad (LN - M^2)_v = 0$$

であるが, u -軸に沿って $N = M = 0$ であるため, 条件 (*) は $LN_v = 0$ と同値である. したがって定理を示すには, $N_v \neq 0$ を示せばよい. まず $f_v = 0$ に注意して

$$-N_v = (f_v, \nu_v)_v = (f_{vv}, \nu_v)$$

である. 一方, 再び $f_v = 0$ に注意すると f がフロントであることから $\nu_v \neq 0$ である. ところで

$$0 \neq \lambda_v = \mu(f_u, f_v, \nu)_v = \mu(f_u, f_{vv}, \nu)$$

となる. これより $\{f_u, f_{vv}, \nu\}$ は一次独立であることがわかる. 特に $\nu_v = af_u + bf_{vv} + c\nu$ と書けるが $c = 0$ は明らか. さらに $(\nu_v, f_u) = -M = 0$ なので $\nu_v \neq 0$ より $(\nu_v, f_{vv}) \neq 0$ を得る. \square

さらにガウス曲率が特異点のまわりで非負のときには, 特異曲率は正にはなりえない, つまり, 次が成り立つ.

定理 4.2. ([SUY]) $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面とし, $\gamma(t): (a, b) \rightarrow U$ cuspidal edge を定める特異曲線とする. $\gamma(t)$ の近傍で, ガウス曲率が非負ならば, 特異曲率は 0 以下である.

この定理の証明は前定理より、面倒な計算を要する。この定理により、ガウス曲率が正の波面では

$$(\text{全曲率}) + 2(\text{全特異曲率}) > 2\pi\chi(M)$$

が成り立つことがわかる。曲率が下に有界なリーマン多様体の極限である Alexandrov 空間では逆向きの不等式が成り立つことに注意する。

注意 4.3. 二つの定理の高次元化も可能である。特異点集合 Σ_f が、 \mathbb{R}^n における余次元 2 の部分多様体を形成する超曲面 $f: M^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して、 Σ_f 付近で断面曲率が有界なら Σ_f 上 M^{n-1} の第二基本形式は消える。さらに M^{n-1} の断面曲率が非負なら Σ_f の断面曲率も非負である。

さて、今度は特異点のまわりでガウス曲率が有界でない場合、特異点付近のガウス曲率がどのようなふるまいをするのかを調べてみよう。

第二基本形式が零にならないような cuspidal edge をジェネリックな cuspidal edge とよぶことにする。ここでは、このような cuspidal edge について、その付近でのガウス曲率のふるまいについて考察する。まず以下の同値性に着目する。

$$\text{ジェネリック (generic)} \iff \left(\begin{array}{l} \text{特異曲線の曲率は零ではなく,} \\ \text{その接触平面} \neq \text{極限接平面} \end{array} \right).$$

ただし、曲線の接線方向は、特異曲線の接触平面と極限接平面の交線になっている。すると特異曲線は、この特異点のまわりで、接触平面のどちらか一方の側に横たわる。(なぜなら、曲線の曲率は零でないので、その接触平面への射影は、曲線の接方向を夾んで、接触平面の一方の側にある。) いま、曲面の特異点の近傍の滑らかな単位法線ベクトル場 ν との関係において

$$\text{sgn}_0(\nu) = \begin{cases} 1 & \nu \text{ 側に特異曲線があるとき,} \\ -1 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とおく。また特異点の一方の側を H とし、

$$\text{sgn}_H(\nu) = \begin{cases} 1 & \nu \text{ 方向が } H \text{ の側で外向き,} \\ -1 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

すると、次の定理が成り立つ。

定理 4.4. ジェネリックな cuspidal edge (あるいはジェネリックな swallowtail) が与えられているとせよ。このとき、特異曲線を夾んでガウス曲率は、 $\pm\infty$ と異符号に発散する。

$$\text{sgn}_H(\nu) \text{sgn}_0(\nu)$$

は H の側でのガウス曲率の符号に一致する。

ただし、第二基本形式が零にならないような swallowtail をジェネリックとよぶことにする。

例 4.5. 以下のような例を考える.

$$f(u, v) = (3u^4 - 12u^2v \pm (6u^2 - 12v)^2, 8u^3 - 24uv, 6u^2 - 12v)$$

この例では 原点が swallowtail であり, 下半平面が tail 側 (尾の側) である. \pm は tail 側の曲率の正負と連動している. (下図は, 負と正の tail の図である.)

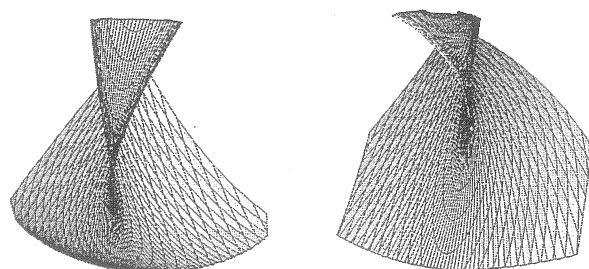


FIGURE 4. 負と正の尾の部分

5. 内的な定式化について

E を M^2 上の階数 2 の向き付けられたベクトル束とし, そこに計量 g_0 と, それと両立する接続 D があったとし,

$$\varphi: TM^2 \rightarrow E$$

なるベクトル束の準同型写像が定義されていたとする. そして X, Y を M^2 上の任意のベクトル場とすると

$$D_X\varphi(Y) - D_Y\varphi(X) = \varphi([X, Y])$$

が満たされるならば, (E, g_0, D, φ) を抽象的な波面と考えることにする. この状況で g_0 の ψ による TM への引き戻した計量の退化する点を特異点とよぶ. 一方, E には向きを指定しているので, M^2 から $\wedge E^*$ への断面 μ_0 で向きに適合した至る所消えないものがとれる. もしも与えられた特異点のまわりの局所座標 (U, u, v) をとったとき

$$\lambda := \mu_0(\psi(\partial/\partial u), \psi(\partial/\partial v))$$

で定まる U 上の C^∞ -関数の勾配が消えないならば, その点を非退化な特異点とよぶ. このとき, §1 で述べた cuspidal edge と swallowtail の判定条件が intrinsic であったことに着目し, 抽象的に intrinsic cuspidal edge と intrinsic swallowtail が定義できて, 以下の 2 つのガウス・ボンネの定理が成立する.

$$(\text{全曲率}) + 2(\text{全特異曲率}) = 2\pi\chi(M) + 2\pi\chi(\Sigma)$$

$$(\text{符号付き全曲率}) + \#(\text{正の Swallowtail}) - \#(\text{負の Swallowtail}) = 4\pi\chi(E)$$

が成り立つ。ここで $\chi(E)$ は向きづけられたベクトル束としての E の Euler characteristic を表すものとする。また $\chi(\Sigma)$ は 特異点集合 Σ のオイラー数を表す。

実際の波面は、極限としての接束 (limiting tangent bundle) が法線ベクトルに直交する平面の集まりとして定義され、外から誘導される計量と接続は、上の意味の抽象的な波面の例になっている。このとき、§1 例 4 の cuspidal cross cap は、実際には波面ではないが (cuspidal edge と共に) intrinsic cuspidal edge になっているので、この定式化で適用範囲が広がることを指摘しておきたい。さらに、上の定式化は、余次元が高い場合にも適用可能である。

(終わりに) このシンポジウムで話す機会をいただけたことに感謝します。関連する研究テーマとして、定曲率空間内の定曲率曲面の特異点についての研究がありますが、文献 [Is], [Iz], [IM], [KRSUY] 等を参照してください。

REFERENCES

- [Is] G. Ishikawa, *Singularities of developable surfaces*, in London Mathematical Society Lecture Note Series, 263 (1999), 403–418.
- [Iz] S. Izumiya, *Generating families of developable surfaces*, Preprint.
- [IM] G. Ishikawa and Y. Machida, *Singularities of improper affine sphere and surfaces of constant Gaussian curvature*, Preprint.
- [K] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surface with limiting tangent bundle*, *Annals of Global Analysis and Geometry* **21** (2002), 19–29.
- [KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, to appear in *Pacific J. Math.*
- [LLR] R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, *Classes d'homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d'aronde dans \mathbb{R}^3* , *Canad. J. Math.* **47** (1995), 544–572.
- [SUY] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Geometry of fronts*, Preprint, math.DG/0503236.

穴あきトーラスクライン群のフォード基本多面体

秋吉宏尚

大阪市立大学数学研究所

3次元球面内の結び目は、トーラス結び目、サテライト結び目、双曲的結び目のいずれかであるという事実は、Thurstonによるハーケン多様体の双曲一意化定理の直接の帰結である。この分類により、非常に多くの結び目が双曲的である（すなわち、補空間が有限体積完備双曲構造を許容する）ことがわかる。モストウ剛性により結び目の補空間が許容する（有限体積完備）双曲構造は高々1つなので、双曲構造は双曲結び目の不変量であることになる。双曲結び目補空間のように、非コンパクトな有限体積双曲多様体はカスプを持つが、そのような多様体には、Epstein-Penner [10]により標準的分割という、有限個の理想多面体への一意的な分割法が定義されている。（例えばWeeksによるコンピュータソフトSnapPea [21]は内部でこの分割を用いている。）

3次元双曲多様体の基本群はホロノミー表現により3次元双曲空間 \mathbb{H}^3 の等長変換群 $PSL(2, \mathbb{C})$ の離散部分群（クライン群）とみなされる。クライン群にはフォード基本多面体が定義されるが、カスプを1つだけ持つ有限体積双曲多様体に対しては、これは標準的分割の双対であることがわかる。

(1点) 穴あきトーラス擬フックス群のフォード基本多面体の組み合わせ構造の研究は70年代のJorgensenによる未完の論文[13]に遡る。その論文で用いられているアイディアはその後の様々な研究に直接的、間接的に影響を与えてきているように思える。（それを概観する論文は[19, 4, 5, 17, 18]など、数多くあるが、証明はまだ与えられていなかった。）講演者は作間誠、和田昌昭、山下靖の三氏との共同研究[7]により[13]に述べられている定理に証明を与えた。

この講演では、Jorgensenにより定義されたside parameterの幾何学的無限境界群への拡張、無限遠等角構造を用いて定義されるエンド不変量とside parameterとの比較など、穴あきトーラスクライン群のフォード基本多面体の組み合わせ構造に関連する、これまでにわかったことを紹介する。これらは、円周上の穴あきトーラス束や二橋結び目補空間の標準的分割の研究へも応用される。

1 穴あきトーラスに関する準備

穴あきトーラス T の有限面積完備双曲構造は図1の左の絵に描かれている2本の点線と6本の円弧に囲まれた領域から、点線どうしを貼り合わせ、円弧を2つおきに逆向きに貼り合わせる事で得られる。このとき、円弧たちは貼り合わされて右の絵に描き込まれて

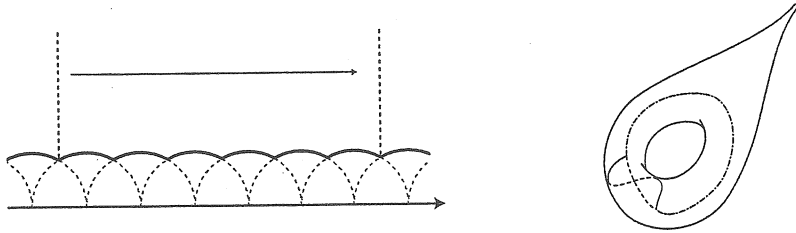


図 1: 穴あきトーラス上の双曲構造の例

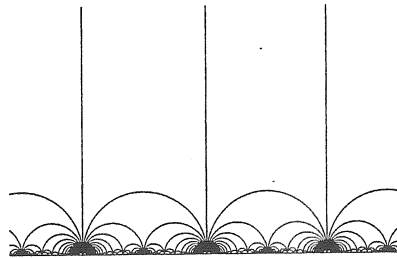


図 2: \mathbb{H}^2 の上半平面モデルを用いて描いたファレイ複体

いるような T のスパインに射影することがわかる. このように, 左の図の組み合わせから右の絵のスパインが得られるという事実が §4 で side parameter を定義するために重要である.

1.1 ファレイ複体

定義 1.1. 双曲平面 \mathbb{H}^2 の理想三角形分割 \mathcal{D} を $\mathcal{D} = \{\gamma\langle 0, 1, \infty \rangle \mid \gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})\}$ により定義する (図 2). ここで, $\langle 0, 1, \infty \rangle$ は $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の 3 点 $0, 1, \infty$ を頂点とする理想三角形とする. この分割から定義される 2 次元複体 \mathcal{D} をファレイ複体と呼ぶことにする.

以下に述べるように, ファレイ複体 \mathcal{D} は穴あきトーラス T の曲線複体と, 1 次元骨格 $\mathcal{D}^{(1)}$ は T のパンツ・グラフとみなされる.

コンパクト曲面上の一点に可縮でも境界成分にホモトピックでもない単純閉曲線を本質的であるという.

定義 1.2. 穴あきトーラス T の曲線複体 \mathcal{C} を以下のように定義する.

- \mathcal{C} は, T 上の本質的単純閉曲線のアイソトピー類の全体を頂点集合とする.
- 2 つの頂点に対し, それらの代表元としてちょうど一点で交わるものが選べるとき, その 2 頂点はそれらを結ぶ辺を張ると定義する.
- $k+1$ 個の頂点に対し, そのうちの任意の 2 頂点が辺で結ばれるときに, それらは k 単体を張ると定義する.

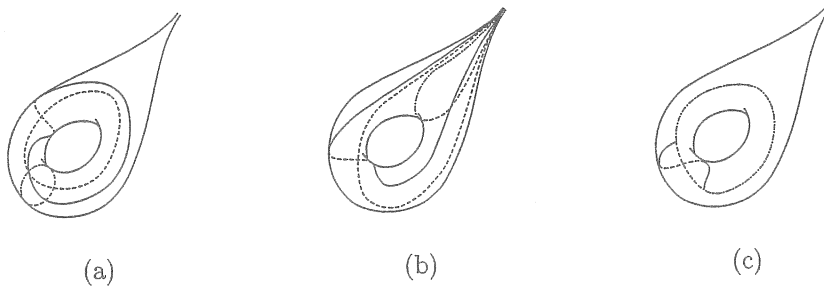


図 3: 三角形に対応する (a) 閉曲線族, (b) 理想三角形分割, (c) スパイン

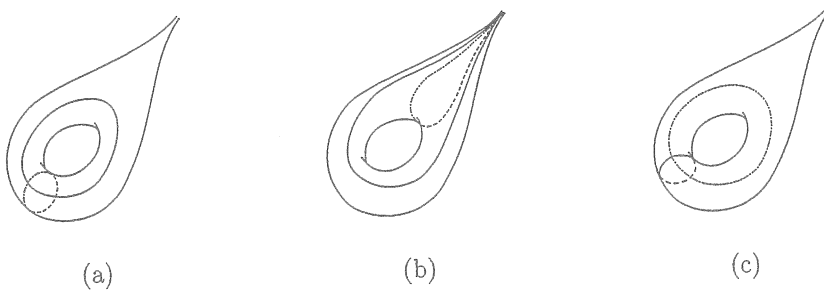


図 4: 辺に対応する (a) 閉曲線族, (b) 理想四角形分割, (c) 退化したスパイン

C には各単体に全ての辺の長さが1となるような標準的ユークリッド計量を導入することにより距離を定義する。

命題 1.3. (1) 穴あきトーラス T の本質的単純閉曲線のアイソトピー類内には T の普遍可換被覆 $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$ 内の直線をリフトとして持つものが存在するが、その傾きは有理数となる。この対応により、 C の頂点集合は D の頂点集合 $\hat{Q} := Q \cup \{\infty\}$ と同一視される。

(2) (1) の対応により C と D の間に単体的同型が誘導される。

(3) C の各三角形に対し、それらの代表元と「平行」な、穴を通る線分を考えることで、 T の理想三角形分割が対応する。また、その理想三角形分割の「双対」として T のスパインが対応する。(図 3.)

(4) C の各辺に対し、 T の理想四角形分割が対応する。その理想四角形分割には T の退化したスパインが対応する。(図 4.)

定義 1.4. 穴あきトーラス T のパンツ・グラフ \mathcal{P} を以下のように定義する。

- \mathcal{P} は、 T のパンツ分解のアイソトピー類の全体を頂点集合として持つ。ただし、 T のパンツ分解とは、本質的単純閉曲線の有限集合で、 T をそれらの曲線に沿って切り開くと得られる各連結成分がパンツ (図 5(a)) となるものである。従って、 T のパンツ分解は 1 本の本質的単純閉曲線からなる。

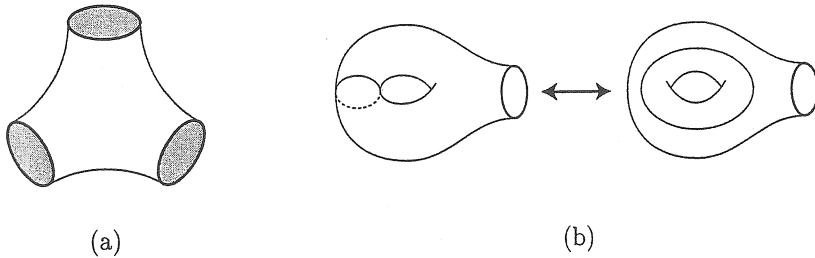


図 5: (a) パンツ, (b) 初等変形

- P の 2 つの頂点が辺により結ばれるのは、それらが図 5(b) に描かれた初等変形により移りあうときとする。

P には、全ての辺の長さが 1 であるように距離を定義する。

命題 1.5. パンツ・グラフ P はファレイ複体の 1 次元骨格 $\mathcal{D}^{(1)}$ と自然に同一視される。

注意 1.6. • 一般の曲面のパンツ・グラフを定義するときには、初等変形として 4 点穴あき球面上のパンツの取替えも用いる必要がある。

- この講演ではパンツ・グラフは擬等長同値の枠組みでしか用いないので、 P を \mathcal{D} とほぼ同じものだと思っていて十分である。

1.2 タイヒミュラー空間

定義 1.7. 穴あきトーラス T が許容する (標識つき) 双曲構造の全体からなる集合 \mathcal{T} を T のタイヒミュラー空間と呼ぶ。すなわち、

$$\mathcal{T} = \{ \varphi : T \rightarrow X \mid \varphi \text{ は有限面積完備双曲面 } X \text{ への同相写像} \} / \sim$$

とする。ただし、 φ_1 と $f \circ \varphi_2$ がホモトピックであるような等長的同相写像 f が存在するとき、 $\varphi_1 \sim \varphi_2$ とする。以後、主に注目するものに応じて、 \mathcal{T} の要素を φ や X のみで表すことにする。

タイヒミュラー空間 \mathcal{T} には、次の 2 つの距離が定義される。

定義 1.8. (1) \mathcal{T} の任意の 2 点 X, Y に対し、それらの間には擬等角同相写像が存在する。そのような擬等角写像の最大歪曲度の下限を K とするとき、 $d_{\mathcal{T}}(X, Y) = \frac{1}{2} \log K$ と定義する。 $d_{\mathcal{T}}$ を \mathcal{T} のタイヒミュラー距離と呼ぶ。

(2) \mathcal{T} の各点に対し、その正則 2 次微分の空間はその点における \mathcal{T} の余接空間と自然に同一視される。正則 2 次微分の空間上のピーターソン内積を用いて、 \mathcal{T} にはエルミート計量が定義される。その計量から誘導される \mathcal{T} のリーマン計量に関する距離 d_{WP} を \mathcal{T} のヴェイユ・ピーターソン距離と呼ぶ。

一般に、有限型双曲面 S に対し、定義 1.8(1) と同様にして d_T を定義すると、 $(T(S), d_T)$ は完備フィン斯拉ー空間となることが知られている。穴あきトーラスに対しては、次の事実が知られている。

命題 1.9. (T, d_T) は双曲平面 \mathbb{H}^2 と等長同値である。また、 T 上の測度付葉層構造の集合を \mathcal{PML} とするとき、サーストン・コンパクト化 $T \cup \mathcal{PML}$ は、 \mathbb{H}^2 に無限遠境界を付け加えることによりコンパクト化した $\overline{\mathbb{H}^2}$ と同一視される。

Brock によるヴェイユ・ピーターソン距離に関する次の定理は、一般の有限型双曲面上に対して示されている。

定理 1.10 (Brock [8]). (T, d_{WP}) はパンツグラフ \mathcal{P} と擬等長同値である。

2 穴あきトーラスクライン群

定義 2.1. 穴あきトーラスに有限面積完備双曲構造を与え、そのホロノミー表現を $\rho_0: \pi_1(T) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \subset PSL(2, \mathbb{C})$ とする。

- 表現 $\rho: \pi_1(T) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ が ρ_0 の擬等角変形であるとは、リーマン球面上の擬等角同相写像 $w: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ に対して、 $\rho = w \circ \rho_0 \circ w^{-1}$ 、すなわち、任意の $g \in \pi_1(T)$ に対し $\rho(g) = w \circ \rho_0(g) \circ w^{-1}$ が成立するということである。
- ρ_0 の擬等角変形の共役類全体からなる集合を \mathcal{QF} と書き、穴あきトーラスの擬フックス空間と呼ぶ。 \mathcal{QF} は $\pi_1(T)$ の $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現空間 \mathcal{R} の部分空間とみなされる。
- \mathcal{QF} の \mathcal{R} における閉包を $\overline{\mathcal{QF}}$ と書くことにする。

命題 2.2. 任意の $\rho \in \overline{\mathcal{QF}}$ に対し、 $\mathbb{H}^3 / \text{Im } \rho$ は穴あきトーラスと开区間 $(-1, 1)$ の直積 $T \times (-1, 1)$ に同相である。クライン群 $\text{Im } \rho$ の不連続領域は、 $T \times (-1, 1)$ の「エンド」 $e^- = T \times (-1, -1 + \delta)$ 、 $e^+ = T \times (1 - \delta, 1)$ に対応する 2 つの $\text{Im } \rho$ 不変部分集合 Ω^\pm に分割される。各 Ω^\pm は次のいずれかの性質を持つ。

- Ω^e は開円板に同相で、 $\Omega^e / \text{Im } \rho$ は T に同相である。
- Ω^e は加算無限個の開円板の和集合で、 $\Omega^e / \text{Im } \rho$ は 3 点穴あき球面に同相である。
- Ω^e は空集合である。

(i) または (ii) の性質を持つエンドを幾何学的有限な、(iii) の性質を持つエンドを幾何学的無限なエンドという。

定義 2.3. $\rho \in \overline{\mathcal{QF}}$ に対し、 $\mathbb{H}^3 / \text{Im } \rho$ の各エンド e^e にエンド不変量 $\lambda^e(\rho)$ を T のサーストンコンパクト化 $T \cup \mathcal{PML} \cong \overline{\mathbb{H}^2}$ の点として以下により定義する。 e^e に対応する不連続領域の部分集合を Ω^e とする。

- (i) Ω^e が開円板に同相なとき, T の等角構造が定まる. それを $\lambda^e(\rho) \in \mathbb{H}^2$ とする.
- (ii) Ω^e が加算無限個の開円板の和集合であるとき, T のノードつきリーマン面の構造が定まる. それを $\lambda^e(\rho) \in \partial\mathbb{H}^2$ とする.
- (iii) Ω^e が空集合のとき, e^e から出て行く $\mathbb{H}^3/\text{Im}\rho$ の閉測地線の列が存在し, その極限として \mathcal{PML} の点が定まる. それを $\lambda^e(\rho) \in \partial\mathbb{H}^2$ とする.

定理 2.4 (Minsky [15]). エンド不変量により定まる写像 $\lambda = (\lambda^-, \lambda^+) : \overline{Q\mathcal{F}} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2} \times \overline{\mathbb{H}^2} - \text{diag}(\partial\mathbb{H}^2)$ は全単射で, その逆写像は連続である.

注意 2.5. 交換子積が放物的であるような2つの元により生成され, 階数2の自由群に同型であるようなクライン群を, 穴あきトーラスクライン群と呼ぶ. 定理2.4は, 実は, 穴あきトーラスクライン群の全体に対して証明された(穴あきトーラスに対する ending lamination conjecture の肯定的解決). 特に, (標識付き) 穴あきトーラスクライン群全体の集合と $\overline{Q\mathcal{F}}$ が一致することがわかる.

3 フォード領域

以後, \mathbb{H}^3 に上半空間モデルを用いる.

定義 3.1. ∞ を固定しない $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C})$ に対し, 以下を定義する.

- 複素平面内の中心 $-d/c$, 半径 $1/|c|$ をもつ円を, γ の等長円周といい, $I(\gamma)$ と書く. また, $I(\gamma)$ の外側を $E(\gamma)$ と書く.
- $I(\gamma)$ を赤道とする上半空間に含まれる半球面を γ の等長半球面といい, $Ih(\gamma)$ と書く. また, $Ih(\gamma)$ の上半空間における外側を $Eh(\gamma)$ と書く.

定義 3.2. クライン群 Γ に対し, ∞ の固定化群を Γ_∞ と書くことにする. このとき, $P(\Gamma)$, $Ph(\Gamma)$ を以下により定義する:

$$P(\Gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty} E(\gamma), \quad Ph(\Gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty} Eh(\gamma)$$

これらを, Γ のフォード領域と呼ぶ.

注意 3.3. $\Gamma_\infty \neq \{1\}$ のとき, フォード領域 $P(\Gamma)$, $Ph(\Gamma)$ は Γ の $\widehat{\mathbb{C}}$ や \mathbb{H}^3 への作用の基本領域とはならない. しかしながら, Γ_∞ の $\widehat{\mathbb{C}}$, \mathbb{H}^3 への作用の基本領域をそれぞれ R_∞ , Rh_∞ とすると, $P(\Gamma) \cap R_\infty$, $Ph(\Gamma) \cap Rh_\infty$ は基本領域となる.

例 3.4. ∞ を固定しない双曲的等長変換 $\gamma \in PSL(2, \mathbb{C})$ が生成する無限巡回群 $\langle \gamma \rangle$ はクライン群となるが, (ある γ に対する) そのフォード領域 $Ph(\langle \gamma \rangle)$ は図6に描かれているようになる. 全ての「面」は半球面の一部で, この例では $\partial Ph(\langle \gamma \rangle)$ は8つの面からなっている. 巡回的クライン群のフォード領域の組み合わせ構造の特徴づけは Jorgensen [12] により与えられた ([9] 参照).

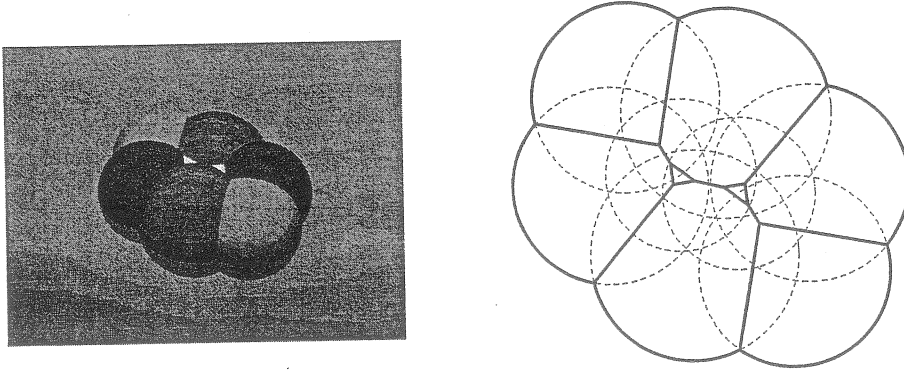


図 6: 巡回的クライン群のフォード基本領域

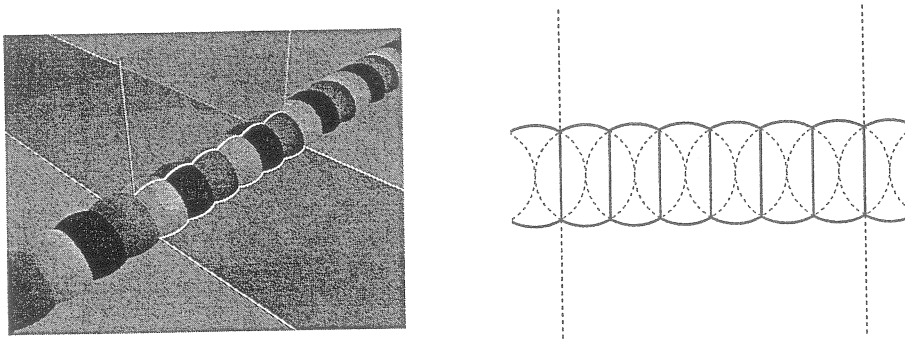


図 7: 穴あきトーラスフックス群のフォード基本領域

例 3.5. 穴あきトーラスの有限面積完備双曲構造に関するホロノミー表現の像を Γ とすると, Γ はフックス群 ($PSL(2, \mathbb{R})$ の離散部分群) となる. フックス群は自然にクライン群となり, そのフォード領域 $Ph(\Gamma)$ は (例えば) 図 7 に描かれているようになる. このとき, 複素平面の実軸上に垂直に立った平面は双曲平面とみなされ, Γ が自然に作用するが, $Ph(\Gamma)$ とその平面との交わりは, フックス群 Γ の「フォード領域」と自然にみなされる.

4 Jorgensen 理論

この節で述べられる事柄の大部分は, Jorgensen による未完の論文 [13] で述べられているものである. その論文には証明 (の詳細) が書かれていないが, 講演者は作問誠, 和田昌昭, 山下靖の三氏との共同研究 [7] により, そこで述べられている定理の証明を与えた.

以後, $\rho \in \overline{\mathcal{QF}}$ に対し, $P(\text{Im } \rho)$, $Ph(\text{Im } \rho)$ をそれぞれ $P(\rho)$, $Ph(\rho)$ と省略して書くことにする.

例 4.1. 図 8 に描かれているのは, 一般的な穴あきトーラス擬フックス群のフォード領域である. その組み合わせ構造は定義 4.3 で定義される side parameter を用いて記述される.

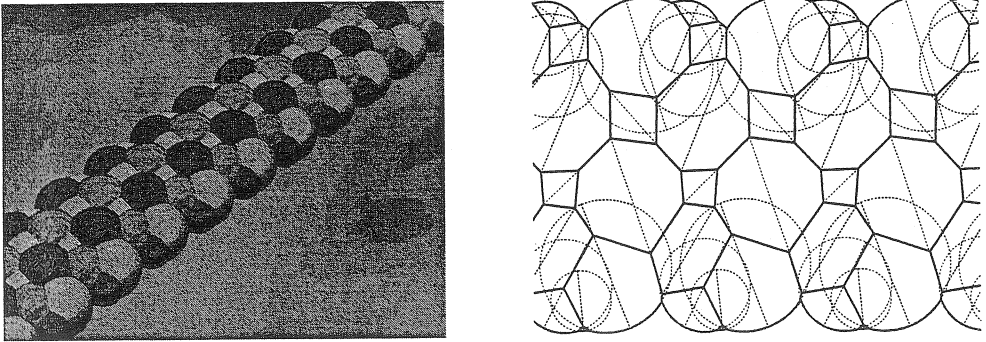


図 8: 一般的な穴あきトーラス擬フックス群のフォード領域

右の図を見ると、上下の境界に図 1 に描かれているのと組み合わせ的に同じパターンが現れている。(実は、貼り合わせの規則も同じである。) 従って、上下の境界から T 上のスパインが定まる。 $\partial Ph(\rho)$ を下から上にたどっていくと、上下に定まったスパインをホワイトヘッド変形の列によりつなぐ様子が自然に現れることがわかる ([6, 7] 参照)。

定理 4.2. 任意の $\rho \in \mathcal{QF}$ に対し、 $P(\rho) \subset \mathbb{C}$ はちょうど 2 つの連結成分 $P^\pm(\rho)$ からなる。(ただし、連結成分の符号 \pm は、複素平面内での上下により定める。) 各 $\epsilon \in \{-, +\}$ に対し、ある $\pi_1(T)$ の元の列 $\{A_j^\epsilon\}$ が存在し、 $\partial P^\epsilon(\rho)$ は以下の性質を持つ円弧 e_j^ϵ ($j \in \mathbb{Z}$) の和集合として表される。

- (i) 任意の $j, k \in \mathbb{Z}$ に対し $s(A_{j+3k}^\epsilon) = s(A_j^\epsilon)$ で、さらに、 $s(A_0^\epsilon), s(A_1^\epsilon), s(A_2^\epsilon)$ は D の三角形 σ^ϵ を張る。
- (ii) 任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対し e_j^ϵ は $I(\rho(A_j^\epsilon))$ に含まれる。
- (iii) e_j^ϵ の $I(\rho(A_j^\epsilon))$ における角度の半分を θ_j^ϵ とすると、

$$\theta_0^\epsilon + \theta_1^\epsilon + \theta_2^\epsilon = \pi/2$$

が成り立つ。

定義 4.3 (side parameter). 任意の $\rho \in \mathcal{QF}$ に対し、双曲平面 \mathbb{H}^2 の 2 点 $\nu^\pm(\rho)$ を以下のように定義する。各 $\epsilon \in \{-, +\}$ に対し、 σ^ϵ を定理 4.2 で定まる三角形とする。 $\nu^\epsilon(\rho)$ は、三角形 σ^ϵ の重心座標に関して座標 $(\theta_0^\epsilon, \theta_1^\epsilon, \theta_2^\epsilon)$ を持つ点として定める。

定理 4.4. 定義 4.3 により定まる写像 $\nu = (\nu^-, \nu^+) : \mathcal{QF} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ は同相写像である。

次の定理は講演者による side parameter の $\overline{\mathcal{QF}}$ への拡張である。([1] に概略。詳細は準備中。)

定理 4.5. 写像 $\nu : \mathcal{QF} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ は以下の性質を持つ写像 $\nu = (\nu^-, \nu^+) : \overline{\mathcal{QF}} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2} \times \overline{\mathbb{H}^2} - \text{diag}(\partial\mathbb{H}^2)$ へと拡張される。

- (1) 任意の $\rho \in \overline{Q\mathcal{F}}$ に対し, $Ph(\rho)$ の組み合わせ構造は $\nu(\rho)$ により記述される.
- (2) ν は強位相に関して連続な全射である.
- (3) 各 $\epsilon = \pm$ に対し, $\nu^\epsilon(\rho) \in \partial\mathbb{H}^2$ と $\lambda^\epsilon(\rho) \in \partial\mathbb{H}^2$ は同値である. さらに, これらの条件が満たされるとき, $\nu^\epsilon(\rho) = \lambda^\epsilon(\rho)$ である.

5 双曲体積の評価

エンド不変量 λ と side parameter ν の間には, 定理 5.1 に述べられる関係がある. この定理と Brock による定理 5.3 を組み合わせることで, フォード領域の組み合わせ構造による凸核の体積の評価 (系 5.4) が得られる. ([3] に概略. 詳細は準備中.)

定理 5.1. 以下の性質を持つ定数 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ が存在する.

- (1) $\nu^\epsilon(\rho) \in \sigma = \langle s_0, s_1, s_2 \rangle$, $\pi/2 - \theta_0^\epsilon \leq \delta_1$ ならば, 等角構造 $\lambda^\epsilon(\rho)$ に関して最短の極值的長さを持つ本質的単純閉曲線は, 傾き s_0 を持つ.
- (2) $\nu^\epsilon(\rho) \in \sigma = \langle s_0, s_1, s_2 \rangle$, $\min\{\theta_j^\epsilon \mid j = 0, 1, 2\} \geq \delta_1$ ならば, $d_T(\nu^\epsilon(\rho), \lambda^\epsilon(\rho)) \leq \delta_2$ である.

系 5.2. 次の性質を持つ $\delta_0 \geq 0$ が存在する. 任意の $\rho \in Q\mathcal{F}$, $\epsilon \in \pm$ に対し, $d_{WP}(\nu^\epsilon(\rho), \lambda^\epsilon(\rho)) \leq \delta_0$ が満たされる.

次の定理は, Brock [8] による. (ここでは, 一般の有限型双曲面に対する定理を穴あきトーラスに限定して述べている.)

定理 5.3. $\rho \in Q\mathcal{F}$ に対し, $d_{WP}(\lambda^-(\rho), \lambda^+(\rho))$ と $\text{Vol}(\text{Core}(\rho))$ は比較可能である. すなわち, ある $c_1 \geq 1$, $c_2 \geq 0$ が存在し, 任意の $\rho \in Q\mathcal{F}$ に対し,

$$c_1^{-1} d_{WP}(\lambda^-(\rho), \lambda^+(\rho)) - c_2 \leq \text{Vol}(\text{Core}(\rho)) \leq c_1 d_{WP}(\lambda^-(\rho), \lambda^+(\rho)) + c_2$$

が成立する. ここで, $\text{Core}(\rho)$ により, 双曲多様体 $\mathbb{H}^3 / \text{Im } \rho$ の凸核を表す.

系 5.4. $\rho \in Q\mathcal{F}$ に対し, $d_{WP}(\nu^-(\rho), \nu^+(\rho))$ と $\text{Vol}(\text{Core}(\rho))$ は比較可能である.

6 いくつかの応用

6.1 穴あきトーラス束の標準的分割

擬アノソフ同相写像 $\varphi : T \rightarrow T$ が与えられたとき, 円周上の穴あきトーラス束 $M_\varphi = T \times [0, 1] / (x, 0) \sim (\varphi(x), 1)$ は有限体積完備双曲構造を許容する. 定理 4.5 の系として, そのような M_φ の標準的分割が Floyd-Hatcher [11] に述べられた理想四面体分割と一致する

ことがわかる。(これは Lackenby [14] により、位相幾何学的な手法ですでに証明されている。) $\pi_1(T)$ は $\pi_1(M_\varphi)$ の正規部分群となっており、 ρ_φ を M_φ の双曲構造に関するホロノミー写像の $\pi_1(T)$ への制限とすると、 $\rho_\varphi \in \partial QF$ であることが知られている。 φ は \mathbb{H}^2 に双曲的等長変換として自然に作用するが、 $\nu^\pm(\rho_\varphi)$ はその作用の2つの固定点に一致することが示される。こうして、 $Ph(\rho_\varphi)$ の組み合わせ構造が決定される。 M_φ の標準的分割はその「双対」として得られる。

6.2 離散性の判定

定理 4.4 を用いると、交換子積が放物的であるような2つの元で生成される $PSL(2, \mathbb{C})$ の部分群の離散性を保障するための十分条件が得られる。あわせてヨルゲンセンの不等式を必要条件として用いることで、実用上、非常に強力な離散性の判定法が得られる。それを基にして、和田昌昭氏による OPTi ([20])、山下靖氏による様々な数値実験 ([22]) など、コンピュータを用いた穴あきトーラス群の研究が進められている ([6] も参照)。

6.3 二橋結び目補空間の標準的分割

4点穴あき球面が穴あきトーラスと通約可能であることから、Jorgensen の手法は4点穴あき球面擬フックス群の研究にも応用できる。さらに、擬フックス空間の外部に存在する離散的でない表現で、錐多様体の構造を導くようなものにもその手法が応用できることがわかる。こうして、錐多様体の変形族の極限として、双曲的二橋結び目(絡み目)補空間の双曲構造を具体的に構成できる ([4, 5, 6] に概略)。その結果、作間・Weeks [16] により構成された二橋結び目補空間の標準的分割の候補が、確かに標準的分割であることが証明される。

7 On pairs of punctured torus groups

図9に描かれている2つの結び目は、いずれも双曲的結び目である。さらに、いずれの結び目の種数も1である。実際、図に描かれているような穴あきトーラスをザイフェルト曲面として持つ。また、 K_2 は K_1 から、図(a)に描かれた、穴あきトーラス上の曲線 α に沿ったデー手術により得られることがわかる。

2つの結び目の違いとして、 K_1 はファイバー結び目であり、 K_2 はそうでないことが挙げられる。これは、Thurston によるハーケン多様体に対する双曲一意化定理の証明において大きな違いを引き起こす。6.1 で述べたように、穴あきトーラス東の双曲構造はフォード領域を用いて組み合わせ的にも精密に理解された。そこで、 K_2 のような非ファイバー曲面を含む多様体の双曲構造も組み合わせ構造の観点から理解できるのではないかと期待している。

α を穴あきトーラスから少し浮かせた曲線と K_1 との2成分からなる絡み目を L とする。8の字結び目がファイバー結び目であることから、次に定義する M_0 は、 L の補空間を穴

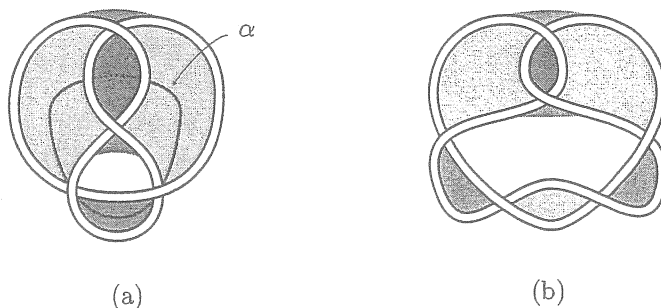


図 9: (a) 8 の字結び目 $K_1 = 4_1$, (b) $K_2 = 6_1$ (結び目の番号は Rolfsen の表のもの)

あきトーラスにより切り開いたものと同相である。

定義 7.1. 穴あきトーラス T と开区間 $(-1, 1)$ の直積 $T \times (-1, 1)$ に含まれる曲面 $T \times \{0\}$ 上の本質的単純閉曲線を γ とする. このとき, $T \times (-1, 1) - \gamma$ を M_0 と書き, $T \times (-1, 1)$ から γ に沿った r デーン手術により得られる多様体を $M_0(r)$ と書くことにする. また, $M_0(r)$ が許容する ($\partial T \times (-1, 1)$ をカusp とする) 幾何学的有限な双曲構造の空間を $\mathcal{GF}(r)$ とする.

問題 7.2. $\mathcal{GF}(r)$ とその境界に含まれる双曲構造をフォード領域を用いて考察せよ.

問題 7.2 を考察するために, 以下のアプローチをとることにする.

- (1) 2つの「double cusp group」を貼り合わせる事により, M_0 の幾何学的有限な双曲構造を構成する.
- (2) (1) で得られた双曲多様体に双曲デーン手術を施すことにより, $\mathcal{GF}(r)$ に含まれる双曲構造を構成する.
- (3) Jorgensen 流のアプローチにより, $\mathcal{GF}(r)$ に含まれる双曲構造を組み合わせ構造の観点から精密に研究する.

穴あきトーラス群のフォード領域の研究により, (1) はフォード領域の組み合わせ構造まで込めてすでに完成している. また, ほとんど全ての双曲デーン手術で得られる群のフォード領域は, (1) のフォード領域に巡回的クライン群のフォード領域 (図 6) を「貼り合わせる」ことで得られることがわかる ([2] 参照). 講演では, いくつかの具体例を通して, (2), (3) について現在までに得られた結果を紹介する.

参考文献

- [1] H. Akiyoshi, *On the Ford domains of once-punctured torus groups*, in *Hyperbolic spaces and related topics*, RIMS, Kyoto, Kokyuroku 1104 (1999), 109-121.

- [2] H. Akiyoshi, *Canonical decompositions of cusped hyperbolic 3-manifolds obtained by Dehn fillings*, in *Perspectives of Hyperbolic Spaces*, RIMS, Kyoto, Kokyuroku 1329, 121–132, (2003).
- [3] H. Akiyoshi, *End invariants and Jorgensen's angle invariants of punctured torus groups*, in *Perspectives of Hyperbolic Spaces II*, RIMS, Kyoto, Kokyuroku 1387, 59–69 (2004).
- [4] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and two-parabolic groups*, RIMS, Kyoto, Kokyuroku 1065 (1998), 61–73.
- [5] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Ford domains of punctured torus groups and two-bridge knot groups*, in “Knot Theory”, Proceedings of the workshop held in Toronto dedicated to 70th birthday of Prof. K. Murasugi, 1999.
- [6] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Jørgensen's picture of punctured torus groups and its refinement*, Proceeding of the workshop “Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds” (edited by Y.Komori, V.Markovic and C.Series), London Math. Soc., Lect. Notes 299 (2003), 247–273.
- [7] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)*, preprint.
- [8] J. F. Brock, *The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), no. 3, 495–535.
- [9] T. A. Drumm and J. A. Portiz, *Ford and Dirichlet domains for cyclic subgroups of $PSL(2, C)$ action on $\mathbb{H}^3_{\mathcal{R}}$ and $\partial\mathbb{H}^3_{\mathcal{R}}$* , Conformal Geometry and Dynamics, An Electronic Journal of the A.M.S. Vol. 3 (1999), 116–150.
- [10] D. B. A. Epstein and R. C. Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Diff. Geom. 27 (1988) 67–80.
- [11] W. Floyd and A. Hatcher, *Incompressible surfaces in punctured torus bundles*, Topology Appl. 13 (1982), 263–282.
- [12] T. Jorgensen, *On cyclic groups of Möbius transformations*, Math. Scand. 33 (1973), 250–260.
- [13] T. Jorgensen, *On pairs of punctured tori*, unfinished manuscript, available in Proceeding of the workshop “Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds” (edited by Y.Komori, V.Markovic and C.Series), London Math. Soc., Lect. Notes 299 (2003), 183–207.

- [14] M. Lackenby, *The canonical decomposition of once-punctured torus bundles*, Comment. Math. Helv. 78 (2003), no. 2, 363–384.
- [15] Y. Minsky, *The classification of punctured torus groups*, Ann. of Math. 149 (1999), 559–626.
- [16] M. Sakuma and J. Weeks, *Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements*, Japanese Journal of Math. 21(1995), 393–439
- [17] J. R. Parker and B. O. Stratmann, *Kleinian groups with two singly cusped parabolic fixed points*, Kodai Math. J. 24 (2001), 169–206.
- [18] T. J. Schedler, *Troels Jorgensen's once-punctured theory*, Thesis, 2002, Harvard University.
- [19] D. Sullivan, *Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsians et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur S^1* , In *Bourbaki Seminar, 1979/80*, Lect. Notes in Math., 842, Springer Verlag, 1981. pp.196–214.
- [20] M. Wada, *OPTi*, a Macintosh software, available from:
<http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~wada/index-jp.html>
- [21] J. Weeks, *Convex hulls and isometries of cusped hyperbolic manifolds*, Topology Appl. 52 (1993) 127–149.
- [22] Y. Yamashita, *Computer experiments of the discreteness locus in projective structures*, to appear in the proceeding of the workshop, “Spaces of Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds”, London Math. Soc., Lect. Notes. Edited by Y. Minsky, M. Sakuma, and C. Series.

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学 数学研究所
e-mail: akiyoshi@sci.osaka-cu.ac.jp

The curve complex and hyperbolic 3-manifolds
Talk at the Japan Topology Symposium.
Kochi, 6th–9th August, 2005.

Brian H. Bowditch

School of Mathematics, University of Southampton,
 Highfield, Southampton SO17 1BJ, Great Britain.
<http://www.maths.soton.ac.uk/staff/Bowditch>

and

Department of Mathematical and Computing Science,
 Tokyo Institute of Technology, W8-49, 2-12-1 O-okayama,
 Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan.

0. Introduction.

There has recently been a huge amount of activity relating to the topology of surfaces. It has close connections with the study of the mapping class groups, the curve complexes, Teichmüller theory and the geometry of hyperbolic 3-manifolds. One of the principle motivations has been the proof by Brock, Canary and Minsky of Thurston’s ending lamination conjecture. Here we describe some of the 3-manifold background. We explain how ideas of 3-manifold theory can be used to deduce essentially combinatorial results about the curve complex

This is an account of material related to my talk at the 52th Japan Topology Symposium in August 2005. A more detailed exposition of some of this material can be found in the expository article [Bo7] based on my talk at the European Congress of Mathematicians in Stockholm in July 2004. These will be published proceedings of that meeting.

1. Background of 3-manifold theory.

The theory of 3-manifolds has been going for about a hundred years. By the late 1970s an enormous amount of progress had been made, see for example [He1]. For compact manifolds, particularly relevant to the discussion here are the decomposition theorems of Kneser and Milnor, which give us a canonical way of cutting it up along spheres — the “connected sum” decomposition. Then, for aspherical manifolds, the characteristic submanifold construction of Waldhausen, Johanson, Jaco and Shalen gives a canonical way of cutting along tori to give seifert fibred and atoroidal pieces. These are important structure theorems, which subsequently found analogues in other branches of mathematics, notably in the theory of group splittings. However, many fundamental questions remained unanswered. Notably, there is the famous Poincaré conjecture, dating from around 1903, which asks if every closed simply connected 3-manifold is homeomorphic to the 3-sphere.

There had also been significant progress in understanding non-compact 3-manifolds. One usually imposes some sort of finiteness assumption, typically that the fundamental

group of M is finitely generated. Under this hypothesis, Scott [Sc1,Sc2] showed:

Theorem : (Scott core theorem.) *If $\pi_1(M)$ is finitely generated, then there is a submanifold, $M_0 \subseteq M$, whose inclusion into M induces an isomorphism of fundamental groups.*

In particular, it follows that the fundamental group of M is finitely presented. The submanifold, M_0 is referred to as the “Scott core” of M . Note that the ends of M are in bijective correspondence with the boundary components of the Scott core. In particular, there are only finitely many of them. They might however be topologically infinite.

Running parallel to the theory of 3-manifolds was the theory of 3-dimensional Kleinian groups. A Kleinian group is a group Γ acting isometrically, properly discontinuously on hyperbolic 3-space, \mathbf{H}^3 . One can decompose the riemann sphere $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\} = \partial\mathbf{H}^3$ as the *limit set*, Λ , and *discontinuity domain*, Ω . There are closed and open respectively invariant subsets of $\partial\mathbf{H}^3$. The quotient, Ω/Γ , is a disjoint union of riemann surfaces. Again it is usual to assume that Γ is finitely generated. In this case, Selberg’s lemma tells us that, after passing to a finite index subgroup, we can assume that Γ is torsion-free, and so the quotient, $M = \mathbf{H}^3/\Gamma$, is a complete hyperbolic 3-manifold. There is a sophisticated deformation theory relating to such groups due to Ahlfors, Bers, Marden, Maksit, Sullivan etc. One important result is:

Theorem : (Ahlfors’s finiteness theorem) *If Γ is finitely generated, then Ω/Γ is a finite disjoint union of riemann surfaces of finite type.*

This, of course, has connections with Scott’s topological theorem, even though the proof is completely different.

Despite all this progress, many questions remained unanswered, for example, again under the assumption of finite generation:

Questions:

- (1) (The Ahlfors measure conjecture) If $\Lambda \neq S^2$, then the lebesgue measure of Λ is zero.
- (2) If Λ is connected, is it locally connected?

In the early 1970s, Marden and others put together the theory of 3-manifolds and Kleinian groups. In particular, Marden put forward the following:

Tameness conjecture: If Γ is finitely generated, then \mathbf{H}^3/Γ is topologically tame, i.e. homeomorphic to the interior of a compact 3-manifold.

Others, such as Riley, noted that many 3-manifolds, for example many knot complements, admitted hyperbolic structures, so it was natural to ask how universal this phenomenon was.

In the late 1970s Thurston revolutionised the subject with his work on the geometry and topology of 3-manifolds. He made the following:

Geometrisation Conjecture : Every compact 3-manifolds can be canonically cut into pieces each of which admits a geometric structure.

The decomposition, along spheres and tori, is a combination of the connected sum and characteristic submanifold decompositions described earlier. There are eight geometries. Those particularly relevant here are the spherical and hyperbolic cases. In particular, the geometrisation conjecture implies the Poincaré conjecture. Thurston proved the geometrisation conjecture for the large class of “Haken” 3-manifolds, see [Th1,Th2,K,O].

As part of this project, Thurston did much work on non-compact hyperbolic 3-manifolds. He developed a theory of ends, and defined an notion of “geometrical tameness”. This was subsequently shown to be equivalent to topological tameness by Bonahon, Canary, [Bon,Can] and Brin and Thickstun. Thurston also showed that (geometrical) tameness implies the Ahlfors measure conjecture.

With regards to the theory of ends, Thurston made another conjecture, namely:

Ending lamination conjecture: A tame hyperbolic 3-manifold is determined up to isometry by its topology and “end invariants”.

To explain the term “end invariant” we assume for simplicity that M has no cusps. In this case, M has two sorts of ends. One is geometrically finite, and is naturally compactified by a Riemann surface, of the type appearing in Ahlfors’s finiteness theorem. There may also be “simply degenerate” ends. Such an end makes no impression on the discontinuity domain, and so is not noticed by Ahlfors’s finiteness theorem. Associated to such an end is an “ending lamination”. By Scott’s theorem, we have a finite number of such end invariants — each a Riemann surface or a lamination. The ending lamination conjecture asserts that these determine the 3-manifold.

This work began a huge flurry of activity, especially through its links with the relatively young subject of geometric group theory.

However, the most dramatic developments have come in the last three years, with announcements of proofs of the three main conjectures mentioned above. The geometrisation conjecture was announced by Perelman [P1,P2] (2003). The tameness conjecture, independently by Agol [Ag] and Calegari and Gabai [CalG] (2004), and the Ending Lamination conjecture by Minsky, Brock and Canary [Mi4,BroCM] (2002,2004). There has since been a frantic effort trying to come to terms with all this work, and to explore its consequences. Most of the discussion here relates to the ending lamination conjecture.

2. The ending lamination conjecture.

We outline the ideas behind the proof of the ending lamination conjecture by Minsky

and his coworkers, notably Masur, Brock and Canary. For simplicity of discussion here, we assume there are no cusps.

The tameness conjecture is complicated by the fact that the Scott core may contain compressing discs, so that the fundamental group will split as a free product. In this case the fundamental group of an end might not inject into the fundamental group of the 3-manifold. This was a major complication in proving the tameness conjecture, — the indecomposable case having been dealt with in the earlier work of Bonahon [Bon].

This also complicates the ending lamination conjecture, though one can see the principle ideas on restriction to the indecomposable case. In this case, by passing to the appropriate cover, one can assume that the 3-manifold is homotopy equivalent to $\Sigma \times \mathbf{R}$. If each end is geometrically finite, we are in the so-called quasifuchsian case, which is well understood by earlier work — quasifuchsian space is a product of two Teichmüller spaces (see below) coming from the two end invariants. The limit set is a quasicircle.

If one end is geometrically finite, and the other is simply degenerate we have a classical “Bers boundary” group. In this case the limit set is connected, and as mentioned before is conjectured to be locally connected. If that is the case then it must be dendrite. The ending lamination can be understood in these terms. A lamination is a foliation of closed subset of Σ typically locally a cantor set times an interval. The leaves can be taken geodesic. If we lift this picture to the universal cover — the hyperbolic plane — we get a foliation of a subset by bi-infinite geodesics. Collapsing down each leaf complementary region to a point gives us a dendrite. If the limit set is locally connected, this will be the same as the dendrite so constructed.

We now focus our attention on the doubly degenerate case. In this case the limit set the 2-sphere. To describe the ideas behind the proof of the conjecture we will need a few additional definitions.

We start our discussion with quite general metric spaces. Let (X, d) be a metric space. A (global) geodesic in X is a path $\pi : I \rightarrow X$ such that $d(\pi(t), \pi(u)) = |t - u|$ for all $t, u \in I$, where I is a real interval. Usually we will not worry about parametrisations and identify π with its image in X . We say X is a geodesic space if every pair of points are connected by a geodesic. Examples are complete riemannian manifolds, or graphs where each edge is deemed to have unit length. The following is a fundamental notion:

Definition : A function $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ (not necessarily continuous) between geodesic spaces is a *quasi-isometry* if there are constants, $c_1 > 0$, $c_2, c_3, c_4, c_5 \geq 0$, such that for all $x, y \in X$,

$$c_1 d(x, y) - c_2 \leq d'(f(x), f(y)) \leq c_3 d(x, y) + c_4$$

and for all $y \in X'$, there exists $x \in X$, such that $d'(y, f(x)) \leq c_5$.

We say that X, X' are *quasi-isometric* and write $X \sim X'$, if there is some quasi-isometry between them. One verifies that this defines an equivalence on geodesic spaces.

For later discussion we also need the following notion introduced by Gromov:

Definition : A geodesic space, X , is k -hyperbolic if for any triangle consisting of three geodesics, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, in X , cyclically connecting three points, then σ_3 lies in a k -neighbourhood of $\sigma_1 \cup \sigma_2$. We say that X is (Gromov) hyperbolic if it is k -hyperbolic for some $k \geq 0$.

Note, in particular, that any two geodesics with the same endpoints remain bounded distance apart.

Expositions of this notion of hyperbolicity can be found in [GhH], [CoDP], [Sho] and [Bo1].

It turns out that hyperbolicity is quasi-isometry invariant.

The idea of Teichmüller space also features prominently: The Teichmüller space, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Sigma)$, of Σ is the space of marked hyperbolic structures on the interior, $\text{int}(\Sigma)$, of Σ (see [Ab,ImT]). More precisely, an element of \mathcal{T} consists of a complete finite-area hyperbolic surface, S , which is “marked” by a homotopy class of homeomorphisms, $\text{int}(\Sigma) \rightarrow S$. The “thick part” of Teichmüller space is the subset corresponding to those surfaces whose injectivity radius is bounded below by some positive constant.

We now return to our discussion of the ending lamination conjecture for a doubly degenerate manifold, $\Sigma \times \mathbf{R}$.

The general strategy is to construct a “model space” P , typically a (singular) riemannian metric on $\Sigma \times \mathbf{R}$, which depends only on a pair of laminations. If M is a doubly degenerate hyperbolic 3-manifold with these laminations as ending laminations, one constructs lipschitz map from P into M . One then needs to show that the lifts to the universal covers is a quasi-isometry. (For example, it would be enough to show that such a map is bilipschitz, but this is much stronger than needed.)

If M' were another 3-manifold with the same end invariants, we would get, via P , an equivariant quasi-isometry between the universal covers of M and M' . Writing $M = \mathbf{H}^3/\Gamma$ and $M' = \mathbf{H}^3/\Gamma'$, where $\Gamma \cong \pi_1(\Sigma) \cong \Gamma'$, we get a quasi-isometry from \mathbf{H}^3 to itself equivariant with respect to the actions of Γ and Γ' . This extends to an equivariant quasiconformal map of $\partial\mathbf{H}^3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ to itself, and by the result of Sullivan, this must be conformal. Thus Γ and Γ' are conjugate by isometries of \mathbf{H}^3 and so M and M' are isometric as required.

This programme can be carried out more easily in the case of bounded geometry [Mi1,Mi2]. This is when M has positive injectivity radius. Here, Minsky constructed a model space from the singular sol geometry associated to a Teichmüller geodesic — a construction based on work of Cannon and Thurston [CannT]. It is some amount of work to show that its universal cover is equivariantly quasi-isometric to that of M .

An alternative approach to this statement can be viewed as a result about paths in the thick part of Teichmüller space. Given a biinfinite path in the thick part of \mathcal{T} , one can put a metric on $\Sigma \times \mathbf{R}$. The metric on the universal cover of this space is natural up to quasi-isometry. The singular sol construction above is an example of this construction. The following result was proven independently in [Mo] and [Bo1].

Theorem 2.1 : *Such a path remains a bounded distance from a Teichmüller geodesic if and only if this metric space $(\tilde{\Sigma} \times \mathbf{R})$ is hyperbolic in the sense of Gromov.*

Now from a bounded geometry 3-manifold $M \cong \Sigma \times \mathbf{R}$, we can loosely construct a path in the thick part of \mathcal{T} . This uses Thurston's notion of "pleated surface" to determine how the structure on Σ changes. We use this to put a metric on $\Sigma \times \mathbf{R}$ as described above. In the universal cover, this will be equivariantly quasi-isometric to \mathbf{H}^3 and so in particular Gromov hyperbolic. Thus by the above result the path remains a bounded distance from a teichmüller geodesic, from which one can deduce that it must in turn be equivariantly quasi-isometric to the singular sol model space. This gives an alternative viewpoint on Minsky's construction.

In the general case, however, the above procedure breaks down. In this case it is important to understand which geodesics in M are short. The principle tool used for doing this is the curve complex introduced by Harvey [Harv]. This complex has been used by many people to study the mapping class group of a surface (see for example [Hare,Iv]). Masur and Minsky developed a sophisticated machinery of "hierarchies" based around this complex [MasM1,MasM2]. Minsky uses to construct a combinatorial model space [Min4], and the programme was completed, at least for the indecomposable case in [BroCM]. A sequel is promised to deal with the decomposable case.

3. The curve complex.

We describe some recent results relating to the curve complex. Apart from the work on the ending lamination conjecture, this has been much used to study the mapping class group. We begin with some definitions.

Let Σ be a compact orientable surface of genus g with p boundary components, and let $\kappa(\Sigma) = 3g + p - 4$. We shall assume that $\kappa(\Sigma) > 0$. In other words, we are ruling out a small number of "exceptional" surfaces that can be independently understood. The *mapping class group*, $\text{Map} = \text{Map}(\Sigma)$, is the group of orientation preserving self-homeomorphisms of Σ defined up to homotopy. This group is finitely generated, but not hyperbolic: it has lots of $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ subgroups generated by pairs of disjoint Dehn twists (i.e. a pair of non-trivial mapping classes supported on disjoint annuli). The large scale geometry of (any Cayley graph of) Map has been studied by a number of authors, see for example [Ham].

In [Harv], Harvey associated a simplicial complex, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Sigma)$ to Σ . Its vertex set, $V(\mathcal{C})$, is the set of homotopy classes of simple closed curves in \mathcal{C} that cannot be homotoped to a point or to a boundary component of Σ . A subset, $A \subseteq V(\mathcal{C})$ is deemed to be a simplex if its elements can be realised disjointly in Σ . This complex is connected and has dimension $\kappa(\Sigma)$. We see that Map acts simplicially on $\mathcal{C}(\Sigma)$, pulling back curves under the homeomorphism, and that the quotient space is compact. The space $\mathcal{C}(\Sigma)$ is commonly referred to as the *curve complex* (or *Harvey complex*). We shall refer to its 1-skeleton, $\mathcal{G}(\Sigma)$, as the *curve graph*.

The curve complex has nice topological and combinatorial properties that can be used to study $\text{Map}(\Sigma)$. For example, in [Hare], Harer investigates the cohomology of Map and in [Iv], Ivanov studies its automorphisms.

A remarkable fact about the curve complex was proven by Masur and Minsky:

Theorem 3.1 : [MasM1] *The curve complex, \mathcal{C} , is Gromov hyperbolic.*

Note that it is enough here to consider the curve graph, $\mathcal{G}(\Sigma)$, since its inclusion into \mathcal{C} is a quasi-isometry.

A somewhat shorter proof can be found in [Bow3], which shows, in fact that the hyperbolicity constant is $O(\log \kappa(\Sigma))$.

A major complication in applying the usual machinery of hyperbolic groups to the curve graph arises from the fact that \mathcal{G} is far from being locally finite. One way of dealing with this is suggested by Bestvina and Fujiwara [BeF], where they show that the action of Map on \mathcal{G} is what they call “weakly properly discontinuous”. As a result, they deduce:

Theorem 3.2 : [BeF] *The second bounded cohomology of Map is infinitely generated.*

Indeed, they deduce that the same holds for “most” subgroups of Map .

Here is another result concerning the action of Map on \mathcal{G} .

Theorem 3.3 : [Bow6]

- (1) *The action of Map on \mathcal{G} is acylindrical.*
- (2) *There is some $N = N(\Sigma) \in \mathbf{N}$ such that for all $g \in \text{Map}$, $N||g|| \in \mathbf{N}$.*

The notion of “acylindricity” is stronger than that of weak proper discontinuity, and generalised the notion defined by Sela in the context of groups acting simplicial trees. It says essentially that there is a bound on the number of elements that can displace a long geodesics a short distance. (To be precise, for all $r \geq 0$, there exist $R, K \geq 0$ such that if $x, y \in V(\mathcal{G})$ with $d(x, y) \geq R$, then $|\{g \in \text{Map} \mid d(x, gx) \leq r, d(y, gy) \leq r\}| \leq K$.) It is a natural property of an action on a hyperbolic space. In particular, it implies weak proper discontinuity in the sense of [BeF]. The *stable length*, $||g||$, of $g \in \text{Map}$ is defined as $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d(x, g^n x)$ for any $x \in \mathcal{G}$. We are thus claiming that this is uniformly rational. The analogues of (1) and (2) above are known for hyperbolic groups. The proof of Theorem 3.3 uses the theory of hyperbolic 3-manifolds.

To explain the ideas behind this, we need a another combinatorial notion, that of a “tight geodesic” as introduced by Masur and Minsky in [MaM2]. This is the basis of their theory of hierarchies, and which are used to construct the model space in [Mi4]. (To interpret the following discussion correctly one should substitute “multicurve” for “curve”, allowing a curve to have more than one component. However, we can safely ignore this somewhat tedious complication here.)

Let $(\gamma_i)_{i=0}^n$ be a geodesic in \mathcal{G} . We say that $(\gamma_i)_i$ is *tight* at γ_i if each curve that crosses γ_i also crosses either γ_{i-1} or γ_{i+1} . We say $(\gamma_i)_i$ is *tight* if is tight at γ_i for all $i = 1, \dots, n-1$. Note that γ_i must be disjoint from the connected set $\gamma_{i-1} \cup \gamma_{i+1} \subseteq \Sigma$. In general, there may be infinitely many ways of choosing γ_i . Tightness obliges us to take one of the curves bounding the subsurface of Σ filled by $\gamma_{i-1} \cup \gamma_{i+1}$.

Let $T(\alpha, \beta)$ be the set of all tight geodesics from α to β in \mathcal{G} .

Theorem 3.4 : [MasM2]

- (1) $T(\alpha, \beta)$ is nonempty.
- (2) $T(\alpha, \beta)$ is finite.

(It is part (1) which seems to require us to reinterpret tightness in terms of multicurves.)

Given $r \in \mathbf{N}$, let $S_r(\alpha, \beta) = \{\gamma \in \bigcup T(\alpha, \beta) \mid d(\alpha, \gamma) = r\}$. In other words it is a “slice” through the union of all tight geodesics a given distance from one endpoint. We can refine Theorem 3.4(2) as:

Theorem 3.5 : [Bow5] *There is some $K = K(\text{genus}(\Sigma)) \in \mathbf{N}$ such that given any $\alpha, \beta \in V(\mathcal{G})$ and $r \in \mathbf{N}$, $|S_r(\alpha, \beta)| \leq K$.*

Note that the hyperbolicity of \mathcal{G} tells us immediately that slices have bounded diameter. Theorem 3.5 states that they have bounded cardinality. In fact, there are refinements of this result that allow us to vary α and β , each within a set of bounded diameter, while retaining a cardinality bound on slices that remain far enough away from the endpoints.

One consequence of Theorem 3.5 (and its refinements) is that, for certain purposes, it effectively reduces us to considering locally finite graphs. In this way, a diagonal sequence argument, together with an argument of Delzant [D] in the context of hyperbolic groups, gives us:

Proposition 3.6 : *If $g \in \text{Map}$ and $\|g\| > 0$, then there is a bi-infinite geodesic, $\pi \subseteq \mathcal{G}$, such that $g^N \pi = \pi$, where $N = N(\Sigma)$ depends only on the topological type of Σ .*

Thus, g^N translates π some distance $p \in \mathbf{N}$, and so $N\|g\| = \|g^N\| = p \in \mathbf{N}$, proving Theorem 3.3(2). We remark that $\|g\| > 0$ if and only if g is a pseudoanosov mapping class in the Nielsen-Thurston classification.

One can similarly use Theorem 3.5 to prove Theorem 3.3(1).

The proof of Theorem 3.5 uses the following relatively classical fact about hyperbolic 3-manifolds:

Lemma 3.7 : *Given any $\alpha, \beta \in V(\mathcal{G})$, we can find a complete hyperbolic 3-manifold, $M \cong \Sigma \times \mathbf{R}$, in which $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ both have uniformly bounded length (indeed can be chosen arbitrarily short).*

Here we see the necessity of passing to 3 dimensions — there is no hope of achieving such a result for hyperbolic surfaces.

We need, in addition, the following:

Theorem 3.8 : *If $\alpha = \gamma_0, \dots, \gamma_n = \beta$ is a tight geodesic with the lengths of $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ uniformly bounded, then the lengths of the $\bar{\gamma}_i$ are all bounded by another constant depending only on Σ .*

This “a-priori bound” is proven in [Mi4], and one can see its relevance to the ELC

given that tight geodesics are used to construct the model space. Minsky's argument is part of a larger project, and uses much sophisticated machinery. A more direct proof of this statement is given in [Bow5].

We remark that at some point, the argument uses a geometric limit argument. As a result, we get some non-constructive input into the proceedings, and it is unclear whether the constant K featuring in Theorem 3.5 is a computable function of $g = \text{genus}(\Sigma)$. This therefore also applies to the constants in Theorem 3.3. Some algorithmic bounds associated tight geodesics are described in [Sha], showing for example that distances in $\mathcal{G}(\Sigma)$ are computable. However it seems more difficult to simultaneously achieve uniformity and computability of the various constants referred to earlier.

To conclude the proof of Theorem 3.5, one needs to delve further into the geometry of M . For this we use the band systems constructed in [Bow4]. A "band system" gives some kind of topological account of the failure of bounded geometry in M . One needs to argue that realisations of curves featuring in tight geodesics cannot enter any such band. The bounded geometry of M outside the bands then gives rise to combinatorial restrictions on the possibilities for such curves.

4. Conclusion.

The work relating to the ending lamination conjecture has given a huge boost to the theory of surfaces, notably the mapping class group and teichmüller theory. There are many aspects that we have not mentioned. For example there has been much work on the Weil-Petersson metric [Ar,Bro,W2] etc. This is non-complete geodesesically convex negatively curved metric on Teichmüller space [W1]. Wolpert [W2] shows that it is a CAT(0)-space (see [BriH] for a discussion of these.) It is quasi-isometric to the "pants complex" — a relative of the curve complex of a surface. This appears to be naturally related to the geometry of 3-manifolds.

This work has of course, also thrown much new light on 3-manifolds themselves, though much remains to be understood. One important question that remains open despite all this effort is the question of local connectivity of limit sets mentioned in Section 1.

Other work, in some ways related, has shown, for example that the mapping class groups are bi-automatic [Ham], and as noted by Storm, it follows that they satisfy the Novikov conjecture.

Some other links between the curve complex and 3-manifolds have been investigated by Hempel, see for example [He2].

References.

- [Ab] W.Abikoff, *The real analytic theory of Teichmüller space* : Springer Lecture Notes in Mathematics No. 820 (1980), Springer Verlag.
- [Ag] I.Agol, *Tameness and hyperbolic 3-manifolds* : preprint, Chicago (2004).

- [Ar] J.Aramayona, *The Weil-Petersson geometry of the five-times punctured sphere* : preprint, Southampton (2004).
- [BeF] M.Bestvina, K.Fujiwara, *Bounded cohomology of subgroups of the mapping class groups* : *Geom. Topol.* **6** (2002) 69–89.
- [Bon] F.Bonahon, *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3* : *Ann. of Math.* **124** (1986) 71–158.
- [Bow1] B.H.Bowditch, *Notes on Gromov’s hyperbolicity criterion for path-metric spaces* : in “Group theory from a geometrical viewpoint” (ed. E.Ghys, A.Haefliger, A.Verjovsky), World Scientific (1991) 64–167.
- [Bow2] B.H.Bowditch, *Stacks of hyperbolic spaces and ends of 3-manifolds* : preprint, Southampton (2002).
- [Bow3] B.H.Bowditch, *Intersection numbers and the hyperbolicity of the curve complex* : preprint, Southampton (2002).
- [Bow4] B.H.Bowditch, *Systems of bands in hyperbolic 3-manifolds* : preprint, Southampton (2003).
- [Bow5] B.H.Bowditch, *Length bounds on curves arising from tight geodesics* : preprint, Southampton (2003).
- [Bow6] B.H.Bowditch, *Tight geodesics in the curve complex* : preprint, Southampton (2003).
- [Bow7] B.H.Bowditch, *Hyperbolic 3-manifolds and the geometry of the curve complex* : to appear in the proceedings of the ECM, Stockholm, Birkhäuser.
- [BriH] M.R.Bridson, A.Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature* : *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften No. 319*, Springer-Verlag (1999).
- [Bro] J.F.Brock, *The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores* : *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003) 495–535.
- [BroCM] J.F.Brock, R.D.Canary, Y.N.Minsky, *Classification of Kleinian surface groups II: The ending lamination conjecture* : in preparation.
- [BroF] J.F.Brock, B.Farb, *The curvature and rank of Teichmüller space* : preprint, Chicago (2001).
- [CalG] D.Calegari, D.Gabai, *Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds* : preprint, Pasadena (2004).
- [Can] R.D.Canary, *Ends of hyperbolic 3-manifolds* : *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993) 1–35.
- [CanEG] R.D.Canary, D.B.A.Epstein, P.Green, *Notes on notes of Thurston* : in “Analytic and geometric aspects of hyperbolic space”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series No. 111*, (ed. D.B.A.Epstein) Cambridge University Press (1987) 3–92. sgap [CannT] J.W.Cannon, W.P.Thurston, *Group invariant Peano curves* : preprint (1989).
- [CoDP] M.Coornaert, T.Delzant, A.Papadopoulos, *Les groupes hyperboliques de Gromov* :

Lecture Notes in Mathematics No. 1441, Springer Verlag (1990).

[D] T.Delzant, *Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques* : Duke Math. J. **83** (1996) 661–682.

[GhH] E.Ghys, P.de la Harpe (eds.), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov* : Progress in Mathematics No. 83, Birkhäuser (1990).

[Gr] M.Gromov, *Hyperbolic groups* : in “Essays in Group Theory” (ed. S.M.Gersten) M.S.R.I. Publications No. 8, Springer-Verlag (1987) 75–263.

[Ham] U.Hamenstädt, *Train tracks and mapping class groups I* : preprint, Bonn (2004).

[Hare] J.L.Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class groups of orientable surfaces* : Invent. Math. **84** (1986) 157–176.

[Harv] W.J.Harvey, *Boundary structure of the modular group* : in “Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference” (ed. I.Kra, B.Maskit), Ann. of Math. Stud. No. 97, Princeton University Press (1981) 245–251.

[He1] J.Hempel, *3-manifolds* : Ann. of Math. Studies, No. 86, Princeton University Press (1976).

[He2] J.Hempel, *3-manifolds as viewed from the curve complex* : Topology **40** (2001) 631–654.

[ImT] Y.Imayoshi, M.Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces* : Springer-Verlag (1992).

[Iv] N.V.Ivanov, *Automorphism of complexes of curves and of Teichmüller spaces* : Internat. Math. Res. Notices (1997) 651–666.

[K] M.Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups* : Progress in Mathematics No. 183, Birkhäuser (2001).

[Mar] A.Marden, *The geometry of finitely generated kleinian groups* : Ann. of Math. **99** (1974) 383–462.

[Mas] H.Masur, *The curvature of Teichmüller space* : in “A crash course on Kleinian groups”, Lecture Notes in Mathematics No. 400, Springer (1974) 122–123.

[MasM1] H.A.Masur, Y.N.Minsky, *Geometry of the complex of curves I: hyperbolicity* : Invent. Math. **138** (1999) 103–149.

[MasM2] H.A.Masur, Y.N.Minsky, *Geometry of the complex of curves II: hierarchical structure* : Geom. Funct. Anal. **10** (2000) 902–974.

[Mi1] Y.N.Minsky, *Teichmüller geodesics and ends of hyperbolic 3-manifolds* : Topology **32** (1993) 625–647.

[Mi2] Y.N.Minsky, *On rigidity, limit sets, and ends of hyperbolic 3-manifolds* : J. Amer. Math. Soc. **7** (1994) 539–588.

[Mi3] Y.N.Minsky, *Short geodesics and end invariants* : in “Comprehensive Research in Complex Dynamics and Related Fields”, (eds. M.Kisaka, S.Morosawa) RIMS Kokyuroka

No. 1153 (2000) 1–20.

[Mi4] Y.N.Minsky, *The classification of Kleinian surface groups I : Models and bounds* : preprint, Stony Brook (2002).

[Mo] L.Mosher, *Stable Teichmüller quasigeodesics and ending laminations* : Geom. Topol. **7** (2003) 33–90.

[O] J.-P.Otal, *Thurston's hyperbolization of Haken manifolds* : Surveys in differential geometry, Vol. III, 77–194, International Press, 1998.

[P1] G.Perelman, *The entropy formula for Ricci flow and its geometric applications* : preprint, Saint Petersburg (2003).

[P2] G.Perelman, *Ricci flow with surgery on 3-manifolds* : preprint, Saint Petersburg (2003).

[Sc] P.Scott, *Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented* : J. London Math. Soc. **6** (1973) 437–440.

[Sc] P.Scott, *Compact submanifolds of 3-manifolds* : J. London Math. Soc. **7** (1973) 246–250.

[Sha] K.J.Shackleton, *Tightness and computing distances in the curve complex* : preprint, Southampton (2004).

[Sho] H.Short et al. *Notes on word hyperbolic groups* : in “Group theory from a geometrical viewpoint” (ed. E.Ghys, A.Haefliger, A.Verjovsky), World Scientific (1991) 3–63.

[Th1] W.P.Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds* : notes, Princeton (1979).

[Th2] W.P.Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry* : Bull. Amer. Math. Soc. **9** (1982) 357–381.

[W1] S.A.Wolpert, *Geodesic length functions and the Nielsen problem* : J. Differential Geom. **25** (1987) 275–296.

[W2] S.A.Wolpert, *Geometry of the Weil-Petersson completion of Teichmüller space* : in “Surveys in Differential Geometry, Vol. VIII”, Boston (2003) 357–393.

