

第53回トポロジーシンポジウム講演集

平成18年8月7日(月)～8月10日(木)

於 大阪市立大学杉本キャンパス

平成18年度科学研究費 基盤研究A 課題番号 17204007

この講演集は2006年8月7日から10日の間、大阪市立大学杉本キャンパスにおいて科学研究費 基盤研究A 課題番号 17204007 「位相幾何学の総合的研究」(代表 松元 重則)、および大阪市立大学21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成」の援助により開催される第53回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。

なおこの講演集は科学研究費 基盤研究A 「位相幾何学の総合的研究」により作成されたものである。

世話人： 栞田幹也 (大阪市立大学大学院理学研究科)
金信泰造 (大阪市立大学大学院理学研究科)
岩瀬則夫 (九州大学大学院数理学研究院)
中居 功 (お茶の水女子大学理学部)

第53回トポロジーシンポジウム

プログラム

8月7日 (月)

- 15:00-16:00 野田健夫 (秋田大学工学資源学部)
全葉層の存在について
(浅岡正幸、Emmanuel Dufraigneとの共同研究)..... 1
- 16:30-17:30 Hossein Movasati (お茶大・JSPS外国人特別研究員)
De Rham cohomologies associated to iterated integrals..... 11

8月8日 (火)

- 10:00-11:00 荒井 迅 (京都大学大学院理学研究科)
力学系の双曲性とパラメータ空間の構造について..... 19
- 11:20-12:20 角 大輝 (大阪大学理学部)
Dynamics of polynomial semigroups, interaction
cohomology, and singular functions in the complex plane ... 29
- 14:00-15:00 佐藤隆夫 (東大数理・学振特別研究員(PD))
自由群の自己同型群のJohnson準同型の余核について 41
- 15:20-16:20 松橋英市 (筑波大学数理物質科学研究科特別研究員)
On approximation theorems of maps from compacta to
manifolds and polyhedra
(コンパクト距離空間から多様体および多面体への連続写像の
近似定理について)..... 51
- 16:40-17:40 茂手木公彦 (日本大学文理学部)
Networking Seifert surgeries on knots
(joint work with Arnaud Deruelle and Katura Miyazaki)..... 61

8月9日 (水)

- 10:00-11:00 岩切雅英 (広島大学・学振特別研究員(PD))
曲面結び目のカンドルコサイクル不変量.....71
- 11:20-12:20 佐藤 進 (神戸大学理学部)
2次元結び目理論における射影図の利用.....79
- 14:00-15:00 田中利史 (大阪市立大学数学研究所)
コバノフホモロジーとその4次元トポロジーへの応用について89
- 15:20-16:20 森山哲裕 (東大数理・COE 研究員)
On the vanishing of the Rohlin invariant 101
- 16:40-17:40 原 靖浩 (大阪大学大学院理学研究科)
ボルスク・ウラムの定理と同変写像の写像度..... 111

8月10日 (木)

- 10:00-11:00 岸本大祐 (京都大学大学院理学研究科)
Generating varieties, Bott periodicity and instantons..... 121
- 11:20-12:20 柳田伸顕 (茨城大学教育学部)
Algebraic cobordism for Pfister quadric 129

全葉層の存在について*

野田健夫 (秋田大学工学資源学部)

1. 序

M^n を有向閉多様体とし、 D^{n-q} を M 上の余次元 q の C^∞ 級接分布とする。 D^{n-q} が完全積分可能であるとき積分多様体への分解 \mathcal{F} を余次元 q の葉層構造 (foliation) といい、各々の積分多様体を \mathcal{F} の葉 (leaf) という。特に微分形式 ω により余次元 1 の接分布が $D = \ker \omega$ と表されるとき、Frobenius の定理より完全積分可能であることは $\omega \wedge d\omega = 0$ であることと同値になる。以下においては主に余次元 1 の葉層構造について考察し、葉と葉に横断的な方向が向き付けられているものと仮定する。

余次元 1 の葉層構造が存在すればその法ベクトル場は非特異なので多様体の euler 数が 0 であることが分かるが、逆に euler 数 0 の多様体上に常に葉層構造が存在するかという存在問題が考えられる。3次元有向閉多様体の euler 数は 0 になり、この場合葉層構造が存在することは Lickorish [6] 等によって示された。しかし euler 数が 0 であっても平面場は homotopy 類に関して複数存在することから、いかなる平面場の homotopy 類が葉層構造への接平面場として実現可能か、というより強い存在問題が自然に考えられる。これについては 3次元多様体の場合に Wood [15] により任意の接平面場が homotopy により完全積分可能なものになることを示され、さらに Thurston [13] が一般の n 次元多様体の超平面場について示したことにより解決した。

Definition 1.1. M^n 上の n 個の余次元 1 葉層構造の組 $(\mathcal{F}^i)_{i=1}^n$ が全葉層 (total foliation) であるとは、各点 $p \in M$ で $\bigcap_{i=1}^n T\mathcal{F}^i(p) = \{0\}$ となることをいう。

\mathbb{R}^n の標準座標系 (x_1, \dots, x_n) に関して \mathcal{F}^i を $\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle$ に接する葉層構造とすると $(\mathcal{F}^i)_{i=1}^n$ は全葉層になる。実際にこれは n 次元の全葉層の局所モデルとなる。全葉層が存在することは一次独立な n 本の非特異ベクトル場の組 X_1, \dots, X_n でどの組も積分可能なもの (すなわち $[X_i, X_j] = aX_i + bX_j$) が存在することに同値である。

Remark 1.2. より条件を強めてどの組も可換な (すなわち $[X_i, X_j] = 0$) ベクトル場の組 X_1, \dots, X_n の存在を仮定すると、そのようなものは閉多様体では T^n 上にしか存在し得ない。一般に互いに可換な非特異ベクトル場で一次独立にとれる最大数を多様体の rank という。3次元多様体で rank が 2 であるものは S^1 上の T^2 束に限られ [9]、また n 次元多様体で rank が $n-1$ であるものは S^1 上の T^{n-1} 束だけになる [14] ことも知られている。

* 浅岡正幸 (京都大学)、Emmanuel Dufraigne (Université de Bourgogne) との共同研究。

全葉層が存在するならば多様体の接束は平行化可能 (parallelizable) であるが、逆に平行化可能であるときに全葉層が存在するか、というのが基本的な存在問題となる。3次元多様体に関して Hardorp は次の存在定理を示した。

Theorem 1.3 ([5]). 任意の3次元有向閉多様体は全葉層 $(\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ を持つ。

$(\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ はその接平面場 $(T\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ が $T\mathcal{F}^1 \simeq T\mathcal{F}^2 \simeq T\mathcal{F}^3$ を満たすので平面場として同一の homotopy 類を定め、また $T\mathcal{F}^1$ は $T\mathcal{F}^2$ と $T\mathcal{F}^3$ の交わりにより平行化されるので euler 類は0になる。そこで次の存在問題として、3次元多様体の euler 類が0となる平面場のうちいかなるものが全葉層として実現されるか、と問うことができよう。本研究ではこの問題をより一般化し、次の解決を得た。ここで全平面場 (total plane field) $(\xi^i)_{i=1}^3$ とは各点 $p \in M$ で $\xi^1(p) \cap \xi^2(p) \cap \xi^3(p) = \{0\}$ をみたす平面場の三つ組である。

Theorem 1.4 ([1]). 3次元多様体上の任意の全平面場 $(\xi^i)_{i=1}^3$ に対し、全葉層 $(\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ で $(T\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ が $(\xi^i)_{i=1}^3$ に homotopic であるものが存在する。

本稿の主目的はこの定理の証明の概略を説明することにある。

Remark 1.5. はじめに一つの葉層構造を固定してそれに横断的な葉層構造をとれるか、という問題に対しては障害があることが知られている。田村-佐藤 [12]、西森 [8]、田村 [11] によって任意の3次元多様体上に接平面場の euler 類が0になる葉層構造でありながら横断的に交わる葉層構造を許容しないものがあることが示されている。また佐藤 [10] では任意の3次元多様体上に横断的に交わる葉層構造の組で全葉層に昇格しないものがあることが示された。

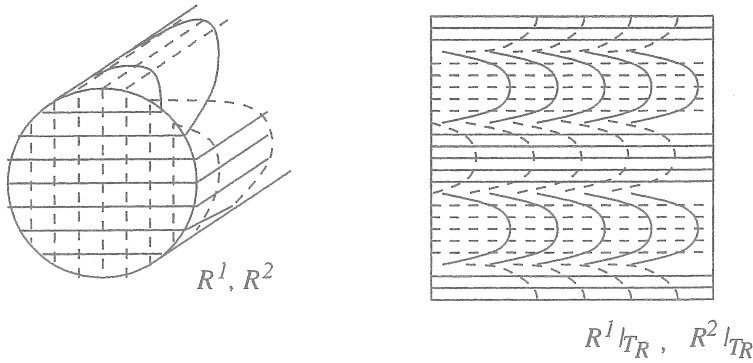
2. \mathcal{R} 成分と \mathcal{R} 手術

この節では全葉層の構成において本質的な役割を果たす \mathcal{R} 成分を紹介する。 $\mathbb{R}^2 \times S^1$ 上に座標 (x, y, z) をとる。 $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次の条件を満たす C^∞ 級の奇関数とする:

- $0 \leq t \leq 1/4, t \geq 7/4$ のとき $\chi(t) = 0$
- $3/4 \leq t \leq 5/4$ のとき $\chi(t) = 1$
- $1/4 < t < 3/4$ で $\chi'(t) > 0, 5/4 < t < 7/4$ で $\chi'(t) < 0$

このとき $\ker(dy - \chi(y)dz), \ker(dx - \chi(x)dz), \ker((1 - \chi(\rho))dz + \chi(\rho)d\rho)$ で定まる3つの積分可能な平面場によってできる葉層構造をそれぞれ $\mathcal{R}_0^1, \mathcal{R}_0^2, \mathcal{R}_0^3$ とおくと $(\mathcal{R}_0^i)_{i=1}^3$ は全葉層をなす。(ただし $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおいた。) これを solid torus $R = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \times S^1$ に制限したものを $(\mathcal{R}^i)_{i=1}^3$ であらわし、一般にこれと同型な全葉層を \mathcal{R} 成分と呼ぶことにする。 \mathcal{R} 成分の境界上に $(1, 0) \times S^1 \subset \partial R$ に対応する向き付けられた単純閉曲線 $a_{\mathcal{R}}$ が存在し、これを \mathcal{R} 成分の枠とよぶ。また \mathcal{R}^3 は境界をコンパクト葉として持つ葉層構造であり、Reeb 成分とよばれている。

Remark 2.1. 上の構成において \mathcal{R}_0^3 を $\ker(dz)$ による水平面からなる葉層構造 \mathcal{R}_h^3 に置き換えても $\mathcal{R}_0^1, \mathcal{R}_0^2$ とともに全葉層をなす。 \mathcal{R}_0^3 と \mathcal{R}_h^3 が $(0, 0) \times S^1$ の近傍を除いて一致することに着目すると、逆に \mathcal{R}_0^1 と \mathcal{R}_0^2 に同型な葉層構造の組があるとき Reeb 成分を挿入することによって \mathcal{R} 成分を得ることができるともいえる。

FIGURE 1. \mathcal{R} -component

\mathcal{R} 成分の境界 $\partial R \cong T^2$ 上の座標 (θ, z) を $(\cos \theta, \sin \theta, z)$ に対応するよう定める。境界上の同相写像 $A: (\theta, x) \mapsto (\theta, x + \theta)$ は a_R を保ち、この写像による像 $A_*(\mathcal{R}_0^i|_{\partial R})$ は $\mathcal{R}_0^i|_{\partial R}$ に isotopic であるので、 $(\mathbb{R}^2 \times S^1 \setminus R) \cup_A R$ 上にも全葉層 $(\mathcal{R}_A^i)_{i=1}^3$ が導かれる。一般の \mathcal{R} 成分に対し同等の操作を行うと多様体の位相が変わる。こうして新しい多様体上に全葉層を導くことを \mathcal{R} 手術とよぶ。

最後に S^3 上の全葉層の例を挙げる。 $D^2 \times S^1$ 上の標準的な \mathcal{R} 成分を $D^2 \times \{0\}$ で切り、 (-1) 回転して貼りあわせて得られる \mathcal{R} 成分を2つ用意し、その境界で a_R の方向があうように貼りあわせると S^3 上の全葉層 $(\mathcal{R}_+^i)_{i=1}^3$ を得る。これを正の Reeb 全葉層とよぶ。実際には \mathcal{R}_+^i はすべて Reeb 成分を2つもつ葉層構造になっている。

Remark 2.2. 正の Reeb 全葉層は幾何学的には負の方向の貼り合わせをしているかのようにも見えるが、得られた \mathcal{R}_+^i の法ベクトル場が正の Hopf fibration に isotopic になっていることからこれを正であるとした。

3. 3次元多様体上の全平面場

定理の証明は3次元多様体上の全平面場の各 homotopy 類に具体的に全葉層を構成することによって行われる。そのための準備として全平面場の分類、および任意の3次元多様体の構成法について説明する。

3.1. 全平面場の homotopy 類. M を向き付けられた3次元閉多様体とし、 $(\xi^i)_{i=1}^3$ をその上の全平面場とする。各接平面場 ξ^i に対して単位法ベクトル ν^i をとり、これらに対して Gram-Schmidt の直交化を行って得られた3つ組 (ν^1, ν^2, ν^3) は接束 TM の正規直交枠を与える。全平面場の homotopy 類は正規直交枠の空間 $\text{Fr}(M)$ の homotopy 類に一致するので後者を分類すればよい。実際には以下に述べるように spin 構造と Hopf 不変量によって分類されることが分かる。

M の胞体分割を固定し、 M_i をそれに対する i 骨格とする。 $\text{Fr}(M_1)$ の元で M_2 上に拡張可能なものの homotopy 類を M の spin 構造と呼ぶ。(本来の定義とは異なるが同値である [7].) 特に M の正規直交枠 $e \in \text{Fr}(M)$ は自然な spin 構造 $s(e)$ を導く。

M 上の2つの正規直交枠 $e, e_0 \in \text{Fr}(M)$ は各点で $SO(3)$ の元によりうつりあうので、写像 $\Phi(e, e_0): M \rightarrow SO(3)$ で $e = \Phi(e, e_0)e_0$ をみたすものが取れる。この写像は基本群の準同型 $(\Phi(e, e_0))_*: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$ を導くが、これによって定まる $s(e, e_0) = (\Phi(e, e_0))_* \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ を e と e_0 の spin 構造の差という。実際 $s(e, e_0) = 0$ であることと e, e_0 の定める spin 構造が一致することは同値である。

2つの正規直交枠 e, e_0 が $s(e, e_0) = 0$ をみたすとき、写像 $\Phi(e, e_0)$ は $\tilde{\Phi}(e, e_0): M \rightarrow S^3$ に持ち上げることができる。この持ち上げの写像度 $H(e, e_0) = \deg \tilde{\Phi}(e, e_0)$ を Hopf 不変量の差と定義する。構成より明らかに、 $e_1, e_2, e_3 \in \text{Fr}(M)$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned} H(e_2, e_1) &= -H(e_1, e_2) \\ H(e_1, e_3) &= H(e_1, e_2) + H(e_2, e_3). \end{aligned}$$

Proposition 3.1. 2つの正規直交枠 $e, e_0 \in \text{Fr}(M)$ が互いに isotopic になることは $s(e, e_0) = 0$ かつ $H(e, e_0) = 0$ と同値である。

Proof. M の胞体分割で3胞体が一つだけのものを取り、1, 2, 3-骨格を M_1, M_2, M_3 で表す。 $s(e, e_0) = 0$ であり $\pi_2(SO(3)) = 0$ であることから $\Phi(e, e_0)$ は M_2 上定値写像となる F に homotopic である。 F の S^3 への持ち上げ $F: M \rightarrow S^3$ は写像 $\hat{F}: M/M_2 \cong S^3 \rightarrow S^3$ を導くが、 $H(e, e_0) = 0$ より $\deg \hat{F} = 0$ 、よって F は M 全体での定値写像に homotopic である。□

3.2. 手術による3次元 spin 多様体の記述. K を3次元球面内の結び目 (knot) とすると、正則近傍 $N(K) \cong D^2 \times S^1$ であり、 $\partial N(K) \cong T^2$ となる。 $\partial N(K)$ 内で $\mu = \partial D^2 \times \{0\}$ で与えられる単純閉曲線を meridian とよぶ。また、 K を境界にもつ埋め込まれた曲面 (Seifert 曲面) Σ をとったとき、 $\lambda = \Sigma \cap \partial N(K)$ による単純閉曲線を longitude とよぶ。このとき整数 k に対して結び目 K の k 枠 (k -frame) とは、 $\partial N(K)$ 上の単純閉曲線で homology 類が $[\lambda + k\mu]$ と等しくなるものとして定義され、 k 枠に沿った手術とは $S^3 \setminus N(K)$ と $N(K)$ を $N(K)$ 側の meridian が $S^3 \setminus N(K)$ 側の k 枠にうつるように貼りあわせて新しい多様体を得る操作のことである。同様に絡み目 (link) の枠とそれに沿った手術も定義される。3次元 spin 多様体の実現について、次の結果が知られている：

Theorem 3.2. 任意の3次元 spin 多様体は spin 構造をもった S^3 内の絡み目 L で各成分の枠が偶数であるものに沿った手術によって得られる。

証明は [4] の Section 5.6 および 5.7 を参照せよ。実際には4次元の 2-handlebody に spin 構造が一意的に定まり、その境界として任意の3次元 spin 多様体の実現される。

Remark 3.3. ここで \mathcal{R} 手術との関係について触れておこう。 S^3 内の全葉層が \mathcal{R} 成分を含むとき、その芯は結び目であり境界上の $a_{\mathcal{R}}$ はある k に対して k 枠を与える。このとき \mathcal{R} 手術は \mathcal{R} 成分を取り除き、meridian μ が $[\mu + a_{\mathcal{R}}] = [\lambda + (k+1)\mu]$ にうつるように貼り直す操作なので、芯をなす結び目の $(k+1)$ 枠に沿った手術と同値であることが分かる。

4. 主定理の証明

前節の考察に基づきはじめに手術可能な全葉層により任意の3次元 spin 多様体上に全葉層を構成し、しかるのちに局所的操作により Hopf 不変量を変化させる。

4.1. **Hardorp** の定理の別証明. **Hardorp** の定理を次のより強いかたちで示す：

Theorem 4.1. 任意の3次元 spin 多様体 (M, s) に対し、以下を満たす全葉層 $(\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ が存在する：

- s は $(\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ で与えられる spin 構造である。
- $(\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ は互いに交わらない球体に含まれる2つの \mathcal{R} 成分 R_+, R_- をもち、これらは結び目として自明である。
- R_+ は $(+1)$ 枠をもち、 R_- は (-1) 枠をもつ。

Theorem 3.2 と Remark 3.3 より実際には次を示せばよい。

Proposition 4.2. S^3 内の任意の奇数枠付絡み目に対し、それを \mathcal{R} 成分で実現するような全葉層が存在する。

任意の絡み目は閉じた組紐 (closed braid) として表されることが Alexander の定理として知られている。命題を証明するための鍵となるのは次の補題である。

Lemma 4.3. $L = K_1 \cup \dots \cup K_l$ を閉じた組紐として表された絡み目とする。ただし K_i は結び目成分である。このとき全葉層 $(\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ で、各 K_i を \mathcal{R} 成分の芯としてもち、その枠が $(\omega(K_i) + n(K_i))$ になるものが存在する。

ここで、 $\omega(K_i)$ は K_i の組紐表現における正の自己交差数と負の自己交差数の差であり、 $n(K_i)$ は紐の本数である。

この補題を認めて Theorem 4.1 が示されることを見よう。はじめに $(\omega(K_i) + n(K_i))$ が奇数にとれることを示す。紐の本数は任意に増やすことができるので $n(K_i)$ が奇数であると仮定し、このとき $\omega(K_i)$ が偶数になることをいえば十分である。 K_i は結び目なので連結であり、それを表す組紐は置換群の元としてみたときに巡回置換に共役になるが、いま $n(K_i)$ が奇数なので符号は $+1$ になる。すると K_i の正の自己交差数と負の自己交差数の和は偶数であり、よってその差 $\omega(K_i)$ も偶数になることがわかる。

次に \mathcal{R} 成分の枠を2ずつ変化させることができることをいう。そのため、Figure 2 で与えられる Hopf 絡み目の組紐表現を考える。これに Lemma 4.3 を適用すると、 K_1 に対応し $(+3)$ 枠をもつ \mathcal{R} 成分と K_2 に対応し $(+1)$ 枠をもつ \mathcal{R} 成分が Hopf 絡み目をなす全葉層が得られる。これから2つの \mathcal{R} 成分を除き適当な座標をとると、 $T^2 \times I$ 上の全葉層で境界の2つの連結成分が \mathcal{R} 成分の境界に一致し、一方は $(k+2)$ 枠、他方は k 枠を与えるものが得られる。よって必要に応じてこの成分を挟むことにより、 \mathcal{R} 成分の枠として任意の奇数を実現できる。

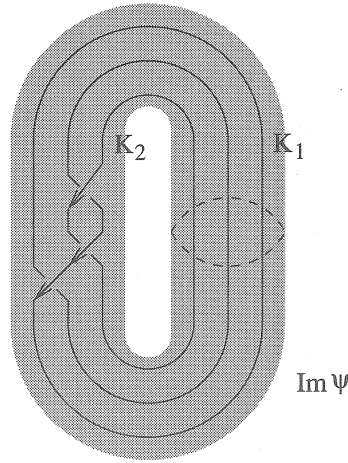


FIGURE 2. Hopf link

4.2. Hopf 不変量の差異の実現. 一般に 3 次元球面は $S^3 = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)$ と 2 つの solid torus R_1, R_2 の和に分解することができる。

Proposition 4.4. $(\mathcal{R}_+^i)_{i=1}^3$ を正の Reeb 全葉層とし、全葉層 $(\mathcal{F}_1^i)_{i=1}^3, (\mathcal{F}_2^i)_{i=1}^3$ が $\mathcal{F}_1^i|_{R_1} = \mathcal{F}_2^i|_{R_1}, \mathcal{F}_1^i|_{R_2} = \mathcal{R}_+^i|_{R_2}$ を満たしているとする。このとき Hopf 不変量の差について

$$H((\mathcal{F}_1^i)_{i=1}^3, (\mathcal{F}_2^i)_{i=1}^3) = H((\mathcal{R}_+^i)_{i=1}^3, (\mathcal{G}^i)_{i=1}^3)$$

が成立する。ただし $(\mathcal{G}^i)_{i=1}^3$ は $\mathcal{G}^i|_{R_1} = \mathcal{R}_+^i|_{R_1}, \mathcal{G}^i|_{R_2} = \mathcal{F}_2^i|_{R_2}$ を満たす全葉層である。

この命題により局所的な切り貼りで Hopf 不変量を変化させることが可能になる。 S^3 内に互いに交わらない 2 つの円板の境界として与えられる絡み目で一方の成分が (+1) 枠、他方が (-1) 枠となるものに対して Proposition 4.2 を適用し全葉層 $(\mathcal{G}_+^i)_{i=1}^3$ を構成し、 S^3 の向きを裏返す同相写像による像を $(\mathcal{G}_-^i)_{i=1}^3$ とする。 $(\mathcal{G}_+^i)_{i=1}^3$ の (+1) 枠 \mathcal{R} 成分を取り除いたものと $(\mathcal{G}_-^i)_{i=1}^3$ の (+1) 枠 \mathcal{R} 成分を取り除いたものを貼りあわせて S^3 上に得られた全葉層を $(\mathcal{G}_{-1}^i)_{i=1}^3$ とすると、Proposition 4.4 より $H((\mathcal{G}_{-1}^i)_{i=1}^3, (\mathcal{R}_+^i)_{i=1}^3) = -1$ が分かる。構成より $(\mathcal{G}_{-1}^i)_{i=1}^3$ は (-1) 枠の \mathcal{R} 成分 R_1, R_2 を持ち、 $(\mathcal{G}_{-1}^i)_{i=1}^3$ のコピーを 2 つ用意すれば一方から R_2 を除いたものと他方から R_1 を除いたものを貼り合わせるにより新たな全葉層 $(\mathcal{G}_{-2}^i)_{i=1}^3$ を得、これは $H((\mathcal{G}_{-2}^i)_{i=1}^3, (\mathcal{R}_+^i)_{i=1}^3) = -2$ をみたす。同様の操作を繰り返すことにより、 $H((\mathcal{G}_{-n}^i)_{i=1}^3, (\mathcal{R}_+^i)_{i=1}^3) = -n$ なる $(\mathcal{G}_{-n}^i)_{i=1}^3$ が構成される。また、 S^3 の向きを裏返す写像により $(\mathcal{G}_{-n}^i)_{i=1}^3$ から導かれる全葉層 $(\mathcal{G}_n^i)_{i=1}^3$ を考えると、これは $H((\mathcal{G}_n^i)_{i=1}^3, (\mathcal{R}_+^i)_{i=1}^3) = n - 1$ を満たすことが計算される。よって $(\mathcal{G}_{-n}^i)_{i=1}^3, (\mathcal{G}_n^i)_{i=1}^3$ により S^3 上の任意の Hopf 不変量を実現する全葉層が与えられたことになる。

一般の多様体 M に対しては Theorem 4.1 によって得られた R_-, R_+ を $(\mathcal{G}_{-n}^i)_{i=1}^3$ あるいは $(\mathcal{G}_n^i)_{i=1}^3$ で適宜置き換えることにより Hopf 不変量の差異を実現することができる。以上により主定理は示された。

4.3. **Lemma 4.3** の証明の概略. 証明は具体的に全葉層を構成することによってなされる。はじめに次の命題を示す。

Proposition 4.5. S^3 内の全葉層 $(\mathcal{F}_1^i)_{i=1}^3$ で \mathcal{R} 成分が三葉結び目 (trefoil knot) K になるものが存在する。

\mathcal{F}_1^3 の構成. $S^3 \setminus K$ は S^1 上の $T^2 \setminus \{0\}$ 束であることが知られており、fiber は K の Seifert 曲面である。 K の正則近傍を $N(K)$ とすると、 $M_1 = S^3 \setminus N(K)$ は S^1 上の $T = T^2 \setminus (\text{a disk})$ 束になりその境界は T^2 に同相である。 M_1 上の fiber による葉層構造を境界の近傍で巻き込み境界がコンパクト葉になるようにし、 $N(K)$ 上に Reeb 成分を与えると S^3 内の葉層構造が得られ、これを \mathcal{F}_1^3 とする。

\mathcal{R} 成分の枠の決定. \mathcal{F}_1^3 に横断的な $\mathcal{F}_1^1, \mathcal{F}_1^2$ をとることによって $N(K)$ 上 \mathcal{R} 成分になる全葉層を構成したい。すると S^3 内で \mathcal{R} 成分の境界上に現れる枠 $a_{\mathcal{R}}$ はある整数 k に対し $[\lambda + k\mu]$ を表す閉曲線ではなくてはならない。他方で M_1 内で見たとき $a_{\mathcal{R}}$ は低空間 S^1 の持ち上げとならねばならず、そのような閉曲線は fiber に一度だけ交わることから整数 k' に対し $[k'\lambda + \mu]$ を表す。ここで λ は M_1 内で ∂M_1 上 fiber との共通部分によって表される閉曲線によって実現できるので、そのような閉曲線を合成することにより k' は任意の値をとることができる。よって $k = k' = 1$ のとき、即ち $[\lambda + \mu]$ を表す枠になるような $a_{\mathcal{R}}$ がとればよいことになる。

$\mathcal{F}_1^1, \mathcal{F}_1^2$ の構成. M_1 の一部 $T \times [-\epsilon, \epsilon]$ で局所座標 (x, y, t) をとると \mathcal{F}_1^3 は xy -平面による葉層構造を境界の近傍で修正したものであるから、 xt -平面、 yt -平面による葉層構造を境界の近傍で適当に修正したものを $\mathcal{F}_1^1, \mathcal{F}_1^2$ とすれば局所的には全葉層になる。しかし M_1 全体で全葉層を定義するには monodromy 写像により貼りあわねばならず、また $N(K)$ に \mathcal{R} 成分を挿入するためには ∂M_1 上 $a_{\mathcal{R}}$ を \mathcal{F}_1^1 および \mathcal{F}_1^2 の葉との交わりとして実現しなければならない。このような要請を満たすためには fiber 上描かれる $\mathcal{F}_1^1, \mathcal{F}_1^2$ の絵を変化させる必要があり、それは次の補題によって可能になる。

Lemma 4.6. $W = [-1, 1] \times S^1 \times [-1, 1]$ の座標を (x, y, t) とする。 \mathcal{G}_0^1 を $W_0 = W \setminus ([-\epsilon, \epsilon] \times S^1 \times [-\epsilon, \epsilon])$ 上に定義された S^1 方向に横断的な葉層構造とする。このとき W 上で定義された全葉層 $(\mathcal{G}^i)_{i=1}^3$ で $\mathcal{G}^1|_{W_0} = \mathcal{G}_0^1$ であり、 $([-1, -\epsilon] \cup [\epsilon, 1]) \times S^1 \times [-1, 1]$ 上 \mathcal{G}^2 の葉が yz -平面からなり、 $[-1, 1] \times S^1 \times ([-1, -\epsilon] \cup [\epsilon, 1])$ 上 \mathcal{G}^3 の葉が xy -平面からなるようなものが存在する。

実際この補題を Figure 3 に図示したように適用して $\mathcal{F}_1^1, \mathcal{F}_1^2$ を変化させることができ、求める $(\mathcal{F}_1^i)_{i=1}^3$ が構成される。

次に与えられた絡み目を K の meridian の近傍内の閉じた組紐として配置し、それを \mathcal{R} 成分として持つ全葉層 $(\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ を以下の手順で構成する。

組紐に接する全葉層. Lemma 4.6 を使って $(\mathcal{F}_1^i)_{i=1}^3$ を修正し、全葉層 $(\mathcal{F}_2^i)_{i=1}^3$ で $\mathcal{F}_2^1 \cap \mathcal{F}_2^2$ に組紐が接するようなものがとれる。Figure 4 を参照せよ。

Holonomy の実現. 上の構成では組紐の各成分の近傍で $\mathcal{F}_2^1, \mathcal{F}_2^2$ は積葉層であるが、Figure 5 に示すように Lemma 4.6 を適用して \mathcal{R} 成分と同型な近傍に変形できる。すると近傍内で \mathcal{F}_2^3 に Reeb 成分を挿入することにより目指していた \mathcal{R} 成分を持つ全葉層 $(\mathcal{F}_3^i)_{i=1}^3$ を得る。

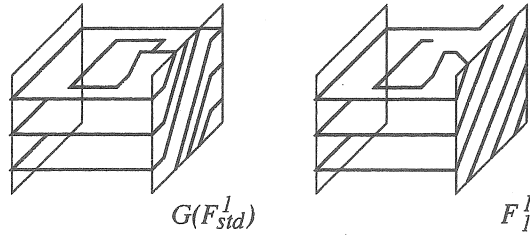


FIGURE 3. How to change the slope

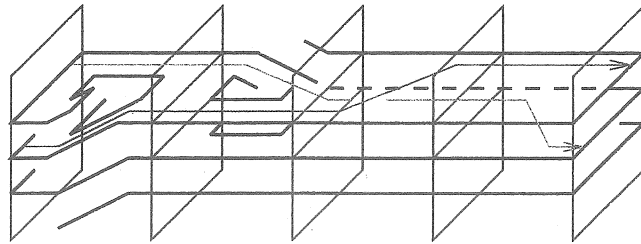


FIGURE 4. Braid tangent to foliations

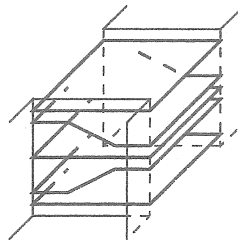


FIGURE 5. Holonomy

枠の計算. 最後に枠の値を確かめなければならない。構成より \mathcal{F}_3^1 は \mathcal{F}_1^1 と同じく S^3 内で K の (+1) 枠を与えるので、絡み目 L として自明なもの、すなわち K の meridian をとると \mathcal{F}_3^1 によって (+1) 枠が与えられる。このことから一般に成分 K_i の枠が $(w(K_i) + n(K_i))$ になることが計算される。

Remark 4.7. この構成において三葉結び目を選んだ理由は補空間が $T^2 \setminus \{0\}$ 束になることにあり、monodromy 写像は本質的でない。それゆえ同様の性質を持つ 8 の字結び目に対して同じ構成を行うことも可能である。

5. 双接触構造への応用

ここでは主定理を使って双接触構造の存在問題を解決する。3次元多様体上の微分 1-形式 α に対し $\xi = \ker \alpha$ として定まる平面場が接触構造であるとは $\alpha \wedge d\alpha$ がい

たるところで消えないときのことをいう。とくに多様体の体積形式を固定すると接触構造に正か負の符号を与えることができる。平面場の組 (ξ, η) が双接触構造であるとは、 ξ が正の接触構造、 η が負の接触構造であり両者が互いに横断的に交わっているときのことをいう。

全葉層と同様の考察により、双接触構造 (ξ, η) が存在すると ξ と η は平面場として同一の homotopy 類を定め、その euler 類は 0 であることが分かるが、逆に euler 類が 0 の平面場の homotopy 類は常に双接触構造によって実現されるかという問題が考えられる。

Theorem 5.1. 3次元多様体上の任意の euler 類が 0 の平面場の homotopy 類 γ に対し、双接触構造 (ξ, η) で $[\xi] = [\eta] = \gamma$ となるものが存在する。

これを示すために次の Eliashberg-Thurston の定理を使う。

Theorem 5.2 ([3]). \mathcal{F} を 3次元多様体上の葉層構造で S^2 に同相な葉を持たないものとする。このとき $T\mathcal{F}$ は平面場として正 (そして負) の接触構造で近似することができる。

まず Theorem 1.4 によって γ を実現する全葉層 $(\mathcal{F}^i)_{i=1}^3$ をとると、とくに γ を実現し互いに横断的に交わる葉層構造の組 $(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2)$ がえられる。これらを Eliashberg-Thurston の定理より正と負の接触構造によってそれぞれ近似すると双接触構造が得られるが、近似によって homotopy 類は変わらないのでこれが求めていたものである。

接触構造 ξ に結び目 K が接しているとき、 ξ の法ベクトルの方向に K をずらすことによって K の枠が与えられる。接触構造 ξ に接する自明な (すなわち円板の境界となる) 結び目で ξ による枠が円板に対して 0 枠を与えるようなものが存在するとき ξ は過旋 (over-twisted) であるという。

過旋接触構造は次の定理によって分類される。

Theorem 5.3 (Eliashberg [2]). 3次元閉多様体上の任意の平面場の homotopy 類はちょうど一つの正の (そして負の) 過旋接触構造を持つ。

Theorem 1.4 で得られた全葉層には (+1) 枠と (-1) 枠の \mathcal{R} 成分で芯が自明な結び目になるものが存在するが、このとき上述の論法で接触構造によって近似すると得られる ξ, η はともに過旋であることが確かめられる。よって次の定理が得られる。

Theorem 5.4. ξ, η をそれぞれ正と負の過旋接触構造とし、両者が euler 類が 0 であるような同一の平面場の homotopy 類に属するとする。このとき isotopy により ξ と η を横断的に交わるように、すなわち (ξ, η) が双接触構造になるようにできる。

REFERENCES

- [1] M. Asaoka, E. Dufraine, T. Noda, *Homotopy classes of total foliations and bi-contact structures on three-manifolds*, preprint.
- [2] Y. Eliashberg, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. 98 (1989), no. 3, 623–637.

- [3] Y. M. Eliashberg and W. P. Thurston, *Confoliations*, University Lecture Series, 13. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [4] Robert E. Gompf and A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, 20. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [5] Detlef Hardorp, *All compact orientable three dimensional manifolds admit total foliations*, Mem. Amer. Math. Soc. 26 (1980).
- [6] W. B. R. Lickorish, *A foliation for 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) 82 1965 414-420.
- [7] J. Milnor, *Spin structures on manifolds*, Enseignement Math. (2) 9 1963 198-203.
- [8] Toshiyuki Nishimori, *Existence problem of transverse foliations for some foliated 3-manifolds*, Tôhoku Math. J. (2) 34 (1982), no. 2, 179-238.
- [9] H. Rosenberg, R. Roussarie, D. Weil, *A classification of closed orientable 3-manifolds of rank two*, Ann. of Math. (2) 91 1970 449-464.
- [10] Atsushi Sato, *Every 3-manifold admits a transverse pair of codimension one foliations which cannot be raised to a total foliation*, Foliations (Tokyo, 1983), 295-323, Adv. Stud. Pure Math., 5, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [11] Itiro Tamura, *Dynamical systems on foliations and existence problem of transverse foliations*, Foliations (Tokyo, 1983), 229-293, Adv. Stud. Pure Math., 5, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [12] Itiro Tamura and Atsushi Sato, *On transverse foliations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 54 (1981), 205-235.
- [13] W. P. Thurston, *Existence of codimension-one foliations*, Ann. of Math. (2) 104 (1976), no. 2, 249-268.
- [14] D. Tischler, *Manifolds M^n of rank $n-1$* , Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), no. 1, 158-160.
- [15] John W. Wood, *Foliations on 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) 89 1969 336-358.

De Rham cohomologies associated to iterated integrals ¹

H. MOVASATI

Ochanomizu University
 Department of Mathematics
 2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku
 Tokyo 112-8610, Japan
 Email: movasati@cc.ocha.ac.jp

Abstract

For a punctured Riemann surface we construct the de Rham cohomology type spaces which are dual to the quotients of the lower central series of the homotopy group of the Riemann surface. We also construct a basis of such de Rham cohomologies in terms of P. Hall's basic commutators.

The present text has arisen from many conversations of the author with I. Nakai and L. Gavrilov. It contains some results of the papers [5, 1]. The reader is referred to these texts for a detailed account of the subject.

1 Homotopy groups of punctured Riemann surfaces

Let \bar{U} be compact Riemann surface, U be the complement of a finite non-empty set of points of \bar{U} and $p \in U$. The fact that $\bar{U} \setminus U$ is not empty plays an important role in the present text. Its first consequence is that the homotopy group $F := \pi_1(U, p)$ is freely generated by $m := g(\bar{U}) + \#(\bar{U} \setminus U) - 1$ elements. We denote by 1 the identity element of F . For $\delta_1, \delta_2 \in F$ we denote by $(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \delta_2 \delta_1^{-1} \delta_2^{-1}$ the commutator of δ_1 and δ_2 and for two sets $A, B \subset F$ by (A, B) we mean the group generated by (a, b) , $a \in A, b \in B$. Let

$$F_r := (F_{r-1}, F), \quad r = 1, 2, 3, \dots, \quad F_1 := F.$$

Each quotient

$$H_{1,r}(U, \mathbb{Z}) := F_r / F_{r+1}$$

is a free \mathbb{Z} -module of rank

$$M_m(r) := \frac{1}{r} \sum_{d|r} \mu(d) m^{\frac{r}{d}},$$

where $\mu(d)$ is the möbius function: $\mu(1) = 1$, $\mu(p_1 p_2 \cdots p_s) = (-1)^s$ for distinct primes p_i 's, and $\mu(n) = 0$ otherwise. Note that for r prime we have $M_m(r) = \frac{m^r - m}{r}$. A basis of $H_{1,r}(U, \mathbb{Z})$ is given by basic commutators of weight r (see §5).

The \mathbb{Z} -module $H_{1,1}(U, \mathbb{Z})$ is the classical 1-th homology group $H_1(U, \mathbb{Z})$ of U with integer coefficients. Its dual $H^1(U, \mathbb{Z}) := \{a : H_1(U, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Z} - \text{linear}\}$ is the 1-th cohomology group of U . It can be constructed either by Čech cohomology or de Rham cohomology. In the second case we have

$$H_{dR}^1(U) := \frac{\Omega_U^1}{d\Omega_U^0} \cong H^1(U, \mathbb{C}) := H^1(U, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C},$$

¹Math. classification: 57R30, 14D99, 32G34

Keywords: Iterated integral, free Lie Algebra

where Ω_U^i is the set of meromorphic differential forms in \bar{U} with poles in $\bar{U} \setminus U$. Here we have again used the fact that $\bar{U} \setminus U$ is not empty. An element $\omega \in H_{dR}^1(U)$ maps to

$$H_1(U, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}, \delta \mapsto \int_{\delta} \omega.$$

under the above isomorphism. In this text we are going to construct similar de Rham type cohomologies for the \mathbb{Z} -modules $H_{1,r}(U, \mathbb{Z})$.

2 Iterated integrals

Let $p_i \in U$, $i = 0, 1$ and

$$\Omega_U^{\circ,r} = \mathbb{C} + \sum \mathbb{C} \cdot \Omega_U^{\circ} + \sum \mathbb{C} \cdot \Omega_U^{\circ} \Omega_U^{\circ} + \cdots + \left(\sum \mathbb{C} \cdot \underbrace{\Omega_U^{\circ} \Omega_U^{\circ} \cdots \Omega_U^{\circ}}_{r \text{ times}} \right).$$

An element of $\Omega_U^{\circ,r}$ is called to be of length $\leq r$. By definition $\Omega_U^{1,r} \subset \Omega_U^{\circ,r}$ contains only differential 1-forms and in each homogeneous piece of an element of $\Omega_U^{0,r} \subset \Omega_U^{\circ,r}$ there exists exactly one differential 0-form. We have the differential map

$$d = d_U : \Omega_U^{0,\circ} \rightarrow \Omega_U^{1,\circ}$$

which is \mathbb{C} -linear and is given by the rules

$$(1) \quad \begin{aligned} d(g) &= dg - g(p_1) + g(p_0) \\ d(g\omega_1\omega_2 \cdots \omega_r) &= dg\omega_1\omega_2 \cdots \omega_r - (g\omega_1)\omega_2 \cdots \omega_r + g(p_0)\omega_1\omega_2 \cdots \omega_r \\ &\quad d(\omega_1 \cdots \omega_{i-1}g\omega_{i+1} \cdots \omega_r) = \\ &\quad \omega_1 \cdots \omega_{i-1}dg\omega_{i+1} \cdots \omega_r - \omega_1 \cdots \omega_{i-1}(g\omega_{i+1}) \cdots \omega_r + \omega_1 \cdots (\omega_{i-1}g)\omega_{i+1} \cdots \omega_r \\ d(\omega_1\omega_2 \cdots \omega_r g) &= \omega_1\omega_2 \cdots \omega_r dg - g(p_1)\omega_1\omega_2 \cdots \omega_r + \omega_1\omega_2 \cdots (\omega_r g). \end{aligned}$$

Let

$$(2) \quad \Omega = \frac{\Omega_U^{1,\circ}}{d\Omega_U^{0,\circ}}$$

and

$$\mathbb{C} = \Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \cdots \subset \Omega_r \subset \cdots \subset \Omega$$

be the filtration given by the length:

$$\Omega_r := \frac{\Omega_U^{1,\leq r}}{d\Omega_U^{0,\leq r}}.$$

The map $\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ associate to each ω its constant term in $\Omega_0 = \mathbb{C}$. Take a basis x_1, x_2, \dots, x_m of the \mathbb{C} -vector space $H_{dR}^1(U)$. For simplicity we take a basis dual to δ_i 's i.e., $\int_{\delta_i} \omega_j = 1$ if $i = j$ and $= 0$ otherwise.

The \mathbb{C} -vector space Ω is freely generated by $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k}$, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq \mu$, $k \in \mathbb{N}_0$. The fact that these elements generate Ω follows from the definition of the differential d and various uses of the fact that every $\omega \in \Omega_U^1$ can be written as a \mathbb{C} -linear combination

of x_i 's plus some dg , $g \in \Omega_U^0$. We obtain an isomorphism between Ω and the abstract associative ring generated by x_i 's. In this way Ω turns to be an associative, but non commutative, \mathbb{C} -Algebra. Note that the \mathbb{C} -algebra structure of Ω does depend on the choice of the basis and p_0, p_1 . However, the isomorphism of \mathbb{C} -vector spaces obtained in the quotient Ω_r/Ω_{r-1} , $r = 1, 2, \dots$ does not depend on the basis and p_0, p_1 .

Let $\delta : [0, 1] \rightarrow U$ be a path which connects p_0 to p_1 and $\omega_i \in \Omega_U^1$, $i = 1, 2, \dots, r$. The iterated integral is defined by induction and according to the rule:

$$\int_{\delta} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r = \int_{\delta} \omega_1 \left(\int_{\delta_x} \omega_2 \cdots \omega_r \right),$$

where for $\delta(t_1) = x$ we have $\delta_x := \delta|_{[0, t_1]}$. By \mathbb{C} -linearity one extends the definition to $\Omega_U^{1, \bullet}$ and it is easy to verify that an iterated integral of the elements in $d\Omega_U^{0, \bullet}$ is zero ([3] Proposition 1.3) and hence $\int_{\delta} \omega, \omega \in \Omega$ is well-defined. It is homotopy functorial. This can be checked by induction on r . We have

$$\int_{\delta} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r = \int_{\delta} \omega_1 \cdots \omega_i \left(\int_{\delta_x} \omega_{i+1} \cdots \omega_r \right), \quad i = 1, 2, \dots, r-1.$$

3 The properties of iterated integrals

In this section we list properties of iterated integrals in the context of this paper. The following four statements can be considered as the axioms of iterated integrals:

I 1. By definition the iterated integral is \mathbb{C} -linear with respect to the elements of Ω and

$$\int_1 \omega := \epsilon(\omega), \omega \in \Omega, \quad \int_{\alpha} 1 = 1, \quad \alpha \in F.$$

We use the convention $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r = 1$ for $r = 0$.

I 2. For $\alpha, \beta \in F$ and $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in \Omega_U^1$

$$\int_{\alpha\beta} \omega_1 \cdots \omega_r = \sum_{i=0}^r \int_{\alpha} \omega_1 \cdots \omega_i \int_{\beta} \omega_{i+1} \cdots \omega_r$$

([3], Proposition 2.9).

I 3. For $\alpha \in F$ and $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in \Omega_U^1$

$$\int_{\alpha^{-1}} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r = (-1)^r \int_{\alpha} \omega_r \cdots \omega_1.$$

([3], Proposition 2.12).

I 4. For $\alpha \in F$ and $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r+s} \in \Omega_U^1$ we have the shuffle relations

$$(3) \quad \int_{\alpha} \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_r} \int_{\alpha} \omega_{j_1} \cdots \omega_{j_s} = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_{r+s})} \int_{\alpha} \omega_{k_1} \omega_{k_2} \cdots \omega_{k_{r+s}},$$

where $(k_1, k_2, \dots, k_{r+s})$ runs through all shuffles of (i_1, \dots, i_r) and (j_1, \dots, j_s) ([3], Lemma 2.11). This means that there is a partition of $\{1, 2, \dots, r+s\}$ into two disjoint sets I, J such that $(k_i, i \in I)$ (resp. $(k_i, i \in J)$) ordered as I (resp. J) is equal to (i_1, \dots, i_r) (resp. (j_1, \dots, j_s)).

Note that I1, I2 and I3 imply that every iterated integral can be written as a polynomial in $\int_{\delta} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r$, where δ runs through a set which generated F freely and ω_i runs through a fixed basis of $H_{dR}^1(U)$. However by I4 this way of writing is not unique.

Let $\mathbb{Z}[F]$ be the integral group ring of F , J be the kernel of $\mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}$, $\sum_{i=1}^k a_i \alpha_i \mapsto \sum_{i=1}^k a_i$, $a_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in F$. We have the canonical filtration of $\mathbb{Z}[F]$ by subideals:

$$\cdots \subset J^3 \subset J^2 \subset J^1 = J \subset \mathbb{Z}[F].$$

By definition an iterated integral over $\mathbb{Z}[F]$ is \mathbb{Z} -linear. All the well-known properties of iterated integrals in the literature can be deduced from I1, I2, I3 and I4.

I 5. For $\alpha, \beta \in J$ and $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in \Omega_U^1$, $r \geq 1$

$$\int_{\alpha\beta} \omega_1 \cdots \omega_r = \sum_{i=1}^{r-1} \int_{\alpha} \omega_1 \cdots \omega_i \int_{\beta} \omega_{i+1} \cdots \omega_r.$$

In particular, $\int_{\alpha\beta} \omega_1 = 0$. This statement follows from I1 and I2.

I 6. We have

$$\int_{J^s} \Omega_r = 0, \text{ for } 0 \leq r < s.$$

This follows by induction on r from I5.

I 7. For $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in F$ and $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in \Omega_U^1$

$$\int_{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)\cdots(\alpha_r-1)} \omega_1 \cdots \omega_r = \prod_{i=1}^r \int_{\alpha_i} \omega_i.$$

This follows by induction on r from I5, I6 and I1.

We conclude that $\int_{\alpha} \omega$, $\omega \in \Omega_r / \Omega_{r-1}$, $\alpha \in J^r / J^{r+1}$ is well-defined. Now we list some properties related to F_r 's.

I 8. For $r < s$ and $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in \Omega_U^1$ we have

$$\int_{\beta_s} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r = 0, \beta_s = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \text{ or its inverse,}$$

where $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = ((\cdots((\alpha_1, \alpha_2), \alpha_3) \cdots), \alpha_r)$.

It is enough to prove the statement for β_s . For β_s^{-1} it follows from I2 applied on $\beta_s \beta_s^{-1} = 1$. The proof for $\beta_s = (\beta_{s-1}, \alpha_s)$ is by induction on s . For $s = 1$ it is trivially true. Suppose that the statement is true for s and let us prove it for $s + 1$. After various applications of I2 and the induction hypothesis we have

$$\int_{\beta_{s+1}} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r = \int_{\beta_s} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r + \int_{\beta_s^{-1}} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r$$

Now we apply I2 for $\beta_s \beta_s^{-1} = 1$ and we conclude that the right hand side of the above equality is zero.

I 9. For $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in \Omega_U^1$ we have

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r &= 0, \quad \alpha \in F_s, \quad r < s, \\ \int_{\alpha\beta} \omega_1 \cdots \omega_r &= \int_{\alpha} \omega_1 \cdots \omega_r + \int_{\beta} \omega_1 \cdots \omega_r, \quad \alpha, \beta \in F_r, \\ \int_{\alpha^{-1}} \omega_1 \cdots \omega_r &= - \int_{\alpha} \omega_1 \cdots \omega_r, \quad \alpha \in F_r, \\ \int_{\alpha} (\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r + (-1)^r \omega_r \cdots \omega_1) &= 0, \quad \alpha \in F_r. \end{aligned}$$

I9 implies that $\int_{\alpha} \omega$, $\alpha \in F_r/F_{r+1}$, $\omega \in \Omega_r/\Omega_{r-1}$ is well-defined.

I 10. For $\alpha \in F_r$ and $\beta \in F_s$

$$\int_{(\alpha, \beta)} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{r+s} = \int_{\alpha} \omega_1 \cdots \omega_r \int_{\beta} \omega_{r+1} \cdots \omega_{r+s} - \int_{\beta} \omega_1 \cdots \omega_s \int_{\alpha} \omega_{s+1} \cdots \omega_{r+s}$$

In particular

$$(4) \quad \int_{(\alpha, \beta)} \omega_1 \omega_2 = \det \begin{pmatrix} \int_{\alpha} \omega_1 & \int_{\beta} \omega_1 \\ \int_{\alpha} \omega_2 & \int_{\beta} \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in F, \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega_U^1.$$

The above statement follows by several application of I2, I9 (see also [2] Lemma 3).

I 11. For $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_r, \beta_r \in F$ and $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_U^1$

$$\int_{\prod_{i=1}^s (\alpha_i, \beta_i)} \omega_1 \omega_2 = \sum_{i=1}^s \det \begin{pmatrix} \int_{\alpha_i} \omega_1 & \int_{\beta_i} \omega_1 \\ \int_{\alpha_i} \omega_2 & \int_{\beta_i} \omega_2 \end{pmatrix}.$$

The above statement follows by induction on s .

4 Free \mathbb{Z} -Lie algebras

One can associate to a free group F the \mathbb{Z} -Lie algebra

$$L_F := \bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i/F_{i+1}, \quad [xF_i, yF_j] = (x, y)F_{i+j}.$$

It is in fact freely generated by $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$. Another way to construct L_F is as follows: The remarks after I7 and I9 suggest that there may be an isomorphism between F_r/F_{r+1} and J^r/J^{r+1} . In fact the maps $F_r/F_{r+1} \rightarrow J^r/J^{r+1}$ induced by $x \mapsto x - 1$ are well-defined and gives us an isomorphism of \mathbb{Z} -Lie algebras:

$$L_F \rightarrow \bigoplus_{r=1}^{\infty} J^r/J^{r+1}$$

This is proved in [6]. There is also a third way to define a free Lie algebra: Let Ω be the free non-commutative ring generated by x_1, x_2, \dots, x_m . We denote by Ω_n the subset of Ω containing homogeneous polynomials of degree n , $\Omega = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Omega_i$. In Ω we define the bracket

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha, \quad \alpha, \beta \in \Omega.$$

In this way Ω turns out to be a Lie algebra and we consider the smallest sub Lie algebra Ω^l of Ω generated by x_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Note that only $+$ and $[\cdot, \cdot]$ is allowed. A element of Ω^l is called a Lie element. We have an isomorphism of \mathbb{Z} -Lie algebras:

$$A : \Omega^l \rightarrow L_F, \text{ induced by } \omega_i \mapsto \delta_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

For $\omega \in \Omega_r$ the integration $\int_{\delta} \omega$ is well-defined for $\delta \in F_r/F_{r+1} \cong J^r/J^{r+1}$ and so we can talk about $A^{-1}(\delta) \in \Omega^l$. In this way

$$(5) \quad \int_{\delta} \omega = \langle \omega, A^{-1}\delta \rangle$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is defined in Ω_i^l , $i = 1, 2, \dots$ by the rules:

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}, x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_n} \rangle = \begin{cases} 1 & i_1 = j_1, \dots, i_n = j_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

5 Basic commutators

P. Hall in [4] Chapter 11 proves that a basis of $H_{1,r}(U, \mathbb{Z})$ is given by the so called basic commutators of weight r . In this section we explain the construction of such a basis. We have adapted the notations of [8], Chapter IV.

We choose a basis δ_i , $i = 1, 2, \dots, m$ and put the order $\delta_i < \delta_j$ if $i < j$. The basic commutators of weight 1 are δ_i 's. Having defined the basic commutators of weight less than r , the basic commutators of weight r are (c_i, c_j) , where

1. c_i and c_j are basic and $w(c_i) + w(c_j) = r$;
2. $c_i < c_j$ and if $c_j = [c_s, c_t]$ then $c_s \leq c_i$;

The commutators of weight r follows those of weight less than r and are ordered arbitrarily with respect to each other. In practice, one takes the lexicographical order in two elements c_i, c_j for the basic commutators (c_i, c_j) of weight r .

In Ω we define the commutator $[\cdot, \cdot]$ by $[u, v] := uv - vu$ and in a similar way we define the basic commutators in Ω . In the construction of basic commutators we replace $\{\delta_i\}$ with with a basis $\{\omega_i\}$ of $H_{dR}^1(U)$ and (\cdot, \cdot) with $[\cdot, \cdot]$.

6 The dual of $H_{1,r}(U, \mathbb{C})$

Let Ω^l be the sub \mathbb{Z} -module of Ω generated by the shuffle elements: ω is a shuffle element if it is of the form

$$\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r)} \omega_{k_1} \omega_{k_2} \cdots \omega_{k_r}$$

for some $r \in \mathbb{N}$, where for a fixed indices $i = (i_1, i_2, \dots, i_a)$ and $j = (j_1, j_2, \dots, j_b)$, $a+b = r$ the above sum runs through all shuffles of i and j .

Theorem 1. *The subspaces Ω_r^l and Ω_r^s of Ω_r , $r = 2, 3, \dots$ are orthogonal to each other with respect to the bilinear map $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and*

$$\Omega = \Omega_r^l \oplus \Omega_r^s$$

Proof. The first statement follows from I4 and (5) for $\omega \in \Omega_r^s$ and $A^{-1}\delta \in \Omega_r^l$. The second statement follows from the first part and

$$\dim(\Omega_r^l) = M_m(r) = m^r - \dim \Omega_r^s$$

(see for instance [7] p. 218). □

Let us define

$$H_{\text{dR}}^{1,r}(U) := \Omega_r / (\Omega_{r-1} + \Omega_r^s).$$

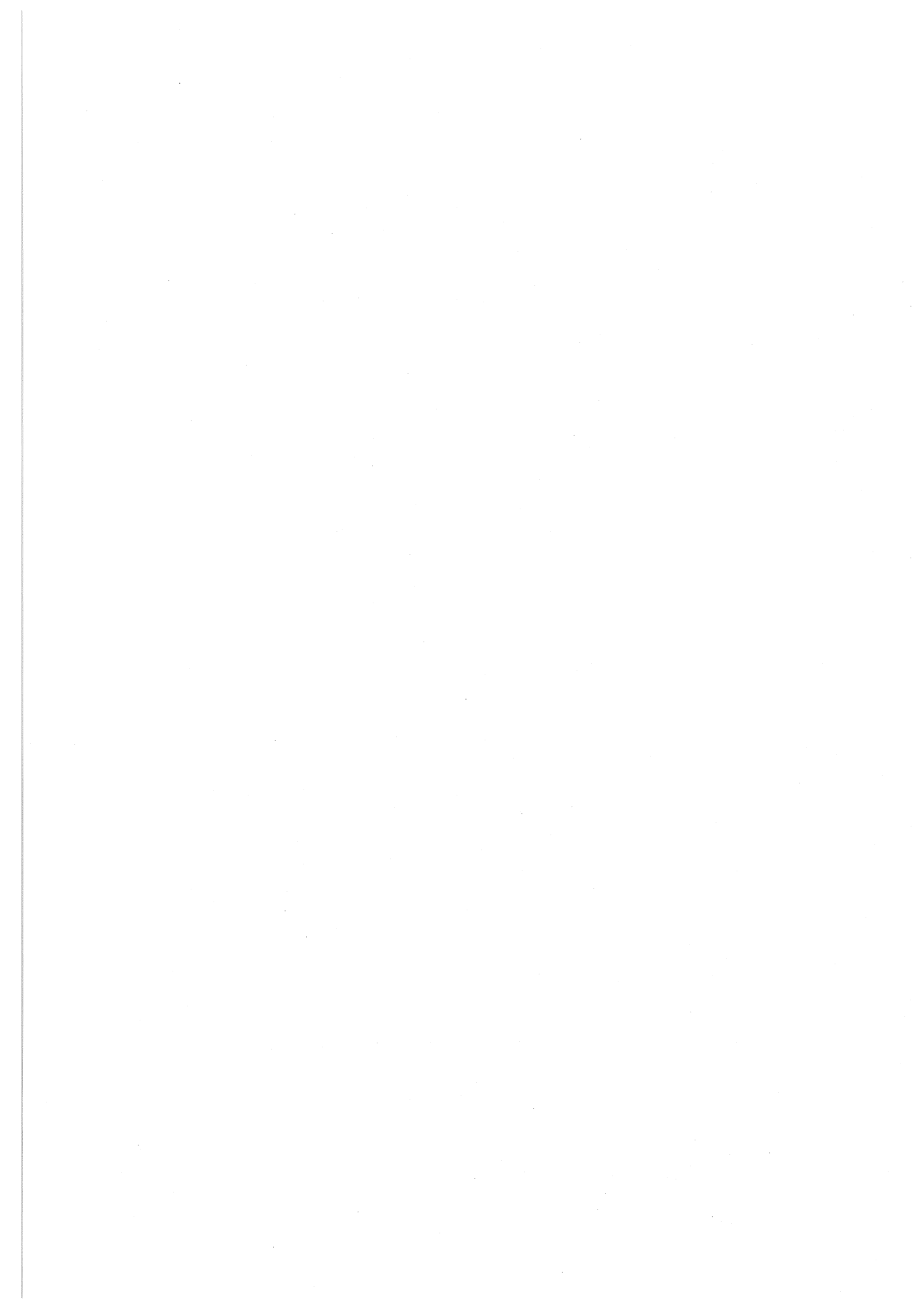
Corollary 1. *The map*

$$\alpha : H_{\text{dR}}^{1,r}(U) \rightarrow \check{H}_{1,r}(U, \mathbb{C}), \quad \alpha(\omega)(\delta) = \int_{\delta} \omega.$$

is an isomorphism of \mathbb{C} -vector spaces, where $\check{}$ means dual and $H_{1,r}(U, \mathbb{C}) = H_{1,r}(U, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. A basis of $H_{\text{dR}}^{1,r}(U)$ is given by basic commutators of weight r .

References

- [1] L. Gavrilov, H. Movasati, and I. Nakai. Dual to basic commutators. *Under preparation*, 2006.
- [2] Lubomir Gavrilov. Higher order poincaré-pontryagyn functions and iterated path integrals. *To appear in Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*
- [3] Richard M. Hain. The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group. In *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, volume 46 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 247–282. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [4] Marshall Hall, Jr. *The theory of groups*. The Macmillan Co., New York, N.Y., 1959.
- [5] H. Movasati and I. Nakai. Iterated integrals in holomorphic foliations. *2006, submitted*, 2006.
- [6] Daniel G. Quillen. On the associated graded ring of a group ring. *J. Algebra*, 10:411–418, 1968.
- [7] Rimhak Ree. Lie elements and an algebra associated with shuffles. *Ann. of Math. (2)*, 68:210–220, 1958.
- [8] Jean-Pierre Serre. *Lie algebras and Lie groups*, volume 1500 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 1964 lectures given at Harvard University, Corrected fifth printing of the second (1992) edition.



力学系の双曲性とパラメータ空間の構造について

On hyperbolicity of dynamical systems and the structure of parameter spaces

荒井 迅 (Zin ARAI) 京都大学大学院理学研究科

arai@math.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

本講演では与えられた力学系の安定性や分岐を研究するためのトポロジカルな手法について解説する。力学系の安定性は理論的にも、また制御理論などへの応用を考える上でも非常に重要な概念であるが、具体的に与えられた力学系が安定かどうか、また系の構造を変えずにどのくらいパラメータを変化させられるかを判定するのはたいへん難しい。困難のひとつの原因は大域的な分岐である。不動点の分岐などの局所的な分岐ならばその不動点の近傍だけを観察すればよいが、安定性を議論するためには大域的な分岐にも着目せねばならず、相空間全体を一度に扱う理論が必要になる。

我々が提案する手法では、位相幾何学的手法と精度保証付き数値計算などを組み合わせてこのような困難を克服する。おおまかに言うと、位相幾何学的手法により問題を変形し、証明は計算機を用いた方技でやっつけてしまおうという方針である。本講演の手法はその証明に計算機を用いるが、全ての計算が数学的に厳密に実行される、すなわち計算機援用証明になっていることを注意しておく。

以下で扱う力学系は簡単のために有限次元の離散力学系、すなわち有限次元空間上の写像によって定義される力学系に限ることとする。連続力学系に対しても、そのポアンカレ写像を精度保証付き数値計算により厳密に評価することにより本講演の手法を適用できるが、一般に数値積分の厳密な評価は簡単な問題ではない [4]。また、偏微分方程式や関数空間上の写像を本講演に近い方針で無限次元力学系として取り扱おうとする試みも存在し、ある程度の成果が既に得られている [9]。

ここで本講演において繰り返し例として扱われる Hénon 写像に触れよう。Hénon 写像とは

$$H_{a,b} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 : (\text{もしくは } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2) : (x, y) \mapsto (a - x^2 + by, x)$$

で定義される写像であり、 a および b は複素数の値を取るパラメータである。 b が 0 でないときは $H_{a,b}$ は微分同相写像となり、 b が 0 のときは 2 次関数 $x \mapsto a - x^2$ が定める 1 次元力学系に帰着される。また a, b が実数の場合には $H_{a,b}$ は \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への写像とも思える。もともとローレンツ方程式のポアンカレ写像を研究する過程で、それと似たような性質の力学系を持ち、より単純なモデルとして Hénon により人工的に構成された写像ではあったが、実は \mathbb{C}^2 の 2 次の多項式自己同型写像で力学系として非自明なものは Hénon 写像に限ることや、この写像が一般の力学系がホモクリニック接触を持つときに起きる現象を非常に良く表わしていることが後にわかり、現在の力学系研究において中心的な役割を果たしている写像である。

2 道具立て

2.1 コンレイ指数

まずコンレイ指数 [13] という位相幾何学的不変量について、とくに対象を離散力学系に限って解説する。離散力学系とはここでは局所コンパクト距離空間 X 上の同相写像 $f : X \rightarrow X$ のこととす

る。点 $x \in X$ の時間 $n \in \mathbb{Z}$ 後の位置が $f^n(x)$ である。

力学系の解析では X 全体における f の挙動を一度に考えるのではなく、不変集合 (すなわち $f(S) = S$ となる $S \subset X$) 上での f のふるまいと、不変集合たちの間の軌道の繋がり方に問題を分割するのが常套手段である。ところが不変集合そのものを対象として解析を行なおうとしても、計算誤差により不変集合の構造が変化してしまうため数学的に厳密な結果を数値計算から得るのは難しい。

そこで我々は次のような「よい」不変集合のクラスを考える。

定義 1. $S \subset X$ が孤立不変集合 (isolated invariant set) であるとは、 S のコンパクト近傍 N が存在して S が N の最大不変集合となる、すなわち

$$S = \text{Inv}(N, f) := \{x \in N \mid \text{任意の } n \in \mathbb{Z} \text{ に対し } f^n(x) \in N\} \subset \text{int } N$$

となることである。またこのとき N を S の孤立化近傍 (isolating neighborhood) という。

空集合も孤立不変集合の定義を満たすことに注意する。ここで重要なのは孤立化近傍であるという性質が微細な摂動に対し安定である、つまり N がある f に対し孤立化近傍であれば、 f と十分 C^0 位相で近い g に対しても N は孤立化近傍であり続けるということである。摂動によって孤立不変集合は変化するので $\text{Inv}(N, f)$ と $\text{Inv}(N, g)$ の構造は一般に異なるが、 N が孤立化近傍であるという性質は安定であり、それは計算機で検証することが可能である。

以下では孤立不変集合と孤立化近傍に注目する。不変集合そのものは扱いが難しいので、まずその近傍を観察し、そこで得られた情報から不変集合について何らかの結論を得ようという方針である。

定義 2. 孤立不変集合 S の index pair とは $P_0 \subset P_1$ なるコンパクト集合対 $P = (P_1, P_0)$ で

$$(1) P_1 \setminus P_0 \text{ の閉包が } S \text{ の孤立化近傍であり} \quad (2) f(P_0) \cap P_1 \subset P_0 \quad (3) f(P_1 \setminus P_0) \subset P_1$$

となるもののことである。このとき P_1/P_0 を P_1 の中で P_0 を一点に潰した空間とし (P_0 を潰して得られた点を $[P_0] \in P_1/P_0$ と書く)、 $f_P: P_1/P_0 \rightarrow P_1/P_0$ を

$$f_P([x]) := \begin{cases} [f(x)] & f(x) \in P_1 \text{ のとき} \\ [P_0] & \text{その他} \end{cases}$$

と定義すると f_P は連続写像となるが、これを index map と言う。

index map は S の近傍での f のふるまいを記述していると考えられるので、これに適当な関手を適用することで力学系の情報を引き出したいが、具体例に応用するためには実際に計算できる関手でないといけない。最近の計算ホモロジー理論の発展により、ホモロジーならば計算機で求めることができるのでこれを適用することになると、 P_1/P_0 から加群 $H_*(P_1/P_0, [P_0])$ が、 f_P から自己準同形

$$f_{P_*}: H_*(P_1/P_0, [P_0]) \rightarrow H_*(P_1/P_0, [P_0])$$

が得られる。ここで $H_*(P_1/P_0, [P_0])$ は位相空間対 $(P_1/P_0, [P_0])$ の双対ホモロジーを表わす。

index pair の選び方は一般に無数にあり $H_*(P_1/P_0, [P_0])$ も f_{P_*} もその選び方に依存してしまうため、次のような同値関係を考えることで不変量を取り出す。

定義 3 ([13]). 準同形 $f: X \rightarrow X$ と $g: Y \rightarrow Y$ は、ある自然数 m と準同形 $r: X \rightarrow Y, s: Y \rightarrow X$ が存在して $r \circ f = g \circ r, s \circ g = f \circ s, r \circ s = g^m, s \circ r = f^m$ となるときのシフト同値であるという。

任意の孤立不変集合 S に対してその index pair は必ず存在し、 $P = (P_1, P_0)$ と $Q = (Q_1, Q_0)$ を S の index pair とすると f_{P_*} と f_{Q_*} はシフト同値であることが証明される。よって次のようにコンレイ指数を定義することができる。

定義 4. 孤立不変集合 S のホモロジーコンレイ指数とは、 $P = (P_1, P_0)$ を S の index pair としたときの f_{P^*} のシフト同値類のことである。

コンレイ指数から何がわかるのか、最も単純な結果は次のようなものである。

定理 5 (Ważewski principle [12, 13]). $P = (P_1, P_0)$ を S の index pair とする。このとき f_{P^*} が $0: \{0\} \rightarrow \{0\}$ とシフト同値でないならば、 S は空集合ではない。

定理 6 (index pair に対する Lefschetz 不動点定理 [12]). $P = (P_1, P_0)$ を S の index pair とする。 $L(f_{P^*}) := \sum_k (-1)^k \text{tr } f_{P^*k} \neq 0$ ならば S は f の不動点を含む。より一般に $\sum_k (-1)^k \text{tr } f_{P^*k}^n \neq 0$ ならば S は f^n の不動点を含む。

他にもコンレイ指数の情報から記号力学系との対応や位相的エントロピーの評価を得たり、後の節で述べるように connecting orbit の存在などを導くこともできる [12]。

これらの定理を具体例に適用するためには index pair と index map を構成し、さらにそのホモロジーを計算せねばならない。簡単な場合ならばこれを手で実行することも可能だが、複雑な不変集合を扱う場合には計算機の力を借りざるを得ない。

2.2 精度保証付き数値計算と有向グラフによる力学系の表現

では次に力学系を計算機上で表現する方法を見ることにしよう。この節では f は \mathbb{R}^n の有界閉集合 X 上で定義されているとする。まずは X の部分集合を計算機で扱える形で表現する。様々な方法が考えられるが、ここでは最も単純に \mathbb{R}^n を n 次元直方体により分割し、それらの有限和として書ける部分集合のみ扱うという方法を採用する。分割の要素となる n 次元直方体の各辺の長さを d_i ($i = 1 \dots n$) とし、

$$\Omega := \left\{ \prod_{i=1}^n [k_i d_i, (k_i + 1) d_i] : k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

とおくと、 X は Ω の要素により被覆される。直方体の集合 $B \subset \Omega$ に対し、 $|B|$ を B に含まれる直方体の和集合として表される \mathbb{R}^n の部分集合とする。

次に f を計算機で扱える形に表現しよう。ここで写像 f に精度保証付き区間演算が適用でき、各 $\omega \in \Omega$ に対して $f(|\omega|)$ を内点を含む直方体を計算機で求められると仮定する。この直方体を $\tilde{f}(\omega)$ と書く。 $\tilde{f}(|\omega|)$ は直方体ではあるが Ω の要素の和ではないので、 $\tilde{f}(|\omega|)$ と交わる Ω の要素を全て集めこれを $\mathcal{F}(\omega)$ とおく。すなわち

$$\mathcal{F}: \Omega \rightarrow \{ \Omega \text{ の部分集合} \} : \omega \mapsto \{ \omega' \in \Omega : \tilde{f}(|\omega|) \cap |\omega'| \neq \emptyset \}$$

である。 $f(|\omega|) \subset \text{int } \mathcal{F}(\omega)$ が成立することに注意する。 $f(|\omega|)$ は正確に求めることができないので、それを外側から近似する $\mathcal{F}(\omega)$ を求めていることになる。

B を Ω の有限部分集合とすると、 $\omega \in B$ を頂点とし、 $\omega' \in \mathcal{F}(\omega)$ のときに ω から ω' への辺が存在すると定義することにより有向グラフ G が得られる。これは $f: |B| \rightarrow |B|$ の計算機による近似表現と考えることができる。

このグラフで重要なことは、もし $x \in |\omega|$ の像 $f(x)$ が $|\omega'|$ に含まれるならば、必ず ω から ω' への辺が存在するということである。対偶を取れば、もし G において ω から ω' への辺が存在しなければ、 $f(|\omega|) \cap |\omega'| = \emptyset$ が厳密に成り立つということが結論できる。

さらに、このグラフは力学系の様々な不変集合を表現することもできる。以下で扱う重要な不変集合として、上で定義した $\text{Inv}(N, f)$ の他に鎖回帰集合がある。

定義 7. x から y への長さ n の ε -鎖とは点列 $\{x = x_0, \dots, x_n = y\}$ であって任意の $1 \leq j \leq n$ に対して $d(f(x_{j-1}), x_j) < \varepsilon$ となるものである。 f の鎖回帰集合はこれを用いて

$$\mathcal{R}(f) := \{x \in X \mid \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } x \text{ から } x \text{ への } \varepsilon\text{-鎖が存在する}\}$$

と定義される。ここで d は X の位相を与える距離である。

鎖回帰集合はその中に全ての周期点や非遊走集合を含み、コンレイの基本定理 [15] によれば鎖回帰集合の外では力学系の振舞いは単純な勾配系になることがわかる非常に重要な不変集合である。

これらの不変集合を表現するため、有向グラフ G に対し次のような部分グラフを定義する。

$$\text{Inv } G := \{\omega \in G \mid \exists \text{ bi-infinitely long path through } \omega\}$$

$$\text{Scc } G := \{\omega \in G \mid \exists \text{ path from } \omega \text{ to itself}\}$$

また G' を G の部分グラフとすると、 G' 含まれる頂点に対応する直方体を集めて $|G'| := \bigcup_{\omega \in G'} |\omega|$ とおく。すると次の性質が成立することが証明される。

命題 8. $\mathcal{R}(f) \subset |\text{Scc } G|$, $\text{Inv}(X, f) \subset |\text{Inv } G|$.

グラフを用いて力学系を表現することの一つの利点は $\text{Inv } G$ や $\text{Scc } G$ の計算にグラフ理論の高速なアルゴリズムを用いることができる点である。それらのアルゴリズムとこの命題により、鎖回帰集合や最大不変集合の含まれる領域を厳密かつ高速に評価することができる。

2.3 計算機によるコンレイ指数の計算

コンレイ指数を計算機で求めるためのステップは次のようになる。

ステップ 1. 孤立化近傍の候補となる集合 $\mathcal{I} \subset \Omega$ をつくる

ステップ 2. 孤立化近傍の条件を満たすように \mathcal{I} を修正する

ステップ 3. \mathcal{I} から index pair を構成する

ステップ 4. ホモロジーを計算する

以下これらのステップを順に見ていこう。

ステップ 1. 注目する不変集合が存在すると予想される領域を被覆する直方体の集合 \mathcal{I} を構成する。これが孤立化近傍の第一近似となる。各直方体が十分小さくないと以後のステップで計算が破綻したり自明な結論しか導き出せなくなってしまうが、単純に \mathcal{I} の各直方体を全て小さく分割すると、直方体の数が増えすぎて計算時間が莫大になってしまう。そこでまず各直方体を 2 等分し、次に注目する不変集合と関係ない直方体を取り除くという作業を各直方体が十分小さくなるまで繰り返す。

ステップ 2. $|\mathcal{I}|$ が孤立化近傍となる、すなわち $\text{Inv}(|\mathcal{I}|, f) \subset \text{int } |\mathcal{I}|$ が満たされるように \mathcal{I} を再構成する。 $B \subset \Omega$ に対し $o(B) := \{\omega \in \Omega : |\omega| \cap B| \neq \emptyset\}$, $d(B) := o(B) \setminus B$ とおこう。 $|o(B)|$ は Ω の部分集合により表すことができる $|B|$ の近傍で最小のものである。また $\text{Inv}(B, f)$ を

$$\{\omega \in B \mid \text{ある } \gamma : \mathbb{Z} \rightarrow B \text{ が存在して } \gamma(0) = \omega \text{ かつ } \gamma(k+1) \in \mathcal{F}(\gamma(k)) \text{ を満たす}\}$$

と定義する。 $f(|\omega|) \subset \text{int } \mathcal{F}(\omega)$ が保証されていることから $\text{Inv}(|\mathcal{I}|, f) \subset |\text{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F})|$ が成り立つので、 $o(\text{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F})) \subset \mathcal{I}$ が言えれば $\text{Inv}(|\mathcal{I}|, f) \subset |\text{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F})| \subset \text{int } |o(\text{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F}))| \subset \text{int } |\mathcal{I}|$ となり目標が達成される。 $o(\text{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F})) \subset \mathcal{I}$ を満たすよう \mathcal{I} を再構成する方法として、成立するまで \mathcal{I} から直方体を減らしてゆくアルゴリズムと、逆に付け加えてゆくアルゴリズム [12] が考えられる。

ステップ 3. $B = \text{Inv}(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ に対し $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_0) = ((d(B) \cap \mathcal{F}(B)) \cup B, d(B) \cap \mathcal{F}(B))$ とおくと $P = (|\mathcal{P}_1|, |\mathcal{P}_0|)$ が $\text{Inv}(|\mathcal{I}|, f)$ の index pair となる [12].

ステップ 4. 計算ホモロジー理論 [12] と、それを計算機上に実装したソフトウェアパッケージである CHomP (<http://www.math.gatech.edu/~chomp/>) を利用し、 $H_*(|\mathcal{P}_1|/|\mathcal{P}_0|, |\mathcal{P}_0|)$ と f_{P*} を計算機上での f の近似表現 \mathcal{F} から計算する。単体近似定理の場合と同様に、各直方体が十分小さく、 \mathcal{F} による近似が十分よいことが計算可能性の必要条件となるが、直方体の数が多くなると計算に必要なメモリの量及び実行時間が大きな障害となる。この問題を回避するため、CHomP にはホモロジーを変化させずに直方体の数を減らす様々なアルゴリズムが実装されている。

2.4 バンドル写像

f を可微分多様体 M 上の微分同相写像としよう。一般に f の安定性や分岐を議論する場合には、 f だけではなく微分 Tf の情報も必要になるが、コンレイ指数は位相不変量であり微分の情報は含まないため、単純にコンレイ指数を $f: M \rightarrow M$ に適用するだけでは不十分である。

そこでまず我々は M の接バンドル TM とその上に f が導く Tf を考える。 f が C^r 級微分同相であれば Tf は C^{r-1} 級の微分同相写像である。さらに我々は Tf からベクトルの大きさに関する情報を捨て、ベクトルの張る空間の方向だけに注目した写像も用いる。

PM を接束 TM の射影化としよう。すなわち x 上のファイバー $P_x M$ が $T_x M$ の射影空間であり、 TM から誘導される局所自明化を持つ M 上のファイバー束である。 Pf は f の微分 $Tf: TM \rightarrow TM$ が PM 上に誘導する写像とする。 $0 \neq v \in T_x M$ の張る線型空間を $[v] \in P_x M$ と書くと $Pf([v]) := [Tf(v)] \in P_{f(x)} M$ である。 TM から PM への射影を π と書き $TM \rightarrow M$ の零切断の像と M を同一視すると、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} TM \setminus M & \xrightarrow{Tf|_{TM \setminus M}} & TM \setminus M \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ PM & \xrightarrow{Pf} & PM. \end{array}$$

f が C^r 級微分同相であれば Pf は C^{r-1} 級の微分同相写像である。 Pf は Tf に比べてベクトルの大きさに関する情報が減っている訳であるが、 TM が一般にコンパクトにならないのに対し PM は M がコンパクトならコンパクトになるため扱い易い。また §4 で見るように、ホモクリニック接触を議論する際には安定多様体と不安定多様体の接ベクトルの方向が一致するかが問題であり、それらの接ベクトルの大きさは関係ないため、議論は PM 上で行なうのが自然である。

3 安定性と双曲性

力学系において安定性と双曲性は密接な関係にある。最も簡単な場合としては双曲型不動点の局所的な安定性が挙げられるだろう。より一般に次の定理が示されている。

定理 9 (構造安定性定理 [15]). f をコンパクト多様体 M 上の C^1 級微分同相写像とする。 f が $\mathcal{R}(f)$ 上で一様双曲的であり、また $\mathcal{R}(f)$ 上で横断性条件を満たしているとする、 f は構造安定である。

ここで f が構造安定であるとは、 f の C^1 位相での近傍 \mathcal{N} が存在して、任意の $g \in \mathcal{N}$ に対しある同相写像 $h: M \rightarrow M$ がとれ f と g が共役になる、すなわち $g \circ h = h \circ f$ となることである。また横断性条件とは $\mathcal{R}(f)$ の各点に対して定義される安定多様体と不安定多様体が全て互いに横断的であることをいう。横断性条件がなくても次の定理が成立する。

定理 10 (\mathcal{R} -安定性定理 [15]). M をコンパクト多様体、 f を M 上の C^1 級微分同相写像とする。 f が $\mathcal{R}(f)$ 上で一様双曲的であるならば、 f は \mathcal{R} -安定である。

ここで f が \mathcal{R} -安定であるとは、鎖回帰集合上に限って構造安定であるということを意味する。また M がコンパクトでない場合でも摂動を適当な空間に制限すれば同様なことが成立する。

このように一様双曲性は安定性と絡みたいへん重要な概念であるが、実際に与えられた系が双曲的かどうか証明するのは難しい。これを見るために、まずは一様双曲性の定義を復習しよう。

定義 11. 力学系 f が不変集合 Λ 上で一様双曲的 (uniformly hyperbolic) であるとは、接束 $T\Lambda = TM|_{\Lambda}$ が Tf -不変な部分束の直和 $T\Lambda = E^s \oplus E^u$ に分解し、さらに定数 $c > 0$ と $0 < \lambda < 1$ が存在して任意の $n \geq 0$ について $\|Tf^n|_{E^s}\| < c\lambda^n$ および $\|Tf^{-n}|_{E^u}\| < c\lambda^n$ が成立することをいう。ここで $\|\cdot\|$ は M 上のある計量である。

一様双曲性をこの定義にしたがって証明するのは、定数 c, λ や M 上の計量を同時に上手く選ばなくてはならないため一般に難しい。Hénon 写像の場合に複素解析的手法を用いて上手く計量を構成するという方針の研究も S. Hruska により進められているが [11], アルゴリズムの複雑さや計算量の問題などからパラメータ空間の詳細な解析までには至っていない。

そこで我々はこの困難を回避するために擬双曲性という概念を導入する。点 $x \in \Lambda$ 上の接ベクトルとして $0 \in T_x M$ を取るとその軌道は全て 0 ベクトルである。このように TM の 0 切断に含まれる軌道を自明な有界軌道と呼ぶことにする。

定義 12. $Tf : T\Lambda \rightarrow T\Lambda$ が非自明な有界軌道を持たないとき、 f は Λ 上で擬双曲的 (quasi-hyperbolic) であるという。

もし f が Λ が上で一様双曲的であるとすると、任意の接ベクトル $v \in T\Lambda$ はもし E^u 成分を持つならば正の方向に、また E^s 成分を持つならば負の方向に Tf で送ることにより、その軌道が発散する。よって一様双曲的ならば擬双曲的である。一般に逆は成り立たないが、 Λ 上の力学系がある条件を満たすと一様双曲性と擬双曲性は同値になる。

定理 13 ([7, 16]). $f|_{\Lambda}$ は鎖回帰的、すなわち $\mathcal{R}(f|_{\Lambda}) = \Lambda$ とする。このとき f が Λ 上で一様双曲的であるための必要十分条件は Λ 上で擬双曲的であることである。

以下 Hénon 写像の鎖回帰集合 $\mathcal{R}(H_{a,b})$ の場合を考えよう [3]。このように単純な写像でも双曲性を示すのは難しい。例えば Davis-MacKay-三波は [8] あるパラメータ領域における安定多様体と不安定多様体の配置から一様双曲性の成立を予想していたが、その数学的に厳密な証明は得られていなかった。本講演における手法を用いると以下のようにこの予想を証明することができる。

まず双曲性を示したいパラメータ領域 $A \times B$ を固定する。 $\mathcal{R}(H_{a,b}) \subset \text{int } K$ が任意の $(a,b) \in A \times B$ で成立するようなコンパクト集合 K を構成し、その接バンドル TK における 0-切断の近傍 $N = K \times [-1, 1]^2 \subset T\mathbb{R}^2$ をとる。次に $\text{Inv}(TH_{a,b}, N)$ を計算する。このときもし $\text{Inv}(TH_{a,b}, N) \subset \text{int } N$ が成立するならば、 $TH_{a,b}$ の有界な軌道は自明なものに限る。なぜなら $TH_{a,b}$ はファイバー方向に線型なため、もし非自明な有界軌道が一つでもあればその定数倍も全て非自明な有界軌道となり、 N の境界上にも必ず非自明な有界軌道の点に乗ってしまうためである。

この方法を適用して $\mathcal{R}(H_{a,b})$ の一様双曲性が示された領域が図 1 で影が付けられた領域である。 \mathcal{R} -安定性定理より、このパラメータ領域では鎖回帰集合上で分岐が起きない。よって周期点の数やトポジカルエントロピーなどの不変量は、図 1 のそれぞれの領域において定数となる。

上で議論したのは実 Hénon 写像の双曲性であったが、もちろん複素 Hénon 写像の場合にも同じ手法により同様な結果が得られる [2]。複素 Hénon 写像を 1 次元複素力学系の拡張と思うと、複素 Hénon 写像が双曲型馬蹄形写像となるパラメータは通常我々が目にするマンデルブロー集合の補集合と対応するものである。この領域のトポロジーに関する Hubbard 予想と呼ばれていた予想 [6] の

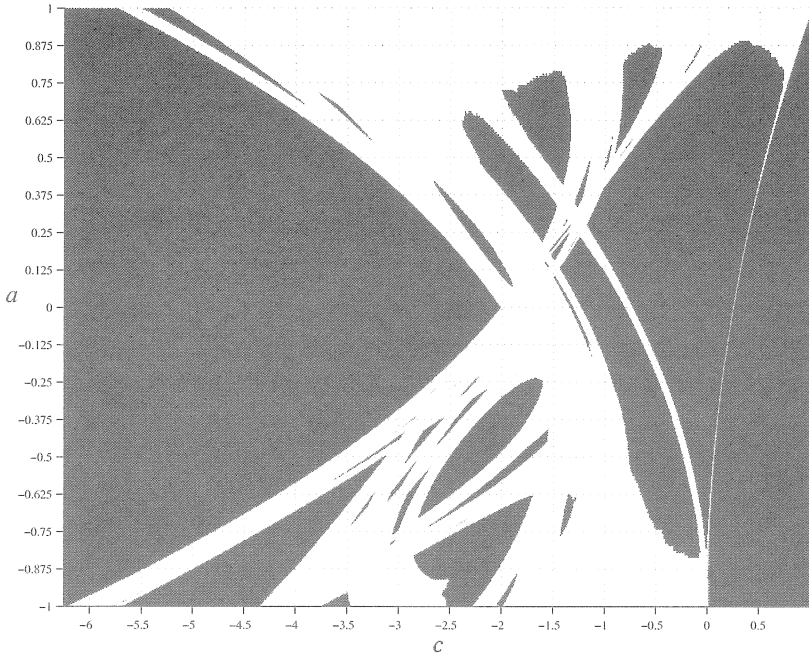


図1 Hyperbolic plateaus of the real Hénon map: $(x, y) \mapsto (x^2 + c - ay, x)$

証明がこの手法により与えられた。

4 ホモクリニック接触

ホモクリニック接触や、より一般にホモクリニック分岐 [14] の研究は現在の力学系において中心的な話題の一つである。ホモクリニック接触の存在からストレンジアトラクターや Newhouse 現象の発生が導かれたり [14], また任意の力学系は双曲型の力学系かホモクリニック分岐を持つ力学系で近似できるという Palis 予想もあり, その研究はたいへん重要である。一方でホモクリニック分岐は本質的に大域的な現象であるため具体的な系に対しその存在を証明するのは簡単ではない。この節では, ホモクリニック接触の存在をコンレイ指数を利用して検証する手法 [1, 5] について解説する。

以下では可微分同相写像 $f: M \rightarrow M$ を考える。双曲型周期点 $p \in M$ は, その安定多様体 $W_f^s(p)$ と不安定多様体 $W_f^u(p)$ が非横断的な交わりを持つときホモクリニック接触を起こすという。図 2 はエノン写像 ($a = 1.4, b = 0.3$) が第一象限に持つサドル型不動点 p の安定多様体と不安定多様体を描いたものである。このパラメータの近くで p がホモクリニック接触を持つように図から読みとれるが, 以下に解説する手法を使うとこの観察を次のように数学的に正当化することができる。

定理 14 ([5]). b が 0.3 に十分近いとき, ある $a \in [1.392419807915, 1.392419807931]$ が存在して p はホモクリニック接触を持つ。

我々は射影接バンドルを用いてホモクリニック接触の問題を変形する。 $p \in M$ を双曲型不動点, $T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$ を対応する接空間の分解とする。このとき安定部分空間 E_p^s と不安定部分空間 E_p^u を PM に射影した $\pi(E_p^s \setminus \{0\})$ および $\pi(E_p^u \setminus \{0\})$ は Pf の孤立不変集合となる (図 3)。記号の節約のためこれらも E_p^s, E_p^u と書くことにする。

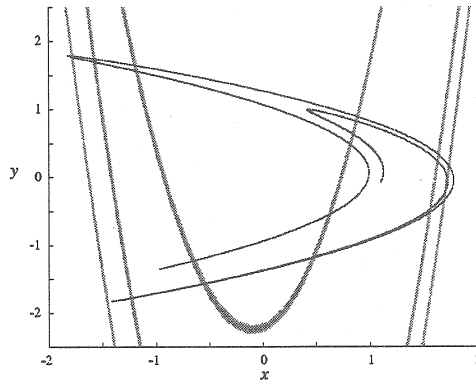


図2 ホモクリニック接触

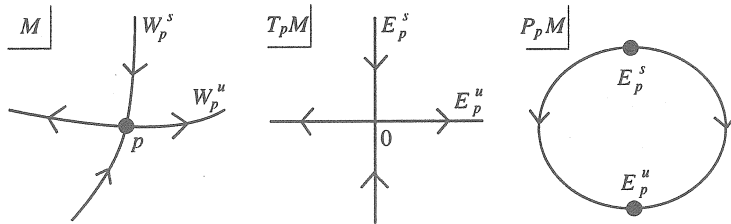


図3 双曲型不動点 p とその接空間の分解

定理 15 ([1]). p を f の双曲型不動点とすると、 p がホモクリニック接触を持つ必要十分条件は $Pf : PM \rightarrow PM$ が E_p^u から E_p^s への connecting orbit を持つことである。

ここで集合 A から B への connecting orbit とは、 $f^n(x)$ が $n \rightarrow -\infty$ で A に収束し、 $n \rightarrow +\infty$ で B に収束するような軌道のことである。この定理によりホモクリニック接触を検証するという問題は connecting orbit の存在を検証するということに言い換えられた。ではどのようにして connecting orbit を見つければよいであろうか。

定理 16 ([5]). 孤立化近傍 N が互いに交わらない閉集合 N_1, N_2 により $N = N_1 \cup N_2$ と表され、 $f(N_2) \cap N_1 = \emptyset$ と仮定する。 P, Q, R をそれぞれ N, N_1, N_2 の index pair とするとき、シフト同値類として $f_{P*} \neq f_{Q*} \oplus f_{R*}$ ならば $\text{Inv}(N_1, f)$ から $\text{Inv}(N_2, f)$ への connecting orbit が存在する。

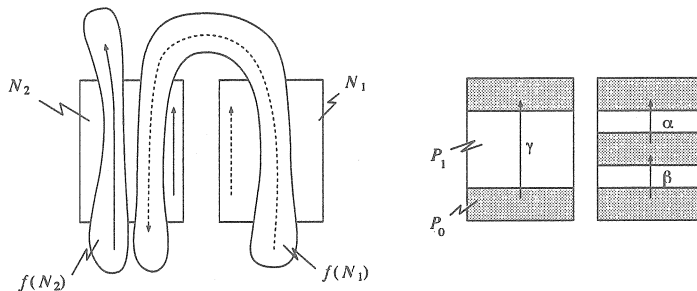


図4 broken horseshoe: 定理 16 が適用できる状況

定理 16 が適用できる典型的な状況が図 5 である。 $f(N_2) \cap N_1 = \emptyset$ は明らか。 N_1 のみに着目する

と、図から $\text{Inv}(N_1, f)$ はサドル型不動点と同じコンレイ指数を持つ。すなわち $f_{Q^*1} = 1_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ で 1 以外の次数では f_{Q^*} は 0 である。 $\text{Inv}(N_2, f)$ も同様。 よって $f_{Q^*1} \oplus f_{R^*1}$ は 2×2 単位行列 $1_{\mathbb{Z}^2} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ となる。 $\text{Inv}(N, f)$ 全体ではその index pair として図 5 の $P = (P_1, P_0)$ がとれ、 $H_1(P_1/P_0, [P_0])$ のホモロジーの生成元を α, β, γ とするとそれらは f_{P^*1} により $\alpha \mapsto -\gamma, \beta \mapsto \alpha + \beta, \gamma \mapsto \gamma$ と移される。 よって

$$f_{P^*1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

である。簡単な議論によりシフト同値類として $f_{P^*1} \neq f_{Q^*1} \oplus f_{R^*1}$ であることがわかり、定理 16 より $\text{Inv}(N_1, f)$ から $\text{Inv}(N_2, f)$ への connecting orbit が存在する。

コンレイ指数が小さな摂動に対し安定であることから定理 16 で発見できる connecting orbit は構造安定なものに限ることに注意しよう。我々は定理 16 を Pf に適用して E_p^u から E_p^s への connecting orbit を発見したいのだが、この connecting orbit は構造安定ではない。例えば $\dim M = 2$ で p がサドル型とすると PM 内で E_p^u は 1 次元、 E_p^s は 2 次元の不安定方向を持つサドル型不動点となる。このとき $W_{Pf}^u(E_p^u)$ と $W_{Pf}^s(E_p^s)$ は共に 1 次元であり、3 次元の PM 内では横断的になれず、 E_p^u から E_p^s への connecting orbit は構造安定ではない。これは周期点のホモクリニック接触が写像の摂動により壊れてしまうことから明らかである。

そこで以下では写像 f を固定して考えるのではなく、1 パラメータ族の設定で問題を考える。「パラメータ区間のどこかでホモクリニック接触を持つ」という性質は 1 パラメータ族の摂動に対しては安定 (1 パラメータ族が退化していなければ) なので、族全体を一個の写像として見て定理 16 を適用しようという方針である。

Λ を \mathbb{R} の区間、 $\{f_\lambda : M \rightarrow M\}_{\lambda \in \Lambda}$ を λ に滑かに依存する可微分同相写像の族で、双曲型不動点の族 $p(\lambda)$ を持つものとする。 λ を動かしたときに $p(\lambda)$ がホモクリニック接触を持つ λ が存在するかどうかを問題にしよう。この設定の下で

$$F(x, \lambda) := (Pf_\lambda(x), \lambda) : PM \times \Lambda \rightarrow PM \times \Lambda$$

$$\tilde{E}_p^u := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_{p(\lambda)}^u, \quad \tilde{E}_p^s := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_{p(\lambda)}^s$$

と定義すると \tilde{E}_p^u と \tilde{E}_p^s は F の孤立不変集合となる。 F はパラメータ λ を保存するので、もし F の下で \tilde{E}_p^u から \tilde{E}_p^s への connecting orbit が存在するならば、ある $\lambda_0 \in \Lambda$ に対し $E_{p(\lambda_0)}^u$ から $E_{p(\lambda_0)}^s$ への f_{λ_0} による connecting orbit が存在することになり、それは定理 15 により $p(\lambda_0)$ がホモクリニック接触を持つことを意味する。

見つけたい \tilde{E}_p^u から \tilde{E}_p^s への connecting orbit は安定に存在すると期待できるが、まだ定理 16 が適用できる状況ではない。 \tilde{E}_p^u と \tilde{E}_p^s の不安定方向の次元が異なることから上のような議論が成立しないのである。そこで \tilde{E}_p^u のホモロジーコンレイ指数が懸垂されるように $\partial\Lambda \cap \tilde{E}_p^u$ の近傍で F を摂動して、定理 16 が使える状況に持ち込む。この摂動は Λ を適当に取り直すことにより connecting orbit の存在に影響しないように行うことができる (詳しくは [5] を参照)。

さて、以上の議論をエノン写像 $H_{a,b}$ に適用して定理 14 を証明しよう。 b を 0.3 に固定し、 $H_{a,0.3}$ を a をパラメータとして持つ 1 パラメータ族と考える。 Λ を 1.4 を含む適当な閉区間にとり $PM \times \Lambda \cong \mathbb{R}^2 \times S^1 \times \Lambda$ の局所座標を (x, y, θ, a) と書こう。まず \tilde{E}_p^u から \tilde{E}_p^s への connecting orbit を近似する 4 次元直方体の集合を作る。さらに 2^{16} 個に分割して近似を良くする。分割しながら Λ の不要な部分を捨てることにより、最終的には $\Lambda = [1.392419807915, 1.392419807931]$ とする。また分割により \tilde{E}_p^u と \tilde{E}_p^s の近傍を十分小さくし、近傍内の最大不変集合が \tilde{E}_p^u と \tilde{E}_p^s となるようにしておく (Hartman-Grobman の定理の応用)。この精度が得られるまでに、最初の 1 個の直方体は

2^{140} 個の直方体に分割されている。ステップ 2, 3 を実行して index pair を作り CHomP でホモロジーを計算すると、ある 59×59 行列 A により $F_{P^*2} = A : \mathbb{Z}^{59} \rightarrow \mathbb{Z}^{59}$ と書けることがわかるが、基底を適当に取り換えることによりシフト同値類として

$$F_{P^*2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

となる。また \tilde{E}_p^u と \tilde{E}_p^s は共に不安定方向が 2 次元のサドル型不動点と同じコンレイ指数を持つことも CHomP により示される。 F_{P^*2} は 2×2 単位行列とシフト同値でなく、また \tilde{E}_p^s の近傍の F による像が \tilde{E}_p^u の近傍と交わらないことも簡単に示せるので定理 16 より \tilde{E}_p^u から \tilde{E}_p^s への connecting orbit が存在する。これと定理 15 により $b = 0.3$ の場合にある $a \in \Lambda$ が存在してホモクリニック接触が起きることがわかるが、コンレイ指数の摂動に対する安定性から b が十分 0.3 に近ければ以上の議論は全て同様に成立し、よって定理 14 の主張が証明された。

参考文献

- [1] Z. Arai, Tangencies and the Conley index, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **22** (2002), 973–999.
- [2] Z. Arai, On hyperbolic plateaus of the Hénon maps, preprint.
- [3] Z. Arai, On loops in the hyperbolic loci of the complex Hénon maps, preprint.
- [4] Z. Arai, On Applications of rigorous computing to dynamical systems, RIMS Kokyuroku.
- [5] Z. Arai and K. Mischaikow, Rigorous computations of homoclinic tangencies, *SIAM Journal of on Applied Dynamical Systems*, **5** (2006), 280–292.
- [6] E. Bedford and J. Smillie, The Hénon family: The complex horseshoe locus and real parameter values, preprint.
- [7] R. C. Churchill, J. Franke and J. Selgrade, A geometric criterion for hyperbolicity of flows, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **62** (1977), 137–143.
- [8] M. J. Davis, R. S. MacKay and A. Sannami, Markov shifts in the Hénon family, *Physica D*, **52** (1991), 171–178.
- [9] S. Day, O. Junge and K. Mischaikow, A rigorous numerical method for the global analysis of infinite-dimensional discrete dynamical systems, *SIAM Journal of on Applied Dynamical Systems*, **3** (2004), 117–160.
- [10] M. Dellnitz and O. Junge, Set oriented numerical methods for dynamical systems, *Handbook of dynamical systems II*, North-Holland, 2002, 221–264.
- [11] S. L. Hruska, A numerical method for proving hyperbolicity of complex Hénon mappings, preprint, arXiv:math.DS/0406004.
- [12] T. Kaczynski, K. Mischaikow and M. Mrozek, *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences **157**, Springer-Verlag, 2004.
- [13] K. Mischaikow and M. Mrozek, The Conley index theory, *Handbook of Dynamical Systems II*, North-Holland, 2002, 393–460.
- [14] J. Palis and F. Takens, *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*, Cambridge Studies in Adv. Math. **35**, Cambridge University Press, 1993.
- [15] C. Robinson, *Dynamical Systems; Stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [16] R. J. Sacker and G. R. Sell, Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems I, *J. Differential Equations*, **27** (1974) 429–458.

Dynamics of polynomial semigroups, interaction cohomology, and singular functions in the complex plane

角 大輝 (Sumi, Hiroki)

大阪大学理学部数学教室

E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/welcomeou-e.html>

2006年8月8日

1 導入

リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ 上の非定数有理写像の族で生成された、写像の合成を積とする半群を有理半群とよぶ。また、非定数多項式写像で生成された写像の合成を積とする半群を多項式半群とよぶ。本公演では $\hat{\mathbb{C}}$ 上で多項式半群の力学系とランダムな多項式力学系を同時に考え、群や可換半群の作用では見られない興味深い現象が現れることをみる。有理半群のリーマン球面上における力学系は、Hinkkanen and Martin ([HM]) と Ren のグループ ([GR]) によって独立に導入された。前者はタイヒミュラー空間が一次元になる場合のそのパラメータ付けへの応用を目論み、後者はランダムな複素力学系の観点から研究を行った。なお、「ランダムな複素力学系」の研究としては、Fornaess and Sibony によるもの ([FS]) が最初である。従来の一元生成半群の複素力学系については [M] が良い入門書である。

定義 1.1. G を有理半群とする。このとき、

$F(G) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid z \text{ のある近傍 } U \text{ において } G \text{ が同程度連続、つまり、}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } x, y \in U, d(x, y) < \delta \Rightarrow \forall g \in G, d(g(x), g(y)) < \epsilon\}$$

とおく。ただし、 d はリーマン球面上の固定した一つの距離 (たとえば球面距離) とする。これを、 G のファトウ集合とおく。また、 $J(G) := \hat{\mathbb{C}} \setminus F(G)$ とおいて、 G のジュリア集合とおく。

定義 1.2. 半群 G が $\{h_1, h_2, \dots\}$ で生成されているとき、 $G = \langle h_1, h_2, \dots \rangle$ とかく。また、有理写像 $h: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ の n 回合成写像は h^n とかく。

補題 1.3. G を有理半群とする。

1. 任意の $h \in G$ について、 $h(F(G)) \subset F(G)$ かつ $h^{-1}(J(G)) \subset J(G)$. しかし、等号は一般には成り立たない。
2. G が (半群として) 有限生成で、 $G = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ のとき、

$$J(G) = h_1^{-1}(J(G)) \cup \dots \cup h_m^{-1}(J(G))$$

となる。この性質を、後方自己相似性という。

例 1.4. $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$ とし、この 3 点は正三角形をなすとする。 $h_j(z) = 2(z - p_j) + p_j, j = 1, 2, 3$ とおく。 $G = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$ とおくと、 $J(G)$ はシルピンスキーガスケットになる。

問題 1. ジュリア集合の連結成分の個数は? また、ジュリア集合の穴の個数 (ファトゥ集合の連結成分の個数) は? $\{h^{-1}(J(G))\}_{h \in G}$ の重なり具合は?

2 後方自己相似系と相互作用コホモロジー

多項式半群 G が有限生成の場合、ジュリア集合 $J(G)$ の後方自己相似性に着目して、上記の問題を考えてみる。そのために、次の一般的なことを考えて、それを多項式半群の話に応用する。とくに、新しいコホモロジーを導入する。

定義 2.1 ([S7]). (X, d) を距離空間とし、 $h_j : X \rightarrow X$ ($j = 1, \dots, m$) を連続写像とする。 L を X のコンパクト集合とする。 $(L, \{h_1, \dots, h_m\})$ が後方自己相似系であるとは、次の二つの条件がいずれも満たされるときをいう。

1. $L = h_1^{-1}(L) \cup \dots \cup h_m^{-1}(L)$.
2. 任意の $j = 1, \dots, m$ と $z \in L$ に対し $h_j^{-1}(z) \neq \emptyset$.

定義 2.2 ([S7]). 上のとき、以下の記号を使う:

1. $\Sigma_m := \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$ とおく。任意の $x = (x_1, x_2, \dots) \in \Sigma_m$ に対し、 $L_x := \bigcap_{j=1}^{\infty} h_{x_j}^{-1} \dots h_{x_1}^{-1}(L)$ ($\neq \emptyset$) とおく。
2. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、 $\mathcal{U}_k := \{h_{x_1}^{-1} \dots h_{x_k}^{-1}(L) \mid (x_1, \dots, x_k) \in \{1, \dots, m\}^k\}$ とおく。これは L の有限被覆。
3. L の被覆 \mathcal{U} に対し、 $N(\mathcal{U})$ で \mathcal{U} の脈体をあらわす。 $N(\mathcal{U}_k)$ の場合には、その vertex の集合を $\{1, \dots, m\}^k$ と同一視する。また、simplicial map $\varphi_k : N(\mathcal{U}_{k+1}) \rightarrow N(\mathcal{U}_k)$ を、 $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$ から誘導されるものとして定義する (ただし $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \in \{1, \dots, m\}^{k+1}$)。これは、細分によって誘導されるものと同じ。
4. $G = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$, つまり G を $\{h_j : X \rightarrow X\}_{j=1}^m$ で生成された写像の合成を積とする半群として、 $\text{Cov}(L, G) := \{\mathcal{U} : L \text{ の有限被覆} \mid \mathcal{U} = \{g_1^{-1}(L), \dots, g_n^{-1}(L)\}, g_1, \dots, g_n \in G, n \in \mathbb{N}\}$ とおく。

5. 任意の $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と \mathbb{Z} 加群 R に対し、

$$\check{H}^p(L, G, R) := \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cov}(L, G)} H^p(N(\mathcal{U}), R)$$

とおく。これを、 p -th interaction cohomology for (L, G) with coefficient R と呼ぶことにする。 $\check{H}^p(L, G, R) \cong \varinjlim_k H^p(N(\mathcal{U}_k), R)$ に注意。 $H^p(N(\mathcal{U}_k), R)$ を p -th interaction cohomology at k -th stage for $(L, \{h_1, \dots, h_m\})$ with coefficient R と呼ぶことにする。

6. $\check{H}^p(L, G, R)$ から $\check{H}^p(L, R)$ (p -th Čech cohomology of L with coefficient R) に自然な射がある。これを $\Psi: \check{H}^p(L, G, R) \rightarrow \check{H}^p(L, R)$. とかく。(各 j について h_j^{-1} が一価な写像となり、縮小的ならば、 Ψ は同型である。)
7. 一般の抽象単体複体 Y に対し、 $|Y|$ でその「幾何的実現」とする。
8. 一般の位相空間 Z に対し、 $\text{Con}(Z)$ で、 Z の連結成分全体の集合、とする。

以上のもとで、

定理 2.3. (定理 A) ([S7]) $(L, \{h_1, \dots, h_m\})$ を後方自己相似系とし、任意の $x \in \Sigma_m$ について L_x が連結である、と仮定する。 G を $\{h_1, \dots, h_m\}$ で生成された写像の合成を積とする半群とする。このとき、以下の全てが成り立つ。

1. $\varinjlim_k \text{Con}(|N(\mathcal{U}_k)|) \cong \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cov}(L, G)} \text{Con}(|N(\mathcal{U})|) \cong \text{Con}(L)$.
2. 「 L は連結」 \iff 「 $|N(\mathcal{U}_1)|$ は連結」 \iff 「任意の $i, j \in \{1, \dots, m\}$ に対し、ある列 $(i_t)_{t=1}^s \subset \{1, \dots, m\}$ が存在し、 $i_1 = i, i_s = j, h_{i_t}^{-1}(L) \cap h_{i_{t+1}}^{-1}(L) \neq \emptyset$ ($t = 1, \dots, s-1$) となる」
3. $m = 2$ で L が非連結ならば、 $h_1^{-1}(L) \cap h_2^{-1}(L) = \emptyset$ となり、また、 $\text{Con}(L) \cong \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$. よって $\#\text{Con}(L) > \aleph_0$.
4. $m = 3$ で L が非連結ならば、 $\#\text{Con}(L) \geq \aleph_0$.
5. R を体として、「 $\dim_R \check{H}^0(L, G, R) < \infty \iff \#\text{Con}(L) < \infty$ 」である。また、これらが成り立つとき、 $\dim_R \check{H}^0(L, G, R) = \#\text{Con}(L)$ となる。
6. 任意の $k \in \mathbb{N}$ について $\#\text{Con}(|N(\mathcal{U}_k)|) \leq \#\text{Con}(|N(\mathcal{U}_{k+1})|)$ である。 $\{\#\text{Con}(|N(\mathcal{U}_k)|)\}_k$ が有界であることと $\#\text{Con}(L) < \infty$ は同値。またこれらが成り立つとき、 $\#\text{Con}(L) = \lim_{k \rightarrow \infty} \#\text{Con}(|N(\mathcal{U}_k)|)$.

問題 2. $\check{H}^1(L, G, R)$ はどうなるか？ また、 G が有限生成多項式半群の場合、 $\check{H}^1(L, G, R)$ が 0 である例は簡単に作れるが、0 でない例は？

定理 2.4. (定理 B) ([S7]) $m \geq 3$ とし、 $(L, \{h_1, \dots, h_m\})$ を後方自己相似系とする。 $G = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ とおく。さらに以下の 1 から 4 の全てを仮定する。

1. $|N(\mathcal{U}_1)|$ は連結。
2. $(h_1^2)^{-1}(L) \cap (\cup_{i: i \neq 1} h_i^{-1}(L)) = \emptyset$.
3. 互いに異なるある $j_1, j_2, j_3 \in \{1, \dots, m\}$ があり、 $j_1 = 1, h_{j_k}^{-1}(L) \cap h_{j_{k+1}}^{-1}(L) \neq \emptyset$ ($k = 1, 2, 3, j_4 = j_1$) となる。

4. 任意の $s, t \in \{1, \dots, m\}$ に対し、

$$\lceil s, t, 1 \text{ が互いに異なれば、} h_1^{-1}(L) \cap h_s^{-1}(L) \cap h_t^{-1}(L) = \emptyset \text{ となる。} \rceil$$

このとき、 R を体として

$$\dim_R \check{H}^1(L, G, R) = \infty$$

となる。

次に、 $\check{H}^p(N(\mathcal{U}_k), R)$ をみることにより、特にそれが $k \rightarrow \infty$ につれてどうなるかをみることにより、後方自己相似系の複雑さを調べてみる。

定義 2.5. 後方自己相似系 $(L, \{h_1, \dots, h_m\})$ に対して、任意の $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$ に対し、 $C_{ij} := h_i^{-1}(L) \cap h_j^{-1}(L)$ とおく。任意の $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$ に対し、 $h_i(C_{ij}) \subset L_x$ となる $x = x(i, (i, j)) \in \Sigma_m$ がただ一つ存在するとき、 $(L, \{h_1, \dots, h_m\})$ は **postunbranched** (あるいは前方不分岐) であるということにする。このときには、 R を体として、 $a_{r,k} := \dim_R H^r(N(\mathcal{U}_k), R)$, $a_{r,\infty} := \dim_R \check{H}^r(L, G, R)$ とおく。

定理 2.6. (定理 C) ($[S\gamma]$) 上記の仮定と記号のもと、次の全てが成り立つ。

1. 任意の $k \geq 1$ に対し、 $ma_{0,k-m} + a_{0,1} - a_{1,1} \leq a_{0,k+1} \leq ma_{0,k-m} + a_{0,1}$.
よって、

$$a_{0,\infty} \in \{x \in \mathbb{N} \mid a_{0,1} \leq x \leq \frac{1}{m-1}(m - a_{0,1} + a_{1,1})\} \cup \{\infty\}.$$

2. もし $a_{0,\infty}, a_{1,\infty} < \infty$ ならば、 $m - a_{0,1} + a_{1,1} = (m-1)(a_{0,\infty} - a_{1,\infty})$ となる。

3. もし $\frac{m-a_{0,1}+a_{1,1}}{m-1} \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$ ならば、 $a_{0,\infty}, a_{1,\infty}$ のうち少なくとも一つは ∞ となる。

4. $r \geq 2, k \geq 1$ ならば $a_{r,k+1} = ma_{r,k} + a_{r,1}$ となり、次の短完全系列が存在する。

$$0 \rightarrow H^r(N(\mathcal{U}_1), R) \rightarrow H^r(N(\mathcal{U}_{k+1}), R) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m H^r(N(\mathcal{U}_k), R) \rightarrow 0.$$

5. $|N(\mathcal{U}_1)|$ が連結とする。このとき、 $a_{1,k+1} = ma_{1,k} + a_{1,1}$ となる。(a) さらに $a_{1,1} = 0$ ならば $a_{1,\infty} = 0$ となり、(b) $a_{1,1} \neq 0$ ならば $a_{1,\infty} = \infty$ となる。

例: $h_j(z) = 2(z - p_j) + p_j$, $j = 1, 2, 3$, $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$ は \mathbb{C} で正三角形をなす、とすると、 $G = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$ に対し $J(G)$ はシルピンスキーガスケットであり、 $(J(G), \{h_1, h_2, h_3\})$ は前方不分岐。上記の定理が適用でき、 $a_{1,k+1} = 3a_{1,k} + 1$ となる。 h_j たちの n -word たち、からいくつか抜いて作ったある後方自己相似系に対して、上の定理を適用することもでき、その場合の L が無限個の連結成分を持つ、というようなことを示すこともできる。

注意 1. interaction cohomology については、 $L = \bigcup_{j=1}^m h_j(L)$ となる $(L, \{h_1, \dots, h_m\})$ (このとき自己相似系という) についても定義でき、上記の結果と (h_j) が単射、などは仮定するが) 同様の結果を得ることができる。

3 多項式半群の力学系への応用

多項式半群 G が有限生成で、 $G = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ のとき、 $(J(G), \{h_1, \dots, h_m\})$ は後方自己相似系である。そこで、前節のことを応用してみる。

定義 3.1. (有限生成とは限らない) 有理半群 G について、

$$P(G) := \overline{\bigcup_{g \in G} \{g: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \text{ の臨界値} \}} \subset \hat{\mathbb{C}}$$

とおき、 G の **postcritical set** という。さらに、 G が多項式半群のとき、

$$P^*(G) := P(G) \setminus \{\infty\}$$

とおき、 G の **planar postcritical set** という。

注意 2. G が有理写像の集合 Γ で生成されているとき、

$P(G) = \overline{\bigcup_{g \in G} g(\bigcup_{h \in \Gamma} \{h: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \text{ の臨界値} \})}$ となる。このことから、 $P(G)$ の様子をさぐることができる。

定義 3.2. \mathcal{G} を、次の二つの条件をいずれも満たす多項式半群 G の集合とする:

- 任意の $g \in G$ について、 $\deg(g) \geq 2$.
- $P^*(G)$ は \mathbb{C} 上有界。

\mathcal{G} の元 G は、**postcritically bounded** であるという。

また、 $\mathcal{G}_{dis} := \{G \in \mathcal{G} \mid J(G) \text{ は非連結}\}$ とおく。

注意 3. g が多項式で $\deg(g) \geq 2$ ならば、「 $\langle g \rangle \in \mathcal{G}$ 」 \iff 「 $J(\langle g \rangle)$ は連結」となる。([M].) しかし、一般の多項式半群では、 $G \in \mathcal{G}$ かつ $J(G)$ が非連結、となる場合がある。(例: $G = \langle z^3, \frac{z^2}{4} \rangle$.)

命題 3.3. $m \in \mathbb{N}$ とする。各 $j = 1, \dots, m$ について、 h_j を次数が 2 以上の多項式とし、 $G = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ とする。このとき、次の二つの条件は同値。

- $G \in \mathcal{G}$.
- 後方自己相似系 $(J(G), \{h_1, \dots, h_m\})$ は、「任意の $x \in \Sigma_m$ について、 $(J(G))_x$ は連結」を満たす。

証明には、ポテンシャル論 (∞ に極を持つグリーン関数の話) を使う。

系 3.4. (主結果 I)(定理 A と命題 3.3 の系) ([S7]) $G = \langle h_1, \dots, h_m \rangle \in \mathcal{G}$ とすると、後方自己相似系 $(J(G), \{h_1, \dots, h_m\})$ に対して、定理 A の結果が成り立つ。

定理 B と Leray の定理 ([G]), Alexander duality theorem ([Sp]) などを組み合わせると、次を得る。

定理 3.5. (主結果 II)([S7]) $G = \langle h_1, \dots, h_m \rangle \in \mathcal{G}$ とする。後方自己相似系 $(J(G), \{h_1, \dots, h_m\})$ が定理 B の仮定を満たすとする。このとき、 R を体として次が成り立つ。

1. $\dim_R \check{H}^1(J(G), G, R) = \dim_R(\Psi(\check{H}^1(J(G), G, R))) = \infty$ かつ、
自然な射 $\Psi: \check{H}^1(J(G), G, R) \rightarrow \check{H}^1(J(G), R)$ は単射。
2. $F(G) (= \hat{\mathbb{C}} \setminus J(G))$ は無限個の連結成分を持つ。

次に例をあげる。 G が一元生成の半群であるとき、あるいは G が非初等的クライン群 (一次分数変換の離散群) のときには、 $J(G)$ は、連結であるか、そうでなければ非可算個の連結成分を持つことが知られている。しかし、一般の半群では、 G の元に限ってさえ、次のような興味深い様々な例がある。

命題 3.6 ([S7],[S8]).

1. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、ある $G_n = \langle h_1, \dots, h_{2n} \rangle \in \mathcal{G}$ があり、
 $\#(\text{Con}(J(G_n))) = n$ となる。
2. ある $G = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle \in \mathcal{G}$ があり、 $\#(\text{Con}(J(G))) = \aleph_0$ となる。
3. ある $G = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle \in \mathcal{G}$ で、主結果 II の仮定を満たすものがある。
とくにこの G について $\dim_R \check{H}^1(J(G), G, R) = \infty$ (R は体)。

問題 3. (未解決) $0 < \dim_R \check{H}^1(J(G), G, R) < \infty$ となる $G = \langle h_1, \dots, h_m \rangle \in \mathcal{G}$ は存在するか?

4 ランダムな多項式力学系と \mathbb{C} 上の悪魔の階段状関数

多項式半群の力学系を考えることは、ランダムな多項式力学系を考えることに直結する。ここでは、両者を同時に調べてみる。

問題 4. $G \in \mathcal{G}_{dis}$ のとき、何が起こるのか?

定義 4.1. \mathbb{C} の有界な連結集合 K_1, K_2 に対し、

- $K_1 \leq K_2$ とは、次のときを言う: 「 $K_1 = K_2$ または K_1 が $\mathbb{C} \setminus K_2$ のある有界な連結成分に含まれる」
- $K_1 < K_2$ とは、 $K_1 \leq K_2$ かつ $K_1 \neq K_2$ のときを言う。

注意 4. \mathbb{C} の空でない連結コンパクト集合の空間では “ \leq ” は半順序。この “ \leq ” を、surrounding order という。

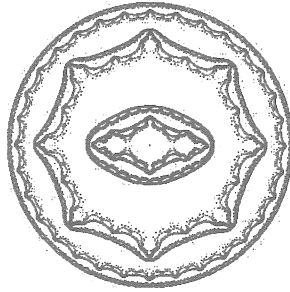
定義 4.2. 多項式半群 G に対し $\hat{K}(G) := \{z \in \mathbb{C} \mid \{g(z) \mid g \in G\} \text{ が } \mathbb{C} \text{ で有界}\}$ とおく。

定理 4.3. (主結果 III) ([S6], [S8]) (有限生成とは限らない) 多項式半群 G が \mathcal{G}_{dis} に属するとき、次の全てが成り立つ。

1. $J(G) \subset \mathbb{C}$.
2. $(\text{Con}(J(G)), \leq)$ は全順序。
3. $(\text{Con}(J(G)), \leq)$ には最大元 J_{\max} と最小元 J_{\min} がある。
4. $F(G)$ の各連結成分は単連結か二重連結。(注: 領域 $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ が二重連結とは、 A が円環領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$ に双正則同値であることをいうものとする。)
5. $A := \{U \mid U \text{ は } F(G) \text{ の二重連結成分}\}$ とおくと、 (A, \leq) は全順序。
6. $\text{int}(\hat{K}(G)) \neq \emptyset$. ただし、 $\text{int}(\cdot)$ は内点集合をあらわす。

定理 4.4. $G \in \mathcal{G}$ が 2 次多項式の族で生成されていると $J(G)$ は連結である。

図 1: The Julia set of $G = \langle h_1, h_2 \rangle$, where $g_1 := z^2 - 1, g_2 := \frac{z^2}{4}, h_1 := g_1^2, h_2 := g_2^2$. The semigroup G belongs to \mathcal{G}_{dis} . Moreover, G is hyperbolic, i.e. $P(G) \subset F(G)$.



ランダムな多項式力学系の設定と記号:

1. $\text{Poly}_{\deg \geq 2} := \{g \in \mathbb{C}[z] \mid \deg(g) \geq 2\}$ とおく。これに、 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の一様収束による位相を入れる。
2. τ を $\text{Poly}_{\deg \geq 2}$ 上のボレル確率測度とする。以下、毎回、同じ分布 τ に従って多項式を選択する、「 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の (独立同分布の) ランダムな複素力学系」を考えていく。(これは $\hat{\mathbb{C}}$ 上のマルコフ過程である。)
3. $X_\tau := (\text{supp } \tau)^{\mathbb{N}}$ とおく。ただし、 $\text{supp } \tau$ は τ の台を表す。
4. $\tilde{\tau} := \otimes_{j=1}^{\infty} \tau$ とおく。これは X_τ 上のボレル確率測度。シリンダー集合 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \text{supp } \tau \times \text{supp } \tau \times \cdots \subset X_\tau$, ただし $A_j \subset \text{supp } \tau$, のときは $\tilde{\tau}(A) = \tau(A_1) \times \cdots \times \tau(A_n)$ となる。

5. G_τ を、 $\text{supp } \tau$ で生成された多項式半群、とする。
 6. 任意の $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、

$$T_{\infty, \tau}(z) := \bar{\tau}(\{h = (h_1, h_2, \dots) \in X_\tau \mid h_n \cdots h_1(z) \rightarrow \infty, \text{ as } n \rightarrow \infty\})$$

とおく。これは、独立同分布で毎回分布 τ に従って多項式を選択するようなランダムな複素力学系の、「初期値 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して、 ∞ に行く確率」
 (注：これは $F(G_\tau)$ の各連結成分上で定数関数 (その定数は成分による)。

7. $C(\hat{\mathbb{C}}) := \{\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ は連続}\}$ とおき、作用素 $M_\tau : C(\hat{\mathbb{C}}) \rightarrow C(\hat{\mathbb{C}})$ を、

$$M_\tau(\varphi)(z) := \int_{\text{supp } \tau} \varphi(g(z)) d\tau(g)$$

で定義する。

定理 4.5. (主結果 IV) 上の記号と設定のもとで $\text{supp } \tau$ は $\text{Poly}_{\text{deg} \geq 2}$ でコンパクト、かつ $G_\tau \in \mathcal{G}_{\text{dis}}$ とする。このとき、次の全てが成り立つ。

1. $F(G_\tau)$ の任意の連結成分 U に対し、ある $C_U \in [0, 1]$ があり、 $T_{\infty, \tau}|_U \equiv C_U$ 。
2. $T_{\infty, \tau} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow [0, 1]$ は連続関数で、 $M_\tau(T_{\infty, \tau}) = T_{\infty, \tau}$ 。
3. (単調性) $\mathcal{A} := \{U \mid U \text{ は } F(G_\tau) \text{ の二重連結成分}\}$ とおく。
 (a) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 < A_2$ のとき、 $C_{A_1} < C_{A_2}$ 。特に、 $\{C_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ は全て互いに異なる。
 (b) $J_1, J_2 \in \text{Con}(J(G_\tau))$, $J_1 < J_2 \Rightarrow \max_{z \in J_1} T_{\infty, \tau}(z) \leq \min_{z \in J_2} T_{\infty, \tau}(z)$ 。
4. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し、 $T_{\infty, \tau}|_{\hat{K}(G_\tau)} \equiv 0 < C_A < 1 \equiv C_{F_\infty(G_\tau)}$ 。ただし $F_\infty(G_\tau)$ は ∞ を含む $F(G_\tau)$ の連結成分とする。
5. Q を $\hat{\mathbb{C}}$ の開集合とする。このとき、

$$Q \cap \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \partial A \cup \partial(\bar{A}_\infty(G_\tau)) \cup \partial(\hat{K}(G_\tau)) \right) \neq \emptyset$$

ならば、 $T_{\infty, \tau}|_Q$ は定数関数ではない。(以上の 1, ..., 5 から、 $T_{\infty, \tau}$ は「悪魔の階段」に似ている。このような関数を悪魔のコロシムと呼ぶ。)

6. $\hat{K}(G_\tau)$ 上の $(M_\tau)_*$ 不変なある確率測度 μ で次を満たすものが唯一つ存在する：任意の $\varphi \in C(\hat{\mathbb{C}})$ に対して、 $\hat{\mathbb{C}}$ 上一様に

$$M_\tau^n(\varphi)(z) \rightarrow T_{\infty, \tau}(z) \cdot \varphi(\infty) + (1 - T_{\infty, \tau}(z)) \cdot \mu(\varphi), \text{ as } n \rightarrow \infty$$

となる。よって、 $\mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ を $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度の空間としたとき、その上で一様に $(M_\tau^n)_*(\nu) \rightarrow \nu(T_{\infty, \tau}) \cdot \delta_\infty + \nu(1 - T_{\infty, \tau}) \cdot \mu$, $\text{as } n \rightarrow \infty$ となる。(この結果より、半群 G_τ のジュリア集合 $J(G_\tau)$ は空でない (内点もありうる) のに、 $\{(M_\tau^n)_* : \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})\}_{n \in \mathbb{N}}$ の「ジュリア集合」はない。) また、 $C(\hat{\mathbb{C}})$ の M_τ 不変部分空間は定数と $T_{\infty, \tau}$ で張られた 2 次元空間。さらに、 $(M_\tau)_*$ 不変確率測度のなかのエルゴード成分は δ_∞ と μ の 2 つ。

注意：

- 多項式半群 G が $\text{Poly}_{\text{deg} \geq 2}$ のコンパクトな族 Λ で生成されているとする。このとき、 $\text{Poly}_{\text{deg} \geq 2}$ のあるボレル確率測度 τ によって、 $\text{supp } \tau = \Lambda$ となるので、 $G = G_\tau$ である。よって、 $G \in \mathcal{G}_{\text{dis}}$ ならば上の話の $T_{\infty, \tau} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow [0, 1]$ が考えられる。
- 主定理の 2, 3 より、 $A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \neq A_2$ のとき、 $\partial A_1 \cap \partial A_2 = \emptyset$ 。

5 $T_{\infty, \tau}$ の他の性質、微分可能性

定理 5.1. $G = \langle h_1, h_2 \rangle \in \mathcal{G}_{\text{dis}}$ とする。 $0 < p < 1$ とし、 $\tau_p := p\delta_{h_1} + (1-p)\delta_{h_2}$ とおく。このとき、次の全てが成り立つ。

1. $J(G)$ には内点がなく、かつ、

$$J(G) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} \mid z_0 \text{ の任意の近傍 } U \text{ について } T_{\infty, \tau_p}|_U \text{ は定数でない}\}.$$

2. ある「重要な」ボレル確率測度 ν_p が $J(G)$ 上にあり、その台は $J(G)$ と一致して、かつ、 ν_p に関してほとんど全ての点 $z_0 \in J(G)$ に対して、

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{|T_{\infty, \tau_p}(z) - T_{\infty, \tau_p}(z_0)|}{|z - z_0|} = \infty$$

となつて T_{∞, τ_p} は z_0 で全微分が不可能。特に、 $J(G)$ の非可算稠密部分集合 B があり、 B の各点で T_{∞, τ_p} は全微分不可能。

3. G がもし $P(G) \subset F(G)$ という条件（このとき G は **hyperbolic** という）を満たせば、 $T_{\infty, \tau_p} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow [0, 1]$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上ヘルダー連続になる。

定理 5.2. $G = \langle h_1, h_2 \rangle \in \mathcal{G}_{\text{dis}}$ とする。 $0 < p < 1$ とし、 $\tau_p := p\delta_{h_1} + (1-p)\delta_{h_2}$ とおく。また、 $S(z, p) := T_{\infty, \tau_p}(z)$ ($(z, p) \in \hat{\mathbb{C}} \times (0, 1)$) とおく。このとき、任意の $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して、 $p \mapsto S(z, p)$ は $(0, 1)$ 上実解析的である。さらに、任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して、 $(z, p) \mapsto \frac{\partial^n S}{\partial p^n}(z, p)$ は、 $\hat{\mathbb{C}} \times (0, 1)$ 上連続である。

上記二つの定理の証明には、主結果 I、定理 A-3 の「 $h_1^{-1}(J(G)) \cap h_2^{-1}(J(G)) = \emptyset$ 」を使う。また、定理 5.1-2 の証明には、エルゴード定理とポテンシャル論を使う。

注意 5. 上の $T_{\infty, \tau_p}(z)$ は悪魔の階段（カントール関数）やルベーグの特異関数の複素平面上版だと思え、また、 $z \mapsto \frac{\partial S}{\partial p}(z, p)$ は、高木関数の複素平面上版だと思える。このことを以下に説明する。

$\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ とおく。 $h_1(x) = 3x$, $h_2(x) = 3(x-1) + 1$ とおき、 $\hat{\mathbb{R}}$ 上で、毎回、確率 $\frac{1}{2}$ ずつで h_i を選択するランダムな力学系を考える。このとき、 $T_{+\infty}(x)$ を、「 $+\infty$ に収束する確率」とおくと、 $T_{+\infty}|_{[0,1]}$ が、「悪魔の階段」（あるいはカントール関数）として知られているものに一致する。

また、 $h_1(x) = 2x, h_2(x) = 2(x-1) + 1$ とおき、 $\hat{\mathbb{R}}$ 上で、毎回、 h_1 を確率 p で、 h_2 を確率 $1-p$ で選択するランダムな力学系を考えたときの、「 $+\infty$ に収束する確率」を $U(x, p)$ とおくと、 $x \mapsto U(x, p)$ を $[0, 1]$ 上で考えるとルベーグの特異関数に一致する。(注：悪魔の階段やルベーグの特異関数を、ランダムな力学系を用いて解釈するような視点は今までにはなかったように思われる。)

また、 $[0, 1]$ 上の $x \mapsto \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial p}(x, \frac{1}{2})$ は高木関数と一致する。(このことは以前から知られている。畑-山口の研究 ([HY]) を参照。)

これらのことを踏まえて、さきの定理 5.1 の T_{∞, τ_p} が悪魔の階段やルベーグ特異関数の複素平面上版と思え、また定理 5.2 の $z \mapsto \frac{\partial S}{\partial p}(z, p)$ が高木関数の複素平面上版と思えるのである。

図 2: $g_1(z) := z^2 - 1, g_2 := \frac{z^2}{4}, h_1 := g_1^2, h_2 := g_2^2, p \in (0, 1), \tau_p := p\delta_{h_1} + (1-p)\delta_{h_2}, S(z, p) := T_{\infty, \tau_p}(z)$. $\langle h_1, h_2 \rangle \in \mathcal{G}_{dis}$ and $\langle h_1, h_2 \rangle$ is hyperbolic. The graph of $z \mapsto S(z, \frac{1}{2})$ (a devil's coliseum: a complex analogue of the Cantor function or Lebesgue's singular functions).

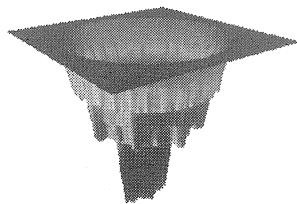


図 3: The graph of $z \mapsto 1 - S(z, \frac{1}{2})$.

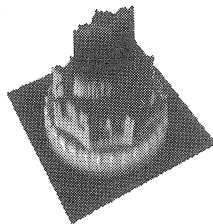
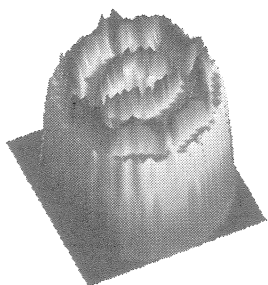


图 4: The graph of $z \mapsto \frac{\partial S}{\partial p}(z, \frac{1}{2})$ (a complex analogue of the Takagi function).



参考文献

- [BBR] R. Brück, M. Büger and S. Reitz, *Random iterations of polynomials of the form $z^2 + c_n$: Connectedness of Julia sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **19**, (1999), No.5, 1221-1231.
- [FS] J. E. Fornæss and N. Sibony, *Random iterations of rational functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **11**(1991), 687-708.
- [G] R. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Vol. III: Homological Theory*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.
- [GR] Z. Gong and F. Ren, *A random dynamical system formed by infinitely many functions*, Journal of Fudan University, **35**, 1996, 387-392.
- [HM] A. Hinkkanen and G. J. Martin, *The Dynamics of Semigroups of Rational Functions I*, Proc. London Math. Soc. (3)**73**(1996), 358-384.
- [HY] M. Hata and M. Yamaguti, *Takagi function and its generalization*, Japan J. Appl. Math., **1**, pp. 183-199 (1984).
- [J] M. Jonsson, *Ergodic properties of fibered rational maps*, Ark.Mat., **38** (2000), pp 281-317.
- [M] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable* (Third Edition), Annals of Mathematical Studies, Number 160, Princeton University Press, 2006.
- [N] S. B. Nadler, *Continuum Theory: An introduction*, Marcel Dekker, 1992.

- [S1] H. Sumi, *Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2001), **21**, 563-603.
- [S2] H. Sumi, *A correction to the proof of a lemma in 'Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products'*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2001), **21**, 1275-1276.
- [S3] H. Sumi, *Skew product maps related to finitely generated rational semigroups*, Nonlinearity, **13**, (2000), 995-1019.
- [S4] H. Sumi, *Semi-hyperbolic fibered rational maps and rational semigroups*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2006), **26**, 893-922. (See also <http://arxiv.org/abs/math.DS/0509719>.)
- [S5] H. Sumi, *Dimensions of Julia sets of expanding rational semigroups*, Kodai Mathematical Journal (2005), Vol. 28, No.2, pp390-422. (See also <http://arxiv.org/abs/math.DS/0405522>.)
- [S6] H. Sumi, *Dynamics of polynomial semigroups with bounded postcritical set in the plane*, RIMS Kokyuroku 1447, 198-215.
- [S7] H. Sumi, *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups and interaction cohomology*, RIMS Kokyuroku 1447, 227-238.
- [S8] H. Sumi, *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups*, preprint.
- [Sp] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer, 1982.
- [St1] R. Stankewitz, *Completely invariant Julia sets of polynomial semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc., **127**, (1999), No. 10, 2889-2898.
- [St2] R. Stankewitz, *Completely invariant sets of normality for rational semigroups*, Complex Variables Theory Appl., Vol 40.(2000), 199-210.
- [SSS] R. Stankewitz, T. Sugawa, and H. Sumi, *Some counterexamples in dynamics of rational semigroups*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica Vol. 29, 2004, 357-366.
- [SY] Y. Sun and C-C. Yang. *On the connectivity of the Julia set of a finitely generated rational semigroup*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.130, No.1, 49-52, 2001.
- [TP] Tan Lei and K. Pilgrim, *Rational maps with disconnected Julia set*, Asterisque 261, (2000).

自由群の自己同型群の Johnson 準同型の余核について

佐藤 隆夫 (東京大学大学院数理科学研究科, 学振特別研究員 PD)

1 はじめに

n を 2 以上の整数とし, 階数 n の自由群 F_n の自己同型群を $\text{Aut } F_n$ とおく. 元来, 自由群の自己同型群は曲面の基本群の自己同型群として 1910 年代ごろから Dehn, Nielsen, Magnus, Neumann らによって群の表示などを中心に研究され始めた群であり, Nielsen [19] によって, 自由群の自己同型群はある種の曲面の写像類群を部分群に含むという結果が知られて以来, 位相幾何学的にも重要な群として注目されている.

さて, 写像類群と自由群の自己同型群を比較研究する上で重要な対象の 1 つとして, Johnson 準同型と呼ばれる概念がある. 一般に, 曲面の写像類群には Johnson filtration と呼ばれるある正規部分群の中心的降下 filtration が定義され, それらの各次数商の構造を記述するものとして Johnson 準同型なる概念が定式化されている. ([8], [14] 参照.) Johnson filtration の各次数商たちは写像類群及び, その重要な部分群である Torelli 群の逐次近似とみなすことが出来, これらの構造を調べることは写像類群のホモロジー群を研究する上でも非常に重要であり, 近年著しい発展を見せている. ([7], [15], [16] 等参照.)

一方, 自由群の自己同型群においても同様の手法で Johnson filtration 及び, Johnson 準同型が定義されるが, 写像類群の場合に比べるとその構造についてはまだ殆ど未解明のままであった. この研究の最終的な目標は自由群の自己同型群の Johnson 準同型の性質を明らかにし, 写像類群の場合との相違を明確にすることである. Johnson 準同型たちは Johnson filtration の各次数商を定義域とする単射準同型であるが一般に全射ではない. 従って, これが全射からどの程度離れているのかを記述することは重要な問題である. 本稿では, 自由群の自己同型群の Johnson 準同型の全射性に関して新しい障害が得られたことを紹介する. さらに, 次数が 2, または 3 について, Johnson 準同型の余核の $GL(n, \mathbb{Z})$ 加群としての構造を決定する.

記号について

本稿では群 G と G の元 x, y に対して, x と y の交換子積を $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ と表す. 自由群の自己同型群 $\text{Aut } F_n$ の自由群 F_n への作用は右作用とし, $\sigma \in \text{Aut } F_n$ の $x \in F_n$ への作用を x^σ と表す. \mathbb{Z} 加群 A に対して, 係数環を有理数体 \mathbb{Q} に拡大した \mathbb{Q} -ベクトル空間を $A_{\mathbb{Q}} := A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と添え字をつけて表し, 同様に \mathbb{Z} 加群の間の線形写像 $f: A \rightarrow B$ を \mathbb{Q} 上で考えたものを $f_{\mathbb{Q}} := f \otimes id_{\mathbb{Q}}$ などと表す.

2 自由群の自己同型群の Johnson 準同型

この節では自由群の自己同型群の Johnson 準同型の定義するために必要ないくつかの道具を準備し、それらの性質などを簡潔にまとめる。

2.1 H 上の自由リー代数

$n \geq 2$ に対して、 F_n を x_1, \dots, x_n が生成する階数 n の自由群とし、 F_n のアーベル化を $H = H_1(F_n, \mathbb{Z})$ とおく。以下、 F_n の基底 x_1, \dots, x_n 及び、これらが誘導する H の自由アーベル群としての基底を固定し、標準的に $\mathrm{GL}(H) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ とみなす。各 $k \geq 1$ に対して F_n の降中心列 $\Gamma_n(k)$ を

$$\Gamma_n(1) := F_n, \quad \Gamma_n(k) := [\Gamma_n(k-1), F_n], \quad (k \geq 2)$$

により帰納的に定義する。これらの各次数商を $\mathcal{L}_n(k) := \Gamma_n(k)/\Gamma_n(k+1)$ とおき、その次数和を $\mathcal{L}_n := \bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{L}_n(k)$ とおく。 \mathcal{L}_n には F_n の交換子積から誘導されるリー代数としてのブラケット積が自然に定義され、 H 上の自由リー代数と呼ばれている。 \mathcal{L}_n の構造については、1930年代頃から Witt, Magnus, P. Hall, M. Hallらによって先駆的に研究されはじめ、各斉次成分 $\mathcal{L}_n(k)$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ -同変な自由アーベル群であり、その階数や基底も具体的に明示されている。(例えば [12], [21]などを参照。) 次数が3以下の場合について $\mathcal{L}_n(k)$ の $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ -加群としての構造を具体的に書き下せば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(1) &= H, & \mathcal{L}_n(2) &= \Lambda^2 H, \\ \mathcal{L}_n(3) &= (H \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 H) / \langle x \otimes y \wedge z + y \otimes z \wedge x + z \otimes x \wedge y \mid x, y, z \in H \rangle \end{aligned}$$

となる。

2.2 IA-自己同型群

自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut} F_n$ は H に自然に作用 (本稿では右作用を考える。) し、従って準同型写像

$$\rho: \mathrm{Aut} F_n \rightarrow \mathrm{Aut}(H) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$$

が定まる。Nielsen [18]により $\mathrm{Aut} F_n$ の有限表示が知られているが、その生成元の像を調べることで ρ が全射となることが分かる。いま、 ρ の核を IA_n と書いて自由群の IA-自己同型群と呼び、 IA_n の各元を自由群の IA-自己同型という。 IA_n は曲面の写像類群の Torelli 群に対応する群である。Nielsen [17]により IA_2 は F_2 の内部自己同型群 $\mathrm{Inn} F_2$ に一致することが知られているが、一般に IA_n は $\mathrm{Inn} F_n$ よりはるかに大きい。

さて、互いに相異なる添え字 $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、

$$K_{ij}: \begin{cases} x_i & \mapsto x_j^{-1} x_i x_j, \\ x_l & \mapsto x_l, \quad (l \neq i) \end{cases}, \quad K_{ijk}: \begin{cases} x_i & \mapsto x_i x_j x_k x_j^{-1} x_k^{-1}, \\ x_l & \mapsto x_l, \quad (l \neq i) \end{cases}$$

なる IA-自己同型が定まるが, Magnus [12] により, IA_n はこれら有限個の元で生成されることが知られている. さらに, Cohen-Pakianathan [2, 3], Farb [4], 及び河澄響矢 [10] の最近の独立した仕事により, IA_n のアーベル化の構造も完全に決定されている. (次節, 定理 3.2 参照.) 一方, $n \geq 3$ に対して IA_n の群の表示はまだ未解明であり, 特に $n = 3$ の場合は Krstić-McCool [11] によって有限表示不可能であることが知られている. さらに, $n \geq 4$ の場合は有限表示可能かどうかさえも解っておらず, IA_n は組み合わせ群論的にも非常に複雑な群である.

2.3 Johnson filtration

各 $k \geq 0$ に対して $\text{Aut } F_n$ の, F_n の冪零商 $F_n/\Gamma_n(k+1)$ への自然な作用は準同型写像

$$\text{Aut } F_n \rightarrow \text{Aut}(F_n/\Gamma_n(k+1))$$

を誘導するが, この核を $\mathcal{A}_n(k)$ とおくとこれらは $\text{Aut } F_n$ に正規部分群の降下列

$$\text{Aut } F_n = \mathcal{A}_n(0) \supset \mathcal{A}_n(1) \supset \mathcal{A}_n(2) \supset \dots$$

を定める. 特に $\mathcal{A}_n(1) = IA_n$ である. この降下列は $\text{Aut } F_n$ の Johnson filtration と呼ばれている. 抑々, Johnson filtration は Andreadakis が [1] において導入し研究を行ったことが嚆矢とされているが, 後の 1980 年代に Johnson [8] が曲面の写像類群に対して同様の研究を行い, Torelli 群のアーベル化を決定している.

さて, Andreadakis [1] により, $k \geq 1$ のとき Johnson filtration は中心的であり, 各次数商 $\text{gr}^k(\mathcal{A}_n) := \mathcal{A}_n(k)/\mathcal{A}_n(k+1)$ は有限生成自由アーベル群であることが知られている. さらに, 各 $k \geq 1$ に対して $\text{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ には $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ が自然に作用している. しかしながら一般に, その $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ -加群としての構造はおろか自由アーベル群としての階数さえも知られていない. これら各次数商は IA_n の逐次近似とみなすことが出来, この構造を解明することは IA_n の組み合わせ群論的, ホモロジー論的研究において重要な役割を果たす. Andreadakis は [1] において, 任意の $k \geq 1$ に対して $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{gr}^k(\mathcal{A}_2)$ 及び, $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{gr}^2(\mathcal{A}_3)$ を計算している. 一方, Pettet [20] の最近の仕事により各 $n \geq 3$ に対して $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{gr}^2(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{3}n^2(n^2 - 4) + \frac{1}{2}n(n - 1)$ なる結果が得られている. 本稿では $n \geq 3$ に対して $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{gr}^3(\mathcal{A}_n)$ が計算できたことを紹介する. (次節, 系 3.1.)

2.4 Johnson 準同型

各 $k \geq 1$ に対して準同型写像 $\mathcal{A}_n(k) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_n(k+1))$ を

$$\sigma \mapsto ([x] \mapsto [x^{-1}x^\sigma]), \quad x \in F_n$$

で定義する. ここで, $[]$ は剰余類を表す記号である. すると, 定義からこの写像の核は $\mathcal{A}_n(k+1)$ であり, 従って単射準同型写像

$$\tau_k : \text{gr}^k(\mathcal{A}_n) \hookrightarrow H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$$

が得られる. この τ_k を (自由群の自己同型群の) 第 k -Johnson 準同型という. 特に, τ_k は $GL(n, \mathbb{Z})$ 同変である. ゆえに, 次数商 $\text{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ の $GL(n, \mathbb{Z})$ -加群としての構造を研究する上で以下は基本問題となる.

問題 2.1. τ_k は全射か? もしそうでなければ, 余核にはどのような? $GL(n, \mathbb{Z})$ -加群が現れるか?

現在, τ_1 については全射, 即ち同型になることが知られている. (定理 3.1.) しかしながら一般に, $k \geq 2$ に対しては τ_k は全射ではない. 実際, 森田茂之による Trace 写像を用いた最近の研究により, 各 $k \geq 2$ に対して有理係数 Johnson 準同型 $\tau_{k, \mathbb{Q}} := \tau_k \otimes id_{\mathbb{Q}}$ の余核には $GL(n, \mathbb{Q})$ -既約表現として $H_{\mathbb{Q}} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の k 次の対称テンソル $S^k H_{\mathbb{Q}}$ が現れることが知られている. (系 4.1.) そこで, $\tau_{k, \mathbb{Q}}$ の余核に対称テンソル以外のものが現れるかどうかを調べようというのがこの研究の目的の1つである.

3 次数が3以下の場合

この節では $k \leq 3$ に対して $\text{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ に関する結果で既に得られているもの, 及び新しく得られた結果について簡潔にまとめる.

まず, 第1-Johnson 準同型については Andreadakis [1] が $\text{gr}^1(\mathcal{A}_n)$ の生成元の像を調べることで τ_1 が全射となることを示している. 即ち,

定理 3.1 (Andreadakis [1]). $n \geq 3$ に対して

$$\tau_1 : \text{gr}^1(\mathcal{A}_n) \rightarrow H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 H$$

は同型写像である.

一方, 以下の結果は $\text{Aut } F_n$ の Johnson 準同型たちを研究する上で最も基本となる重要な定理のうちの1つである.

定理 3.2 (Cohen-Pakianathan [2, 3], Farb [4], Kawazumi [10]). $n \geq 3$ に対して自然な写像

$$IA_n/[IA_n, IA_n] \rightarrow IA_n/\mathcal{A}_n(2) = \text{gr}^1(\mathcal{A}_n)$$

は同型写像である.

従って, $[IA_n, IA_n] = \mathcal{A}_n(2)$ であることが分かり, これより IA_n の生成元たちの交換子積を考えることで $\text{gr}^2(\mathcal{A}_n)$ の生成元が得られる. それらの像を考察することで以下の結果が得られた.

定理 3.3 (S. [22]). $n \geq 3$ に対して以下は $GL(n, \mathbb{Z})$ -同変な完全系列である.

$$0 \rightarrow \text{gr}^2(\mathcal{A}_n) \xrightarrow{T_2} H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(3) \rightarrow S^2 H \rightarrow 0.$$

ここで、 S^2H は H の 2 次対称テンソルである。一方上述のように、有理数体 \mathbb{Q} をテンソルした場合には森田茂之によって導入された Trace 写像と呼ばれる概念（次節参照）を用いることで $\tau_{2,\mathbb{Q}}$ の余核に $S^2H_{\mathbb{Q}}$ が現れることが知られており、さらに Pettet [20] の最近の結果により $\tau_{2,\mathbb{Q}}$ の余核の \mathbb{Q} 上の次元が計算されている。従って、彼らの結果を合わせると \mathbb{Q} 上では既に $GL(n, \mathbb{Q})$ -同変な完全系列

$$0 \rightarrow \text{gr}_{\mathbb{Q}}^2(\mathcal{A}_n) \xrightarrow{\tau_{2,\mathbb{Q}}} H_{\mathbb{Q}}^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}_n^{\mathbb{Q}}(3) \rightarrow S^2H_{\mathbb{Q}} \rightarrow 0.$$

が得られている。上述の結果はこの完全列が \mathbb{Z} 上も成立することを示唆している。

さて、一般に $k \geq 3$ に対しては $\text{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ の生成元が知られておらず、 $k = 1, 2$ の場合と同様の計算が実行できない。しかしながら $k = 3$ の場合については Pettet [20] により、 $\mathcal{A}_n(3)$ は IA_n の 3 次降中心列に“ほぼ”一致することが知られている。正確には以下に示す通りである。今、 IA_n の降中心列を $\mathcal{A}'_n(k)$ とおく。定義から $\mathcal{A}'_n(1) = \mathcal{A}_n(1) = IA_n$ であり、上述のことから $\mathcal{A}'_n(2) = \mathcal{A}_n(2)$ であった。Andreadakis [1] により $\mathcal{A}_n(k)$ たちは中心列であるので、降中心列の性質により各 $k \geq 1$ に対して $\mathcal{A}'_n(k) \subset \mathcal{A}_n(k)$ となっている。現在、 $\mathcal{A}'_n(k) = \mathcal{A}_n(k)$ となることが予想されており、これを決定することは IA_n の整係数 2 次元ホモロジー群の構造を調べる上でも非常に重要である。ここで、以下の結果が知られている。

定理 3.4 (Pettet [20]). $n \geq 3$ に対して $\mathcal{A}_n(3)/\mathcal{A}'_n(3)$ は有限アーベル群である。

従って、 IA_n の生成元たちを各成分に持つような重さ 3 の交換子たちの像を調べれば $\tau_{3,\mathbb{Q}}$ の余核の構造が分かる。このとき、以下の結果が得られた。

定理 3.5 (S. [22]). $n \geq 3$ に対して以下は $GL(n, \mathbb{Z})$ -同変な完全系列である。

$$0 \rightarrow \text{gr}_{\mathbb{Q}}^3(\mathcal{A}_n) \xrightarrow{\tau_{3,\mathbb{Q}}} H_{\mathbb{Q}}^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}_n^{\mathbb{Q}}(4) \rightarrow S^3H_{\mathbb{Q}} \oplus \Lambda^3H_{\mathbb{Q}} \rightarrow 0.$$

ここで、 $S^3H_{\mathbb{Q}}$ は森田 Trace によって特徴付けられるものであることは上述の通りであるが、その他に $H_{\mathbb{Q}}$ の 3 次交代テンソルである $\Lambda^3H_{\mathbb{Q}}$ が Johnson 準同型の全射性に関する新しい障害として現れることが分かる。これに関して、次のような問題が自然に考えられる。

問題 3.1. $\Lambda^3H_{\mathbb{Q}}$ を $S^kH_{\mathbb{Q}}$ のように *intrinsic* に記述できないか？

次節ではこの問題に対して得られた結果を述べる。一方、上の定理の系として次を得る。

系 3.1. $n \geq 3$ に対して、

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{gr}^3(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{12}n(3n^4 - 7n^2 - 8).$$

4 新しい障害の構成

この節では Johnson 準同型の全射性に関する新しい障害の構成について考察する。まずはじめに森田 Trace についてその定義と性質を簡単にまとめる。

4.1 H のテンソル代数

H が生成する \mathbb{Z} 上のテンソル代数を $T(H)$ と表す. 即ち,

$$T(H) := \mathbb{Z} \oplus H \oplus H^{\otimes 2} \otimes \dots$$

である. よく知られているように, $T(H)$ は H 上の自由リー代数 \mathcal{L}_n の普遍包絡代数 $U(\mathcal{L}_n)$ であり, 自然な写像 $\iota_n : \mathcal{L}_n \rightarrow T(H)$ は対応

$$[X, Y] \mapsto X \otimes Y - Y \otimes X$$

によって与えられている. (例えば [21] 参照.) さらに, Poincaré-Berkoff-Witt の定理より ι_n は単射である. 各 $k \geq 1$ に対して, ι_n の k 次の斉次成分を ι_n^k と書くと, 自然な埋め込み

$$\iota_n^k : \mathcal{L}_n(k) \rightarrow H^{\otimes k}$$

が得られる. 各 ι_n^k は $GL(n, \mathbb{Z})$ -同変である.

4.2 縮約写像

$k \geq 1$ 及び, $1 \leq l \leq k+1$ に対して縮約写像 $\varphi_l^k : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} H^{\otimes(k+1)} \rightarrow H^{\otimes k}$ を

$$x_i^* \otimes x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_{k+1}} \mapsto x_i^*(x_{j_l}) \cdot x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_{l-1}} \otimes x_{j_{l+1}} \otimes \dots \otimes x_{j_{k+1}}$$

によって定義する. さらに上述の自然な埋め込み $\iota_n^{k+1} : \mathcal{L}_n(k+1) \hookrightarrow H^{\otimes(k+1)}$ に対して $GL(n, \mathbb{Z})$ -同変な写像

$$\Phi_l^k = \varphi_l^k \circ (id_{H^*} \otimes \iota_n^{k+1}) : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) \rightarrow H^{\otimes k}.$$

を考える. Φ_l^k も縮約写像と呼ぶことにする.

4.3 森田 Trace

$f_{[k]} : H^{\otimes k} \rightarrow S^k H$ を H の k 次の対称化作用素とし, これと縮約写像の合成として $GL(n, \mathbb{Z})$ -同変な写像

$$\mathrm{Tr}_{[k]} := f_{[k]} \circ \Phi_1^k : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) \rightarrow S^k H$$

を定める. これは森田 Trace と呼ばれている. 元来, 森田 Trace は [14] において, 自由群の自己同型群のある Magnus 表現における Jacobi 行列のトレースを用いて定義され, その性質が詳しく調べられている. 一方, 定義域 $H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$ の生成元の像を考察することでこれは上記の $\mathrm{Tr}_{[k]}$ と一致することが分かる. 森田 Trace に関して以下の重要な性質が最近の森田茂之の研究により知られている.

定理 4.1 (Morita). $n \geq 3$ 及び, $k \geq 2$ に対して,

- (1) $\text{Tr}_{[k]}$ は全射.
 (2) $\text{Tr}_{[k]} \circ \tau_k$ は零写像.

従って \mathbb{Q} 上で考えた場合, $\tau_{k,\mathbb{Q}}$ の余核を $GL(n, \mathbb{Q})$ -加群として既約分解すればそこには k 次の対称テンソル $S^k H_{\mathbb{Q}}$ が既約因子の 1 つとして現れることがわかる. 即ち,

系 4.1. $n \geq 3$ 及び, $k \geq 2$ に対して,

$$S^k H_{\mathbb{Q}} \subset \text{Coker } \tau_{k,\mathbb{Q}}.$$

4.4 $\Lambda^k H$ に対する Trace 写像

さて, この節の主な目的は $\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}$ を $S^k H_{\mathbb{Q}}$ のように intrinsic に記述したいということであった. そこで, $f_{[1^k]}: H^{\otimes k} \rightarrow \Lambda^k H$ を H の k 次の交代化作用素とし, これと縮約写像の合成として $GL(n, \mathbb{Z})$ -同変な写像

$$\text{Tr}_{[1^k]} := f_{[1^k]} \circ \Phi_1^k: H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) \rightarrow \Lambda^k H$$

を定める. これに対して森田 Trace の場合と同様の議論を実行したいと考えるのは自然な発想であるが, $S^k H_{\mathbb{Q}}$ を Johnson 準同型の余核に detect する議論においては, Johnson 準同型と森田 Trace の合成写像の像が, 係数をアーベル化した Magnus 表現の行列式の言葉で表せるという技巧的な部分があり, これをそのまま $\Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}$ の場合に適用しようとすると困難が生じる. そこで, 次のようなことを考える. 今, τ_k と同様にして次のような準同型写像

$$\mathcal{A}'_n(k) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_n(k+1))$$

を $\sigma \mapsto ([x] \mapsto [x^{-1}x^\sigma])$ で定義する. 特に, $\mathcal{A}'_n(k+1)$ はこの写像の核に属するので, 各 $k \geq 1$ に対して $\text{gr}^k(\mathcal{A}'_n) = \mathcal{A}'_n(k)/\mathcal{A}'_n(k+1)$ とおくと, 準同型写像

$$\tau'_k: \text{gr}^k(\mathcal{A}'_n) \rightarrow H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$$

が定義される. τ_k 同様 τ'_k も $GL(n, \mathbb{Z})$ -同変な準同型写像である. この τ'_k も (言葉の乱用により) 自由群の自己同型群の第 k -Johnson 準同型と呼ぶことにする. 一般に τ'_k と τ'_k がどの程度ずれているのかは未解決であるが, τ'_k を考えることの最大の利点は定義域 $\text{gr}^k(\mathcal{A}'_n)$ の生成元が IA_n の生成元たちの交換子積を用いて帰納的に得られるという点であり, 特に $k=3$ の場合については, $\text{coker}(\tau_{3,\mathbb{Q}}) = \text{coker}(\tau'_{3,\mathbb{Q}})$ であった. このとき次の結果が得られた.

定理 4.2 (S. [22]). $3 \leq k \leq n$ に対して

- (1) $\text{Tr}_{[1^k]}$ は全射.
 (2) k が奇数のとき, $\text{Tr}_{[1^k]} \circ \tau'_k$ は零写像.

従って \mathbb{Q} 上で考えた場合, 以下の系を得る.

系 4.2. k が奇数で $3 \leq k \leq n$ のとき,

$$\Lambda^k H_{\mathbb{Q}} \subset \text{Coker } \tau'_{k, \mathbb{Q}}.$$

これによって第3-Johnson 準同型の (有理係数の) 余核は2つの写像 $\text{Tr}_{[k]}^{\mathbb{Q}}$ と $\text{Tr}_{[1^k]}^{\mathbb{Q}}$ を用いて記述されることが分かる. 即ち, $\text{GL}(n, \mathbb{Q})$ -同変な \mathbb{Q} -線形写像 $\Psi : H_{\mathbb{Q}}^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}_n^{\mathbb{Q}}(4) \rightarrow S^3 H_{\mathbb{Q}} \oplus \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}$ を

$$w \mapsto (\text{Tr}_{[3]}^{\mathbb{Q}}(w), \text{Tr}_{[1^3]}^{\mathbb{Q}}(w))$$

で定めると,

$$\text{Im}(\tau_{3, \mathbb{Q}}) = \text{Ker}(\Psi)$$

となることが分かる.

謝辞

本研究を進めるに当たり, 河澄響矢先生には少なからず有益な助言と励ましを頂いた. また, 森田茂之先生には trace map の性質など, まだ出版されていないお仕事に関しても数々の有益な助言を頂いた. この場を借りて深く感謝を申し上げる.

参考文献

- [1] S. Andreadakis; On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965), 239-268.
- [2] F. Cohen and J. Pakianathan; On Automorphism Groups of Free Groups, and Their Nilpotent Quotients, preprint.
- [3] F. Cohen and J. Pakianathan; On subgroups of the automorphism group of a free group and associated graded Lie algebras, preprint.
- [4] B. Farb; Automorphisms of F_n which act trivially on homology, in preparation.
- [5] W. Fulton; Young Tableaux, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge University Press (1997).
- [6] W. Fulton, J. Harris; Representation Theory, Graduate text in Mathematics 129, Springer-Verlag (1991).
- [7] R. Hain; Infinitesimal presentations of the Torelli group, Journal of the American Mathematical Society 10 (1997), 597-651.
- [8] D. Johnson; An abelian quotient of the mapping class group, Math. Ann. 249 (1980), 225-242.
- [9] M. Kassabov; On the automorphism tower of free nilpotent groups, thesis, Yale University (2003).

- [10] N. Kawazumi; Cohomological aspects of Magnus expansions, preprint, The University of Tokyo. UTMS 2005-18 (2005),
<http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/math.GT/0505497>.
- [11] S. Krstić, J. McCool; The non-finite presentability in $IA(F_3)$ and $GL_2(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, *Invent. Math.* 129 (1997), 595-606.
- [12] W. Magnus; Über n -dimensionale Gittertransformationen, *Acta Math.* 64 (1935), 353-367.
- [13] W. Magnus, A. Karras, D. Solitar; *Combinatorial group theory*, Interscience Publ., New York (1966).
- [14] S. Morita; Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, *Duke Mathematical Journal* 70 (1993), 699-726.
- [15] S. Morita; Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect, *Geometry and Topology Monographs Vol. 2* (1999), 349-406.
- [16] S. Morita; Cohomological structure of the mapping class group and beyond, preprint.
- [17] J. Nielsen; Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden, *Math. Ann.* 78 (1918), 385-397.
- [18] J. Nielsen; Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, *Math. Ann.* 91 (1924), 169-209.
- [19] J. Nielsen; Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen Zweiseitigen Flächen, *Acta Math.* 50 (1927), 189-358.
- [20] A. Pettet; The Johnson homomorphism and the second cohomology of IA_n , *Algebraic and Geometric Topology* 5 (2005) 725-740.
- [21] C. Reutenauer; *Free Lie Algebras*, London Mathematical Society monographs, new series, no. 7, Oxford University Press (1993).
- [22] T. Satoh; "New obstructions for the surjectivity of the Johnson homomorphism of the automorphism group of a free group", *Journal of the London Mathematical Society*, to appear.

Networking Seifert Surgeries on Knots

日本大学 文理学部 茂手木 公彦
Arnaud Deruelle 氏, 宮崎桂氏との共同研究

1 双曲結び目の Seifert surgery

3次元球面 S^3 内の結び目 K に対し, その管状近傍 $N(K)$ を取り除き, 別な方法で $E(K) = S^3 - \text{int}N(K)$ に埋め戻す操作を結び目 K の **Dehn surgery** と呼びます. 埋め戻す方法は solid torus $N(K)$ の meridian μ を $\partial E(K)$ のどのような simple loop γ と同一視するかで決まります. また, γ は preferred meridian-longitude pair μ, λ を用いて $\gamma = p\mu + q\lambda (\in H_1(\partial E(K)))$ と表せるので, γ の unoriented isotopy class を指定するということは有理数 $\frac{p}{q}$ を指定することに他なりません. したがって, 埋め戻す方法は有理数で表すことができます. $N(K)$ の meridian μ を $\gamma (\leftrightarrow \frac{p}{q})$ となるように埋め戻して得られた多様体を $(K; \frac{p}{q})$ と表し, 結び目 K の $\frac{p}{q}$ -Dehn surgery で得られた多様体と呼びます (図 1).

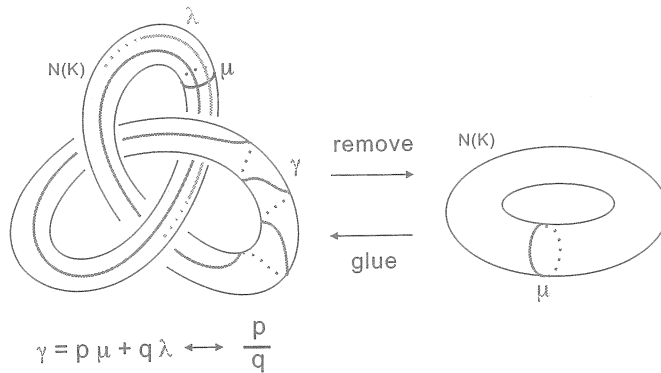


図 1: Dehn surgery

このように, それぞれの結び目に対して有理数分の Dehn surgery が可能で, それに応じて有理数分だけ 3次元多様体を構成することができます. Thurston はもとの結び目が双曲結び目のときは有限個の Dehn surgery を除き, 得られた 3次元多様体が双曲構造をもつことを証明しました (Hyperbolic Dehn Surgery Theorem). それでは, その有限個の非双曲 Dehn surgery はどのように生じるのでしょうか. これを記述することが Dehn surgery の研究における主要な問題です.

非双曲 Dehn surgery の中でも、特に未解決な問題が多く残されているのが Seifert fiber space を生み出す Dehn surgery (Seifert surgery) です。

Moser はトーラス結び目の Dehn surgery を分類し、Dehn surgery で Seifert fiber space を生み出す結び目はトーラス結び目に限るだろう、という予想を提出しました。その後、Bailey-Rolfsen は $(2, 3)$ -トーラス結び目の $(11, 2)$ -ケーブルの 23-surgery で lens space が生じることを示し、Moser の予想を否定的に解決しました。その後、Fintushel-Stern による例をはじめ lens space, Seifert fiber space を生み出す双曲結び目上の Dehn surgery の例が次々と発見されています。

トーラス結び目の Seifert surgery は、トーラス結び目の外部が Seifert fibration をもっているため、solid torus を埋め戻す際に、その外部の Seifert fibration の solid torus への拡張を観察することによって自然な説明が可能です。それでは、双曲結び目の Dehn surgery で Seifert fiber space が生じる現象はどのように説明されるのでしょうか？

2 Seifert surgery からなるネットワーク

私たちが風邪を引いたとき、「どうして風邪を引いたのか？」という疑問に対してどのような答えが可能でしょうか。もちろん自分自身にその原因を求めることも可能ですが、多くの場合、周囲に風邪を引いている人がいて、その人から風邪をうつされてしまった、というように他者との関連でその原因を理解しているのではないのでしょうか。そこで、Seifert surgery 全体のなすネットワークを考え、それらの相互の関係を眺めることにより、Seifert surgery を大域的に理解できるのではないかと、この発想が本研究のきっかけです。

2.1 Seifert Surgery Network の構成

それでは Seifert surgery からなるネットワーク—Seifert Surgery Network—を構成していきましょう。

結び目 K と整数 m に対し、 $(K; m)$ が Seifert fiber space のとき、 K と m の組 (K, m) を Seifert surgery と呼びます。また 2 つの Seifert surgery $(K, m), (K', m')$ は K と K' が isotopic で $m = m'$ のとき、同じ Seifert surgery とみなします。これら Seifert surgery をネットワークの頂点とします (図 2)。

次に、これら Seifert surgery の間の辺を定義します。ここで鍵となるのが “seiferter” です。まずは典型的な例からはじめます。

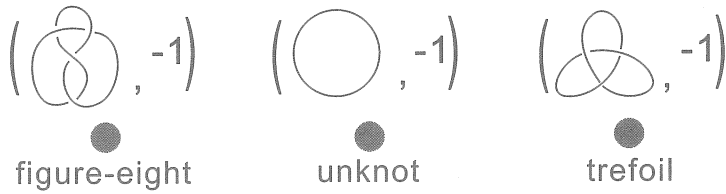


図 2: vertices

例 1 (basic seifert) K をトーラス結び目 $T_{p,q}$ (図 3 では $p = -3, q = 2$) とします. c_μ は $T_{p,q}$ の meridian で, c_p, c_q はそれぞれ Seifert fiber space $S^3 - T_{p,q}$ の exceptional fiber で $T_{p,q}$ との linking number が p, q のものです.

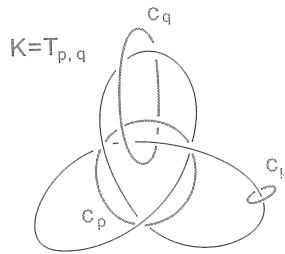


図 3: basic seiferters

c を c_μ, c_p, c_q のいずれかとすると, c は

- (1) S^3 内で自明な結び目で,
- (2) Seifert fiber space $(K; m)$ 内では Seifert fiber になる, という性質をもっています.

例 2 (non-basic seifert)

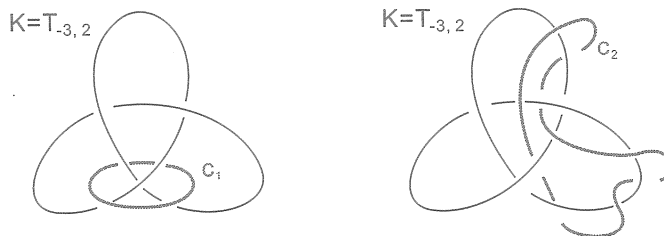


図 4: non-basic seiferters

図 4 の c_1, c_2 も

- (1) S^3 内で自明な結び目で,
 (2) c_1 は Seifert fiber space $(K; -1), (K; -2), (K; -3)$ 内で, c_2 は Seifert fiber space $(K; -6), (K; -7), (K; -8)$ 内で Seifert fiber になる,
 という性質をもっています.

図4の c_1 が (1), (2) の性質をみたすことは, 後ほど判定法を紹介してから実際に確かめてみることにします.

これらの例をもとに **seiferter** を以下のように定義します.

seiferter

(K, m) を Seifert surgery とする. $S^3 - K$ 内の結び目 c は次の性質をみたすとき Seifert surgery (K, m) の **seiferter** という.

- (1) S^3 内の自明な結び目で,
 (2) Seifert fiber space $(K; m)$ 内では **Seifert fiber** になる.

特に, トーラス結び目 K の Seifert surgery (K, m) に対して, 例1で紹介した c_μ, c_p, c_q を **basic seiferter** と呼びます.

Seifert surgery (K, m) が seiferter c をもっていると, 性質 (1)(seiferter の自明性) から結び目 K を seiferter c で p twist して S^3 内の別な結び目 K_p を作ることができます. このとき surgery slope m も一般に別な surgery slope m_p になります. また, 下の可換図式から分かるように, 性質 (2)(seiferter の fiber 性) から, S^3 での c に沿っての twist は surgery 後の Seifert fiber space の世界では seifert fiber に沿っての surgery に対応します.

$$\begin{array}{ccc}
 (K, m) & \xrightarrow{\text{twisting along } c} & (K_p, m_p) \\
 m\text{-surgery} \downarrow & & \downarrow m_p\text{-surgery} \\
 (K; m) & \xrightarrow{\text{surgery along } c} & (K_p; m_p)
 \end{array}$$

したがって, $(K_p; m_p)$ も Seifert fiber space で, (K_p, m_p) も Seifert surgery になります. (K_p, m_p) を (K, m) から seiferter c で p twist して得られた Seifert surgery と呼ぶことにします. こうして **seiferter** は無限個の **Seifert surgery** を生み出すことが分かります. $(K_p; m_p)$ が lens space の連結和になることもありますが, これは index 0 の exceptional fiber をもつ退化した Seifert fiber space とみなせるので, このような surgery もネットワークの中に組み込んでおきます.

それでは、辺を定義しましょう。2つの Seifert surgery (K, m) , (K', m') に対して (K, m) のある seiferter c が存在して、 (K', m') が (K, m) から seiferter c で ± 1 twist して得られているとき、 (K, m) , (K', m') を辺で結びます。下の図5で右端は $K = T_{-3,2}$ (trefoil) の -1 -surgery で、先の例2で述べたように c_1 は $(K, -1)$ の seiferter になっています。 c_1 で (-1) twist すると K は $K_{-1} = \text{unknot}$ になります。この例では c_1 と K の linking number が 0 なので surgery slope は -1 のまま変化しません。さらに c_1 で K_{-1} を (-1) twist すると $K_{-2} = \text{figure-eight knot}$ が得られます。先と同様に surgery slope は -1 のままです。

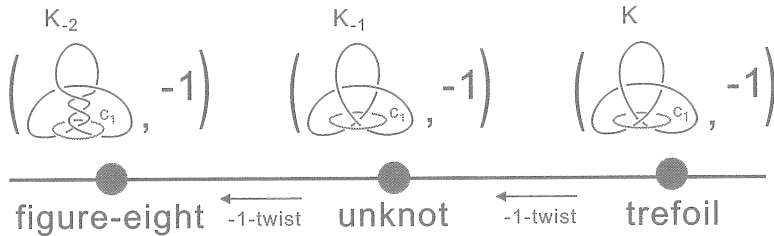


図 5: edges

2.2 S-lattice

Seifert surgery (K, m) が seiferter c をもっていれば、 c で twist することにより、無限個の Seifert surgery $(K_p; m_p)$ が生成されることを見ましたが、これらのなす集合 $T_{K,m,c} = \{(K_p; m_p)\}$ は次の性質をもっています。

命題 2.1 $T_{K,m,c}$ は 1 次元の lattice をなす。すなわち、 $(K_p, m_p) = (K_q, m_q)$ ならば $p = q$ となる。この lattice を *S-lattice* と呼ぶ。



図 6: S-lattice

したがって、Seifert Surgery Network は *S-lattice* と呼ばれる 1 次元 lattice が組合わさった構造をもっていることがわかります。2つの *S-lattice* の間には次が成り立ちます。

命題 2.2 c_1, c_2 を Seifert surgery (K, m) に対する異なる seiferter とする. このとき T_{K,m,c_1} と T_{K,m,c_2} は高々有限個の頂点で交わる.

予想 : $T_{K,m,c_1} \cap T_{K,m,c_2} = \{(K, m)\}$

系 2.3 任意の 2 つの S -lattice は高々有限個の頂点でしか交わらない.

3 seiferter から seiferter へ

ここでは seiferter から別な seiferter を見つける方法を紹介しします. c を Seifert surgery (K, m) の一つの seiferter とします. $\partial N(K)$ 上に m -slope を代表する simple loop α をとります. seiferter c と α をつなぐ band b をとって, 図 7 のようにバンド和 c' を考えます. この操作を m -move と呼びます. band の取り方は無数にあるので m -move も無限にあります.

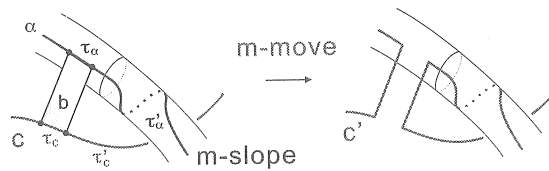


図 7: m -move

$S^3 - K$ 内の 2 つの結び目 c, c' に対し, c' が c から有限回の m -move で得られるとき, c と c' は m -equivalent であるといいます.

命題 3.1 (K, m) を Seifert surgery とし, c をその一つの seiferter とする.

- 自明な結び目 $c' \subset S^3 - K$ が seiferter c に m -equivalent であれば c' も (K, m) の seiferter である.
- 2 つの seiferter c, c' が $(K; m)$ 内で Seifert fiber t に isotopic であれば, c と c' は m -equivalent である.

この結果を用いて, 例 2 の c_1 が実際に $(K, -1)$ の seiferter になっていることを確かめてみましょう. c_1 に対して図 8 の band を用いて (-1) -move を行います. こうして図 8 中央の c' が得られます. c' は isotopy で図 8 右のように K の meridian になります. trefoil K の meridian は $(K, -1)$ の seiferter (例 1) ですから, 命題 3.1 により c_1 も $(K, -1)$ の seiferter であることがわかります.

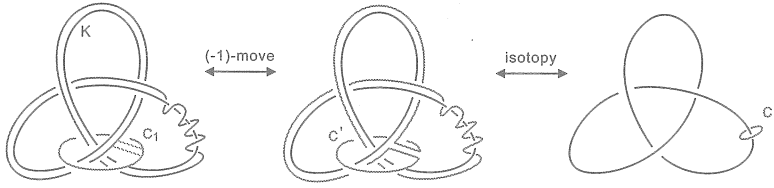


図 8: c is -1 -equivalent to c_μ

c_1 が $(K, -2), (K, -3)$ の seifertter になっていることも同様に示されます. Seifert surgery $(T_{-3,2}, -1)$ を例 2 の seifertter c_1 で (-2) twist することにより figure-eight knot 4_1 の (-1) -surgery $(4_1, -1)$ が得られることは先に見ました. 同様に $(4_1, -2), (4_1, -3)$ も $(T_{-3,2}, -2), (T_{-3,2}, -3)$ を例 2 の seifertter c_1 で (-2) twist することにより得られます. また, Seifert surgery $(T_{-3,2}, -6), (T_{-3,2}, -7), (T_{-3,2}, -8)$ を例 2 の seifertter c_2 で 1 twist することにより pretzel knot $P(-2, 3, 7)$ の Seifert surgery $(P(-2, 3, 7), 19), (P(-2, 3, 7), 18), (P(-2, 3, 7), 17)$ が得られます. 以上の考察から figure-eight knot の Seifert surgery や pretzel knot $P(-2, 3, 7)$ の Seifert surgery が Seifert Surgery Network の中で図 9 のように位置していることがわかります.

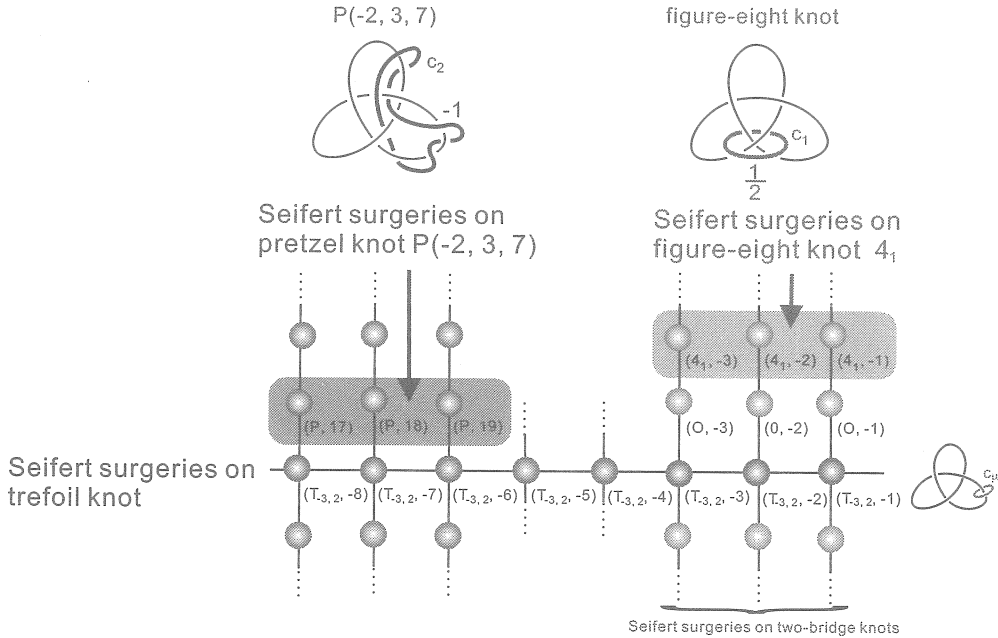


図 9: Seifert surgeries on $P(-2, 3, 7)$ and the figure-eight knot

4 seiferter と短い閉測地線

ここでは seiferter と双曲結び目補空間内の測地線の関係に目を向けてみたいと思います. SNAPPEA [3] によるコンピュータ実験から双曲結び目 K の Seifert surgery では $S^3 - K$ の短い測地線, 特に, 最短測地線が seiferter になっていることが期待されます.

定理 4.1 K を双曲結び目またはトーラス結び目とし, c を Seifert surgery (K, m) の seiferter で $(K; m)$ 内で exceptional fiber になるものとします. K がトーラス結び目のときは c は basic seiferter c_p, c_q, c_μ や $c_{2,\varepsilon}$ (図 10) ではないものとします.

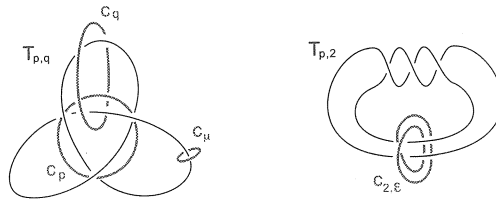


図 10: basic seiferters and $c_{2,\varepsilon}$

このとき (K, m) の生成する S -lattice $T_{K,m,c}$ は高々有限個の Seifert surgery を除き, c が shortest geodesic seiferter となる双曲結び目の Seifert surgery からなる.

例 3

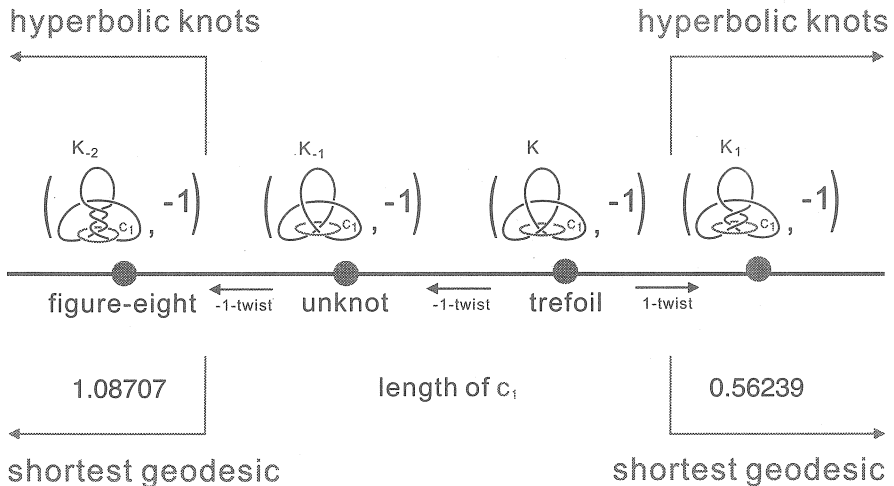
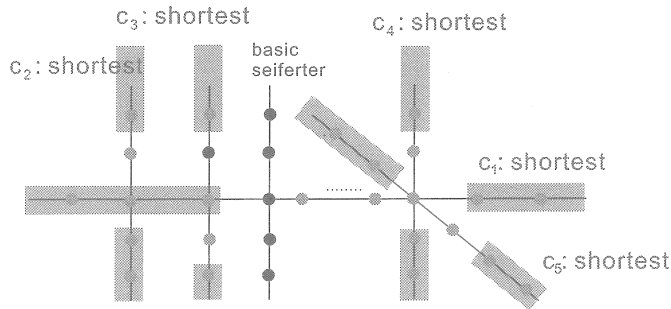


図 11: c is a shortest geodesic seiferter for $(K_p, -1)$ if $p \neq 0, -1$

定理 4.1 を各 S -lattice に適用することにより次の系が得られます.

系 4.2 双曲結び目上の *Seifert surgery* で *exceptional fiber* になる *seiferters* をもつものの “大半” は *shortest geodesic seiferters* をもっている.



- Seifert surgery on hyperbolic knot
- Seifert surgery on torus knot

図 12: seiferters which are shortest geodesics

5 ネットワーク探索で得られた Seifert surgery

これまでに知られている Seifert surgery では, 結び目は S^3 の種数 2 の Heegaard 曲面に埋め込まれ, 特に, strong inversion か cyclic period 2 をもっています. これらの条件は Seifert surgery を許容する結び目の必要条件であると予想 (期待) されていました. 次の結果はネットワーク探索によって偶然得られたものです.

定理 5.1 以下の性質をみたす無限個の *Seifert surgery* (K_n, m_n) が存在する.

- K_n は双曲結び目.
- K_n は *strong inversion* も *cyclic period* ももたない.
- K_n は S^3 の種数 2 の Heegaard 曲面に埋め込み不可能.

K_n は S^3 の種数 3 の Heegaard 曲面に埋め込むことが可能です. また, Seifert surgery (K_n, m_n) の発見には, 非常に特殊な seiferters をもつ, ネットワーク内で (K_n, m_n) の近くにある Seifert surgery の存在が鍵でした.

6 問題

- 本稿では触れることができませんでしたが, Seifert Surgery Network に関しては
- Berge の lens surgery がトーラス結び目の Seifert surgery のごく近くに密集していること
 - Seifert Surgery Network は tree ではなく circuit をもっていること
- などいくつか興味深い事実が明らかになりました.
- 一方, 次に挙げる最も基本的かつ重要な問題が未解決なまま残されています.

seiferter の存在問題 すべての Seifert surgery は seiferter をもつか.

コメント: もし YES であれば, “双曲結び目の Seifert surgery は整数 surgery に限る” という予想が肯定的に解決されます ([1]).

連結性問題 Seifert Surgery Network は連結か. もし連結でなければ, どれくらいの連結成分をもつか.

コメント: もし連結であれば, すべての Seifert surgery はトーラス結び目の Seifert surgery と seiferter を介して結ばれており, トーラス結び目の Seifert surgery から説明が可能ということになります.

局所有限性問題 Seifert Surgery Network は局所有限か.

コメント: 自明な結び目の Seifert surgery からは無限個の辺が生えていて, 局所有限ではありません. 上の問いは正確には, 非自明な結び目の Seifert surgery からは有限個の辺しか生えていないか, という問題です.

参考文献

- [1] K. Miyazaki and K. Motegi; Seifert fibered manifolds and Dehn surgery III, *Comm. Anal. Geom.* 7 (1999), 551–582.
- [2] A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi; Networking Seifert fibered surgeries on knots, preprint.
- [3] J. Weeks, “SNAPPEA”: a computer program for creating and studying hyperbolic 3-manifolds, freely available from <http://www.geometrygames.org/SnapPea/>.

曲面結び目のカンドルコサイクル不変量

岩切雅英

広島大学大学院理学研究科数学専攻
日本学術振興会特別研究員

1. 序

[4]において、カンドルホモロジー理論は導入され、その3-コサイクルを用いて、カンドルコサイクル不変量と呼ばれる曲面絡み目の不変量が定義されました。カンドルホモロジー理論は、[8]におけるラックホモロジー理論の変更したものとみることでもできます。このカンドルホモロジー理論は、[1]において一般化され、それに従い、カンドルコサイクル不変量も一般化されています (cf. [3, 5])。第2章で、これらの事項の定義を復習します。

カンドルコサイクル不変量を用いると、曲面結び目のいろいろな性質を調べることができます。例えば、非可逆性との関係 [2, 3, 4, 10]、3重点数との関係 [17, 18, 19]、リボンコンコルダンスとの関係 [6]、シート数との関係が知られています。筆者は、[11]において、3重点解消数との関係について研究を行いました。第3章においてその結果を紹介し、与えられた自然数 n に対して、3重点解消数が n になるような曲面結び目の例を与えました。

また、カンドルコサイクル不変量を計算するのは、一般的には難しいですが、2面体カンドル R_p の Mochizuki's 3-コサイクルに関する不変量は計算されてきました。ここで、 p は奇素数です。(Mochizuki's 3-コサイクルは Example 2.4(1) で与えます。) 実際、任意の奇素数 p に対して、ツイストスパントーラス結び目 [2] のとき、ツイストスパン2橋結び目 [10] のとき、ツイストスパンプレッツェル絡み目 [12] のとき計算され、また、 $p=3$ のとき、3-braid knot のツイストスパン結び目 [16] について計算されています。第4章においてツイストスパン2橋結び目とツイストスパンプレッツェル絡み目の計算結果を紹介します。

2. GENERALIZED QUNDLE COCYCLE INVARIANT

次の3つの条件をみたす2項演算 $*$ が与えられている集合 X をカンドルといいます。

- (1) 任意の $x \in X$ に対して、 $x * x = x$ が成り立つ。
- (2) 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して、 $x_3 \in X$ が一意的に存在して $x_1 = x_3 * x_2$ が成り立つ。
- (3) 任意の $x_1, x_2, x_3 \in X$ に対して、 $(x_1 * x_2) * x_3 = (x_1 * x_3) * (x_2 * x_3)$ が成り立つ。

Example 2.1. p を奇素数とします。 $\mathbf{Z}_p \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ は、2項演算 $a * b = 2b - a$ のもとでカンドルになります。このカンドルのことを2面体カンドルといい、 R_p で表します。

ユークリッド4次元空間 \mathbf{R}^4 に局所平坦に埋め込まれた向き付けされた閉曲面を曲面絡み目といい、連結なとき曲面結び目といいます。曲面結び目の射影図とは、 \mathbf{R}^3 へのジェネリックな射影による像において、2重点曲線の周りで下方の像を切断することで交点の上下の情報を入れたものをいいます (図1)。射影図の連結成分をシートといい、曲面結び目 F の射影図 D のシートの集合を $\Sigma(D)$ で表します。 F と

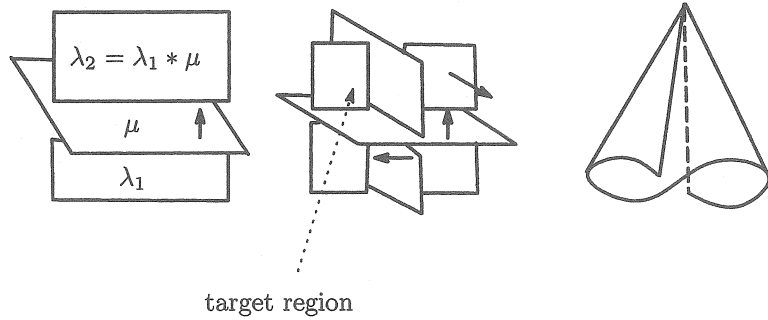


図 1

\mathbb{R}^3 の向きから、各シートの法線方向を決めます。射影図 D の X -彩色とは、カンドル X への写像 $C: \Sigma(D) \rightarrow X$ のことで次を満たすものとします: 各 2 重点曲線の周りの上方シートの色を μ 、下方シートのうち上方シートの法線方向に関して裏側にある下方シートの色を λ_1 、表側にある下方シートの色を λ_2 としたとき、 $\lambda_1 * \mu = \lambda_2$ となる (図 1)。 D の X -彩色全体を $Col_X(D)$ で表します。3 重点 t の周りにおける領域で、3 つのシートの法線方向に関して表側にある領域のことを **target region** といいます。

次のことは知られています。

Remark 2.2. $Col_{\mathbb{R}_p}(D)$ は \mathbb{Z}_p 上の線形空間の構造を持ちます。

Proposition 2.3. D を曲面結び目 F の射影図としたとき、 $|Col_X(D)|$ は曲面結び目の不変量となります。そのことから、 $Col_X(D)$ を $Col_X(F)$ と表します。

X をカンドルとします。 $G_X := \langle x \in X \mid x, y \in X, x * y = yxy^{-1} \rangle$ を X の **associated group** といいます。 $n > 0$ に対して、 X^n を基底とする自由 $\mathbb{Z}G_X$ -加群 $C_n^R(X) := G_X X^n$ とおきます。また、 $C_0^R(X) := \mathbb{Z}G_X$ とおき、 $n < 0$ に対して $C_n^R(X) := 0$ とします。また、境界準同型 $\partial_n: X^n \rightarrow X^{n-1}$ を

$$\partial_n(x_1, \dots, x_n) := (-1)^n \sum_{i=1}^n \{(-1)^i [x_i, x_{i+1}, \dots, x_n](x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$$

$$-(-1)^i (x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\}$$

と定義します。ここで、 $[x_1, x_2, \dots, x_n] := ((\dots (x_1 * x_2) * x_3) * \dots) * x_n$ とします。このとき、 $C_n^R(X) = \{C_n^R(X), \partial_n\}$ はチェイン複体となります。また、 $n > 1$ に対して、 $C_n^D(X)$ を、 $X^n \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = x_{i+1} \text{ for some } i\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}G_X$ -加群とし、 $C_n^Q(X) := C_n^R(X) / C_n^D(X)$ とおき、 $n \leq 0$ に対して、 $C_n^Q(X) := C_n^R(X)$ とします。このとき、 $C_n^Q(X) = \{C_n^Q(X), \partial_n\}$ もチェイン複体となります。このとき、チェイン複体 $C_n^Q(X)$ から、 **generalized quandle homology group** と **generalized quandle cohomology group** を定義します。とくに、 G_X の作用が自明であるホモロジー群、コホモロジー群は、[4] で定義されたカンドルホモロジー群、カンドルコホモロジー群と一致します。一般化は、[1] において行われました。

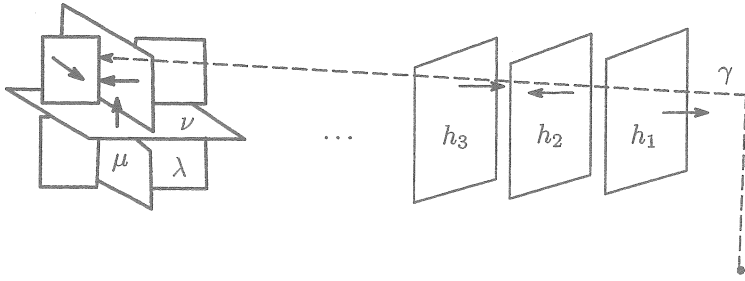


図 2

M を G_X -加群のとき、次の 2 つの等式を満たす写像 $\kappa :: X \times X \times X \rightarrow M$ は、自然に 3-コサイクルを誘導します:

$$\begin{aligned} & w\kappa_{x,y,z} + \kappa_{x*z,y*z,w} + (y * z) * w \kappa_{x,z,w} + \kappa_{y,z,w} \\ &= (((x * y) * z) * w) \kappa_{y,z,w} + \kappa_{x*y,z,w} + (z * w) \kappa_{x,y,w} \\ &+ \kappa_{x*w,y*w,z*w}, \\ &\kappa_{x,x,y} = \kappa_{x,y,y} = 0 \end{aligned}$$

Example 2.4. (1) [14]において、作用が自明である 3次元コホモロジー $H^3(R_p, \mathbf{Z}_p) \cong \mathbf{Z}_p$ であり、その生成元となるような Mochizuki's 3-コサイクル

$$\theta_p(x, y, z) = (x - y) \frac{y^p + (2z - y)^p - 2z^p}{p}$$

が与えられました。

(2) [3] の Example 7.6 において、 \mathbf{Z}^3 に値を持つ R_3 の wreath action に関する 3-コサイクル κ が与えられました。

X を有限カンドルとし、 κ を M に値をとる X の 3-コサイクルとします。 D を曲面結び目 F の射影図とします。3重点 t に対して、 γ を \mathbf{R}^3 の無限領域から t の target region への弧だとします。 γ は、シートと有限回横断的に交わり、2重点曲線や3重点、分岐点とは交わらないことを仮定します。 γ と交差するシートを、順に、 h_1, \dots, h_k とおきます。彩色 C に対して、3重点 t のボルツマンウエイトを

$$B(C, t) = \epsilon(t)(C(h_1)^{\epsilon(h_1)} \dots C(h_k)^{\epsilon(h_k)}) \kappa_{x,y,z} \in M$$

で定義します。ただし、シート λ, μ, ν が、3重点 t の周りのシートの法線方向に関して図 2 の位置にあるとき、シート λ, μ, ν の色をそれぞれ x, y, z とします。さらに、 $\epsilon(t)$ を 3重点 t の符号とし、 γ が h_i の法線方向に添って交わる時 $\epsilon(h_i) = 1$ とし、それ以外の場合、 $\epsilon(h_i) = -1$ とします。そのとき、 $B(C, t)$ は γ の取り方によらません (cf. [3])。さらに、

$$\Phi_\kappa(F) = \left\{ \sum_t B(C, t) \right\}_{C \in Col_X(D)}$$

を generalized quandle cocycle invariant といい、 D の取り方によらないことが示されています (cf. [3])。ここで、 \sum_t は D のすべての 3重点を取ります。 $\Phi_\kappa(F)$ は M の multi-set の元として考えます。

M の元 g と M の multi-set A に対して、 A 中の g の数を $a_g(A)$ で表します。また、 $\Phi_\kappa(S)$ においては M の単位元となる X -coloring 集合を $O_\kappa(S)$ で表します。定義から、 $|O_\kappa(S)| = a_0(\Phi_\kappa(S))$ が成り立ちます。

3. 3重点解消数

曲面結び目が \mathbf{R}^4 においてハンドル体の境界になっているとき、**自明な曲面結び目**であるといい、自明な曲面結び目の分離和で得られる曲面絡み目のことを**自明な曲面絡み目**と呼びます。次のことが知られています。

Proposition 3.1. [9] どんな曲面絡み目も有限回の1-ハンドル手術により、自明な曲面絡み目に変形できます。

曲面絡み目 F を自明な絡み目に変形するために必要な1-ハンドル手術の最小数を、 F の**結び目解消数**といい、 $u(F)$ で表します。同様に、 F を3重点がない射影図をもつ曲面結び目に変形するために必要な1-ハンドル手術の最小数を、 F の**3重点解消数**といい、 $\tau(F)$ で表します。自明な結び目は3重点がない射影図をもつので、Proposition 3.1により、 $u(F), \tau(F)$ はすべての曲面結び目に対して定義でき、 $\tau(F) \leq u(F)$ を満たします。

κ を2面体カンドル $X = R_p$ の3-コサイクルとします。

Theorem 3.2. [11] F を曲面結び目とし、 m を $Col_X(F) \cong \mathbf{Z}_p^m$ をみたす整数とします。もしある整数 l に対して、 $p^{m-l} > a_0(\Phi_\kappa(F))$ を満たすとき、 $l+1 \leq \tau(F)$ が成り立ちます。

Theorem 3.3. [11] F, F' を曲面結び目とし、 m, m' を $Col_X(F) \cong \mathbf{Z}_p^m, Col_X(F') \cong \mathbf{Z}_p^{m'}$ をみたす整数とします。もし、 $O_\kappa(F \amalg F')$ が $Col_X(F \amalg F')$ の線形部分空間で、ある整数 l に対して、 $p^{m+m'-l} > a_0(\Phi_\kappa(F \amalg F'))$ を満たすとき、 $l+1 \leq \tau(F)$ が成り立ちます。

Corollary 3.4. 曲面結び目 F が $u(F) = 1$ で、 $|Col_X(S)| = p^2$ と $a_0(\Phi_\kappa(\amalg_n F)) = p^n$ を満たすとします。そのとき、 $\tau(\#_n F) = u(\#_n F) = n$ となります。

Example 3.5. κ を Example 2.4(2) で紹介した3-コサイクルとします。 F_r を 9_{11} 結び目の $2r$ -ツイストスパン結び目とします。[3] から、 $\Phi_\kappa(F_r) = \{\amalg_3(0, 0, 0), \amalg_6(rq_1, 0, -rq_1)\}$ となるのがわかります。このことから、 $a_0(\Phi_\kappa(\amalg_n F_r)) = 3^n$ となります。今、 9_{11} 結び目は2橋結び目で、[13, 15] より、 $u(F_r) = 1$ です。以上のことから、Corollary 3.4 より $\tau(\#_n F_r) = u(\#_n F_r) = n$ が成り立ちます。この例から、任意の自然数 n に対して、 $\tau(\#_n F_r) = u(\#_n F_r) = n$ となる曲面結び目が存在することがわかります。

4. ツイストスパン絡み目カンドルコサイクル不変量

θ_p を Example 2.4(1) で与えられた Mochizuki's 3-コサイクルとします。今、 Φ_{θ_p} を Φ_p と書きます。また、全単射 $\pi : \{\mathbf{Z}_p \text{ の multi-sets}\} \rightarrow \mathbf{Z}_p[T, T^{-1}]/(T^p - 1)$ を $A \mapsto \sum_{s=0}^{p-1} a_s(A) T^s$ で定義します。この π により、 Φ_p は $\mathbf{Z}_p[T, T^{-1}]/(T^p - 1)$ に値をとることにします。今、任意の1次元絡み目 L に対して、 L の r -ツイストスパン絡み目を、 $\text{Tw}^r L$ で表します。

4.1. ツイストスパン2橋結び目. 2橋絡み目は、シューベルトの標準形と呼ばれる射影図 $S(\alpha, \beta)$ をもちます (図 3)。ただし、 α, β は、 $\alpha > 0, -\alpha < \beta < \alpha$ で、 α, β は奇数、 α, β は互いに素であるとします。次の定理が得られました。

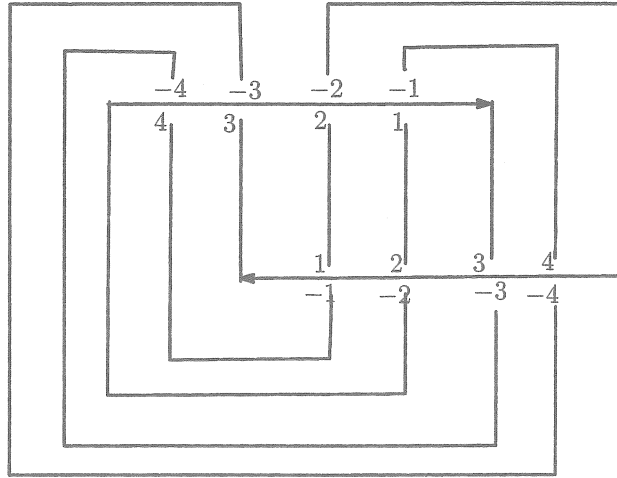


図 3. $S(5,3)$

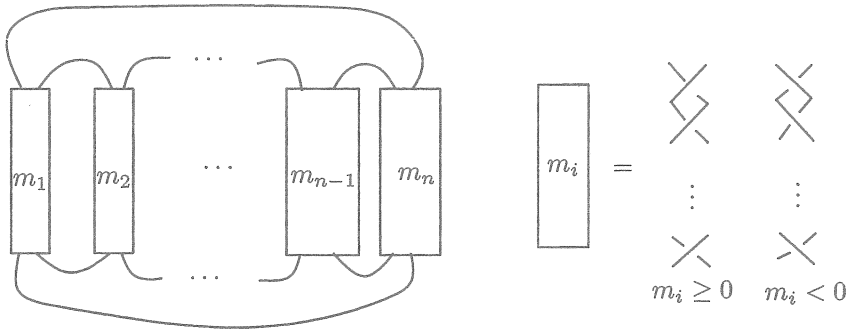


図 4

Theorem 4.1. [10] n を $n\alpha \equiv 1 \pmod{2\alpha}$ を満たす $\{1, 3, \dots, 2\alpha - 1\}$ の中の奇数とします。もし、 r が偶数で、 α が p で割り切れるとき、

$$\Phi_p(\text{Tw}^r S(\alpha, \beta)) = p \sum_{s=0}^{p-1} T^{-rn\alpha}$$

となり、それ以外の場合、

$$\Phi_p(\text{Tw}^r S(\alpha, \beta)) = p$$

となります。

4.2. ツイストスパンプレッツェル絡み目. プレッツェル絡み目 $L = P(m_1, \dots, m_n)$ は、図 4 のような射影図をもつ 1 次元結び目のことです。図の中の m_i は i 列目のハーフツイストの数を表しています。プレッツェル絡み目のツイストスパン絡み目を $\text{Tw}^r L$ とします。列 (m_1, \dots, m_n) に対して、 p で割り切れない元だけ取り除くことで得られる部分列を p -基本列と呼びます。また、 \mathbb{Z}_p (または \mathbb{Z}_{p^2}) の元 x の積の逆元を \bar{x} (または x^{-1}) と表し、 $\bar{W} = \bar{m}_1 + \dots + \bar{m}_n$ とおきます。そのとき次の定理

が得られます。

Theorem 4.2. [12] L をプレッツェル絡み目 $L = P(m_1, \dots, m_n)$ とし、 r を偶数とおきます。また (M_1, \dots, M_l) を (m_1, \dots, m_n) の p -基本列とします。

(i) もし $l \geq 2$ ならば、

$$\Phi_p(\text{Tw}^r L) = p \sum_{s_1 + \dots + s_l \equiv 0} T^{-r\{(M_1/p)s_1^2 + \dots + (M_l/p)s_l^2\}}$$

を満たします。ここで s_1, \dots, s_l は $0, 1, \dots, p-1$ で $s_1 + \dots + s_l \equiv 0 \pmod{p}$ を満たすもの全体を取ります。

(ii) もし $l = 0$ で $\widehat{W} \equiv 0 \pmod{p}$ ならば、(すなはち、 \widehat{W} が p で割り切れるならば、)

$$\Phi_p(\text{Tw}^r L) = p \sum_{s=0}^{p-1} T^{r(\widehat{W}/p)s^2}$$

を満たします。

(iii) もし (i) でも (ii) でもないときは、

$$\Phi_p(\text{Tw}^r L) = p$$

となります。

また、 r が奇数のときは、 $\Phi(\text{Tw}^r L) = p$ となります。この結果から、 $\Phi(\text{Tw}^r L)$ は列 (m_1, \dots, m_n) の順番によらずに決まり、とくに (i) の場合は、 p -基本列だけで決まることがわかります。

REFERENCES

- [1] N. Andruskiewitsch and M. Graña, *From racks to pointed Hopf algebras*, Adv. Math. **178** (2003), 177-243.
- [2] S. Asami and S. Satoh, *An infinite family of non-invertible surfaces in 4-spaces*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 285-296.
- [3] J. S. Carter, M. Elhamdadi, M. Graña and M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle cohomology*, Osaka. J. Math. **42** (2005), 499-541.
- [4] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947-3989.
- [5] J. S. Carter and M. Saito, *Generalizations of quandle cocycle invariants and Alexander modules from quandle modules*, the proceedings of the conference "Intelligence of Low Dimensional Topology 2003" (Shodo-shima, Japan 2003) ed. S. Kamada, 77-90.
- [6] J. S. Carter, M. Saito and S. Satoh, *Ribbon concordance of surface-knots via quandle cocycle invariants*, J. Aust. Math. Soc. **80** (2006), 131-147.
- [7] R. Fenn and C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), 343-406.
- [8] R. Fenn, C. Rourke and B. Sanderson, *James bundles and applications*, preprint.
- [9] F. Hosokawa and A. Kawauchi, *Proposals for unknotted surfaces in four-spaces*, Osaka J. Math. **16** (1979), 233-248.
- [10] M. Iwakiri, *Calculation of dihedral quandle cocycle invariants of twist spun 2-bridge knots*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), 217-229.
- [11] M. Iwakiri, *Triple point cancelling numbers of surface links and quandle cocycle invariants*, to appear in Topology Appl.
- [12] M. Iwakiri, *Quandle cocycle invariants of pretzel links*, to appear in Hiroshima Math. J.
- [13] A. Kawauchi, *On pseudo-ribbon surface links*, J. Knot Theory Ramifications **11** (2002), 1043-1062.

- [14] T. Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 287–330.
- [15] S. Satoh, *A note on unknotting numbers of twist-spun knots*, Kobe. J. Math. **21** (2004), 71-82.
- [16] S. Satoh, *3-colorings and cocycle invariants of 3-braid knots*, preprint.
- [17] S. Satoh, A. Shima, *The 2-twist-spun trefoil has the triple point number four*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 1007-1024.
- [18] S. Satoh, A. Shima, *Triple point numbers and quandle cocycle invariants of knotted surfaces in 4-space*, New Zealand J. Math. **34**(2005), 71-79.
- [19] K. Tanaka, *On surface-links represented by diagrams with two or three triple points*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), 963-978.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HIROSHIMA UNIVERSITY,, HIROSHIMA 739-8526, JAPAN
E-mail address: iwakiri@hiroshima-u.ac.jp

2次元結び目理論における射影図の利用

佐藤 進 (神戸大学理学部)

1. 曲面絡み目の射影図

3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の曲面 G がジェネリックであるとは、ある閉曲面から \mathbb{R}^3 への写像による像で、 G 上の任意の点 $x \in G$ が正則点・ブランチ点・二重点・三重点のいずれかであるときをいう (図1)。特にブランチ点を持たないとき G ははめ込みである。

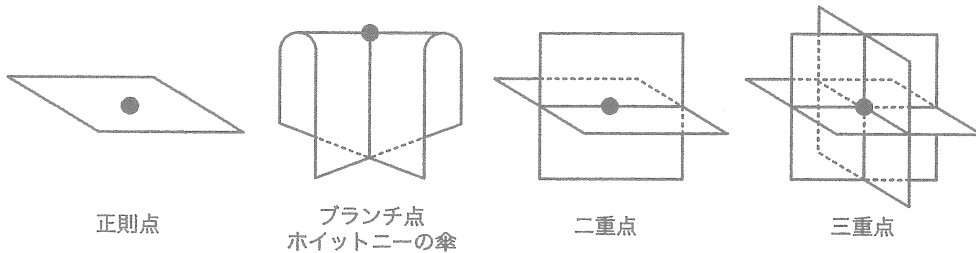


FIGURE 1

一方、4次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 に埋め込まれた閉曲面のことを曲面絡み目といい、2つの曲面絡み目は \mathbb{R}^4 の全同位によって移り合うとき区別しない立場をとる。

射影 $\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を固定する: ここでは $(x, y, z, w) \mapsto (x, y, z)$ とする。曲面絡み目 F に対して、必要ならば \mathbb{R}^4 の全同位で F を少しだけ動かすことにより、その像 $G_F = \pi(F)$ は \mathbb{R}^3 内のジェネリックな曲面であるとしてよい。

定義 1.1. 曲面絡み目 F の射影図とはジェネリックな曲面 G_F に、二重点カーブに沿って w -座標に関する上下の情報を付随させたものである。

交差情報の指定は通常以下の方法をとる。 G_F の各二重点の近傍では2枚の円板が横断的に交わっているが、それらは \mathbb{R}^4 において w -座標に関して異なる高さをもっている。そこで下方にある円板を G_F において切断する (図2左)。この切断は三重点において次のように拡張される。三重点を形成する3枚の円板は \mathbb{R}^4 における w -座標により上中下の区別がつくので、 G_F において中位の円板は上位の円板により二分割され、下位の円板は上・中位の円板により四分分割される (図2右)。

曲面絡み目を研究対象とする2次元結び目理論では、1次元結び目理論や3次元以上の高次元結び目理論とは異なる現象が知られているが、その研究はまだ十分に行われているとは

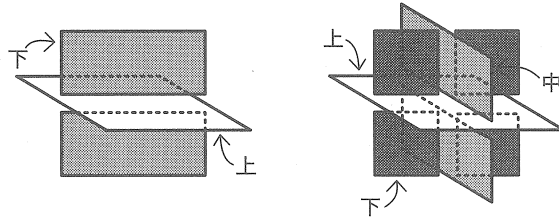


FIGURE 2

言いがたい。本講演では、射影図を用いたこれまでの研究結果と今後の研究課題について解説を行うことを目標とする。2次元結び目理論の教科書として [5, 7] などを挙げておく。

2. ジェネリックな曲面

G を \mathbb{R}^3 内のジェネリックな曲面とする：閉曲面 Σ から \mathbb{R}^3 へのジェネリックな写像 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在して $G = f(\Sigma)$ である。 G 上の二重点・三重点・ブランチ点の集合を Γ_f とし、 $\Gamma_f^* = f^{-1}(\Gamma_f)$ とおく。一般に Γ_f^* は Σ 上の自己交差を持つ閉曲線となるが、特に三重点を持たない場合は自己交差を持たない。図3は Σ が球面 S^2 のときの三重点を持たない例である。

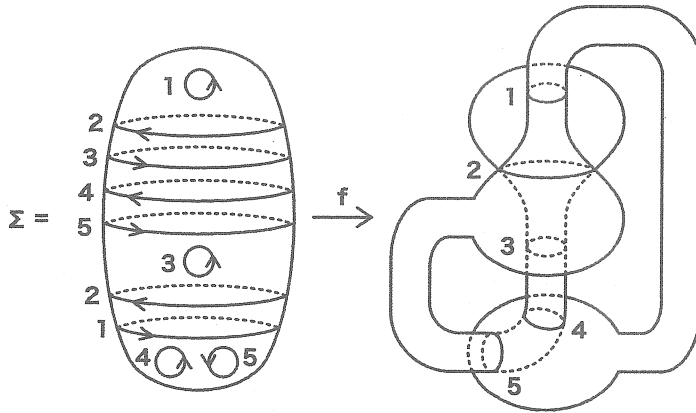


FIGURE 3

閉曲面 Σ および \mathbb{R}^3 が向き付けられているとき、 Γ_f^* の各円周も自然に向き付けられる。さらに f により Γ_f^* 上のどの二点が二重点に写されるか、どの三点が三重点に写されるか、どの点がブランチ点に写されるか、という対の情報を Γ_f^* に付随させることができる。

定義 2.1. ジェネリックな曲面 $G = f(\Sigma)$ に対して、 Γ_f が二重点のみからなるとき、 G は単純であるという (図3は単純な球面の例である)。

$G \subset \mathbb{R}^3$ が単純であるとき、 $\Gamma_f^* \subset \Sigma$ は対の情報を持つ向き付けられた偶数個の円周の埋め込みとなる。このとき次が成り立つ。

定理 2.2. $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内の単純な球面 $G_i = f_i(S^2) \subset S^3$ ($i = 1, 2$) に対して、逆像のデータ $\Gamma_{f_1}^*$ と $\Gamma_{f_2}^*$ が一致するならば、 G_1 と G_2 は図 4 のような円筒タイプの変形で移り合う。

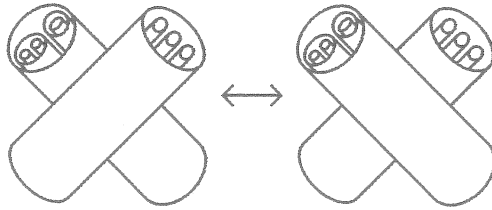


FIGURE 4

定義 2.3. 曲面絡み目 $F \subset \mathbb{R}^4$ の射影図 $G_F \subset \mathbb{R}^3$ が単純であるとは、ジェネリックな曲面として単純であるときをいう。特に球面結び目 F が単純な射影図を少なくともひとつもつとき、 F をリボン球面結び目という。

一般にジェネリックな曲面 $G = f(\Sigma)$ が適当な曲面絡み目 F の射影図 G_F と一致する場合、 $\Gamma_f^* \subset \Sigma$ には向きおよび対の情報に加えて、交差情報を付随させることができる。

系 2.4 (cf. [1]). リボン球面結び目 $F_i \subset \mathbb{R}^4$ の単純な射影図 $G_{F_i} = f_i(S^2) \subset \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2$) に対して、逆像のデータ $\Gamma_{f_1}^*$ と $\Gamma_{f_2}^*$ が一致するならば、 F_1 と F_2 は同じ結び目タイプを定める。

問題 2.5. (1) 単純でない球面 $G \subset \mathbb{R}^3$ に対しても、定理 2.2 と同様な結果が得られないか？ (トーラスでは成り立たないことはすぐに分かる。)

(2) 球面 S^2 上に対の情報を持つ向き付けられた偶数個の円周の埋め込み Γ^* が与えられたとき、ジェネリックな写像 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ で $\Gamma^* = \Gamma_f^*$ を満たすものが存在するための必要十分条件を与えよ。

(3) 系 2.4 を用いて、 Γ_f の円周の個数に関するリボン球面“絡み目”のリストを作れ。([1] には Γ_f が高々 5 個の円周までのリボン球面結び目のリストが与えられている。)

一般にジェネリックな曲面 $G = f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$ が与えられたとき、 Γ_f は 1-, 6-価の頂点を持つ空間グラフとみなすことができる。逆に 1-, 6-価の頂点を持つ空間グラフ Γ が与えられたとき、ジェネリックな曲面 $G = f(\Sigma)$ で $\Gamma = \Gamma_f$ をみたすものが存在するだろうか。[15] において、そのような任意の空間グラフ Γ はジェネリックな曲面により自己交差集合として実現することが示されている。特に Γ が 1-価の頂点を持たない場合に、 Σ を向き付け可能な閉曲面ととれるための必要十分条件も与えられている。

問題 2.6. (1) Γ が 1-価の頂点を持つ場合に、向き付け可能なジェネリックな曲面 $G = f(\Sigma)$ で $\Gamma = \Gamma_f$ をみたすものが存在するための必要十分条件を与えよ。

(2) 1-, 6-価の頂点をもつ空間グラフ Γ を Γ_f として実現する曲面 $G = f(\Sigma)$ に対して、オイラー標数 $\chi(\Sigma)$ の最大値は Γ のどのような性質を反映しているか？また Σ を向き付け可能な閉曲面に限定した場合にはどうか？

3. 持ち上げ問題

平面曲線が与えられると、それは常に適当な 1 次元絡み目の影となるが、この性質は次元を上げると一般には成り立たなくなる。与えられたジェネリックな曲面 $G \subset \mathbb{R}^3$ に対して $\pi(F) = G$ となる曲面絡み目 F が存在するとき、 G を持ち上げ可能であるといい、 F を G の持ち上げという。

[19] において、 G が持ち上げ可能であるための必要十分条件をグラフ $\Gamma(G)$ の言葉で与えた： $\Gamma(G)$ の交代的向きとは、 $\Gamma(G)$ のすべての辺に与えられた向きで、三重点の周りでは図 5 左・中どちらかの条件をみたすものをいう。このとき G が持ち上げ可能であるための必要十分条件は、 $\Gamma(G)$ が交代的向きを少なくともひとつ許容することである。他の判定法は [2, 6] を参照。

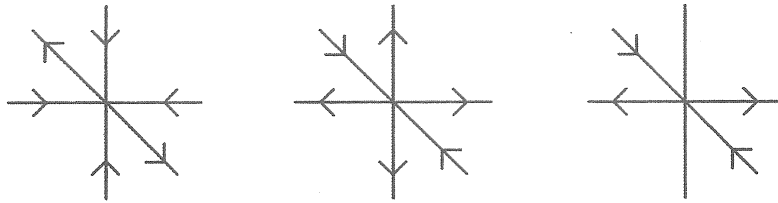


FIGURE 5

問題 3.1. ジェネリックな曲面 G が持ち上げ可能ならば、 G の持ち上げのうちで自明な曲面絡み目となるものが常にとれるか？(1 次元絡み目に対する同様な問題は肯定的、3 次元以上の絡み目に対しては否定的 [17] である)。

ジェネリックな曲面 G が (ブランチ点をもたない) はめ込みのとき、 G の二重化 G^* とは G の各点において G の垂直方向に二重被覆をとったものである。特に二重点・三重点の周りでは図 6 のようにとる。射影平面のはめ込みであるボーイの曲面 G は持ち上げ不可能であり、その二重化であるギラーの球面 G^* もまた持ち上げ不可能であることが知られている [6]。

定義 3.2. $\Gamma(G)$ の弱交代的向きとは、 $\Gamma(G)$ のいくつかの辺に与えられた向きで、三重点の周りでは図 5 左・中・右のいずれかの条件をみたすものをいう。

定理 3.3 ([10]). 閉曲面のはめ込み $G \subset \mathbb{R}^3$ の二重化 G^* に対して次は同値：

- (i) G^* が持ち上げ可能である。
- (ii) グラフ $\Gamma(G)$ が弱交代的向きを少なくともひとつ許容する。

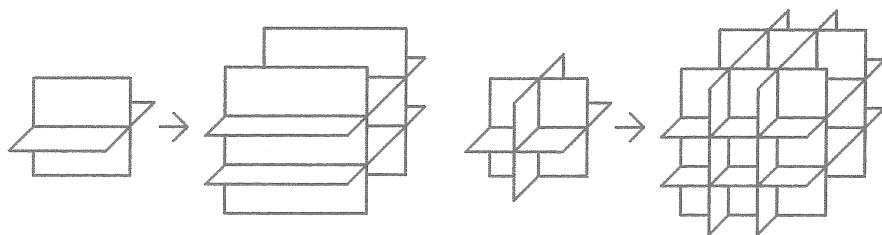


FIGURE 6

系 3.4 ([10]). (i) 射影平面のはめ込み G の二重化 G^* は常に持ち上げ不可能である。

(ii) 射影平面以外の連結向き付け不可能な曲面のはめ込み G に対しては、 G が持ち上げ不可能かつその二重化 G^* が持ち上げ可能なものが存在する (図 7 はクラインの壺の例)。

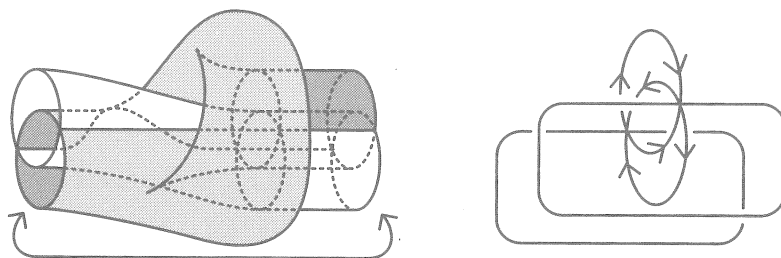


FIGURE 7

問題 3.5. 閉曲面のはめ込み G の二重化 G^* が持ち上げ可能であるとき、 G^* の持ち上げ F^* が表す曲面絡み目を特徴付けよ。

4. 曲面結び目の自明化

この章では、1-ハンドルに沿った手術・自明な射影平面結び目との連結和・リボン球面結び目に対する HC (ハンドル・チェンジ) 変形について述べる。

定理 4.1 ([8]). 向き付け可能な種数 $g(F)$ の曲面結び目 F に対して、互いにぶつからない 1-ハンドル $H = h_1 \cup h_2 \cup \dots \cup h_k$ ($k \geq 0$) が存在して、 F 上 H に沿って手術をして得られる種数 $g(F) + k$ の曲面結び目 $F + H$ が自明となる。

F を自明化する 1-ハンドルの本数の最小値を F の結び目解消数といい、 $u(F)$ とかく [9]. F がリボン曲面結び目のときにはいくつかの結果がすでに知られている (cf. [11, 14]).

リボン曲面結び目と並んで重要なクラスとして、ツイストスパン結び目がある [28]. これは上半空間 \mathbb{R}_+^3 に 1 次元結び目 K のタングルをとり、境界 \mathbb{R}^2 を軸として 1 回公転する間にタングルの部分を r 回自転することにより、 \mathbb{R}^4 内にタングルが通過して球面結び目を得る。これを K の r -ツイストスパン結び目といい $r^r K$ とかく (図 8)。

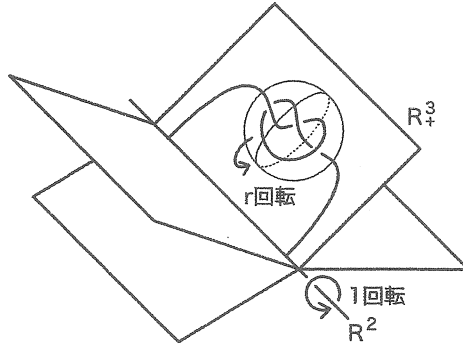


FIGURE 8

1次元結び目 K の (交差交換に関する) 結び目解消数を $u(K)$ 、橋指数を $b(K)$ とおく。[21] においてツイストスパン結び目 $\tau^r K$ の射影図を構成し、これを利用することで次を得た。

定理 4.2 ([22]). $u(\tau^r K) \leq u(K)$ かつ $u(\tau^r K) \leq b(K) - 1$ が成り立つ。

この結果は $r = 0$ の場合 [14, 16] において、 $b(K) = |r| = 2$ の場合 [13] においてすでに知られている結果の拡張である。定理 4.2 の評価はツイスト数 r に依存しないが、一般に $u(\tau^r K)$ は r と独立ではない：例えば $u(\tau^{2s} K) = 2$ ($s \in \mathbb{Z}$) かつ $u(\tau^3 K) = 1$ をみたら 1次元結び目 K が存在する [22]。

問題 4.3. 2成分以上の曲面絡み目に対して、“セルフ”1-ハンドル手術 (各1-ハンドルの両足が同一の成分に属するものだけを許す操作) を考えるとき、どのようなことが言えるか？

自明な射影平面結び目はそのオイラー標数によって P_+ , P_- の二種類があり、その結び目群は $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus P_\epsilon) \cong \mathbb{Z}_2$ をみたらす。 r が奇数ならば r -ツイストスパン結び目との連結和に関して $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus \tau^r K \# P_\epsilon) \cong \mathbb{Z}_2$ が成り立つが、 $\tau^r K \# P_\epsilon$ 自身が自明な射影平面結び目であるかどうか、いまだに分かっていない。($\tau^1 K$ は常に自明な球面結び目である [28].) ただし、ツイストスパン結び目の射影図を利用することで、次のことが成り立つ。

定理 4.4 ([23]). 任意の1次元結び目 K と $r \in \mathbb{Z}$ と $\epsilon = \pm$ に対して

$$\tau^{r+2} K \# (2P_\epsilon \# P_{-\epsilon}) = \tau^r K \# (2P_\epsilon \# P_{-\epsilon})$$

が成り立つ。特に r が奇数ならば $\tau^r K \# (2P_\epsilon \# P_{-\epsilon})$ は自明な射影平面結び目である。

図 9 で示された射影図の局所変形を HC 変形という [12]：ここで対応するラベルの二重点カーブに沿った交差情報は同一であるとする。このとき次の結果が知られている。

定理 4.5 ([12]). 任意のリボン球面結び目は、有限回の HC 変形で自明な球面結び目になる。その最小回数を $u_{\text{HC}}(F)$ とかくとき、任意の自然数 $1 \leq m \leq n$ に対して、 $u(F) = m$ かつ $u_{\text{HC}}(F) = n$ をみたらリボン球面結び目 F が存在する。

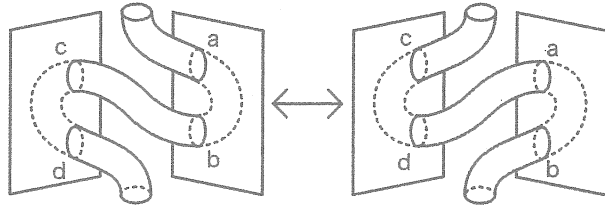


FIGURE 9

問題 4.6. (1) HC 変形は (リボン型とは限らない) 任意の曲面結び目に対して自明化操作となるか?

(2) 2成分以上のリボン球面絡み目に対して “セルフ”HC 変形 (図9の二枚の円板と一本のチューブがすべて同じ成分に属している変形) に限定したとき、その同値類を調べよ。(セルフでなくてもいいならばリボン球面絡み目に対する自明化操作であることは [12] から分かる。)

5. 曲面絡み目の最小値不変量

1次元結び目の交点数とは、そのすべての射影図にわたる、交点の個数の最小値として定義される。そのアナロジーとして、曲面絡み目に対してもいくつかの最小値不変量を導入することができる。

定義 5.1. 曲面絡み目 F のすべての射影図にわたる三重点の個数の最小値を F の三重点数といい、 $t(G)$ とかく。

$t(F)$ を評価する方法のひとつとして、ある条件の下で法オイラー数 $e(F)$ との関係がある [20]。これを用いると、任意の自然数 n に対して $t(F) = 2n$ をみたす 2成分曲面絡み目 F が存在することがわかる。しかしこの評価は向き付け可能な曲面結び目に対しては適用できない。

定義 5.2. 空集合でない集合 Q と二項演算 $*$: $Q \times Q \rightarrow Q$ の組がカンドルであるとは、

- (i) 任意の $a \in Q$ に対して $a * a = a$ をみたす、
- (ii) 任意の $a, b \in Q$ に対して $x * a = b$ をみたす $x \in Q$ が一意に存在する、
- (iii) 任意の $a, b, c \in Q$ に対して $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ が成り立つ、

の三条件をみたすときである。

特に $a, b \in \mathbb{Z}_p$ に対して $a * b \equiv 2b - a \pmod{p}$ で定まる $R_p = (\mathbb{Z}_p, *)$ は二面体カンドルとよばれる。一般にカンドル Q と加群 A に対してホモロジー群 $H_*(Q; A)$ およびコホモロジー群 $H^*(Q; A)$ が定義できる [4]。このとき 1次元絡み目 K と向き付け可能な曲面絡み目 F について、

- 各 $[\varphi] \in H^2(Q; A)$ は K の不変量 $\Phi_\varphi(K)$ と F の不変量 $\Omega_\varphi(F)$ を定義し、
- 各 $[\theta] \in H^3(Q; A)$ は K の不変量 $\Psi_\theta(K), \Psi_\theta^*(K)$ と F の不変量 $\Phi_\theta(F)$ を定義する。

特に生成元 $[\theta] \in H^3(R_p; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ と偶数 r に対しては、次が成り立つことが分かる [3] :

$$\Phi_\theta(\tau^r K) = \Psi_\theta^*(K)|_{t \rightarrow t^r}.$$

ここで係数群 \mathbb{Z}_p を $\langle t|t^p \rangle$ とみなすことにより、 $\Phi_\theta, \Psi_\theta \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t^p - 1)$ である。また r が奇数のときには $\Phi_\theta(\tau - rK)$ はフォックスの p -彩色数に一致する。さらに

$$\Psi_\theta^*(K) = \frac{1}{p} \Psi_\theta(K)$$

が成り立つ [25] ことから、 $\tau^r K$ の二面体カンドル・コサイクル不変量 $\Phi_\theta(\tau^r K)$ の計算は、1次元結び目 K のシャドーコサイクル不変量 $\Psi_\theta(K)$ に帰着することが分かる。

定理 5.3 ([26]). 生成元 $[\theta] \in H^3(R_3; \mathbb{Z}_3)$ に対して $\Phi_\theta(F) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t^3 - 1)$ が定数でないならば、 $t(F) \geq 4$ が成り立つ。特に 2-ツイストスパン三つ葉結び目の三重点数は 4 である。

定理 5.3 で用いられたアイディアは [27] において一般のカンドルに対して拡張され、これにより例えば 3-ツイストスパン三つ葉結び目の三重点数が 6 であることが示される。1次元結び目 K の交点数を $c(K)$ とすると、 $t(\tau^r K) \leq 2r(c(K) - 1)$ が成り立ち、ある条件の下では $t(\tau^r K) \leq 2r(c(K) - 2)$ が成り立つ。例えば K が三つ葉結び目ならば $t(\tau^r K) \leq 2r$ となる。

問題 5.4. 三つ葉結び目 K に対して $t(\tau^r K) = 2r$ が成り立つか? ($r = 2, 3$ のときは成立)

球面結び目に限定すると次を示すことができる。

定理 5.5 ([24]). 球面結び目 F が非リボン型、すなわち $t(F) \neq 0$ ならば $t(F) \geq 4$ が成り立つ。

定理 5.8 により、2-ツイストスパン三つ葉結び目は非リボン球面結び目の中で最も「簡単な」もののひとつであるということが出来る。

問題 5.6. $t(F) = 4$ である球面結び目を特徴付けよ。

一般に曲面絡み目の射影図は、交差情報により二重点カーブに沿って切断されているので、いくつかの交わりを持たないコンパクトな曲面 (シートとよぶ) で構成されているとみなせる。例えば 0-ツイストスパン三つ葉結び目は図 10 のような射影図を持ち、これは 2 枚の円板と 2 枚のアニュラスからなる 4 枚のシートから構成されている。

定義 5.7. 曲面絡み目 F のすべての射影図にわたるシートの枚数の最小値を F のシート数といい、 $\text{sh}(F)$ とかく。

拡大カンドルによる彩色や、定理 5.3 と類似のアイディアにより、シート数の下からの評価を与えることができ、特に次の結果を得る。

定理 5.8 (cf. [18]). 三つ葉結び目 K に対して、 $\text{sh}(\tau^0 K) = \text{sh}(\tau^2 K) = 4$ および $\text{sh}(\tau^3 K) = 5$ が成り立つ。

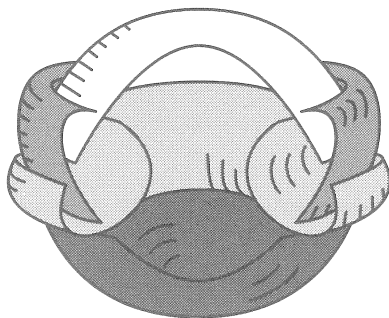


FIGURE 10

問題 5.9. 三つ葉結び目 K と $r \geq 2$ に対して $\text{sh}(\tau^r K) = r + 2$ が成り立つか? ($\tau^r K$ の射影図で $(r + 2)$ 枚のシートから構成される射影図を描くことができるので、 $\text{sh}(\tau^r K) \leq r + 2$ はいえる。)

REFERENCES

- [1] H. Aiso, *On classification of simply knotted spheres with at most five crossing circles* (in Japanese), master thesis, Tokyo University.
- [2] P. M. Akhmetiev, *Prem-mappings, triple points of orientable surface and Rohlin Signature theorem*, Math. Zametki **59** (1996) 803–810 (in Russian), English translation: Math. Notes **59** (1996) 581–585.
- [3] S. Asami and S. Satoh, *An infinite family of non-invertible surfaces in 4-space*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005) 285–296.
- [4] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [5] J. S. Carter and M. Saito, *Knotted surfaces and their diagrams*, Mathematical Surveys and Monographs, 55. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1998.
- [6] ———, *Surfaces in 3-space that do not lift to embeddings in 4-space*, Knot Theory, pp. 29–47. Banach Center Publications, Vol. 42, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa 1998.
- [7] J. S. Carter, S. Kamada, and M. Saito, *Surfaces in 4-space*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 142. Low-Dimensional Topology, III. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [8] F. Hosokawa and A. Kawauchi, *Proposal for unknotted surfaces in four-space*, Osaka J. Math. **16** (1979) 233–248.
- [9] F. Hosokawa, T. Maeda, and S. Suzuki, *Numerical invariants of surfaces in 4-space*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **7** (1979) 409–420.
- [10] K. Ichihara and S. Satoh, *Liftability for double coverings of immersions of non-orientable surfaces into 3-space*, Houston J. Math. **31** (2005) 721–741.
- [11] T. Kanenobu, *Weak unknotting number of a composite 2-knot*, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996) 161–166.
- [12] ———, *An unknotting operation on ribbon 2-knots*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000) 1011–1028.
- [13] A. Kawauchi, *On Pseudo-ribbon surface-links*, J. Knot Theory Ramifications **11** (2002) 1043–1062.

- [14] T. Kanenobu and Y. Marumoto, *Unknotting and fusion numbers of ribbon 2-knots*, Osaka J. Math. **34** (1997) 525–540.
- [15] G. Li, *On self-intersections of immersed surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998) 3721–3726.
- [16] Y. Marumoto, *Stable equivalence of ribbon presentations*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992) 241–251.
- [17] E. Ogasa, *The projections of n -knots which are not the projection of any unknotted knot*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001) 121–132.
- [18] M. Saito and S. Satoh, *The spun trefoil needs four broken sheets*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005) 543–556.
- [19] S. Satoh, *Lifting a generic surface in 3-space to an embedded surface in 4-space*, Topology Appl. **106** (2000) 103–113.
- [20] ———, *Minimal triple point numbers of some non-orientable surface-links*, Pacific J. Math. **197** (2001) 213–221.
- [21] ———, *Surface diagrams of twist-spun 2-knots*, Knots 2000 Korea, Vol. 1 (Yongpyong). J. Knot Theory Ramifications **11** (2002) 413–430.
- [22] ———, *A note on unknotting numbers of twist-spun knots*, Kobe J. Math. **21** (2004) 71–82.
- [23] ———, *Non-additivity for triple point numbers on the connected sum of surface-knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005) 613–616.
- [24] ———, *No 2-knot has triple point number two or three*, Osaka J. Math. **42** (2005) 543–556.
- [25] ———, *A note on the shadow cocycle invariant of a knot with a base point*, preprint.
- [26] S. Satoh and A. Shima, *The 2-twist-spun trefoil has the triple point number four*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004) 1007–1024.
- [27] ———, *Triple point numbers and quandle cocycle invariants of knotted surfaces in 4-space*, New Zealand J. Math. **34** (2005) 71–79.
- [28] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965) 471–495.

コバノフホモロジーとその4次元トポロジーへの 応用について¹

田中 利史
大阪市立大学数学研究所

本稿はコバノフホモロジーを用いた4次元多様体の幾何構造の研究の紹介である。コバノフホモロジーとは組み合わせ的に定義される結び目または絡み目の不変量である。そのため4次元多様体の位相的研究への応用を求めるためには結び目理論を通じて研究を行うことが必要となる。ここでは結び目理論を用いて、いかにして与えられた4次元多様体の微分構造の多様性を判定するかを解説する。とくにある種のキャッソンハンドルや4次元ユークリッド空間の中の連結成分の個数が有限である任意の非コンパクトな部分多様体が、エキゾチックな微分構造を持つことを示す。

1 序

一般に5次元以上の境界のないコンパクト位相多様体は有限個の幾何構造しか持たず、 n 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^n は n が4以外の場合、唯一一つの微分構造しか持たないことが知られている。 $n = 4$ の場合は特別である。1980年代にドナルドソンによりゲージ理論を用いる種の可微分閉4次元多様体の非存在性が示された [3]。その結果を用いるとエキゾチックな4次元ユークリッド空間（つまり、標準的な4次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^4 に同相であるが微分同相でない多様体）の存在がいえる。4次元トポロジーにおいて重要な結果のひとつがフリードマンにより示された、全てのキャッソンハンドルが標準的開2-ハンドルに（接着領域との対として）同相であるという事実である [2]。実際、これにより4次元ポアンカレ予想などの重要な予想が解決された。一方、ドナルドソンの結果より、キャッソンハンドルは常に標準的開2-ハンドルに微分同相になるとは限らない。実際、ゴンブは4次元ユークリッド空間やあるキャッソンハンドルが（互いに同値でない）非可算無限個の微分構造を持つことを示した [4][5]。しかし、任意の2つのキャッソンハンドルが異なるかどうか、あるいは、ある型のキャッソンハンドルが標準的開2-ハンドルに微分同相になるかどうかは知られていない。1990年代にビザークはある種のキャッソンハンドルがエキゾチックであることを、ゲージ理論から得られる結び目の不変量を用いて、キャッソンハンドルに埋め込まれた可微分な円板の境界にその接着円周がならないことを確かめることにより示した [9]。一方、すべての穴あき可微分4次元多様体は非可算無限個の微分構造を持つことが Furuta-Ohta [11] により示されている。（ここで、穴あき多様体とは内部より1点を取り除いてできる多様体である。）また、多様体がコンパクトな場合は $CP^2 \# m CP^2$ ($m = 5, 6, 7, 8, 9$) について少なくとも2つ以上の微分構造を持つことが（ゲージ理論をもちいて）示されている [6][24][25]。次が重要な未解決問題である。

問題 エキゾチックな S^4 または CP^2 は存在するか？

絡み目とは3次元球面 S^3 に埋め込まれた1次元閉多様体であり、連結なものを結び目と呼ぶ。また2つの結び目 K_0, K_1 がコボルダントであるとは $S^3 \times [0, 1]$ 内に円環 $S^1 \times [0, 1]$ に微分同相な部分多様体 A が存在して、 $A \cap S^3 \times \{0\} = K_0$ かつ $A \cap S^3 \times \{1\} = K_1$ となっているときをいう。最近、ラスムセンはコバノフホモロジーを利用して、整数値をとる結び目のコボルディズム不変量 s の構成に成功し、その性質の研究を行った。（つまり、コボルダントな2つの結び目は同じ s の値を与えるということである。もちろん s 自身は結び目の不変量である。）この不変量は位相的量子場理論を通じて組み合わせ的に与えられる不変

¹この研究は21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成」の支援のもとで行われている。

量である。ラスムセンの論文 [37] に記述されているように、この不変量を用いるとエキゾチックな \mathbf{R}^4 の存在の (ゲージ理論を用いない) 位相的な別証明が可能である。第 5 節で定義するが、 \mathbf{R}^4 にスライス結び目であるが位相的スライス結び目でない結び目が存在すると、そのような多様体の構成が出来る。フリードマンの結果よりアレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ が 1 である結び目は位相的スライス結び目である。一方、結び目 K がスライス結び目であれば $s(K) = 0$ である。したがって $\Delta_K(t) = 1$ かつ $|s(K)| \neq 0$ を満たす結び目が存在するか? ということが問題となるが実際、図 1 で示す結び目がそのような結び目となる。(これは $(-3, 5, 7)$ -プレッツェル結び目と呼ばれている。) 一般に、そのような性質をもつ結び目は数多く存在することが知られている。

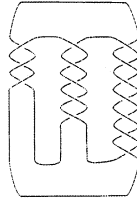


図 1: $\Delta_K(t) = 1$ を満たす結び目 K の例

2 コバノフホモロジーとラスムセン不変量

2.1. 代数 A .

A を $\mathbf{1}$ と X で生成される階数 2 の自由 \mathbf{Z} 加群とする. ($\deg(\mathbf{1}) = 1, \deg(X) = -1$ により次数 \deg を定義する.) A に可換代数の構造を次式で与える.

$$m(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1}, m(\mathbf{1} \otimes X) = m(X \otimes \mathbf{1}) = X, m(X \otimes X) = 0.$$

ι を $\mathbf{1}$ を $\mathbf{1}$ に移す写像 $\mathbf{Z} \rightarrow A$ とする.

A に余代数の構造を次式で与える.

$$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes X + X \otimes \mathbf{1}, \Delta(X) = X \otimes X$$

ϵ は次で与えられる写像 $A \rightarrow \mathbf{Z}$ とする.

$$\epsilon(\mathbf{1}) = 0, \epsilon(X) = 1.$$

次数 \deg は次の式により A のテンソル積に対する次数を誘導する.

$$\deg(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \deg(a_1) + \dots + \deg(a_n) \quad (a_1, \dots, a_n \in A).$$

2.2. コバノフの $(1+1)$ 位相的量子場理論. 図 2 で示されているように (抽象的に) 曲面 $S_2^1, S_1^2, S_0^1, S_1^0, S_2^2, S_1^1$ を定義する.

各 S_a^b は a 個の円周から b 個の円周へのコボルディズムを定義する. M を円周を対象とし, ($S_2^1, S_1^2, S_0^1, S_1^0, S_2^2, S_1^1$ で生成される) コボルディズムを射とするようなカテゴリとする. また M の対象は非負整数 $\text{Ob}(M) = \{\bar{n} | n \in \mathbf{Z}_+\}$ で数え上げるとする. $\mathbf{Z}\text{-mod}_0$ を次数つき \mathbf{Z} 加群のカテゴリーとすると、関手 $F: M \rightarrow \mathbf{Z}\text{-mod}_0$ を次のようにして与える. \mathbf{Z} -加群 $A^{\otimes n}$ に対象 \bar{n} を対応させ、曲面 $S_2^1, S_1^2, S_0^1, S_1^0, S_2^2, S_1^1$ に射 $m, \Delta, \iota, \epsilon, \text{Perm}, \text{Id}$ を次の式で対応させる.

$$F(S_2^1) = m, F(S_1^2) = \Delta, F(S_0^1) = \iota, F(S_1^0) = \epsilon, F(S_2^2) = \text{Perm}, F(S_1^1) = \text{Id}.$$

ここで $\text{Perm}: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ は置換写像であり、 $\text{Perm}(u \otimes v) = v \otimes u$ で与えられる. また、 Id は恒等写

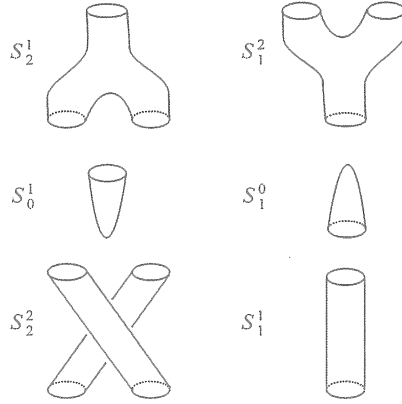


図 2: 曲面

像 $\text{Id}: A \rightarrow A$ である.

2.3. コバノフ (コ) ホモロジー.

ここでは 2.2 で定義した関手を用いてコバノフが定義したコホモロジーを与える. L を 3 次元球面 S^3 内の向き付けられた絡み目とし, D は交点に 1 から n までの番号のついた L のダイアグラムとする. また I を D の 2 重点 (交点) の集合とする. D の 2 重点が与えられたとき次の 2 通りの解消を考える.

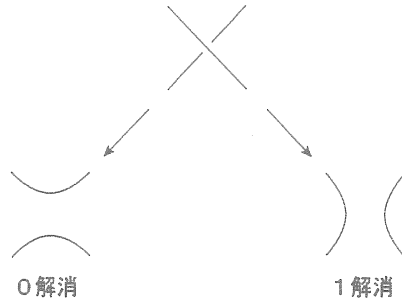


図 3: 2 重点の解消

図 3 の左の解消のやり方を 0 解消と呼び, 図 3 の右の解消のやり方を 1 解消と呼ぶことにする. また D の解消とは D の全ての 2 重点について 0 解消または 1 解消を行い得られたダイアグラムとする. (つまりいくつかの円周の非交和である.) D は 2^n 個の解消を持つことがすぐに分かる. ここで \mathcal{L} を I の任意の部分集合とする. (空集合であってもよい.) \mathcal{L} に対して解消 $D(\mathcal{L})$ を次の操作で対応させる.

\mathcal{L} に属する 2 重点に対しては 1 解消を行いそれ以外の 2 重点では 0 解消を行う.

ここでようやく (1+1) コボルディズムから \mathbb{Z} -加群への関手 F を用いる. $D(\mathcal{L})$ を円周の集まりと考え, 関手 F を適用すると次数つき \mathbb{Z} -加群 $A^{\otimes k}$ が得られる. ここで k は $D(\mathcal{L})$ の円周の個数である. (ここで $A^{\otimes k}$ の次数を L の濃度 $|\mathcal{L}|$ だけ上げておく必要があるが, ここでは気にしないことにする.) このとき

$$V_D(\mathcal{L}) = F(D(\mathcal{L}))\{-|\mathcal{L}|\}$$

とおく。(ここで $\{n\}$ は \mathbf{Z} -加群の自己同型写像であり $n \in \mathbf{Z}$ だけ次数を下げる写像であるが特に気にしないことにする。) $D(\mathcal{L})$ と $D(\mathcal{L}a)$ は D 2重点 a の近くのみで異なるダイアグラムである。ダイアグラムが含まれている平面 \mathbf{R}^2 と区間 $[0, 1]$ との直積を考える。 $D(\mathcal{L})$ と $D(\mathcal{L}a)$ をそれぞれ $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ と $\mathbf{R}^2 \times \{1\}$ の1次元部分多様体と考え、 $D(\mathcal{L})$ から $D(\mathcal{L}a)$ へのコボルディズム S を図5のように構成する。(ここで、図4の左右の図の右側にある円筒は一般には沢山存在する。)

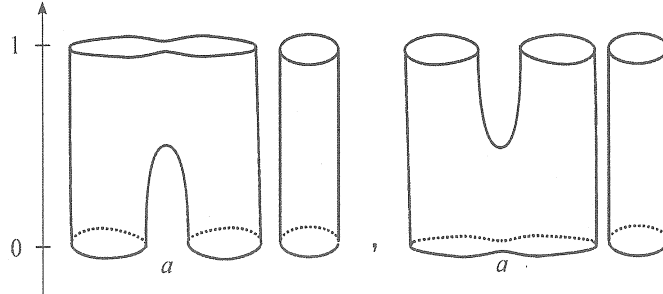


図 4: コボルディズム S

ここで

$$F(S) : F(D(\mathcal{L})) \rightarrow F(D(\mathcal{L}a)).$$

により写像

$$\xi_a^{V_D}(\mathcal{L}) : V_D(\mathcal{L}) \rightarrow V_D(\mathcal{L}a)$$

を与える。 $\mathcal{L} = \{v_{k_1}, \dots, v_{k_\ell}\}$ とおく。このとき

$$E_D(\mathcal{L}) = \mathbf{Z}v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_\ell}$$

と定義する。ここで複体を次のように定義する。

$$\overline{CKh}^i(D) = \bigoplus_{\mathcal{L} \subset \mathcal{I}, |\mathcal{L}|=i} V_D(\mathcal{L}) \otimes E_D(\mathcal{L}).$$

$x(D)$ (または $y(D)$) を D の負の交点数 (または正の交点数) とする。

$$CKh^i(D) = \overline{CKh}^i(D)[x(D)]\{2x(D) - y(D)\}$$

とおく。(ここで $[n]$ は $N[n]^i = N^{i+n}$ で定義される自己同型写像である。やはりこれについても気にしないとする。)

境界作用素 $d^i : CKh^i(D) \rightarrow CKh^{i+1}(D)$ が次で与えられる。

$$d^i(x) = \sum_{a \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{L}} (\xi_a^V \otimes \xi_a^E)(\mathcal{L})(x)$$

(ここで $\xi_a^E : E(\mathcal{L}) \rightarrow E(\mathcal{L}a)$ は $\xi_a^E(v_{k_1}, \dots, v_{k_\ell}) = v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_\ell} \wedge a$ で与えられる写像である。) $Kh^i(D)$ を $\{CKh^i(D), d^i\}$ の i 番コホモロジー群として定義する。

次の定理がコバノフの論文の主定理である。

定理 2.1 (コバノフ [10]). D を向き付けられた絡み目 L のダイアグラムとする。このとき各 $i \in \mathbf{Z}$ に対し、次数つき \mathbf{Z} -加群 $Kh^i(D)$ (の同型類) は L の不変量である。

2.4. リーの (1+1) 位相的量子場理論とラスムセン不変量.

リーによりコバノフ (コ) ホモロジーに修正が与えられ、比較的扱いやすい (コ) ホモロジーが定義された [21]. はじめに代数 A' を 2.3 の A と同様に定義するのであるが、その際に m と Δ のかわりに積および余積として次の m' と Δ' をもちいて定義する。

$$\begin{aligned} m'(\mathbf{1} \otimes \mathbf{X}) &= m'(\mathbf{X} \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{X}, \quad m'(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}) = \mathbf{1}, \\ \Delta'(\mathbf{1}) &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{X} + \mathbf{X} \otimes \mathbf{1}, \quad \Delta'(\mathbf{X}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{X} \otimes \mathbf{X} \end{aligned}$$

リーは A' をもちいて 2.3 と同様の構成を行った。その結果として得られる複体を $CKh'(D)$ と書き、その (コ) ホモロジー群を $Kh'(L)$ で表す。以下、代数 A' は \mathbf{Q} 上の加群とする。(すなわち A' は \mathbf{Q} 上のベクトル空間とみなすことができる。)

次にラスムセン不変量を定義する。

定義 2.2. K を S^3 内の結び目とし、 D を K の向き付けられたダイアグラムとする。このとき $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k \in CKh'(D)$ に対して q -次数を次式で定義する。

$$q(v) = \deg(v) + i + y(D) - 2x(D).$$

細かいことであるが $v = \sum_{j=1}^n v_j$ (v_j が単項式) の場合は $q(v) = \min\{q(v_j)\}$ と定義する。 $x \in Kh'(D)$ に対しては、 $s(x) = \min\{q(v) | x = [v]\}$ とおく。ここでラスムセン不変量は次式で定義される。

$$s(K) = \min\{s(x) + 1 | x \in Kh'(D), x \neq 0\}.$$

ラスムセン不変量の重要な性質は次のように述べられる。

定理 2.3 (ラスムセン [36]). K を S^3 内の結び目とする。このとき

- (1) $|s(K)| \leq 2g_4(K)$, (ここで $g_4(K)$ は K のスライス種数),
- (2) s は結び目コボルディズム群から \mathbf{Z} への準同型を誘導する,
- (3) K が交代結び目であれば、 $s(K) = \sigma(K)$ である, (ここで $\sigma(K)$ は K の符号数である) .

注意 2.4. 結び目のスライス種数 g_4 とはその結び目を境界としてもつ、4次元球体に可微分に埋め込まれた向き付け可能連結コンパクト2次元多様体全体を考え、それらの種数のうちの最小数として与えられる結び目のコボルディズム不変量である。

3 擬正絡み目とラスムセン不変量

この節では、ルドルフによる擬正絡み目を定義し、ラスムセン不変量の公式を紹介する。

定義 3.1. 絡み目 K が擬正絡み目 であるとは K が次の型の擬正ブレイドの開包で得られるときをいう。

$$(\omega_1 \sigma_{j_1} \omega_1^{-1})(\omega_2 \sigma_{j_2} \omega_2^{-1}) \cdots (\omega_p \sigma_{j_p} \omega_p^{-1}).$$

また絡み目が K 強擬正絡み目とは

$$\sigma_{i_1, j_1} \sigma_{i_2, j_2} \cdots \sigma_{i_p, j_p}$$

の型のブレイドの閉包で得られるときを言う.

ここで

$$\sigma_{i,j} = (\sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2}) \sigma_{j-1} (\sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2})^{-1} \text{ for } j \geq i + 2, \sigma_{i,i+1} = \sigma_i$$

とする.

シュマコビッチは擬正結び目に対して s に対する公式を次のように得た.

命題 3.2 (シュマコビッチ [33]). K を擬正ブレイド β の閉包で得られる結び目とする. ただし β の次数は k であり, b 個の $w\sigma_i w^{-1}$ の形のブレイドの積から成っているとす. このとき, 次式が成立する.

$$s(K) = 2g_4(K) = b - k + 1.$$

この結果を用いると次を示すことができる.

命題 3.3. K を非自明な強擬正結び目とする. このときすべての K のねじれなし n 回ホワイトヘッド 2 重化 $W_n(K)$ は次式を満たす.

$$s(W_n(K)) = 2g(W_n(K)) = 2g_4(W_n(K)) = 2.$$

4 キャットソンハンドルの場合

CH_+ を図 5 のカービ図式で与えられるキャットソンハンドルとする.

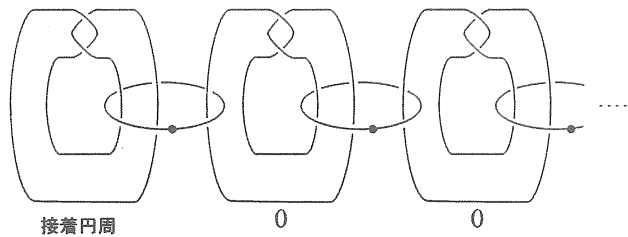


図 5: キャットソンハンドル CH_+

CH_+ のエキゾチック性はビザークにより与えられた. 実はラスムセン不変量を用いるとその位相的な別証明を与えることができる.

定理 4.1 (ビザーク [9]). CH_+ はエキゾチックな微分構造を持つ.

証明. CH_+^n を次の図 6 で与えられる (n 個の 1-ハンドルと n 個の 2-ハンドルより成っている) 4 次元多様体とする.

CH_+ がエキゾチックでないことを仮定する. このときある n に対して接着円周は CH_+^n 内に可微分に埋め込まれたディスクの境界となる. (なぜならそのディスクとしてコンパクトなものを選ぶことができるからである.) まずすぐに分かることは CH_+^n 内に n 個の 1-ハンドルと 2-ハンドルの解消対があることである. よって図 6 の図式は図 7 の図式に変形可能である. (ここで $n-1$ 個の解消対に対して解消を行った.)

(この図はホワイトヘッド絡み目の n 回正ホワイトヘッド 2 重化である.) さらに (-1) 係数 (framing) の 2-ハンドルを接着することで, 図 8 のような S^3 内の 3 葉結び目の n 回正ホワイトヘッド 2 重化が得られる.

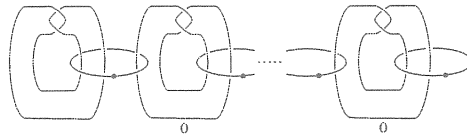
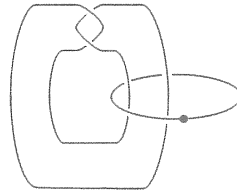


図 6: CH_4^2



n 回二重化

図 7: n 回正ホワイトヘッド 2 重化

得られた結び目を K_n とおく. 仮定より K_n は 4 次元球体 B^4 内の可微分ディスクの境界となる. したがって K_n のスライス種数は 0 である. しかし, 定理 2.3 より K_n スライス種数は 1 であることが分かる (矛盾).

5 結び目理論から得られる可微分 4 次元多様体の不変量

定義 5.1. M を向き付けられた可微分 4 次元多様体とし, L を 4 次元球体 B^4 の境界である 3 次元球面 S^3 内の絡み目とする. このとき L が M のスライス絡み目 (または位相的スライス絡み目) であるとは, 埋め込み写像 $\Phi: B^4 \rightarrow M$ が存在して, $\Phi: B^4 \rightarrow \Phi(B^4)$ は向きを保つ同相写像であり, L が $M - \text{Int}B^4$ に可微分 (または位相的平坦) に埋め込まれた円板の非交和 F の境界となっているときをいう. (F のことをスライス円板 (または位相的平坦スライス円板) の非交和と呼ぶことにする.)

定義 5.2. $\text{Slice}_n(M)$ (または $t\text{Slice}_n(M)$) を M の n 成分のスライス絡み目 (または n 成分の位相的スライス絡み目) 全体の集合と定義する.

定義 5.3. n 成分の絡み目 L が M のエキゾチック絡み目であるとは L が $L \in t\text{Slice}_n(M)$ かつ $L \notin \text{Slice}_n(M)$ を満たすときをいう.

このとき, 次の成立する.

定理 5.4. M を向き付けられた可微分 4 次元多様体とする. N を M の部分多様体とし, n は正の整数とする.

- (1) Slice_n は向き付けられた可微分 4 次元多様体の不変量である.
- (2) $\text{Slice}_n(M) \subset t\text{Slice}_n(M)$,
- (3) $\text{Slice}_n(N) \subset \text{Slice}_n(M)$,

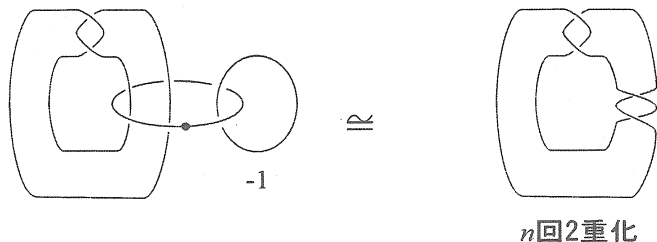


図 8: 3 葉結び目の n 回正ホワイトヘッド 2 重化

$$(4) \text{ Slice}_n(S^4) \subset \text{Slice}_n(M),$$

$$(5) \text{ Slice}_n(M - \{x_1, \dots, x_c\}) = \text{Slice}_n(M) \quad (x_1, \dots, x_c \in M).$$

定理 5.5. M をエキゾチック絡み目 $L \subset \partial B^4$ を許容する向き付けられた可微分 4 次元多様体とする. L は位相的スライス絡み目であるから $M - \text{Int}\Phi(B^4)$ 内の位相的平坦スライス円板 F の位相的平坦近傍 N が存在する. このとき $M - \text{Int}(N \cup \Phi(B^4))$ に微分構造が存在すれば, M は少なくとも 2 つの異なる微分構造を持つ.

注意 5.6. 上の定理から, 与えられた 4 次元多様体がエキゾチック絡み目を許容するかどうか重要となるが, Suzuki [1] の結果により $\text{Slice}_1(S^2 \times S^2) = \{\text{結び目全体}\}$ が分かる. すなわち, $S^2 \times S^2$ にはエキゾチック結び目は存在しないのである.

6 \mathbf{R}^4 の非コンパクト部分多様体の場合

第 1 節で述べたように $(-3, 5, 7)$ -プレッツェル結び目は \mathbf{R}^4 のエキゾチック結び目である. したがって, 定理 5.4(3) より次がいえる.

補題 6.1. N を \mathbf{R}^4 の任意の非コンパクトな部分多様体とすると, $(-3, 5, 7)$ -プレッツェル結び目は N のエキゾチック結び目である.

Slice_1 を調べることで定理 5.5 と補題 6.1 より次の定理の位相的な証明ができる.

定理 6.2. \mathbf{R}^4 の連結成分の個数が有限である任意の非コンパクトな部分多様体は少なくとも 2 つ以上の微分構造を許容する.

注意 6.3. \mathbf{R}^4 の非コンパクトな部分多様体の例としては $S^m \times \mathbf{R}^n (m+n=4)$ や S^4 内の曲面絡み目の補空間などがある. 上の補題 6.1 の証明には本質的に, コバノフ理論から定義されるラスムセン不変量 [36] を用いる必要がある. 第 1 節で述べたようにエキゾチック \mathbf{R}^4 の存在のラスムセン不変量をもちいた証明については [37] に説明がある. 上の定理はその一つの拡張である.

7 穴あき $\mathbb{C}P^2$ の場合

Yasuhara [8] の結果よりトーラス結び目 $T(-2, 15)$ は $\mathbb{C}P^2$ のスライス結び目ではない。一方, $T(-2, 15)$ は $\mathbb{C}P^2$ の位相的スライス結び目であることが知られている。したがって次のことが分かる。

命題 7.1. トーラス結び目 $T(-2, 15)$ は $\mathbb{C}P^2$ のエキゾチック結び目である。

この補題と定理 5.4(3) をもちいると次のことが分かる。

定理 7.2. 穴あき $\mathbb{C}P^2$ は少なくとも 2 つ以上の微分構造を許容する。

注意 7.3. 上の命題 7.1 の証明は (スライス結び目でないことを示す際に) ゲージ理論が用いられている。この命題の位相的な別証明を行うことが今後の課題である。一般に S^2 上のディスク束の内部の微分構造のエキゾチック性については Saeki [7] による研究がある。

8 最後に

この研究で得られたエキゾチックな 4 次元多様体の幾何構造の存在に対する結果は、すでに知られていることばかりである。コバノフ理論を用いて新たな多様体の幾何構造のエキゾチック性に関する結果が得られるかどうかは分からないが、コバノフ理論を拡張することでこの方向の研究が進んでいくことを期待している。ここでは紹介することが出来なかったが、最近のコバノフホモロジーに関する研究については [12][13][14][15][16][17][18][19][20][21][22][23] を参照して頂きたい。さらにプレプリントについては [26][27][28][29][30][31][32][33][24] [34][35][38][39][40] [41][42][43][44][45] [46][47][48][49][50] [51][52][53][54][55] などがある。

謝辞. 研究を支えて頂いている大阪市立大学大学院理学研究科数学研究所に感謝します。特に、多くの助言及び情報を頂いた河内明夫教授、適切な意見を頂いた秋吉宏尚助教授に感謝致したいと思います。また情報を頂いた九州大学の佐伯修教授及び東京学芸大学の安原晃助教授に感謝致します。

参考文献

- [1] S. Suzuki, *Local knots of 2-spheres in 4-manifolds*, Proc. Japan Acad. 45 (1969) 34-38.
- [2] M. Freedman, *The topology of 4-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. 17 (1982) 357-453.
- [3] S. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. 18 (1983), 279-315.
- [4] R. Gompf, *Infinite families of Casson handles and topological disks*, Topology 23 (1984), no. 4, 395-400.
- [5] R. Gompf, *An infinite set of exotic \mathbb{R}^4 's*, J. Diff. Geom. 21 (1985), 283-300.
- [6] D. Kotschick, *On manifolds homeomorphic to $\mathbb{C}P^2 \# 8\overline{\mathbb{C}P^2}$* , Invent. Math. 95 (1989), 591-600.
- [7] O. Saeki, *On 4-manifolds homotopy equivalent to the 2-sphere*, Adv. Stud. Pure Math. 20 (1992), 301-330.

- [8] A. Yasuhara, *On slice knots in the complex projective plane*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 5 (1992), no. 2-3, 255-276.
- [9] Ž. Bižaca, *An explicit family of exotic Casson handles*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995) 1297-1302.
- [10] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. 101 (2000) 359-426, arXiv:math.QA/9908171.
- [11] M. Furuta, H. Ohta, *Differentiable structures on punctured 4-manifolds*. Topology Appl. 51 (1993), no. 3, 291-301.
- [12] D. Bar-Natan, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*. Algebr. Geom. Topol. 2 (2002), 337-370
- [13] M. M. Asaeda, J. H. Przytycki, *Khovanov homology: torsion and thickness*. Advances in topological quantum field theory, 135-166, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 179, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [14] D. Bar-Natan, *Khovanov homology for knots and links with up to 11 crossings*. Advances in topological quantum field theory, 167-241, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 179, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [15] S. Garoufalidis, *A conjecture on Khovanov's invariants*. Fund. Math. 184 (2004), 99-101.
- [16] M. Jacobsson, *An invariant of link cobordisms from Khovanov homology*. Algebr. Geom. Topol. 4 (2004), 1211-1251
- [17] M. Jacobsson, *Chewing the Khovanov homology of tangles*. Fund. Math. 184 (2004), 103-112.
- [18] V. O. Manturov, *The Khovanov polynomial for virtual knots*. (Russian) Dokl. Akad. Nauk 398 (2004), no. 1, 15-18.
- [19] O. Viro, *Khovanov homology, its definitions and ramifications*. Fund. Math. 184 (2004), 317-342.
- [20] D. Bar-Natan, *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*. Geom. Topol. 9 (2005), 1443-1499.
- [21] E. S. Lee, *An endomorphism of the Khovanov invariant*. Adv. Math. 197 (2005), no. 2, 554-586.
- [22] Manturov, V. O. *The Khovanov complex for virtual knots*. (Russian) Fundam. Prikl. Mat. 11 (2005), no. 4, 127-152.
- [23] L. Ng, *A Legendrian Thurston-Bennequin bound from Khovanov homology*. Algebr. Geom. Topol. 5 (2005), 1637-1653
- [24] J. Park, A. Stipsicz, Z. Szabó, *Exotic smooth structures on $\mathbb{C}P^2 \# 5\overline{\mathbb{C}P^2}$* , Math. Res. Lett. 12 (2005), no. 5-6, 701-712.
- [25] A. Stipsicz, Z. Szabó, *A exotic smooth structure on $\mathbb{C}P^2 \# 6\overline{\mathbb{C}P^2}$* , Geom. Top. Vol. 9 (2005), 813-832.
- [26] S. M. Wehrli, *Khovanov Homology and Conway Mutation*, math.GT/0301312
- [27] M. Jacobsson, *Khovanov's conjecture over $\mathbb{Z}[c]$* , math.GT/0308151
- [28] B. Gornik, *Note on Khovanov link cohomology*, math.QA/0402266
- [29] A. Shumakovitch, *Torsion of the Khovanov homology*, math.GT/0405474

- [30] J. S. Carter, M. Saito, Shin Satoh, Ribbon-moves for 2-knots with 1-handles attached and Khovanov-Jacobsson numbers, math.GT/0407493
- [31] S. M. Wehrli, A spanning tree model for Khovanov homology, math.GT/0409328
- [32] P. Turner, Calculating Bar-Natan's characteristic two Khovanov homology, math.GT/0411225
- [33] A. Schumakovitch, *Rasmussen invariant, slice Bennequin inequality, and sliceness of knots*, arXiv:math.GT/0411643.
- [34] S. Gukov, Khovanov-Rozansky Homology and Topological Strings. hep-th/0412243
- [35] O. Plamenevskaya, Transverse knots and Khovanov homology, math.GT/0412184
- [36] J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, arXiv:math.GT/0402131.
- [37] J. Rasmussen, *Knot polynomials and knot homologies*, arXiv:math.GT/0504045.
- [38] K. Tanaka, Khovanov-Jacobsson numbers and invariants of surface-knots derived from Bar-Natan's theory, math.GT/0502371
- [39] M. Mackaay, P. Turner, Bar-Natan's Khovanov homology for coloured links, math.GT/0502445
- [40] J. Rasmussen, Khovanov's invariant for closed surfaces, math.GT/0502527
- [41] Hao Wu, Braids, Transversal links and the Khovanov-Rozansky Theory, math.GT/0508064
- [42] J. Rasmussen, Khovanov-Rozansky homology of two-bridge knots and links, math.GT/0508510
- [43] J. H. Przytycki, When the theories meet: Khovanov homology as Hochschild homology of links, math.GT/0509334
- [44] M. Stosic, Properties of Khovanov homology for positive braid knots, math.QA/0511529
- [45] J. H. Przytycki, Khovanov Homology: categorification of the Kauffman bracket relation, math.GT/0512630
- [46] G. Naot, On the Algebraic Structure of Bar-Natan's Universal Geometric Complex and the Geometric Structure of Khovanov Link Homology Theories. math.GT/0603347
- [47] M. Stosic, Khovanov homology of links and graphs, math.QA/0605579
- [48] H. Wu, Legendrian Links and the Spanning Tree Model for Khovanov Homology, math.GT/0605630
- [49] D. Bar-Natan, Fast Khovanov Homology Computations, math.GT/0606318
- [50] A. D. Lauda, H. Pfeiffer, Open-closed TQFTs extend Khovanov homology from links to tangles, math.GT/0606331
- [51] P. Turner, A spectral sequence for Khovanov homology with an application to $(3,q)$ -torus links, math.GT/0606369
- [52] P. Turner, Five Lectures on Khovanov Homology, math.GT/0606464
- [53] D. Bar-Natan, S. Morrison, The Karoubi Envelope and Lee's Degeneration of Khovanov Homology, math.GT/0606542
- [54] L. Watson, Knots with identical Khovanov homology, math.GT/0606630
- [55] N. Chbili, Equivariant Khovanov homology, In preparation.

On the vanishing of the Rohlin invariant

森山 哲裕

1 Introduction

Rohlin 不変量は 3次元スピン多様体の古典的な位相不変量のひとつである。この講演では、以下のような Rohlin 不変量の消滅の性質の、新しい幾何的な別証明 (の概略) を与える ([12])。

Theorem A (Casson [1]). もし向き付けられた 3次元整係数ホモロジー球面 M が向きを保たない自己同相写像を許すならば、 M の Rohlin 不変量は 0.

本稿では、特に断らない限りすべての多様体は滑らかでコンパクト、そして向き付けられていると仮定する。

1.1 Rohin 不変量

M を 3次元整係数ホモロジー球面 ($\mathbb{Z}HS^3$) とする。 M の Rohlin 不変量 $\mu(M) \in \mathbb{Z}/2$ は次のように定義される。まず、4次元スピン多様体 X で境界が $\partial X \cong M$ であるものが存在する。そして $\mu(M)$ は

$$\mu(M) = \frac{\text{Sign } X}{8} \pmod{2} \quad (1)$$

と定義される。ここで、 $\text{Sign } X$ は多様体 X の符号数である。 $\mu(M)$ が well-defined であることは、Novikov additivity (符号数の加法性) と Rohlin の定理 (スピン閉 4次元多様体の符号数は 16 の倍数) による。

1.2 Theorem A について

Theorem A の完全な証明は、Casson により初めて与えられた。Casson は、 $\mathbb{Z}HS^3$ のある整数値位相不変量 $\lambda(M)$ を定義し、今日では Casson 不変量と呼ばれている。 $\lambda(M)$ は以下のような基本的性質を持つ

$$\lambda(-M) = -\lambda(M) \quad (2)$$

$$\lambda(M) \equiv \mu(M) \pmod{2} \quad (3)$$

(see [1])。これらの性質から、Theorem A が成り立つことは明らかである。特に、基本群 $\pi_1(M)$ の $SU(2)$ 既約表現の共役類の数 ($\stackrel{\text{def}}{=} \lambda(M)$) の性質を經由して Theorem A は証明されている。

この結果が知られる以前にも、いくつかの部分的な結果は知られていた (Galewski-Stern [3], Kawauchi [4] [5], Pao-Hsiang [10], Siebenmann [11],...).

1.3 別証明の方針

Kuperberg-Thurston [7] は、Kontsevich [6] による 3 次元多様体の不変量の構成をもとに、3 次元有理ホモロジー球面 ($\mathbb{Q}HS^3$) M の点の配置空間上の積分を用いることによりある普遍的有限型不変量 (Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量) $Z_n(M)$ ($n \geq 1$) を構成した。Lescop [8] は、その第一項目 $Z_1(M)$ (2 点配置空間上の積分として与えられる) と Casson-Walker 不変量 ([13]) との関係を示した。この講演では、この $Z_1(M)$ の構成からヒントを得て、2 点配置空間上のスピン構造に注目することにより、式 (1) の X をある方法で構成 (一意的ではない) して Theorem A を証明する。この証明の過程において、Casson 不変量の存在や性質を仮定する必要はなく、符号数 (mod 16) の消滅を直接確認できる。したがってわれわれの別証明は、Casson による証明よりも (Rohlin 不変量の定義どおりに計算するという意味で) 直接的であると言える。

1.4 関連する話題

Theorem A 以外にも Rohlin 不変量は「 M が単連結ならば $\mu(M) \equiv 0$ 」という消滅の性質を持つ ([1])。

また、以下のような、多様体論においては重要な未解決問題がある。まず、 Θ_3 を 3 次元ホモロジーコボルディズム群とする。Rohlin 不変量は準同型 $\mu: \Theta_3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ を与える。

Open Problem. $\mu: \Theta_3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ は右逆写像を持つか？

つまり、「 $2[M] = 0 \in \Theta_3$ かつ $\mu(M) \equiv 1$ を満たす $\mathbb{Z}HS^3$ M は存在するだろうか？」というのがここでの問いである。これが重要である理由は次の定理が知られているからである。

Theorem 1.1 ([9], [2]). 以下の二つの命題は互いに同値である。

- 次元が5以上の任意の位相的閉多様体は *simplicially triangulable* である。
- $\mu: \Theta_3 \rightarrow \mathbb{Z}/2$ は右逆写像を持つ。

2 e -多様体

(Z, X) を多様体対で、 $(X, \partial X) \subset (Z, \partial Z)$, $X \pitchfork \partial Z$, $\text{codim}=3$ を満たすものとする。 $N(Q)$ を Q の tubular neighborhood とし、 $F_Q \subset T(\partial N(Q))$ を法球面束 $\partial N(Q) \rightarrow Q$ のファイバーに沿った接束とする (F_Q の rank は 2 になる)。このとき、コホモロジー類 $e \in H^2(Z \setminus X; \mathbb{Q})$ が

$$e|_{\partial N(Q)} = e(F_Q) \in H^2(Z \setminus X; \mathbb{Q})$$

を満たすとき、 e を e -類 (e ="Euler") と呼ぶことにする。そして、三つ組 $\beta = (Z, X, e)$ を e -多様体と呼び、 $\dim \beta = \dim Z$ と定義する。 Z と X がスピン構造を持つとき β をスピン e -多様体とよぶ。同様にして、閉 e -多様体、null-cobordant など多様体の通常用語が自然に定義できる。全ての多様体対が e -類を持つわけではなく、また存在しても一意的とは限らない。 (Z, X) が e -類を持つためのひとつの必要条件は X が Z の中で \mathbb{Q} 上 null-homologous となることである。

Lemma 2.1. (Z, X) を余次元3の閉多様体対とする。もし (Z, X) が e -類の存在を許すならば、

$$\text{Sign } X = 0$$

この lemma は Hirzebruch の符号数定理と Stokes の定理により容易に証明される。おおざっぱに言うならば、 e -類が部分多様体のザイフェルト曲面のような役割をはたしている。

2.1 Theorem A の証明

M を $\mathbb{Z}HS^3$ で $M \cong -M$ を満たすものと仮定する。ある主張をはじめに仮定しておくならば、 e -多様体を用いて、以下のように Theorem A を簡単に証明することができる。まず、次の proposition が正しいと仮定する。

Proposition 2.2. 以下を満たす6次元スピンの閉 e -多様体 $\alpha_M = (Y, Q, e_M)$ が存在する。

$$(1) Q \cong M \amalg M \amalg (-M)$$

$$(2) \alpha_M \cong -\alpha_M (= (-Y, -Q, e_M))$$

(3) α_M は *spin null-cobordant*。つまり、あるスピンの e -多様体 $\beta = (Z, X, e)$ が存在して

$$\partial\beta \cong \alpha_M \tag{4}$$

を満たす。

Remark 2.3. 上の proposition は、 M がスピンの多様体として *bound* するという事実をスピンの e -多様体 α_M が *bound* するという主張に持ち上げ、同型 $M \cong -M$ を $\alpha_M \cong -\alpha_M$ に持ち上げ、 M を Q に置き換えたものである。

Remark 2.4. 任意の (向き付けられた) 3次元スピンの閉多様体は *spin null-cobordant* であるが、一般に6次元スピンの閉 e -多様体は *spin null-cobordant* とは限らない。実際、滑らかな埋め込み $f: S^3 \rightarrow S^6$ を用いて *spin null-cobordant* ではない e -多様体の例 $\alpha = (S^6, f(S^3), e)$ を実現することが可能である (この例の場合 e -類 e は一意的に存在する)。

Proposition 2.2 (3) の X を用いて $\mu(M) \equiv 0$ を示そう。同型 $\alpha_M \cong -\alpha_M$ によって β のふたつのコピーを境界に沿って互いに張り合わせて閉 e -多様体

$$(\hat{Z}, \hat{X}, \hat{e}) = (Z \cup_Y Z, X \cup_Q X, \hat{e})$$

がえられる。Lemma 2.1 により

$$\text{Sign } X = \frac{\text{Sign } \hat{X}}{2} = 0$$

であり、さらに Rohlin 不変量の定義により

$$\mu(M) \equiv \frac{\text{Sign } X}{8} = 0$$

となる。これで Theorem A が証明された。

これより先は、Proposition 2.2 の解説をする。

3 α_M の構成

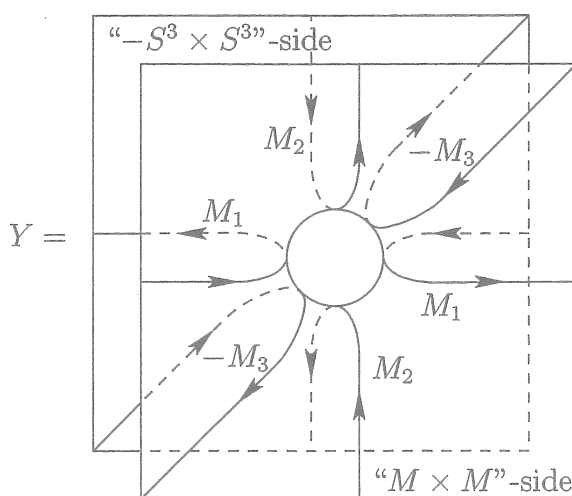


図 1: $Y, Q = M_1 \cup M_2 \cup (-M_3)$ の構成

M から e -多様体 α_M を以下のようにして構成する。まず、 Y を次のように構成する。

$$Y = (M \times M) \# (-S^3 \times S^3) \quad (\text{連結和})$$

ここで、連結和をとるときに、 $M \times M$ および $S^3 \times S^3$ の第 1、第 2 成分をそれぞれ保つようにとっておく。すると、 Y は 3 つの互いに交わらない 3 次元部分多様体

$$M_1 = (M \times p) \# (-S^3 \times q)$$

$$M_2 = (p \times M) \# (-q \times S^3)$$

$$M_3 = (\text{diagonal}) \# (-\text{diagonal})$$

を持つ ($p \in M, q \in S^3$)。そして、

$$Q = M_1 \cup M_2 \cup (-M_3)$$

と定義する (図1)。(Y, Q) がただひとつの e -類を持つことは、コホモロジーの計算により容易に確かめられ、これを e_M と記す (M は ZHS^3 と仮定しているため、必要ならば e_M を整係数コホモロジー類とみなすことも可能)。そして、 $\alpha_M = (Y, Q, e_M)$ と定義する。

Remark 3.1. $Y \setminus Q$ を $M \times M$ と $S^3 \times S^3$ の間で切ると2つの成分に分かれ、それぞれの成分は $M \setminus \{p\}$ 、 $S^3 \setminus \{q\}$ の2点配置空間になっている。

このように構成された α_M がスピンであること、そして Proposition 2.2 (1) を満たすことはその構成から明らかである。そして、Proposition 2.2 (2) は、2成分を入れ替える $M \times M$ と $S^3 \times S^3$ の involution $((x, y) \mapsto (y, x))$ から導かれる Y の involution

$$\iota: (Y, Q) \rightarrow (Y, Q) \tag{5}$$

の存在と同型 $M \cong -M$ から自然に示される。Proposition 2.2 (3) については次章で解説される。

4 α_M のスピンコボルディズム類

Proposition 2.2 (3) を、構成的に、実際に $\beta = (Z, X, e)$ を作り上げてゆくことにより確かめる。

式(5)の involution ι は部分多様体 $M_1 \cup M_2$ と M_3 をそれぞれ保つ。特に、これらの法ベクトル束 ν_{12}, ν_3 は同変自明化

$$\nu_{12} \cong (M_1 \cup M_2) \times \mathbb{R}^3, \quad \nu_3 \cong M_3 \times \mathbb{R}^3$$

を持ち、作用は

$$\iota(x, v) = (\iota(x), -v), \quad x \in (M_1 \cup M_2) \text{ or } M_3, v \in \mathbb{R}^3$$

で表される。 $N(Q)$ を Q の同変管状近傍とすると、 $\partial Y \setminus \text{Int } N(Q) \cong Q \times S^2$ である。

X_0 を $\partial X_0 = M$ を満たす4次元単連結スピン多様体とする。そして、 X_1, X_2, X_3 をそのコピーとし、 ∂X_i と M_i を同一視する。 $X' = X_1 \cup X_2 \cup$

$(-X_3)$ とおき、 $X' \times S^2$ と $Y \setminus \text{Int } N(Q)$ を境界に沿って張り合わせる
ことにより閉多様体

$$Y' = (Y \setminus -\text{Int } N(Q)) \cup_{Q \times S^2} (X \times S^2)$$

が得られる。そして、 e_M と、 S^2 のオイラー類 $e(TS^2) \in H^2(S^2; \mathbb{Z})$ の
 $X \times S^2$ への引き戻しを張り合わせるにより、2次コホモロジー類
 $e' \in H^2(Y'; \mathbb{Z})$ が得られる。involution ι の $Y \setminus \text{Int } N(Q)$ への制限は Y' 上
の free involution

$$\iota: Y' \rightarrow Y'$$

に拡張し、 $\iota^* e' = -e'$ を満たす。

ここで、 e' を (Y', \emptyset) の e -類と見なすこともでき、スピン閉 e -多様体

$$\alpha'_M = (Y', \emptyset, e')$$

を得る。 α_M が α'_M に spin cobordant であることは比較的容易に確かめ
られる。だから、Proposition 2.2 (3) を示すためには、 α'_M が spin null-
cobordant であることを示せば十分である。

一般に、6次元多様体と2次コホモロジー類の対 (W, a) は (oriented) コ
ボルディズム群 $\Omega_6(\mathbb{C}P^\infty)$ の元 $[W, a]$ を定める。同型

$$\Omega_6(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

が対応 $[W, a] \mapsto (\int_W a^3, \text{Sign } X_a)$ により与えられる。ここで、 $X_a \subset W$
は、ポアンカレ双対により a に対応する4次元部分多様体である。だから、
対応する元 $[Y', e'] \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を考えることができる。

Proposition 4.1. $[Y', e'] \equiv (0, 0) \pmod{(8, 32)}$

これは、 $c_1(L) = e'$ となるような Y' 上の同変複素直線束 L (ただし、
ここでの ι の L への作用は anti complex linear である) の存在を用いて
計算される。

Lemma 4.2. 部分群 $(8\mathbb{Z}) \oplus (32\mathbb{Z}) \subset \Omega_6(\mathbb{C}P^\infty)$ の任意の元 $[W, a]$ ($a \in$
 $H^2(W; \mathbb{Z})$, W はスピン) に対して、 e -多様体 (W, \emptyset, a) は spin null-cobordant.

この Lemma は、 $(8\mathbb{Z}) \oplus (32\mathbb{Z})$ の基底を具体的に構成し、対応する e -多
様体が spin null-cobordant であることを確かめることにより得られる。実
際、 $[\mathbb{C}P^3, e_1], [K3 \times S^2, e_2] \in \Omega_6(\mathbb{C}P^\infty)$ が $(8\mathbb{Z}) \oplus (32\mathbb{Z})$ の基底をなし、対応

するスピン e -多様体 $(\mathbb{C}P^3, \emptyset, e_1), (K3 \times S^2, \emptyset, e_2)$ は spin null-cobordant である。ここで、 e_1 は $\int_{\mathbb{C}P^1} e_1 = 2$ をみたすコホモロジー類、 e_2 は射影 $K3 \times S^2 \rightarrow S^2$ によるオイラー類 $e(TS^2)$ の引き戻しである。

さて、Proposition 4.1 と Lemma 4.2 により、次を得る。

Corollary 4.3. α'_M は spin null-cobordant.

α_M は α'_M に spin cobordant だったのだから、 α_M は spin null-cobordant である。つまり、ある 7次元スピン e -多様体 $\beta = (Z, X, e)$ が存在し、Proposition 2.2 (3) を満たす。

参考文献

- [1] S. Akbulut and J. McCarthy, *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres, an exposition*. Mathematical Notes **36**, Princeton University Press, Princeton, 1990
- [2] D. Galewski, R. Stern, *Classification of simplicial triangulations of topological manifolds*, Ann. of Math. (2), 111 (1980), 1–34.
- [3] D. Galewski, R. Stern, *Orientation reversing involutions on homology 3-spheres*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 85 (1979), 449–451.
- [4] A. Kawauchi, *On three manifolds admitting orientation reversing involutions*, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 579–589.
- [5] A. Kawauchi, *vanishing of the Rohlin invariant of some $\mathbb{Z}/2$ -homology 3-spheres*, Proc. Amer. Math. Soc., 79 (1980), 303–308.
- [6] M. Kontsevich, *Feynmann diagrams and low-dimensional topology*, First European Congress of Mathematics II 97–121, Birkhäuser Basel, 1994
- [7] G. Kuperberg and D. P. Thurston, *Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology*, math.GT/9912167

- [8] C. Lescop, *Splitting formulae for the Kontsevich-Kuperberg-Thurston invariant of rational homology 3-spheres* math.GT/0411431
Prépublication de l'Institut Fourier 656 (2004), <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html>
- [9] T Matumoto *Triangulation of manifolds* Algebraic and geometric topology, Part 2, 3-6, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978.
- [10] P. Pao, W. C. Hsiang *The homology 3-spheres with involutions*, Roc. Amer. Math. Soc. 75 (1979), 308–310.
- [11] L. Siebenmann, *On vanishing of the Rohlin invariant and non-finitely amphicheiral homology 3-spheres*, Topology Symposium, Siegen 1979, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. Vol.788 (1980) 172–222.
- [12] T. Moriyama *Casson-Walker invariant and the signature of 4-manifolds: I*, preprint.
- [13] K. Walker, *An extension of Casson's Invariant*, Annals of Math. Studies 126, Princeton University Press, 1992

Graduate School of Mathematical Science,
The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba,
Meguro-ku, Tokyo 153-8914 Japan
Email: tetsuhir@ms.u-tokyo.ac.jp

ボルスク・ウラムの定理と同変写像の写像度

原 靖浩 (大阪大学大学院理学研究科)

1 序

Borsuk-Ulam(ボルスク-ウラム)の定理は(コ)ホモロジーの応用として教科書などでも取りあげられることも多く, 数学に携わる人の多くが知っている(見たことがある)トポロジーの定理の一つであろう. この定理は様々な形で述べられるが, もともと Ulam が予想し, Borsuk が証明した定理は次のものである.

定理 A(Borsuk-Ulam の定理). S^n から \mathbf{R}^n への連続写像 f に対し, $f(-a) = f(a)$ となる $a \in S^n$ が存在する.

ここで S^n は \mathbf{R}^{n+1} の単位球面である. 次の2つの定理は, もとの Borsuk-Ulam の定理から容易に導かれる. また, 2つのどちらの定理が先に直接, 証明されれば, それから上の Borsuk-Ulam の定理は比較的容易に導かれる.

定理 B. 連続写像 $f: S^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ が $f(-x) = -f(x)$ を満たすとき, $f^{-1}(0) \neq \emptyset$.

定理 C. 連続写像 $f: S^m \rightarrow S^n$ が $f(-x) = -f(x)$ を満たすとき, $m \leq n$.

定理 B と定理 C がほぼ同じようなことを主張していることは容易にわかるであろう. また, 定理 A から定理 B が導かれることも易しい. 定理 B から定理 A を導くには S^n から \mathbf{R}^n への連続写像 f に対し, $g: S^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ を $g(x) = f(x) - f(-x)$ とおくと g が $g(-x) = -g(x)$ を満たすことを用いればよい. このように, 定理 B, 定理 C は定理 A とほぼ同じ内容と考えられるので, これらも Borsuk-Ulam の定理と呼ばれることがある.

S^n に群 $Z_2 (= \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ の作用を $g \cdot x = -x$ (g は Z_2 の生成元) により与える. 以下では, この Z_2 作用を対心作用と呼ぶ. S^n 上に対心作用を考えると, 定理 A は \mathbf{R}^n に自明な Z_2 作用を考えたときの同変点の存在に関する定理と見ることができ, 定理 B は \mathbf{R}^n に原点对称な点を入れ替えるような Z_2 作用を考えたときの, Z_2 -不変集合(この場合は不動点集合)の同変写像による原像の位相に関するものである. また, 定理 C は同変写像の存在に関する定理と考えることができる. それぞれの視点で, Borsuk-Ulam の定理は一般化されていて, しかも, 「作用する群」を一般化するもの, さらに「作用の仕方」を一般化するものや, 「作用する空間」を一般化するもの, というように様々な方向への拡張が

ある。例えば、同変点の存在 (定理 A の形の一般化) については、中岡 [14, 15] などでも考察されている。Fadell-Husseini [3, 4], Jawalowski[9], 小宮 [11] などでは、同変写像による不動点集合の原像の位相に関して主に考え、また、同変写像の存在についても書いている。Wasserman[21] は群の作用をより一般化し、さらに、同変写像の条件を等変写像 (isovariant map) に強めてその存在のための必要条件について考察している。さらに、長崎 [16, 17], 長崎-牛瀧 [18] では [21] で求めた必要条件がどのような群の作用の場合に十分条件になっているかを調べている。その他、Borsuk-Ulam の定理に関する文献は Steinlein[19, 20] に詳しい。また、本講演では、応用についてはあまり述べないが、[19, 20] には Borsuk-Ulam の定理の微分方程式などへの応用についての記述もあり、文献も挙げられているので参考にしたい。

さて、もともとの Borsuk-Ulam の定理を証明するには、定理 A, B, C のいずれかを証明すればよいわけであるが、次の「写像度」に関する定理を用いて証明する方法が一つの方法である。

定理 D. 連続写像 $f : S^n \rightarrow S^n$ が $f(-x) = -f(x)$ を満たすとき、 f の写像度は奇数である。

本講演では、この定理の一般化について考えることが目的の一つであるが、より広い視野で Borsuk-Ulam 型の定理を眺めるために、次節では Borsuk-Ulam の定理に関係する定理やいくつかの証明の方法について見ることにする。§3 で Fadell と Husseini により定義された同変 index を用いた定理 D の一般化、およびその応用を与える。§4 では §3 で考えたことといくつかの例をもとに、今後の問題について述べることにする。

2 Borsuk-Ulam の定理のいくつかの証明について

はじめに、Borsuk-Ulam の定理は Borsuk が証明したことを書いたが、その論文 [1] が出たのが 1933 年である。定理 A の形で Borsuk が証明したのがこの理論の実際の出発点であることは確かであるが、実はその少し前に Borsuk-Ulam の定理と深く関係のある次の定理が Lusternik と Schnirelmann により証明されている ([12, 13, 19, 20])。

定理 E. S^n の閉集合 A_1, \dots, A_{n+1} が $S^n = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$ を満たすならば、少なくとも一つの A_i について $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$ である。

定理 F. S^n の閉集合 A_1, \dots, A_{n+1} がすべての $i (1 \leq i \leq n)$ に対して $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ をみたし、 $\bigcup_{i=1}^n (A_i \cup (-A_i)) = S^n$ を満たすならば、 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ である。

位相空間 X に対して、 X の中で可縮な $(n+1)$ -個の X の閉集合 A_0, A_1, \dots, A_n で $X = A_0 \cup \dots \cup A_n$ を満たすものを考えるとき、このような A_0, \dots, A_n が存在するような

n の最小値が X の Lusternik-Schnirelmann カテゴリーと呼ばれるもので (以下では L-S カテゴリーと書く), ここでは, これを $\text{cat}(X)$ と書くことにする. L-S カテゴリーについては, 岩瀬 [8] に最近の結果を含めてまとめられている. 上の定理 E, F が次のことと関係があることはすぐにわかると思う.

定理 G. $\text{cat}RP^n = n$.

定理 G は $H^1(RP^n; \mathbf{Z}_2)$ の生成元 (0 でない元) α が $\alpha^n \neq 0 \in H^*(RP^n; \mathbf{Z}_2)$ を満たすことを用いて直接証明することもできる.

さて, これらの定理が Borsuk-Ulam の定理と関係することを見ておこう. まず, 定理 F が Borsuk-Ulam の定理から導かれることは以下のように示される.

S^n の閉集合 A_1, \dots, A_{n+1} がすべての $i (1 \leq i \leq n)$ で $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ をみたし, $\bigcup_{i=1}^n (A_i \cup (-A_i)) = S^n$ を満たすとき, 連続関数 $f_i: S^n \rightarrow \mathbf{R}$ を A_i で 0, A_i の補集合で正となるように取れる ($1 \leq i \leq n+1$). これらを用いて, $s: S^n \rightarrow \mathbf{R}$ を $s(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)$ により定義する. $A_1 \cap \dots \cap A_{n+1} = \emptyset$ と仮定すると, S^n の全ての点 x で $s(x) \neq 0$ である. $F: S^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ を $F(x) = (f_1(x)/s(x), \dots, f_n(x)/s(x))$ により定義すると, Borsuk-Ulam の定理より, $F(-a) = F(a)$ をみたすような $a \in S^n$ が存在する. $a \in A_i \cup (-A_i)$ ($1 \leq i \leq n+1$) ならば $f_i(-a)$ と $f_i(a)$ のうちいずれかが 0 でもう一方が 0 でないので, $f_i(-a)/s(-a) \neq f_i(a)/s(a)$ となり, $F(-a) = F(a)$ に矛盾するので, $a \notin A_i \cup (-A_i)$ ($i \leq i \leq n$). また, このとき, $f_{n+1}(a)/s(a) = 1 - (f_1(a)/s(a) + \dots + f_n(a)/s(a)) = 1 - (f_1(-a)/s(-a) + \dots + f_n(-a)/s(-a)) = f_{n+1}(-a)/s(-a)$ である. したがって, $a \notin A_{n+1} \cup (-A_{n+1})$ も成り立つ. $S^n = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cup (-A_i))$ なので, これは矛盾. したがって, $A_1 \cap \dots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

次に定理 F から定理 E を導こう.

S^n の閉集合 A_1, \dots, A_{n+1} が $S^n = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$ を満たすとき, すべての A_i について $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ と仮定すると, 定理 F より $A_1 \cap \dots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. $x \in A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}$ とすると $S^n = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$ より $-x \in A_i$ となる i が存在するが, この A_i に対して, $x, -x \in A_i$ より $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$ となり矛盾. したがって, 定理 E が成り立つ.

次に定理 E が成り立つことが先に証明されたとき, それから Borsuk-Ulam の定理を導くことができることを見よう. 定理 E から定理 B が証明できることを言えばよい.

S^n から \mathbf{R}^n への同変写像 f について, $f^{-1}(0) = \emptyset$ と仮定する.

このとき, \mathbf{R}^n の閉集合 B_1, \dots, B_{n+1} が $f(S^n) \subset B_1 \cup \dots \cup B_{n+1}$, かつ, 各 $B_i (1 \leq i \leq n)$ が $B_i \cap (-B_i) = \emptyset$ を満たすようにとることができる.

$A_i = f^{-1}(B_i)$ とおくと, A_1, \dots, A_{n+1} は $S^n = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$ をみたし, また, f が同変写像であることと $B_i \cap (-B_i) = \emptyset$ より $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ をみたす. これは定理 E に矛盾する. したがって, 定理 E から Borsuk-Ulam の定理が導かれることがわかる.

定理 G についても同様に Borsuk-Ulam の定理から導くことができ、また逆に定理 G を用いて Borsuk-Ulam の定理を証明することができる。このように定理 A, B, C, E, F, G はこのうちのどれか一つが証明できれば、他の定理はそれから導くことができる。Borsuk-Ulam の定理と関係の深い定理は他にもある。それについても [19, 20] を見ていただきたい。ここでは、Borsuk-Ulam の定理の「位相幾何学的」な証明に関係するものに目を向けていくことにする。

序にも書いたように、定理 D を証明することにより Borsuk-Ulam の定理 (定理 A) を証明する方法が代表的な一つの証明法である。

定理 D の証明としては、2重被覆 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ に対して、トランスファーと呼ばれる写像 $\pi_1: H^*(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ をまず定義する (トランスファーそのものをもっと一般的な状況でも定義できる)。このとき、 $\omega \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ が定まって、Thom-Gysin 完全系列と呼ばれる次の完全系列が得られる。

$$\dots \xrightarrow{\cup\omega} H^q(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^q(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_1} H^q(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega} H^{q+1}(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} \dots$$

この完全系列の自然性を用いることにより定理 D が証明できる。(この完全系列を用いると、定理 C は直接証明することもできる。)

他に定理 D を証明する方法としては、障害理論を用いる方法もある ([2])。

Fadell と Husseini は [4] において、ideal-valued cohomological index theory を定義し、それにより Borsuk-Ulam の定理の一般化を考えた (Jawalowski も [9] において独立に同様のものを定義し、同様の結果を得ている)。彼らの方法を以下に紹介しよう。

G をコンパクト Lie 群、 $EG \rightarrow BG$ を G の普遍 G -空間とすると、Fadell と Husseini の index は、 G -空間 X に対して、 $c_X: X \rightarrow *$ (1点からなる空間 $*$ への定値写像) から誘導される同変コホモロジーの準同型の kernel

$$\text{Ind}^G(X; K) = \text{Ker}(c_X^*: H_G^*(*; K) \rightarrow H_G^*(X; K)) \quad (K \text{ は体})$$

により定義されるものである。 $H_G^*(*; K) \cong H^*(BG; K)$ であり、 $\text{Ind}^G(X; K)$ は $H^*(BG; K)$ の ideal になる。また、 X が自由な G -空間のときには、 $\tilde{\alpha}: X \rightarrow EG$ を G -写像とすると、 $\tilde{\alpha}$ より定まる写像 $\alpha: X/G \rightarrow BG$ より誘導されるコホモロジーの準同型 $\alpha^*: H^*(BG; K) \rightarrow H^*(X/G; K)$ の kernel が $\text{Ind}^G(X; K)$ と一致する。index に関して次の命題が成り立つ。

命題 2.1 ([3, 4, 9]). X, Y を G -空間とすると、 G -写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するならば、

$$\text{Ind}^G(X; K) \supset \text{Ind}^G(Y; K).$$

この命題より、球面の ideal-valued index を計算して、定理 C が証明できる。また、同変コホモロジーの部分 Alexsander-Spanier コホモロジーから定義されるものとするとき、次の命題が成り立つ。

命題 2.2([3, 4, 9]). X, Y を G -空間とし, W を Y の G -不変な閉集合とする. G -写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するとき,

$$\text{Ind}^G(f^{-1}(W); \mathbf{K}) \text{Ind}^G(Y - W; \mathbf{K}) \subset \text{Ind}^G(X; \mathbf{K}).$$

この命題より, 定理 B が直接証明できる. さらに, この命題より, $f^{-1}(W)$ の位相的な情報もわかる場合がある. 例えば $m \geq n$ で $f: S^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ が $f(-x) = -f(x)$ をみたすとき, $f^{-1}(0)$ の次元が $m - n + 1$ 以上になることが命題 2.2 より証明できる. [3, 4, 9, 11] 等ではこのようにして, 同変写像の値域の G -不変集合の逆像の軌道空間のコホモロジーについての情報を取り出し, L-S カテゴリーについても考察している.

3 cohomological index と同変写像の写像度

前節で ideal-valued cohomological index について述べたが, その性質から Borsuk-Ulam の定理は直接証明できるものの, 定理 D のような写像度に関しては考えていなかった. この節では, この index を用いて同変写像の写像度について考察してみよう. そのために, index をもう少し細かく以下のように定義する. $c_X: X \rightarrow *$ を 1 点からなる空間 $*$ への定値写像とすると, $\text{Ind}_k^G(X; \mathbf{K}) = \text{Ker}(c_X^*: H_G^k(*; \mathbf{K}) \rightarrow H_G^k(X; \mathbf{K}))$ (\mathbf{K} は体). X, Y を G -空間とすると, G -写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するならば, $\text{Ind}_k^G(X; \mathbf{K}) \supset \text{Ind}_k^G(Y; \mathbf{K})$ が成り立つことは定理 2.1 と同様である.

G をコンパクト Lie 群, M, N をコンパクトで連結な n 次元 G -多様体とし, M, N 上の G -作用は自由であることを仮定する. M から N への同変写像が存在するとき, $H^{n-\dim G}(M; \mathbf{Z}_2) \cong H^{n-\dim G}(N; \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2$ が成り立つこと, および $\text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \mathbf{Z}_2) \supset \text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \mathbf{Z}_2)$ より, $\text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \mathbf{Z}_2), \text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \mathbf{Z}_2)$ については

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \mathbf{Z}_2) &= \text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \mathbf{Z}_2) \neq H^{n-\dim G}(BG; \mathbf{Z}_2) \\ \text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \mathbf{Z}_2) &\neq \text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \mathbf{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG; \mathbf{Z}_2) \\ \text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \mathbf{Z}_2) &= \text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \mathbf{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG; \mathbf{Z}_2) \end{aligned}$$

の 3 通りが考えられる. このうち, 上の 2 つの場合については次のことが成り立つ.

定理 3.1([5]). G をコンパクト Lie 群, M, N をコンパクトで連結な n 次元 G -多様体とし, M, N 上の G -作用は自由であることを仮定する. このとき,

(1) $\text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \mathbf{Z}_2) = \text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \mathbf{Z}_2) \neq H^{n-\dim G}(BG; \mathbf{Z}_2)$ であれば, 任意の G -写像 $f: M \rightarrow N$ に対して $f^*: H^n(N; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^n(M; \mathbf{Z}_2)$ は同型である. 特に, M および N が向き付けられているとき, 任意の M から N への G -写像の写像度は奇数である.

(2) $\text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \mathbf{Z}_2) \neq \text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \mathbf{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG; \mathbf{Z}_2)$ であれば, 任意の G -写像 $f: M \rightarrow N$ に対して $f^*: H^n(N; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^n(M; \mathbf{Z}_2)$ は零写像である. 特に, M および N が向き付けられているとき, 任意の M から N への G -写像の写像度は偶数である.

$\text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \mathbb{Z}_2) = \text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \mathbb{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG; \mathbb{Z}_2)$ のときには、上のような写像度に関する制限を受けないような例がある。例えば、 $M = N = T^2 (= S^1 \times S^1)$ とし、 T^2 に \mathbb{Z}_2 を $g(z_1, z_2) = (-z_1, z_2)$ ($g \in \mathbb{Z}_2$ は生成元で、 $z_1, z_2 \in S^1$) と作用させると、 $\text{Ind}_2^G(N; \mathbb{Z}_2) = \text{Ind}_2^G(M; \mathbb{Z}_2) = H^2(BG; \mathbb{Z}_2)$ であり、 M から N へはどのような写像度の同変写像も存在し得る。

Borsuk-Ulam の定理は球面上の \mathbb{Z}_2 作用 (対心作用) に関するものであるが、球面上の対心作用について index を計算すると、

$$\text{Ind}_n^{\mathbb{Z}_2}(S^n; \mathbb{Z}_2) = \{e\} \neq H^n(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

がわかる。このことに定理 3.1(1) を適用すると、序章で紹介した定理 D が導かれる。

ところで、 \mathbb{Z}_2 が自由に作用する n 次元多様体は必ず S^n への同変写像が存在するが (ここで S^n 上には対心作用を考えている)、 \mathbb{Z}_2 が自由に作用する n 次元多様体の index を計算する方法として、次のように球面への写像の写像度を調べる方法がある。このことを使えば、どのような \mathbb{Z}_2 -多様体が Borsuk-Ulam の定理と同様の性質を持つかが比較的簡単にわかる。

命題 3.2. M を向きつけられたコンパクト連結 n 次元 \mathbb{Z}_2 -多様体とし、 M 上の \mathbb{Z}_2 -作用は自由であることを仮定する。また、 S^n 上には対心作用を考えるものとする。このとき、

- (1) M から S^n に写像度が奇数の \mathbb{Z}_2 -写像が存在するならば、 $\text{Ind}_n^{\mathbb{Z}_2}(M; \mathbb{Z}_2) \neq H^n(BG; \mathbb{Z}_2)$ 。
- (2) M から S^n に写像度が偶数の \mathbb{Z}_2 -写像が存在するならば、 $\text{Ind}_n^{\mathbb{Z}_2}(M; \mathbb{Z}_2) = H^n(BG; \mathbb{Z}_2)$ 。

この命題の (1) より、向きつけられたコンパクト連結 n 次元 \mathbb{Z}_2 -多様体 M (作用は自由) から S^n に写像度が奇数の \mathbb{Z}_2 -写像が存在するならば、定理 A, B, E, F, G については、定理の中の S^n を M に変え、 $-x$ の部分を gx (g は \mathbb{Z}_2 の生成元) に変えて同様のことが成り立つことがわかる。(定理 G については $\text{cat}(M/\mathbb{Z}_2) = n$ ということである。)

定理 3.1 では、コホモロジーの係数を \mathbb{Z}_2 で考えていたが、 M, N および $M/G, N/G$ が向き付け可能であれば、 \mathbb{Z}_p 係数 (p は素数) でも同様に次のことが成り立つ。

定理 3.3([5]). G をコンパクト Lie 群、 M, N を向きつけられたコンパクトで連結な n 次元 G -多様体とする。また、 M, N 上の G -作用は自由であり、 $M/G, N/G$ が向き付け可能であることを仮定する。このとき、 p を素数とすると

(1) $\text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \mathbb{Z}_p) = \text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \mathbb{Z}_p) \neq H^{n-\dim G}(BG; \mathbb{Z}_p)$ であれば、任意の M から N への G -写像の写像度は p で割り切れない。

(2) $\text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; \mathbb{Z}_p) \neq \text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; \mathbb{Z}_p) = H^{n-\dim G}(BG; \mathbb{Z}_p)$ であれば、任意の M から N への G -写像の写像度は p で割り切れる。

4 Stiefel 多様体上の $(\mathbf{Z}_p)^k$ 作用および今後の展望など

$V_k(\mathbf{R}^m)$ を \mathbf{R}^m における正規直交 k 枠全体からなる集合とし, $O(k)$ を直交群とすると, $O(k)$ は $V_k(\mathbf{R}^m)$ に通常の行列の積により自由に作用する. この作用を対角成分に ± 1 が並ぶような行列全体からなる部分群 $(\mathbf{Z}_2)^k$ に制限する. このとき, $V_k(\mathbf{R}^m)$ は自由 $(\mathbf{Z}_2)^k$ 空間となるが, この作用について, 井上明氏は [7] において次の定理を証明した.

命題 4.1([7]). $n = \dim V_k(\mathbf{R}^m)$ とするとき, $\text{Ind}_n^{(\mathbf{Z}_2)^k} V_k(\mathbf{R}^m) \neq H^n(B(\mathbf{Z}_2)^k; \mathbf{Z}_2)$.

この定理から, 定理 3.1 を使って, つぎの Borsuk-Ulam 型定理が得られる.

定理 4.2([7]). $V_k(\mathbf{R}^m)$ から $V_k(\mathbf{R}^m)$ への $(\mathbf{Z}_2)^k$ 写像の写像度は奇数である.

複素 Stiefel 多様体 $V_k(\mathbf{C}^m)$ についても同様にユニタリー群 $U(k)$ の自然な作用を部分群 $(\mathbf{Z}_p)^k$ (p は素数) に制限するとき次の定理が成り立つ.

定理 4.3([7]). $V_k(\mathbf{C}^m)$ から $V_k(\mathbf{C}^m)$ への $(\mathbf{Z}_p)^k$ 写像の写像度は p の倍数でない.

ところで, 定理 4.2 や 4.3 では, 作用する群はもう少し小さくても同様の性質が成り立つようにも思える. 例えば, $V_k(\mathbf{R}^m)$ のすべての成分に -1 をかけてできるような \mathbf{Z}_2 作用について, $V_k(\mathbf{R}^m)$ からそれ自身への写像度は必ず奇数になるか? ということである. しかしながら, このことは一般的に成り立つわけではない. 次のような反例がある.

例. $V_2(\mathbf{R}^{2m})$ に \mathbf{Z}_2 を

$$g \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{2m-1} & b_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{2m-1} & -a_{2m} \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{2m-1} & -b_{2m} \end{pmatrix}$$

(g は \mathbf{Z}_2 の生成元) により作用させる. このとき, $V_2(\mathbf{R}^{2m})$ から $V_2(\mathbf{R}^{2m})$ への写像を

$$f \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{2m-1} & b_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ -a_2 & a_1 & \cdots & -a_{2m} & a_{2m-1} \end{pmatrix}$$

と定義すると, これは \mathbf{Z}_2 写像になっていて, 写像度は 0 である. 写像度が 0 であることは, 以下のようにして見ることができる.

$f_1: V_2(\mathbf{R}^{2m}) \rightarrow S^{2m-1}$ を

$$f_1 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{2m-1} & b_{2m} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \dots, a_{2m-1}, a_{2m})$$

により定義し, $f_2: S^{2m-1} \rightarrow V_2(\mathbf{R}^{2m})$ を

$$f_2(a_1, a_2, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ -a_2 & a_1 & \cdots & -a_{2m} & a_{2m-1} \end{pmatrix}$$

により定義すると, $f = f_2 \circ f_1$ である. $n = \dim V_2(\mathbf{R}^{2m})$ とすると, $H^n(S^{2m-1}; \mathbf{Z}_2) = 0$ なので, $f^* = f_1^* \circ f_2^* : H^n(V_2(\mathbf{R}^{2m}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^n(V_2(\mathbf{R}^{2m}); \mathbf{Z}_2)$ の像は 0 になる. したがって, f の写像度は 0 である.

このように, $(\mathbf{Z}_2)^k$ の自明でない部分群 H に制限した場合に $V_k(\mathbf{R}^m)$ から $V_k(\mathbf{R}^m)$ への H 写像の写像度は必ず奇数になるとは限らないわけであるが, Stiefel 多様体 $V_k(\mathbf{R}^m)$ の k や m , また, 作用する $(\mathbf{Z}_2)^k$ の部分群の取り方によっては, 同変写像の写像度に制限がつく場合があるかもしれない. 実際, 上の例と同様の例を $V_2(\mathbf{R}^{2m+1})$ で構成しようとしても, S^{2m} から $V_2(\mathbf{R}^{2m+1})$ への写像を作るところがうまくいかない. S^{2m} から $V_2(\mathbf{R}^{2m+1})$ への写像を上例のようにして作るのは, S^{2m} 上のベクトル場で, 各点における接ベクトルの大きさが 1 であるようなものを構成することに他ならないが, S^{2m} 上のベクトル場はポアンカレ-ホップの定理より必ず零点があり, 上の例と同様にはできないのである. $V_2(\mathbf{R}^{2m+1})$ に上の例のように \mathbf{Z}_2 を作用させるとき, $V_2(\mathbf{R}^{2m+1})$ からそれ自身への同変写像で写像度が偶数になるようなものが存在するかはわかっていない. ただ, 定理 3.1 を用いて, そのことを調べることはできない. H を $(\mathbf{Z}_2)^k$ の部分群で, 自明でなく, $(\mathbf{Z}_2)^k$ と異なるようなものとする, $\text{Ind}_n^H(V_k(\mathbf{R}^m); \mathbf{Z}_2) = H^n(BH; \mathbf{Z}_2)$ (n は $V_k(\mathbf{R}^m)$ の次元) が成り立つからである. この事実は [7] に証明があるが, 下に, もう少し一般的なことを証明しておこう.

命題 4.4. M を n 次元の連結な閉多様体で, $(\mathbf{Z}_p)^k$ が自由に作用しているとする (p は素数). M が向き付け可能, または $p = 2$ のとき, H を $(\mathbf{Z}_p)^k$ の部分群で, $(\mathbf{Z}_p)^k$ と異なるようなものとする, $\text{Ind}_n^H(M; \mathbf{Z}_p) = H^n(BH; \mathbf{Z}_p)$.

証明. 以下, $G = (\mathbf{Z}_p)^k$ とする. H を G と異なる G の部分群とすると, $\pi : BH \rightarrow BG$ より導かれるコホモロジーの準同形 $\pi^* : H^*(BG; \mathbf{Z}_p) \rightarrow H^*(BH; \mathbf{Z}_p)$ は全射である.

$\text{Ind}_n^H(M; \mathbf{Z}_p) \neq H^n(BH; \mathbf{Z}_p)$ であると仮定すると, $H^n(M/H; \mathbf{Z}_p)$ は \mathbf{Z}_p と同型なので, M 上の H 作用に関する分類写像 $f_H : M/H \rightarrow BH$ より誘導される準同型 $f_H^* : H^n(BH; \mathbf{Z}_p) \rightarrow H^n(M/H; \mathbf{Z}_p)$ は全射になる. したがって, $f_H^* \circ \pi^* : H^n(BG; \mathbf{Z}_p) \rightarrow H^n(M/H; \mathbf{Z}_p)$ は全射である.

一方, G/H は位数が p の倍数の群になるから, $q : M/H \rightarrow M/G$ より導かれる準同型 $q^* : H^n(M/G; \mathbf{Z}_p) \rightarrow H^n(M/H; \mathbf{Z}_p)$ は零写像である. したがって, $f_G : M/G \rightarrow BG$ を M 上の G 作用に関する分類写像とすると, $q^* \circ f_G^* : H^n(BG; \mathbf{Z}_p) \rightarrow H^n(M/H; \mathbf{Z}_p)$ は零写像である. $f_H^* \circ \pi^* = q^* \circ f_G^*$ であるので, これは矛盾. したがって, $\text{Ind}_n^H(M; \mathbf{Z}_p) = H^n(BH; \mathbf{Z}_p)$ である. ■

このことより, H を $(\mathbf{Z}_2)^k$ の部分群で, 自明でなく, $(\mathbf{Z}_2)^k$ と異なるようなものとする, $\text{Ind}_n^H(V_k(\mathbf{R}^m); \mathbf{Z}_2) = H^n(BH; \mathbf{Z}_2)$ (n は $V_k(\mathbf{R}^m)$ の次元) が成り立つことがわかる. したがって, $V_k(\mathbf{R}^m)$ 上の $(\mathbf{Z}_2)^l$ 作用 ($l < k$) について, 写像度を考えるのに cohomological index のみを用いるのは有効ではなく, 別の方法が必要になるようである.

ところで, S^n 上の自由な \mathbf{Z}_p 作用に対しては, 一般に $\text{Ind}_n^{\mathbf{Z}_p}(S^n; \mathbf{Z}_p) \neq H^n(B\mathbf{Z}_p; \mathbf{Z}_p)$ が成り立つことから, 命題 4.4 の系として次のことが得られる.

系 4.5. S^n 上には $Z_p \times Z_p$ は自由に作用しない.

系 4.5 は [10, 15] にも紹介されているが, それぞれ別の方法で証明している. ここで紹介した方法だと, 系 4.5 が Borsuk-Ulam の定理と関係していることがわかるであろう. 多様体が, どのくらい大きな k に対して, $(Z_p)^k$ の自由な作用を持ち得て, そのうちのいつ Borsuk-Ulam 型の定理が成り立つかを多様体の位相から判定することが今後の課題の一つである.

参考文献

- [1] K. Borsuk, Drei Sätze über die n -dimensionale Sphäre, *Fund. Math* **21**(1933), 177–190.
- [2] T. tom Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin, New York 1987.
- [3] E. Fadell, Ideal-valued generalizations of Lusternik-Schnirelmann category, with applications. *Topics in equivariant topology* (eds. E. Fadell, et al.), *Sém. Math. Sup.*, **108**, Presses Univ. Montreal, 1989, 11–54
- [4] E. Fadell and S. Husseini, An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **8**(1988), 73–85.
- [5] Y. Hara, The degree of equivariant maps, *Topology Appl.* **148**(2005), 113–121.
- [6] Y. Hara and N. Minami, Borsuk-Ulam type theorems for compact Lie group actions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132**(2004), 903–909.
- [7] A. Inoue, Borsuk-Ulam type theorems on Stiefel manifolds, *Osaka J. Math.* **43**(2006), 183–191.
- [8] 岩瀬則夫, Ganea 予想と Lusternik-Schnirelmann カテゴリーの最近の発展, *数学*, **56**, No. 3 (2004), 281–296.
- [9] J. Jaworowski, Maps of Stiefel manifolds and a Borsuk-Ulam theorem, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **32**(1989), 271–279.
- [10] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. Press, 1991.
- [11] K. Komiya, Borsuk-Ulam theorem and Stiefel manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **45**(1993), 611–626.
- [12] L. Lusternik and L. Schnirelmann, *Topological methods in variational problems*, Issledowatel'skiĭ Institut Matematiki i Mekhaniki pri O. M. G. U., Moscow, 1930.

- [13] L. Lusternik and L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Hermann & Cie., Paris, 1934.
- [14] M. Nakaoka Continuous maps of manifolds with involution. I, II, *Osaka J. Math.* **11**(1974), 129–162, III *ibid* **12**(1975), 197–208.
- [15] 中岡稔, *不動点定理とその周辺*, 岩波書店, 1977.
- [16] I. Nagasaki, The weak isovariant Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups, *Arch. Math. (Basel)* **81**(2003), 348–359.
- [17] I. Nagasaki, Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 743–757.
- [18] I. Nagasaki and F. Ushitaki, Isovariant maps from free C_n -manifolds to representation spheres, in preparation.
- [19] H. Steinlein, Borsuk’s antipodal theorem and its generalizations and applications: A survey, *Méthodes topologiques en analyse non linéaire*, (ed. A. Granas), *Sém. Math. Sup.*, **95**, Presses Univ. Montreal, 1985, 166–235
- [20] H. Steinlein, Spheres and symmetry: Borsuk’s antipodal theorem, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **1** (1993), 15–33.
- [21] A. G. Wasserman, Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem, *Topology Appl.* **38**(1991), 155–161.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka,
Osaka 560-0043, Japan

E-mail address : hara@math.sci.osaka-u.ac.jp

Generating varieties, Bott periodicity and instantons

岸本大祐 (京都大学大学院理学研究科)

1 はじめに

G をコンパクト連結リー群とする. 写像 $h : S^1 \rightarrow G$ に対して写像 $\Gamma_h : G/C \rightarrow \Omega_0 G$ を

$$\Gamma_h(gC)(s) = gh(s)g^{-1}h(s)^{-1}$$

($s \in S^1$) により定める. ただし, C は $h(S^1)$ の中心化群を意味し, $\Omega_0 G$ は ΩG の定値写像の成分を意味する. R. Bott が Morse 理論を用いて ΩG のトポロジーに関して次の結果を得たことはよく知られている.

Theorem 1.1 (Generating variety [4]). G の中心が自明のとき, ある準同型 $h : S^1 \rightarrow G$ が存在し, $\mathbf{Im}(\Gamma_h)_*$ が Pontrjagin 環 $H_*(\Omega_0 G; \mathbb{Z})$ を生成する.

Theorem 1.2 (Bott periodicity [5]). 写像 $h_n : S^1 \rightarrow U(2n)$ を $h_n(s) = sE_n \times E_n$ ($s \in S^1 = U(1)$) で定める. ただし, 行列 A, B に対して $A \times B$ は行列 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ を意味し, E_n は n 次元単位行列を意味する. このとき, 写像 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_{h_n} : BU \rightarrow \Omega_0 U$ はホモトピー同値写像となる.

[1] は 2 次元球面上の Yang-Mills 接続のモジュライ空間を考えることにより, Theorem 1.1 と Theorem 1.2 が導きだせることを陰に示している. 一方, Tian [13] は全く別の視点から S^4 上の Yang-Mills 接続 (インスタントン) のモジュライ空間状に定義される Atiyah-Jones 写像により BO, BSp の Bott periodicity が得られることを指摘している. しかしながら Tian の Bott 写像は様々な結果を形式的に組み合わせて得られるため, 具体的にどのように与えられるかはわからず, まして, 交換子で表されるかなどということとはわからない.

講演の目的

[7] によりコンパクト連結単純リー群 G の S^3 部分群 (G の $SU(2) \cong S^3$ に同型な部分群) と S^4 上のインスタントンモジュライ空間に埋め込まれた G の等質空間の間に対応がつかうことが示され, さらに, Atiyah-Jones 写像をその等質空間に制限すると G の交換子で表されることが示された. そして, その制限した Atiyah-Jones 写像が Theorem 1.1 と Theorem 1.2 の 3 重ループ版を統一的に与えることが [7] により最近証明された. この講演の目的はこれらの結果を解説することである.

2 Atiyah-Jones 写像と交換子

この節では Atiyah-Jones 写像の定義と関連した結果を与える。そして、この講演の鍵となる Lemma を示す。

以下、 S^4 は通常の計量をもつ 4 次元球面とする。

G をコンパクト連結単純リー群とする。このとき、 $\pi_3(G) \cong \pi_4(BG)$ は \mathbb{Z} と同一視される。 M_k^G を S^4 上の $k \in \mathbb{Z} = \pi_4(BG)$ により分類される主 G 束上のインスタントン (自己双対接続) の基点付きモジュライ空間とする。 C_k^G で上の主 G 束上の接続の基点付きモジュライ空間を表すとき、Atiyah と Jones は [2] で自然なホモトピー同値

$$C_k^G \simeq \Omega_k^3 G$$

を構成している。合成

$$M_k^G \hookrightarrow C_k^G \simeq \Omega_k^3 G$$

で定められる写像 $\vartheta_k : M_k^G \rightarrow \Omega_k^3 G$ を Atiyah-Jones 写像という。

Taubes [11] はインスタントンの張り合わせと呼ばれる、Atiyah-Jones 写像と自然なホモトピー同値 $\Omega_k^3 G \simeq \Omega_{k+1}^3 G$ とのホモトピー可換性をみたす写像

$$i_k : M_k^G \rightarrow M_{k+1}^G$$

を構成し、[2] でたてられた Atiyah-Jones 予想を次のかたちで解決した。

Theorem 2.1 (Taubes [11]). 写像 $\lim_{k \rightarrow \infty} (-k) \cdot \vartheta_k : \lim_{k \rightarrow \infty} M_k^G \rightarrow \Omega_0^3 G$ はホモトピー同値となる。

Tian [12] は次のモジュライ空間の安定化と Theorem 2.1 とを組み合わせることにより Atiyah-Jones 写像が Bott 写像となることを指摘した。

Theorem 2.2 (Kirwan [6], Sanders [10], Norbury and Sanders [9]). $(G, \mathbf{H}) = (SU, U)$, (Sp, O) , (SO, Sp) とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_k^{G(n)} \simeq B\mathbf{H}(k)$ となる。

リー群 G の部分群で $SU(2) (\cong S^3)$ と同型なものを G の S^3 部分群ということにする。 G が M_k^G に基点を保たないゲージ変換を介して作用していることに注意しよう。次は本講演の鍵となる Lemma である。

Lemma 2.1. G をコンパクト連結単純リー群とする。 G の S^3 部分群 S で、包含写像 $\iota : S \rightarrow G$ が $k \in \pi_3(G)$ を表すものが存在すると仮定する。このとき、ある $\omega \in M_k^G$ が存在して、 S の中心化群 C に対して $G \cdot \omega \cong G/C$ となる。さらに、合成写像

$$J : G/C \hookrightarrow M_k^G \xrightarrow{\vartheta_k} \Omega_k^3 G \xrightarrow{\iota^{-1}} \Omega_0^3 G$$

は

$$J(gC)(s) = g\iota(s)g^{-1}\iota(s)^{-1}$$

($g \in G, s \in S \cong S^3$) で与えられる.

Lemma 2.1 の写像 J は §1 の写像 Γ_h に酷似している. したがって, Theorem 1.1 や Theorem 1.2 を写像 J により, 3 重ループに拡張できるのではと淡い期待を抱くのが人情であろう.

3 古典群の S^3 部分群

この節では古典群のある S^3 部分群の族を導入する. また, それらに対応するインスタントンモジュライ空間内の軌道やそこに制限された Atiyah-Jones 写像の関係も考察される.

簡単のため,

$$(\mathbf{G}, \mathbf{H}, d) = (SU, U, 2), (SO, Sp, 4), (Sp, O, 1)$$

とする. また自然な包含写像

$$O(n) \rightarrow U(n), Sp(n) \rightarrow SU(2n), U(n) \rightarrow Sp(n), SU(n) \rightarrow SO(2n)$$

をそれぞれ $\mathbf{c}, \mathbf{c}', \mathbf{q}, \mathbf{r}$ と書く. 例えば, $\alpha_{i_1 i_2}, \beta_{i_1 i_2} \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\mathbf{c}'((\alpha_{i_1 i_2} + j\beta_{i_1 i_2})_{1 \leq i_1, i_2 \leq n}) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_{i_1 i_2} & -\bar{\beta}_{i_1 i_2} \\ \beta_{i_1 i_2} & \bar{\alpha}_{i_1 i_2} \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i_1, i_2 \leq n}$$

である. これらの写像が導く分類空間上の写像にも同じ記号を使うことにする. 今後の便宜上, $k > 0$ とし, $\mathbf{G} = SO$ のときは $dk + l > 4$ とする.

古典群の S^3 部分群

$Sp(k+l)$ の S^3 部分群 $S_{k,l}^{Sp}$ を,

$$S_{k,l}^{Sp} = \{\alpha E_k \times E_l \in Sp(k+l) : \alpha \in Sp(1)\}$$

で定める. また, $SU(2k+l)$ と $SO(4k+l)$ の S^3 部分群 $S_{k,l}^{SU}$ と $S_{k,l}^{SO}$ を

$$S_{k,l}^{SU} = \{A \times E_l \in SU(2k+l) : A \in \mathbf{c}'(S_{k,0}^{Sp})\},$$

$$S_{k,l}^{SO} = \{A \times E_l \in SO(4k+l) : A \in \mathbf{rc}'(S_{k,0}^{Sp})\}$$

によって定める. これらの S^3 部分群は次により特徴付けられる.

Proposition 3.1. 包含写像 $S_{k,l}^{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}(dk+l)$ は $k \in \pi_3(\mathbf{G}(dk+l))$ を代表する.

$X_{k,l}^{\mathbf{G}}$ と $J_{k,l}$

包含写像 $S_{k,l}^{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}(dk+l)$ を ι , $S_{k,l}^{\mathbf{G}}$ の中心化群を $C_{k,l}^{\mathbf{G}}$ と書く. $S_{k,l}^{\mathbf{G}}$ に関連した次の空間と写像を考える.

$$X_{k,l}^{\mathbf{G}} = \mathbf{G}(dk+l)/C_{k,l}^{\mathbf{G}}$$

$$J_{k,l}: S^3 \wedge X_{k,l}^{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}(dk+l), J_{k,l}(s, gC_{k,l}^{\mathbf{G}}) = g\iota(s)g^{-1}\iota(s)^{-1}$$

Lemma 2.1 と Proposition 3.1 により次がわかる.

Proposition 3.2. Lemma 2.1 において, $G = \mathbf{G}(dk+l)$, $S = S_{k,l}^{\mathbf{G}}$ としたとき, $G/C = X_{k,l}^{\mathbf{G}}$ となり, $J = \text{Ad}^3 J_{k,l}$ となる.

実際に $C_{k,l}^{\mathbf{G}}$ を書き下すと $X_{k,l}^{\mathbf{G}}$, $J_{k,l}$ は次の可換図式をみたすことがわかる.

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} S^3 \wedge X_{k,l}^{\mathbf{G}} & \xrightarrow{1 \wedge \bar{i}} & S^3 \wedge X_{k,l+1}^{\mathbf{G}} \\ J_{k,l} \downarrow & & \downarrow J_{k,l+1} \\ \mathbf{G}(dk+l) & \xrightarrow{i} & \mathbf{G}(dk+(l+1)) \end{array}$$

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} S^3 \wedge X_{k,l}^{\mathbf{G}} & \xrightarrow{1 \wedge \bar{j}} & S^3 \wedge X_{k+1,l}^{\mathbf{G}} \\ J_{k,l} \downarrow & & \downarrow J_{k+1,l} \\ \mathbf{G}(dk+l) & \xrightarrow{j} & \mathbf{G}(d(k+1)+l), \end{array}$$

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccccc} S^3 \wedge X_{k,l}^{Sp} & \xrightarrow{1 \wedge \bar{c}'} & S^3 \wedge X_{k,2l}^{SU} & \xrightarrow{1 \wedge \bar{r}} & S^3 \wedge X_{k,4l}^{SO} \\ J_{k,l} \downarrow & & J_{k,2l} \downarrow & & J_{k,4l} \downarrow \\ Sp(k+l) & \xrightarrow{c'} & SU(2k+2l) & \xrightarrow{r} & SO(4k+4l), \end{array}$$

ただし, $i, j: \mathbf{G}(m) \rightarrow \mathbf{G}(m+n)$ は $i(A) = A \times E_n$, $j(A) = E_n \times A$ ($A \in \mathbf{G}(m)$) で定められる包含写像, \bar{c}' と \bar{r} はそれぞれ c' と r により導かれた写像である.

$k=1$ のとき

$X_{1,l}^{Sp} = \mathbb{R}P^{4l+3}$ となり, $X_{1,l}^{SU}$ は $\mathbb{C}P^{l+1}$ の単位接球面束の全空間となっている. また, 次の写像の合成により $\mathbb{H}P^{[l/4]}$ が $X_{1,l}^{SO}$ に埋め込まれる.

$$(3.4) \quad \mathbb{H}P^{[l/4]} = \frac{Sp(1+[l/4])}{Sp(1) \times Sp([l/4])} \xrightarrow{\bar{r}\bar{c}'} X_{1,4[l/4]}^{SO} \xrightarrow{\bar{i}} X_{1,l}^{SO}$$

$J_{1,l}: S^3 \wedge X_{1,l}^{SO} \rightarrow SO(4+l)$ の $S^3 \wedge \mathbb{H}P^{[l/4]}$ への制限を $J'_{1,l}$ と書くことにすると, (3.1) と (3.3) と同様の $J'_{1,l}$ に関する可換図式が成り立つ.

$l = \infty$ のとき

$\mathbf{G} = Sp, SO$ のときは主束 $\mathbf{H}(k) \rightarrow \mathbf{G}(dk+l)/\mathbf{G}(l) \rightarrow X_{k,l}^{\mathbf{G}}$ を, $\mathbf{G} = SU$ のときは主束 $U(k) \rightarrow U(2k+l)/U(l) \rightarrow X_{k,l}^{SU}$ を考えることにより,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} X_{k,l}^{\mathbf{G}} \simeq BH(k)$$

となることがわかる. (3.1) から写像 $\lim_{l \rightarrow \infty} J_{k,l} : S^3 \wedge \lim_{l \rightarrow \infty} X_{k,l}^{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ を考えることができ, これを

$$J_{k,\infty} : S^3 \wedge BH(k) \rightarrow \mathbf{G}$$

と書く. このとき, (3.3) などから次がわかる.

Proposition 3.3. 次の図式はホモトピー可換である.

$$\begin{array}{ccccc} S^3 \wedge BO(k) & \xrightarrow{1 \wedge c} & S^3 \wedge BU(k) & \xrightarrow{1 \wedge q} & S^3 \wedge BSp(k) \\ J_{k,\infty} \downarrow & & J_{k,\infty} \downarrow & & J_{k,\infty} \downarrow \\ Sp & \xrightarrow{c'} & SU & \xrightarrow{r} & SO \end{array}$$

$k = l = \infty$ のとき

(3.2) より, $\lim_{k \rightarrow \infty} J_{k,\infty} : S^3 \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} BH(k) \rightarrow \mathbf{G}$ という写像を考えることができ, これを

$$J_{\infty,\infty} : S^3 \wedge BH \rightarrow \mathbf{G}$$

と書く. 次は容易に確かめられる.

Proposition 3.4. 写像 $\text{Ad}^3 J_{\infty,\infty} : BH \rightarrow \Omega_0^3 \mathbf{G}$ は H 写像である.

4 $\Omega_0^3 \mathbf{G}(n)$ の generating variety

この節では Theorem 1.1 の類似が写像 $\text{Ad}^3 J_{1,l} : X_{1,l}^{\mathbf{G}} \rightarrow \Omega_0^3 \mathbf{G}(d+l)$ に対して成り立つことをみる.

まずは基礎となる計算結果を紹介する.

Proposition 4.1. 写像 $(J'_{1,l})^* : H^*(SO(4+l); \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(S^3 \wedge \mathbb{H}P^{l/4}; \mathbb{Z}/2)$ は全射.

Proposition 4.2. 写像 $J_{1,l}^* : H^{4i+3}(Sp(1+l); \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{4i+3}(S^3 \wedge \mathbb{R}P^{4l+3}; \mathbb{Z}/2)$ は $i > 0$ で全射.

空間 X の 3 連結ファイバーを $X\langle 3 \rangle$ と書くことにする.

Proposition 4.3. 写像 $(\widetilde{J}_{1,l})^* : H^5(SU\langle 3 \rangle; \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(S^3 \wedge \mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ は同型. ただし, $\widetilde{J}_{1,l}$ は $J_{1,l}$ の持ち上げである.

$PG(n)$ を $G(n)$ を中心で割った群とする. $G(d+l)$ の中心は $C_{1,l}^G$ に含まれるので射影 $\pi : PG(d+l) \rightarrow X_{1,l}^G$ が存在することに注意する. $\gamma : PG(n) \wedge PG(n) \rightarrow PG(n)$ を $PG(n)$ の交換子, $\tilde{\gamma} : G(n) \wedge PG(n) \rightarrow G(n)$ をその持ち上げとする. 上の3つの Proposition の証明は, 大まかに言うと, 次の可換図式と [3] の結果を用いて行われる (Proposition 4.3 だけは $SU(4)$ のある一般 Samelson 積の計算も必要とする).

$$\begin{array}{ccccccc}
 S^3 \wedge X_{1,l}^G & \xleftarrow{1 \wedge \pi} & S^3 \wedge PG(d+l) & \xrightarrow{\iota \wedge 1} & G(d+l) \wedge PG(d+l) & \xrightarrow{\pi' \wedge 1} & PG(d+l) \wedge PG(d+l) \\
 J_{1,l} \downarrow & & \Gamma \downarrow & & \tilde{\gamma} \downarrow & & \gamma \downarrow \\
 G(d+l) & \xlongequal{\quad} & G(d+l) & \xlongequal{\quad} & G(d+l) & \xrightarrow{\pi'} & PG(d+l)
 \end{array}$$

ただし, ι は $S_{1,l}^G$ の包含写像で Γ は $\tilde{\gamma}$ の制限, π' は射影である.

上の計算結果を用いて [8] と同様の計算をすることにより, $G = Sp, SO$ のときの次に示されている generating variety argument が証明される. $G = SU$ のときは Toda [13] の結果を用いて証明される.

Theorem 4.1. *Pontrjagin 環 $H_*(\Omega_0^3 SO(4+l); \mathbb{Z}/2)$ は $* < l$ のとき $\text{Im}(J'_{1,l})_*$ で生成される多項式環である.*

Theorem 4.2. *Pontrjagin 環 $H_*(\Omega_0^3 Sp(1+l); \mathbb{Z}/2)$ は $* < 4l+1$ のとき $\text{Im}(J_{1,l})_*$ で生成される多項式環である.*

Theorem 4.3. *Pontrjagin 環 $H_*(\Omega_0^3 SU(2+l); \mathbb{Z})$ は $* < 2l+1$ のとき $\text{Im}(J_{1,l})_*$ で生成される多項式環である.*

5 Bott periodicity

前節までの結果を用いて写像 $\text{Ad}^3 J_{\infty, \infty} : BH \rightarrow \Omega_0^3 G$ が Bott periodicity を与えることが証明される. つまり, この写像が Theorem 1.2 の3重ループ版を与えるのである. ただし, $G = SU$ のときは周期が4となり”弱い”かたちの Bott 周期性定理が導きだされる.

Theorem 5.1. *写像 $\text{Ad}^3 J_{\infty, \infty} : BH \rightarrow \Omega_0^3 G$ はホモトピー同値写像である.*

空間 X, Y の間の写像 $f : X \rightarrow Y$ が n 同値とは, $f_* : \pi_*(X) \rightarrow \pi_*(Y)$ が $0 \leq * \leq n$ のとき同型となることとする. (3.1) と (3.2) により, 次のホモトピー可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 X_{k,l}^G & \xrightarrow{i} & BH(k) & \xrightarrow{i'} & BH \\
 \text{Ad}^3 J_{k,l} \downarrow & & \text{Ad}^3 J_{k,\infty} \downarrow & & \downarrow \text{Ad}^3 J_{\infty,\infty} \\
 \Omega_0^3 G(dk+l) & \xrightarrow{j} & \Omega_0^3 G & \xlongequal{\quad} & \Omega_0^3 G
 \end{array}$$

写像 i, i', j がホモトピー群に誘導する写像がどうなっているかをみることにより次を得る.

Corollary 5.1. $\mathbf{G} = SU, Sp, SO$ のときそれぞれ $N_{\mathbf{G}} = \min(2k, 2l), \min(k-1, 4l+2), \min(4k+2, l-1)$ とする. このとき写像 $\text{Ad}^3 J_{k,l} : X_{k,l}^{\mathbf{G}} \rightarrow \Omega_0^3 \mathbf{G}(dk+l)$ は $N_{\mathbf{G}}$ 同値となる.

6 応用

最後にこれまでに得られた結果のインスタントンモジュライ空間への応用を考える.

Proposition 3.2 のにより, $X_{k,l}^{\mathbf{G}}$ は $M_k^{\mathbf{G}(dk+l)}$ に埋め込めることがわかる. この埋め込みを $i_{k,l} : X_{k,l}^{\mathbf{G}} \rightarrow M_k^{\mathbf{G}(dk+l)}$ と書くことにすると次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} X_{k,l}^{\mathbf{G}} & \xrightarrow{j} & X_{k,l+1}^{\mathbf{G}} \\ i_{k,l} \downarrow & & \downarrow i_{k,l+1} \\ M_k^{\mathbf{G}(dk+l)} & \xrightarrow{j'} & M_k^{\mathbf{G}(dk+l+1)}, \end{array}$$

ここで, j, j' は包含写像 $\mathbf{G}(dk+l) \rightarrow \mathbf{G}(dk+l+1)$ から誘導される写像である. これにより次の写像を考えることができる.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} i_{k,l} : \lim_{l \rightarrow \infty} X_{k,l}^{\mathbf{G}} (\simeq \text{BH}(k)) \rightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} M_k^{\mathbf{G}(dk+l)}$$

次により Theorem 2.2 が上の写像で実現されることがわかる.

Proposition 6.1. 写像 $\lim_{l \rightarrow \infty} i_{k,l} : \lim_{l \rightarrow \infty} X_{k,l}^{\mathbf{G}} (\simeq \text{BH}(k)) \rightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} M_k^{\mathbf{G}(dk+l)}$ はホモトピー同値写像である.

Proposition 6.1 と [6] の結果を組み合わせると次が得られる.

Proposition 6.2. $N = \min(2k, 2l)$ とするとき, 写像 $i_{k,l} : X_{k,l}^{SU} \rightarrow M_k^{SU(2k+l)}$ は N 同値である.

参考文献

- [1] M.F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **308** (1983), 523-615.
- [2] M.F. Atiyah and J.D.S. Jones, *Topological aspects of Yang-Mills theory*, Commun. Math. Phys. **61** (1978), 97-118.
- [3] P.F. Baum and W. Browder, *The cohomology of quotients of classical groups*, Topology **3** (1965), 305-336.
- [4] R. Bott, *The space of loops on a Lie group*, Michigan Math. J. **5** (1958), 35-68.

- [5] R. Bott, *The stable homotopy of the classical groups*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), 313-337.
- [6] F. Kirwan, *Geometric invariant theory and the Atiyah-Jones conjecture*, Proc. S. Lie Mem. Conf., Scand. Univ. Press (1994), 161-188.
- [7] D. Kishimoto, *Generating varieties, Bott periodicity and instantons*, preprint.
- [8] D. Kishimoto, *A topological proof of real and symplectic Bott periodicity theorem*, J. Math. Kyoto Univ. **41** (2001), 33-41.
- [9] P. Norbury and M. Sanders, *Real instantons, Dirac operators and quaternionic classifying spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2193-2201.
- [10] M. Sanders, *Classifying spaces and Dirac operators coupled to instantons*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 4037-4072.
- [11] C.H. Taubes, *The stable topology of self-dual moduli spaces*, J. Diff. Geom. **29** (1989), 163-230.
- [12] Y. Tian, *The Atiyah-Jones conjecture for classical groups and Bott periodicity*, J. Diff. Geom. **44** (1996), 178-199.
- [13] H. Toda, *A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A, vol. **32** (1959), 103-119.

ALGEBRAIC COBORDISM FOR PFISTER QUADRIC

NOBUAKI YAGITA

柳田伸顕 (茨城大学、教育学部)

(JOINT WITH ALEXANDER VISHIK)

Let k be a subfield of the complex number field \mathbb{C} . By extending Quillen's arguments, Levine and Morel defined the algebraic cobordism theory $\Omega^*(-)$ as the universal theory having transfers and Chern classes. The ring $\Omega^*(X)$ is constructed as

$$\Omega^*(X) = \{[f : M \rightarrow X]\}/(\text{relations}).$$

Here f is a projective map from a smooth variety M to X of pure codimension. Relations are given so that we can define Chern classes or formal group laws. Given theory $h^*(-)$ having transfers and Chern classes, the map $\rho_h : \Omega^*(-) \rightarrow h^*(-)$ is defined by $\rho_h([f : M \rightarrow X]) = f_*(1_M)$ where $1_M \in h^0(M)$ represents the identity element.

Let $H^{*,*}(-)$ (resp. $MGL^{*,*}(-)$, $MU^*(-)$, $CH^*(-)$, $H^*(-)$) be the motivic cohomology theory defined by Suslin and Voevodsky (resp. the motivic cobordism theory, the complex cobordism theory, the Chow ring, the usual cohomology theory). Then we have commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^*(X) & \xrightarrow{\rho_{MGL}} & MGL^{2*,*}(X) & \xrightarrow{t_{MU}} & MU^{2*}(X(\mathbb{C})) \\ = \downarrow & & \tau_{MGL} \downarrow & & \tau_{MU} \downarrow \\ \Omega^*(X) & \xrightarrow{\rho_{CH}} & CH^*(X) \cong H^{2*,*}(X) & \xrightarrow{t_H} & H^{2*}(X(\mathbb{C})) \end{array}$$

where τ_{MGL}, τ_{MU} (resp. t_{MU}, t_H) are Thom maps (resp. realization maps). Levine and Morel prove that

$$\Omega^*(pt) \cong MU^{2*}(pt) = MU^* \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots] \quad \text{with} \quad |x_i| = -2i$$

$$\Omega^*(X) \otimes_{\Omega^*} \mathbb{Z} \cong CH^*(X).$$

Similar facts also hold for $MGL^{2*,*}(X)$ from the motivic Atiyah-Hirzebruch spectral sequence. Moreover Levine-Morel conjecture that ρ_{MGL} are always isomorphisms.

Let p be a fixed prime number. We can take x_{p^i-1} as v_i ; a complex manifold whose characteristic numbers are divided by p but not p^2 . We note that the ideal

$$Ideal(p, x_{p-1}, x_{p^2-1}, \dots) = Ideal(p, v_1, v_2, \dots) \subset MU^*$$

is the ideal of manifolds whose characteristic numbers are always divided by p .

Now we recall the Rost motive. Suppose that $p = 2$. Recall that $K_i^M(k)$ is the Milnor K -theory for the field k . For $a = \{a_1, \dots, a_n\}$, $a_i \in k^*$ and $0 \neq a \in K_n^M(k)/2$, let Q_a be the projective quadric of dimension $2^n - 2$ defined by the (big) Pfister form

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$$

and let R_a be the quadric of dimension $2^{n-1} - 1$ defined by the (smaller) Pfister form $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle - \langle a_n \rangle$.

It is known that R_a is a norm quadric of a , that is

$$\pi_*([R_a]) = v_n, \quad a = 0 \in K_n^M(k(R_a))/2$$

where $k(R_a)$ is the function field of R_a and $\pi : R_a \rightarrow pt. = Spec(k)$.

In the category of Chow motives, Rost constructed a direct summand M_a of the motive of R_a and Q_a (we can take M_a as some open variety of Q_a). Let $M(X)$ is the motive of X . We also know from Rost that $M(Q_a) \cong M_a \otimes M(\mathbb{P}^{2^{n-1}-1})$ and hence

$$H^{*,*}(Q_a; \mathbb{Z}/2) \cong H^{*,*}(M_a; \mathbb{Z}/2)\{1, h, \dots, h^{2^{n-1}-1}\} \quad \text{with } deg(h) = (2, 1).$$

If R_a (and so Q_a) has a K -rational point for an extension K of k , then

$$M_a|_K = \mathbb{T}_K^0 \oplus \mathbb{T}_K^{\otimes(2^n-1)}$$

where $\mathbb{T}_K = \mathbb{T} \otimes_k Spec(K)$ is the Tate motive for K , e.g., $M(\mathbb{P}^1) = \mathbb{T}^0 \oplus \mathbb{T}$. In particular

$$H^{*,*}(M_a|_K; \mathbb{Z}/2) \cong H^{*,*}(pt; \mathbb{Z}/2) \oplus H^{*,*}(pt; \mathbb{Z}/2)\{\sigma\}$$

for $pt. = Spec(K)$ with $deg(\sigma) = (2^n - 2, 2^{n-1} - 1)$. Similar fact also holds for $\Omega^*(-)$ theory, i.e.,

$$\Omega^*(M_a|_K) \cong MU^*\{1\} \oplus MU^*\{\sigma\}.$$

Our main result is following

Theorem 0.1. *There is the isomorphism*

$$\Omega^*(Q_a) \cong MGL^{2*,*}(Q_a) \cong \Omega^*(M_a)\{1, \dots, h^{2^{n-1}-1}\}.$$

The cobordism $MGL^{2,*}(M_a) \cong \Omega^*(M_a)$ injects into $\Omega^*(M_a|_K)$ and*

$$\Omega^*(M_a|_K) \cong MU^*\{1\} \oplus MU^*\{\sigma\}.$$

$$\Omega^*(M_a) \cong MU^*\{1\} \oplus Ideal(2, v_1, \dots, v_{n-2})\{\sigma\}.$$

Corollary 0.2. (Rost) *There is the isomorphism*

$$CH^*(M_a) \cong \Omega^*(M_a) \otimes_{\Omega^*} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\{1, 2\sigma\} \oplus \mathbb{Z}/2\{v_1\sigma, \dots, v_{n-2}\sigma\}$$

and each $v_i\sigma$ is represented by $[Q_{2^i-1} \subset R_a]$ where Q_{2^i-1} is a subquadric of R_a of $\dim = 2^i - 1$.

Corollary 0.3. *Let $I(X)$ is the ideal of MU^* generated by $\pi_*(\Omega^*(X))$ for $\pi : X \rightarrow \text{Spec}(k)$, i.e., $\pi_*[f : M \rightarrow X] = [M]$. Then*

$$I(M_a) = \text{Ideal}(2, \dots, v_{n-1}),$$

indeed, $\pi_*(1) = v_{n-1}, \pi_*(v_i\sigma) = v_i$.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF EDUCATION, IBARAKI UNIVERSITY, MITO, IBARAKI, JAPAN

E-mail address: yagita@mx.ibaraki.ac.jp

