# On approximation theorems of maps from compacta to manifolds and polyhedra

(コンパクト距離空間から多様体および多面体への連続写像の近似定理について)

筑波大学大学院数理物質科学研究科特別研究員

松橋英市

## 1 Introduction

この発表では、コンパクト距離空間上で定義された連続写像に関していくつかの近似定理を紹介する（実際にはただ近似するというよりも、もっと強い結果を紹介する）。

連続写像に関する近似定理の中で、最も有名なものの1つとして次のワイエルシュトラスの定理がある。（以下、$X$ をコンパクト距離空間、$Y$ を完備距離空間としたとき $C(X,Y)$ で $X$ から $Y$ への連続写像全体からなる空間を表し、距離は sup metric が入っているものとする。）

**定理 1.1** (Weierstrass)
$I=[0,1]$、$R$ を実数全体とする。このとき $\{f\in C(I,R)|f$ は多項式 $\}$ は $C(I,R)$ の中で *dense subset* になる。つまり閉区間上で定義された任意の実数値連続関数は多項式の形をした連続関数でいくらでも近似出来る。

この定理では、任意に与えられた連続関数を出来るだけ状況の分かり易い連続関数で近似しようとしている。しかし、この発表で紹介する結果はどちらかと言えば次の結果に近いものである。

**定理 1.2** (Banach)
$I=[0,1]$、$R$ を実数全体とする。このとき $\{f\in C(I,R)|f$ は $I$ 上のいたる所で微分不可能 $\}$ は $C(I,R)$ における *dense* $G_\delta$*-subset* を含む。

$X$ を完備距離空間、$A\subset X$ を $X$ の dense $G_\delta$-subset を含む部分空間としたとき、$A$ を ”($X$ の中で) ほとんど全て” と表現する事がある（それは Baire の定理に拠る）。そして定理 1.2 をその言葉を使って表現すれば、

”閉区間上で定義されたほとんど全ての実数値連続関数はいたる所で微分不可能”

ということになる。この発表では、

「任意の連続写像を分かり易い形をした連続写像で近似しよう」

というよりは

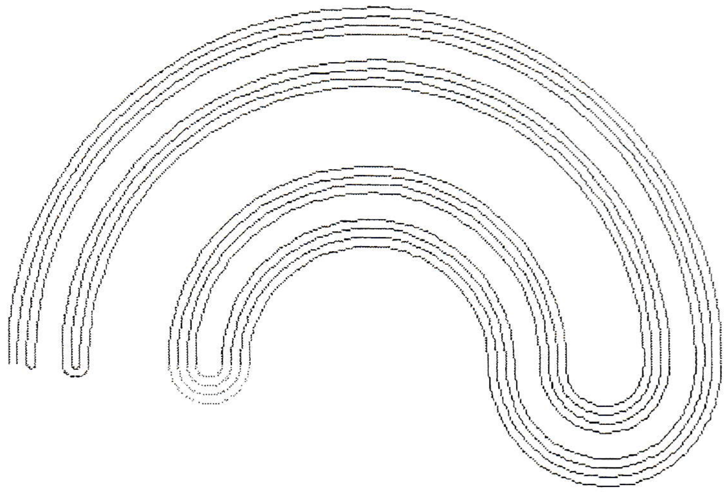
「ほとんど全ての連続写像はとても複雑な形をしている」

というような結果を紹介していく。

## 2 Bing maps to polyhedra

この章では、コンパクト距離空間から多面体への Bing map 全体からなる集合が、写像空間のなかでがどのような集合になっているかをみていく。

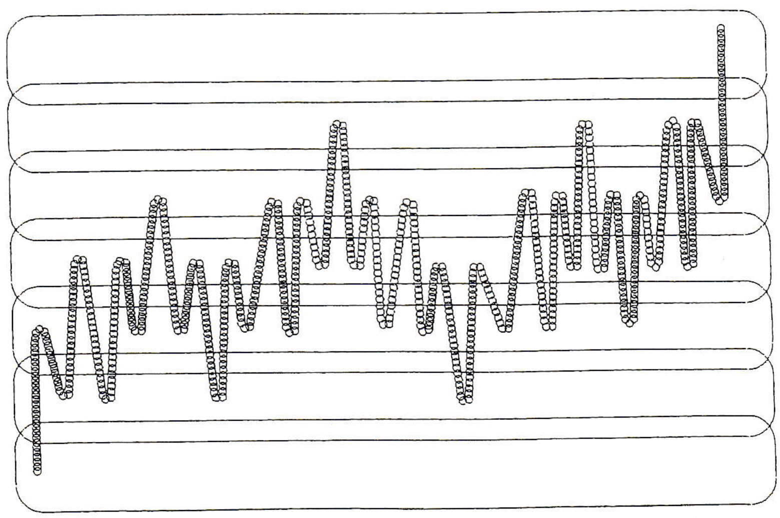
**定義 2.1** *Continuum*（＝コンパクト連結距離空間）$X$ が *indecomposable* であるとは、$X$ に含まれる *subcontinuum* $A$ と $B$ が $X = A \cup B$ を満たすなら、$X = A$ または $X = B$ が成り立つ場合にいう。



http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pyrih/e/e2001v2/s/c0003/s0020/e0050/A.gif ([7])
（この絵はもともとは [17] の p.210 に描かれているものである。）

この定義を満たす continuum は非常に複雑で、正確に図に描くことはとても無理である。このような複雑な continuum の存在は、すでによく知られている。そして実際には indecomposable continuum よりも、もっと複雑な continuum が存在する。

**定義 2.2** *Continuum* $X$ が *hereditarily indecomposable* であるとは、$X$ に含まれる任意の *subcontinuum* が *indecomposable continuum* であるときにいう。



http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pyrih/e/e2001v1/s/c0140/s0010/e0020/f.gif ([7])

hereditarily indecomposable continuum は 1922 年に Knaster ([14]) が初めて構成した（彼が構成したものは *pseudo arc* と呼ばれるもので hereditarily indecomposable continuum の代表的な例である）。そして 1951 年に Bing が次の定理を発表するまで、1 次元のものしか知られていなかった。

**定理 2.3** (Bing [2])
（無限次元も含めて）全ての次元の *hereditarily indecomposable continuum* が存在する。

hereditarily indecomposable continuum は非常に複雑な continuum であるが、とても面白い、そして良い性質を持っていて、その性質の良さゆえに連続体論では重要な役割を果たしている。

ここで Bing map を定義する。

**定義 2.4** $f : X \to Y$ が *Bing map* であるとは、任意の $y \in Y$ に対し、$f^{-1}(y)$ の全ての連結成分が *hereditarily indecomposable* であるときにいう。

これは非常に複雑な連続写像である。Bing map の簡単な例は、fiber すべてが 0 次元になるような連続写像（= 0-dimensional map）などであるが、そうでないような例は構成が非常に難しい。

**Example 2.5** (Anderson [1], Kato and Levin [9], Lewis and Walsh [22])
$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への全射 *open map* で、その *fiber* 全てが *pseudo arc* になるようなものが存在する。

実は次に紹介するように Bing map は非常に多く存在する。
(以下 $B(X,Y) = \{f \in C(X,Y) | f : \text{Bing map}\}$ とする。)

**定理 2.6** (Levin [19], Krasinkiewicz [15], Song and Tymchatyn [24], Kato and Matsuhashi [11])
$X$ をコンパクト距離空間、$Y$ を多様体、または 1 点でない連結な多面体とする。このとき $B(X,Y)$ は $C(X,Y)$ のなかで *dense* $G_\delta$*-subset* となっている。

**Remark**. $X$ をコンパクト距離空間、$Y$ を完備距離空間としたとき、$B(X,Y)$ はいつでも $C(X,Y)$ の中で $G_\delta$-subset になっている。

以上のことにより、ラフな言い方をしてしまえばコンパクト距離空間から多様体、多面体への連続写像全体のうち、そのほとんど全てが Bing map になっていることがわかる。
また、定理 2.6 の応用として次もわかる。

**定理 2.7** (Song and Tymchatyn [24])
$X$ をコンパクト距離空間、$Y$ を *1* 次元 *Peano continuum*、または *n-dimensional Menger manifold* とする。このときこのとき $B(X,Y)$ は $C(X,Y)$ のなかで *dense* $G_\delta$*-subset* となっている。

次の定理は、全射連続写像を全射 Bing map で近似する事についての結果である。この結果により特に連結な多面体は、任意の conntinuum の Bing map による像になっていることがわかる。
以下
$C_s(X,Y) = \{f \in C(X,Y) | f : \text{surjection}\}$、
$B_s(X,Y) = \{f \in C_s(X,Y) | f : \text{Bing map}\}$
とする。

**定理 2.8** (Kato and Matsuhashi [10])

$X$ を *continuum*、$Y$ を 1 点集合でない連結な有限多面体（または 1 次元 *Peano continuum, n-dimensional Menger manifold*$(n \geq 1)$）とする。このとき $B_s(X,Y)$ は $C_s(X,Y)$ のなかで *dense* $G_\delta$*-subset* となっている。

こうしてみてくると、像となる空間が何でもよさそうな気がしてくるが、そうではないことが次の結果により分かる。

**定理 2.9** (Krasinkiewicz [15])

$Y$ を次のような空間とする：

（☆）$Y$ の開集合で *arc* を含まないものが存在する。

このとき $B(X,Y)$ が $C(X,Y)$ で *dense* にならないようなコンパクト距離空間 $X$ が存在する。

上の結果により、像となる空間はあまりに複雑すぎるとこれまで証明されてきたような結果が成り立たないということが分かる。また、2 次元以上の Peano continuum の場合でも同様の結果が分かっている。

**定理 2.10** (Song and Tymchatyn [24])

$n \geq 2$ に対して $B(X_n, Y_n)$ が $C(X_n, Y_n)$ で *dense* にならないようなコンパクト距離空間 $X_n$ と $n$ 次元 *Peano continuum* $Y_n$ が存在する。

**Problem 2.11** $X$ をコンパクト距離空間、$Y$ を *ANR* とする。このとき $B(X,Y)$ は $C(X,Y)$ で *dense* になっているか？

# 3 $n$-dimensional maps and $n$-dimensional Lelek maps

この章ではコンパクト距離空間から、ANR への Lelek map 全体からなる集合が、写像空間のなかでがどのような集合になっているかをみていく。

**定義 3.1** 連続写像 $f : X \to Y$ が *n-dimensional map* であるとは、任意の $y \in Y$ に対して $\dim f^{-1}(y) \leq n$ であるときに言う。

**Remark.** 話が少し脱線するが $n$-dimensional map に関しては次のような定理が分かっている。下の定理は $n$-dimensional map $f : X \to Y$ が与えられたとき、その fiber 全てを同時に 1 次元 continuum の積空間に埋め込むことについての結果である。特に定理の中の $Y$ が 1 点集合の場合を考えると

「$n$ 次元コンパクト距離空間から $\prod_{j=1}^{n} D_j \times I$($D_j$ は superdendrite) への埋め込みは、その写像空間の中で dense $G_\delta$-subset になる」

という P.L.Bowers の結果が導かれる (cf. [3])。

**定理 3.2** (Kato and Matsuhashi [13])

*X, Y* をコンパクト距離空間、(但し $\dim Y = p$) $D_1, D_2, ..., D_n$ を $n$ 個の *superdendrite*（=*end-point* が *dense* にある樹木)、$f : X \to Y$ を *n-dimensional map* とする。このとき $0 \leq i \leq p$ となる $i$ に対して、$\{g \in C(X, \prod_{j=1}^{n} D_j \times I^{p+1-i}) | f \times g : X \to \prod_{j=1}^{n} D_j \times I^{p+1-i} : (i+1)\text{-to-1 map}\}$ は $C(X, \prod_{j=1}^{n} D_j \times I^{p+1-i})$ のなかで *dense* $G_\delta$*-subset* となっている。

**定義 3.3** $X, Y$ をコンパクト距離空間、$f: X \to Y$ を連続写像とし、

$F(f) = \bigcup\{C|C : C$ *is a nontrivial component of fiber of* $f\}$

とする。

$n \in \mathbb{N}$ に対して、$\dim F(f) \leq n$ のとき $f: X \to Y$ を *n-dimensional Lelek map* という (cf. Lelek [18])。

$n$-dimensional Lelek map は $n$-dimensional map よりも強い性質をもつ連続写像である。逆に $n$-dimensional map が $n$-dimensional Lelek map となるわけではない。たとえば、$p: I^2 \to I$ を projection とすれば、$p$ は 1-dimensional map であるが、1-dimensional Lelek map ではない (2-dimensional Lelek map となる)。これについては Levin が次の結果を示した。

以下 $L_n(X, Y) = \{f \in C(X, Y) | f : n\text{-dimensional Lelek map}\}$ とする。

**定理 3.4** (Levin [20])

$n, k \in \mathbb{N}$ を自然数で $n \geq k$ とし、$X$ を $n$ 次元コンパクト距離空間とする。このとき、$L_{n-k}(X, I^k)$ は $C(X, I^k)$ で *residual set* (=*dense* $G_\delta$*-subset* を含む集合 ) となっている。

この結果については改良する事が出来た。その前にいくつか定義を用意する。

**定義 3.5** $P$ を *finite polyhedron*、$Y$ を空間とする。連続写像 $\varphi: P \to Y$ が *a piecewise embedding* であるとは、次のような単体的複体 $\mathcal{K}$ が存在するときにいう。

(1) $P = |\mathcal{K}|$

(2) 任意の $\sigma \in \mathcal{K}$ に対して $\varphi|\sigma : \sigma \to Y$ は *embedding*

(3) $\varphi(P)$ は *ANR*

**定義 3.6** 空間 $Y$ に対して、*piecewise embedding dimension of* $Y$ (= $ped(Y)$) を、次をみたす自然数 $k$ で最大のものとする*:*

$P$ :$\dim P \leq k$ となる *finite polyhedron*、$g: P \to Y$ : 連続写像としたとき、 任意の $\varepsilon > 0$ に対して *piecewise embedding* $\varphi: P \to Y$ で $d(g, \varphi) < \varepsilon$ を満たすものが存在する。

例えば、$I^k$、n-dimensional manifold などは piecewise embedding dimension が $k$ となる。

Lelek map については次の結果を得た。

**定理 3.7** (Kato and Matsuhashi, [12])

$n, k \in \mathbb{N}$ を自然数で $n \geq k$ とし、$X$ を $n$ 次元コンパクト距離空間、$Y$ を $ped(Y) \geq k$ となる完備 *ANR* とする。このとき、$L_{n-k}(X, Y)$ は $C(X, Y)$ で *residual set* (=*dense* $G_\delta$*-subset* を含む集合 ) となっている。

**Corollary 3.8** (Kato and Matsuhashi, [12])

$n, k \in \mathbb{N}$ を自然数で $n \geq k$ とし、$X$ を $n$ 次元コンパクト距離空間、$M^k$ を *k-dimensional manifold* とする。このとき、$L_{n-k}(X, M^k)$ は $C(X, M^k)$ で *residual set* となっている。

**Corollary 3.9** (Kato and Matsuhashi, [12])

$n, k \in \mathbb{N}$ を自然数で $n \geq k$ とし、$X$ を $n$ 次元コンパクト距離空間、$Y$ を *k-dimensional Menger manifold* (または *1* 次元 *Peano continuum*) とする。このとき、$L_{n-k}(X, Y)$ ($L_{n-1}(X, Y)$) は $C(X, Y)$ で *residual set* となっている。

# 4 Krasinkiewicz maps to polyhedra

この章では、コンパクト距離空間から多面体への Krasinkiewicz map 全体からなる集合が、写像空間のなかでがどのような集合になっているかをみていく。

**定義 4.1** $X$ をコンパクト距離空間、$Y$ を完備距離空間とする。$f : X \to Y$ が *Krasinkiewicz map* であるとは、$X$ に含まれる任意の subcontinuum $C$ が $f$ の fiber に含まれるか、または $f$ の fiber の component を含むときにいう。

この連続写像も Bing map と Lelek map 同様、非常に複雑な連続写像である。Krasinkiewicz map の簡単な例は 0-dimensinal map や constant map などであるが、そうでない具体例は構成が難しい。しかし以下に記すように Krasinkiewicz map は非常に多く存在する。
(以下 $K(X,Y) = \{f \in C(X,Y) | f :$ Krasinkiewicz map $\}$ とする。)

**定理 4.2** (Krasinkiewicz [16], Levin and Lewis [21])
$X$ をコンパクト距離空間、$M^1$ を *1-dimensional manifold* とする。このとき $K(X, M^1)$ は $C(X, M^1)$ の中で *dense subset* になっている。

Krasinkiewicz は上の定理を次のように証明した。まず *Singular map* という、Bing map の中でも特別なタイプのものを考えた。次に、コンパクト距離空間から $n$-dimensional manifold ($n \geq 1$) への Sigular map 全体は写像空間の中で dense になっている事を証明した。そして最後に、コンパクト距離空間から 1-dimensional manifold への Singular map は Krasinkiwicz map になっている事を証明した。
また、Levin と Lewis は彼等独自の方法で上の定理を証明した（[21] を読むと、像となる空間が $I$ の場合について証明しているが、証明をよく読むと像となる空間は 1 次元多様体でもよい事がわかる)。

Krasinkiwicz map については次の結果を得る事が出来た。

**定理 4.3** ([23])
X をコンパクト距離空間、P を有限多面体とする。このとき $K(X,P)$ は $C(X,P)$ の中で dense $G_\delta$-subset となっている。

**Remark.** $X$ をコンパクト距離空間、$Y$ を完備距離空間としたとき、$K(X,Y)$ はいつでも $C(X,Y)$ の中で $G_\delta$-subset になっている（cf. [23])。

**Remark.** 定理 4.3 では、Baire の定理を用いずに dense-subset になっている事と $G_\delta$-subset になっている事をそれぞれ独立に証明した。

したがって、コンパクト距離空間から多面体への連続写像全体のうち、そのほとんど全ては Krasinkiewicz map になっている事が分かる。
Bing map の場合と同様に、定理 4.3 の応用として次がわかる。

**定理 4.4** ([23])
$X$ をコンパクト距離空間、$Y$ を *1* 次元 *Peano continuum*、または *n-dimensional Menger manifold* とする。このときこのとき $K(X,Y)$ は $C(X,Y)$ のなかで *dense* $G_\delta$*-subset* となっている。

以下 $K_s(X,Y) = \{f \in C_s(X,Y) | f :$ Krasinkiewicz map map $\}$ とする。

**定理 4.5** ([23])

$X$ を *continuum*、$Y$ を 1 点集合でない連結な有限多面体（または 1 次元 *Peano continuum, n-dimensional Menger manifold*($n \geq 1$)）とする。このとき $K_s(X,Y)$ は $C_s(X,Y)$ のなかで *dense* $G_\delta$*-subset* となっている。

また、Krasinkiewicz map の場合についても Bing map の場合と同様に、像となる空間が何でもよいという訳ではない。それは次の結果により分かる。

**定理 4.6**

$Y$ を次の条件を満たす 1 点集合でない *continuum* とする：

（☆）$Y$ の開集合で *arc* を含まないものが存在する。

このとき $K(X,Y)$ が $C(X,Y)$ で *dense* にならないようなコンパクト距離空間 $X$ が存在する。

つまり、像となる空間が hereditarily indecomposable continuum のようにあまりに複雑であると、これまでのような定理は成り立たない。

**Problem 4.7** $X$ をコンパクト距離空間、$Y$ を *ANR*（または *Peano continuum*）とする。このとき $K(X,Y)$ は $C(X,Y)$ で *dense* になっているか？

# 5 Applications

4 章での Krasinkiwicz の証明方法を振り返ってみると、彼は Bing map と Krasinkiwicz map の両方の性質を同時に持つ連続写像（これを *Bing-Krasinkiwicz map* と呼ぶことにする）全体が、コンパクト距離空間から 1 次元多様体への写像空間の中で dense subset になっている事を証明していることがわかる。

2 章、4 章での結果を合わせて考えると次の結果が分かる。

(以下 $BK(X,Y) = \{f \in C(X,Y) | f :$ Bing-Krasinkiewicz map $\}$ とする。)

**定理 5.1** $X$ をコンパクト距離空間、$Y$ を 1 点集合でない連結な有限多面体（または 1 次元 *Peano continuum, n-dimensional Menger manifold*($n \geq 1$)）とする。このとき $BK(X,Y)$ は $C(X,Y)$ のなかで *dense* $G_\delta$*-subset* となっている。

つまり、コンパクト距離空間から多面体へのほとんど全ての連続写像は Bing-Krasinkiewicz map になっている。

以下 $BK_s(X,Y) = \{f \in C_s(X,Y) | f :$ Bing-Krasinkiewicz map $\}$ とする。

**定理 5.2** $X$ を *continuum*、$Y$ を 1 点集合でない連結な有限多面体（または 1 次元 *Peano continuum, n-dimensional Menger manifold*($n \geq 1$)）とする。このとき $BK_s(X,Y)$ は $C_s(X,Y)$ のなかで *dense* $G_\delta$*-subset* となっている。

この定理により、特に 1 点集合でない連結な有限多面体、（または 1 次元 Peano continuum, n-dimensional Menger manifold($n \geq 1$)）は、任意の 1 点でない continuum の Bing-Krasinkiewicz map による像となっていることがわかる。

定理 5.2 の応用としては次が挙げられる。証明には Brown の inverse limit に関する近似定理（cf. [4]）を用いる。

**定理 5.3** (cf. Kato and Matsuhashi [10])
任意の一点集合でない *continuum* $X$ に対してある *inverse sequence* $\{P_i, g_i\}$ ( 但し $i = 1, 2, \ldots$ に対して $P_i$ は一点集合でない連結な有限多面体、$g_i : X_{i+1} \to X_i$ は全射 *Bing-Krasinkiewicz map*) が存在して $X = \varprojlim\{P_i, g_i\}$ となる。

以下は最近の結果で定理 5.2 の応用である。これは [10] の Problem 12 に対する肯定的な答えとなる。

**定理 5.4**
$Y$ を *1* 点集合でない *continuum* とする。$Y$ が *Peano continuum* であるための必要十分条件は、任意の *1* 点集合でない *continuum* $X$ に対して $X$ から $Y$ への全射 *Bing-Krasinkiewicz map* が存在することである。

次に像となる空間を manifold にしてみると、ほとんど全ての連続写像はさらに複雑な形をしたものになっている、という結果について紹介していく。
次は最近 Kato により示された。

**定理 5.5** (Kato [8], cf. Bruckner and Garg [5] and Buczolich and Darji [6])
$X$ を $n$ 次元以上のコンパクト距離空間、$M^n$ を $n$-dimensional manifold とし、$BG(X, M^n) \subset C(X, M^n)$ を次の 4 条件を満たす連続写像 $f : X \to M^n$ 全体からなる集合とする (このような性質を満たす連続写像を Bruckner-Garg map と呼ぶことにする)。

ある $(n-1)$-dimensional dense $F_\sigma$-subset $E \subset f(X)$ と $F_\sigma$-subset $S \subset f(X)$ が存在して、
(1) $f(X) = E \cup S$
(2) $y \in E \setminus S \Rightarrow |f^{-1}(y)| \leq n$
(3) $y \in E \cap S \Rightarrow \mathrm{Comp}(f^{-1}(y))(= f^{-1}(y)$ を *component* でつぶした空間) は Cantor set と $n_y$ 個 $(1 \leq n_y \leq n)$ の孤立点との和集合に同相。
(4) $y \in S \setminus E \Rightarrow \mathrm{Comp}(f^{-1}(y))$ は Cantor set に同相。

このとき $BG(X, M^n)$ は $C(X, M^n)$ の中で *residual set* となっている。

この定理と 2 章、3 章、4 章の話をまとめると次が得られる。

**定理 5.6** $m \geq n \geq 1$ とし、$X$ を $m$ 次元コンパクト距離空間、$M^n$ を（単体分割可能な）*n-dimensional manifold* とする。このとき
$\{f \in C(X, M^n) | f$ は *Bing map, Krasinkiewicz map,* $(m-n)$*-dimensional Lelek map, Bruckner-Garg map* の性質を全てもっている $\}$
は $C(X, M^n)$ のなかで *residual* となっている。

**remark** $m < n$ のときは次のような結果が分かっている：

**定理 5.7** (Hurewicz)
$X$ を $m$ 次元コンパクト距離空間、$M^{2m+1-i}$ を $(2m+1-i)$*-dimensional manifold* とする ( $0 \leq i \leq m$)。このとき $\{f \in C(X, M^{2m+1-i}) | |f^{-1}(y)| \leq i+1$ *for each* $y \in M^{2m+1-i}\}$ は $C(X, M^{2m+1-i})$ の中で *dense* $G_\delta$*-subset* になっている。

# 参考文献


[1] R. D. Anderson, *Open mappings of compact continua*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 42 (1956), 347–349.

[2] R. H. Bing, *Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 71(1951), 267-273.

[3] P.L.Bowers, *General position properties satisfied by finite products of dendrites*, Trans. Amer. Math. Soc., 228 (1985), no2, 739-753.

[4] M. Brown, *Some applications of an approximation theorem for inverse limits*, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), 478-483.

[5] A. M. Bruckner and K. M. Garg, *The level structure of a residual set of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 232(1977), 307-321.

[6] Z. Buczolich and U. B. Darji, *Pseudoarcs, pseudocircles, Lakes of Wada and generic maps on* $S^2$, Topology. Appl., 150(2005), 223-254.

[7] J.J.Charatonik, P.Krupski and P.Pyrih, *Examples in Continuum Theory*, http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pyrih/e/e2001v2/c/ect/

[8] H. Kato, *Higher dimensional Bruckner-Garg type theorem*, submitted.

[9] H. Kato and M. Levin, *Open maps on manifolds which do not admit disjoint closed subsets intersecting each fiber*. Topology. Appl., 103(2000), no.2, 221-228.

[10] H. Kato and E. Matsuhashi, *On surjective Bing maps*, Bull. Pol. Acad. Sci Math. 52 (2004), no.3, 329-333.

[11] H. Kato and E. Matsuhashi, *Extension of Bing maps*, 数理解析研究所講究録（一般及び幾何学的トポロジーと関連する諸問題）NO.1370, 102-116

[12] H. Kato and E. Matsuhashi, *Lelek maps and n-dimensional maps from compacta to polyhedra*, Topology. Appl. to appear.

[13] H. Kato and E. Matsuhashi, *Finite-dimensional maps and dendrites with dense sets of end points*, Colloq. Math., to appear.

[14] B. Knaster, *Un continu dont tout sous-continu est indecomposable*, Fund. Math., 3 (1922), 247-286.

[15] J. Krasinkiewicz, *On mappings with hereditarily indecomposable fibers*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 44 (1996), 147-156.

[16] J. Krasinkiewicz, *On approximation of mappings into 1-manifolds*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 44 (1996), no.4, 431-440.

[17] C. Kuratowski, *Théorie des continus irréductibles entre deux points*, Fund. Math., 3 (1922), 200-231.

[18] A. Lelek, *On mappings that change dimension of spheres*, Colloq. Math., 10 (1963), 45-48.

[19] M. Levin, *Bing maps and finite-dimensional maps*, Fund. Math., 151 (1996), 47-52.

[20] M. Levin, *Certain finite-dimensional maps and their application to hyperspaces*, Israel J. Math., 105 (1998), 257-262.

[21] M. Levin and W. Lewis, *Some mapping theorems for extensional dimension*, Israel J. Math. 133 (2003), 61-76.

[22] W. Lewis and J. Walsh *A continuous decomposition of the plane into pseudo-arcs* , Houston J. Math. 4 (1978), no. 2, 209–222.

[23] E. Matsuhashi, *Krasinkiewicz maps from compacta to polyhedra*, submitted.

[24] J. Song and E. D. Tymchatyn, *Free spaces*, Fund. Math. 163 (2000), 229-239.