

第 54 回
トポロジーシンポジウム
講演集

2007年8月6日～8月9日

於 会 津 大 学

平成19年度科学研究費基盤研究（A）

課題番号17204007

は し が き

この講演集は 2007 年 8 月 6 日から 8 月 9 日までの間、会津大学において開催される第 54 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。

その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立つことにある。

なおこの講演集は、

平成 19 年度科学研究費

研究種目	基盤研究 (A)
研究代表者	松元 重則
研究課題名	位相幾何学の総合的研究
課題番号	17204007

により作成されたものである。

世話人：	神谷 徳昭	(会津大学 総合数理科学センター)
	木原 浩	(会津大学 総合数理科学センター)
	河澄 響矢	(東京大学 大学院数理科学研究科)
	岩瀬 則夫	(九州大学 大学院数理学研究院)

第54回トポロジーシンポジウム

プログラム

8月6日(月)

- 15:40 – 16:40 谷山 公規 (早稲田大学 教育・総合科学学術院)
On the structure of the Gordian complex of knots 1
- 17:00 – 18:00 宮澤 康行 (山口大学 大学院理工学研究科)
Polynomial invariants for virtual links 9

8月7日(火)

- 9:30 – 10:30 大田 春外 (静岡大学 教育学部)
点有限1の分割の拡張問題
(山崎薫里(高崎経済大)との共同研究) 19
- 10:50 – 11:50 境 圭一 (東京大学 大学院数理科学研究科 COE
研究員)
Poisson structure on the homology of the space of framed long knots ... 31
- 14:00 – 15:00 Rustam Sadykov (九州大学 大学院数理学研究院
学振外国人特別研究員)
The homotopy and bordism principles 41
- 15:20 – 16:20 井上 雅照 (京都大学 大学院理学研究科 COE 研
究員)
The Steenrod algebra and the automorphism group of additive formal group
law 51
- 16:40 – 17:40 亀子 正喜 (富山国際大学 地域学部)
Morava K -theories of classifying spaces of compact Lie groups 61

8月8日(水)

9:30 – 10:30 北野 晃朗 (創価大学 工学部)

結び目群の有限体上の線型表現とその応用

(鈴木正明 (秋田大学) との共同研究) 69

10:50 – 11:50 長郷 文和 (東京工業大学 大学院理工学研究科 学
振特別研究員 (PD))

Character variety の断面から誘導される代数多様体族と knot contact
homology 81

13:10 – 14:10 伊藤 敏和 (龍谷大学 経済学部)

正則 1-形式に対する Poincaré-Hopf 型定理とその応用 91

14:30 – 15:30 浅岡 正幸 (京都大学 大学院理学研究科)

可解リー群の余次元 1 作用の剛性について 99

15:50 – 16:50 中村 信裕 (東京大学 大学院数理科学研究科 COE
研究員)

Bauer-Furuta invariants and a non-smoothable involution on $K3\#K3$.. 109

17:10 – 18:10 原田 芽ぐみ (McMaster University, Department of
Mathematics and Statistics)

The topology of symplectic and hyperkähler quotients 121

8月9日(木)

9:30 – 10:30 泉屋 周一 (北海道大学 大学院理学研究院)

双曲空間内のホロ球面的幾何学 131

10:50 – 11:50 Kenneth J. Shackleton (東京工業大学 大学院情報
理工学研究科)

On the large-scale geometry of the Weil-Petersson metric 143

On the structure of the Gordian complex of knots

2007年8月 第54回トポロジーシンポジウム 於 会津大学

早稲田大学 教育・総合科学学術院 谷山公規

§1. 導入

結び目理論の歴史を観ると、その草創期には個々の結び目を互いに独立したものと見て研究していたように思われるが、Conway 多項式のスケイン関係式の発見、Jones 多項式の発見、そして Vassiliev 不変量の発見によって、結び目あるいは絡み目全体の集合のなす構造を研究することで、個々の結び目絡み目の性質も理解しようという気運が近年高まって来ているように思われる。Vassiliev 不変量の研究と密接な関係がある結び目絡み目の局所変形の理論は、鈴木晋一先生、渋谷哲夫先生、中西康剛先生、村上斉先生、大山淑之さん、安原晃さん、葉広和夫さんら多くの日本人によって研究されて来た伝統のある分野であることにも注目したい。本講演では内田吉昭さん-平澤美可さん [3] によって定義された結び目全体の集合が交差交換に関してなす Gordian complex の構造についての最近の研究を紹介する。

§2. 結び目の Gordian complex

\mathcal{K} を 3次元球面 S^3 内の有向結び目型全体の集合とする。 \mathcal{K} は可算無限集合である。以下では結び目型と結び目を区別しないことにする。 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ に対して、 $d_G(K_1, K_2)$ で K_1 を K_2 に変形するのに必要な交差交換 (図 1 (a)) の最小回数を表わすことにする。 $d_G(K_1, K_2)$ は K_1 と K_2 の Gordian distance と呼ばれる。 \mathcal{K} の有限部分集合 \mathcal{H} が n 単体であるとは、 \mathcal{H} はちょうど $n + 1$ 個の結び目からなり、そのうちの任意の 2 つの結び目 K_1, K_2 について $d_G(K_1, K_2) = 1$ であること、と定義する。 \mathcal{K} の単体全体の集合を \mathcal{C}_G とおく。このとき対 $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_G)$ は単体的複体とみなすことが出来る。これを結び目の Gordian complex と呼ぶ。

この定義において、交差交換のところを delta 変形 [8] [7] (図 1 (b)) や C_k -変形 [2] (図 1 (c)) に替えて得られる複体を、それぞれ結び目の delta Gordian complex $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_\Delta)$ 、

結び目の C_k -Gordian complex $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_{C_k})$ と呼ぶ。

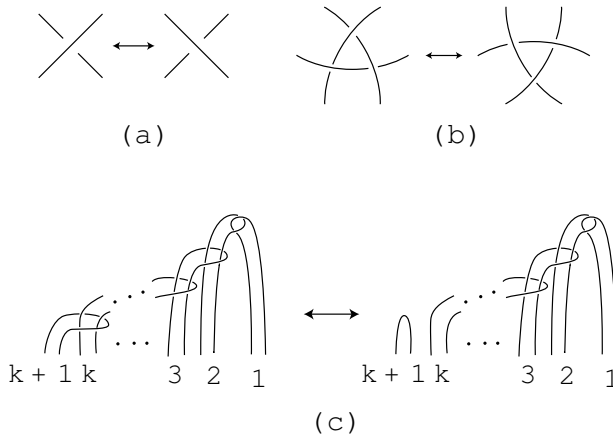


図 1

内田吉昭さん-平澤美可三さんは次を示した。

定理 1. [3] $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_G)$ の任意の 1 単体 \mathcal{H} と任意の自然数 n に対して $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_G)$ の n 単体 \mathcal{J} で $\mathcal{H} \subset \mathcal{J}$ なるものが存在する。

$(\mathcal{K}, \mathcal{C}_{C_k})$ に関しては大山淑之さんによって次が示されている。

定理 2. [11] k を 3 以上の自然数とする。 $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_{C_k})$ の任意の 0 単体 \mathcal{H} と任意の自然数 n に対して $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_{C_k})$ の n 単体 \mathcal{L} で $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ なるものが存在する。

一方 S. Baader さんは次を示した。

定理 3. [1] $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ が $d_G(K_1, K_2) = 2$ を満たすとき、互いに異なる無限個の有向結び目 J_1, J_2, J_3, \dots が存在して $d_G(K_i, J_j) = 1$ ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3, \dots$) を満たす。

注 4. 定理 3 は Gordian distance が 2 の任意の 2 つの結び目 K_1, K_2 に対して、 K_1 から K_2 への交差交換の途中経路として互いに異なる結び目が無限個存在することを示している。Gordian distance が 1 の 2 つの結び目、すなわち 1 回の交差交換で互いに移り合う 2 つの結び目で、その交差交換の仕方が本質的に異なるものがあるかという問題についてもいくつかの結果が知られている。例えば図 2 は本質的に異なる結び目解消操作を 2 つ

持つ結び目の例である [13]。これらの結び目解消操作が異なることは、交差交換の途中に現れる交差頂点を 1 つ持つ特異結び目が互いに異なることから分かる。本質的に異なる結び目解消操作を無限個持つ結び目があるかどうかは筆者は知らない。delta 変形に関しては無限個の本質的に異なる delte 変形が存在することが内田吉昭さんによって示されている [14]。

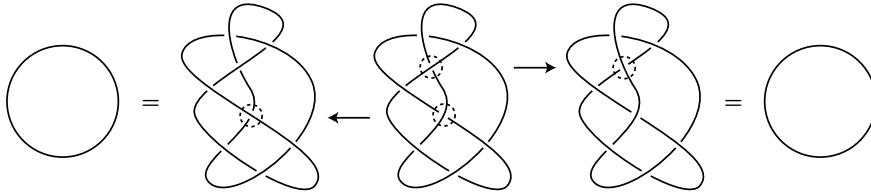


図 2

$d_{\Delta}(K_1, K_2)$ で有向結び目 K_1 を K_2 に変形するために必要な delta 変形の最小回数を表わすことにする。堀内澄子さんは定理 3 の delta 変形版である次の定理を示した。

定理 5. [5] $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ が $d_{\Delta}(K_1, K_2) = 2$ を満たすとき、互いに異なる無限個の有向結び目 J_1, J_2, J_3, \dots が存在して $d_{\Delta}(K_i, J_j) = 1$ ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3, \dots$) を満たす。

次が主定理である。

主定理. m, n を非負整数とする。有向結び目 $K_0, K_1, K_2, \dots, K_m, K_{m+1}, \dots, K_{m+n}$ が、

$$d_G(K_0, K_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$d_{\Delta}(K_0, K_i) = 1 \quad (i = m + 1, m + 2, \dots, m + n)$$

を満たすとする。このとき互いに異なる無限個の有向結び目 J_1, J_2, J_3, \dots が存在して以下を満たす。

$$d_G(J_j, K_i) = 1 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots),$$

$$d_{\Delta}(J_j, K_i) = 1 \quad (i = m + 1, m + 2, \dots, m + n, \quad j = 1, 2, 3, \dots).$$

注 6. (1) 主定理で $n = 0$ の場合は、筆者がこの研究を開始する以前に中西康剛先生 [9] が河内明夫先生のイミテーション理論 [6] を用いた証明を与えている (と筆者は伺っている)。

(2) 主定理は定理 3 と定理 4 の両方の一般化になっている。

(3) 主定理で $d_G(J_j, K_i) = 1$ が $i = 0$ の場合も成立するように出来ることは内田吉昭さんに教えて頂いた。

結び目の delta Gordian complex $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_\Delta)$ については次が分かっている。

命題 7. $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_\Delta)$ は 1 次元複体である。すなわち $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_\Delta)$ には 2 単体は存在しない。さらに無限グラフとして 2 組グラフになっている。

$a_n(K)$ を結び目 K の Conway 多項式の n 次の係数とする。命題 7 は次の定理 8 から直ちに得られることである。

定理 8. [8] $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ が $d_\Delta(K_1, K_2) = 1$ を満たすとき $a_2(K_1) - a_2(K_2)$ は奇数である。

注 9. 実際にはこのとき $a_2(K_1) - a_2(K_2) = \pm 1$ となることが証明されている [12]。

主定理の系として次を得る。

系 10. (1) m, n を任意の非負整数とする。 \mathcal{H} を $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_G)$ の任意の m 単体とする。このとき $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_G)$ の $(m+n)$ 単体 \mathcal{L} で $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ であるものが存在する。

(2) m, n を任意の自然数とし、 p, q を任意の非負整数とする。 $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_\Delta)$ の任意の完全 2 部分グラフ $K_{m,n}$ に対して、 $(\mathcal{K}, \mathcal{C}_\Delta)$ の完全 2 部グラフ $K_{m+p, n+q}$ で $K_{m,n} \subset K_{m+p, n+q}$ であるものが存在する。

尚、Gordian complex に関しては最近 S. Baader さんが活発に研究を推進しているようである。また中西康剛先生-大山淑之さんによる研究 [10] もある。

§3. 証明

主定理の証明のために次の補題を準備する。

補題 11. m, n を非負整数とする。有向結び目 $K_0, K_1, K_2, \dots, K_m, K_{m+1}, \dots, K_{m+n}$ が、

$$d_G(K_0, K_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$d_\Delta(K_0, K_i) = 1 \quad (i = m + 1, m + 2, \dots, m + n)$$

を満たすとする。このときある有向結び目 K が存在して、

K_0 は K と Hopf links $H_0, H_1, H_2, \dots, H_m$, Borromean rings B_1, B_2, \dots, B_n のバンド和

$$K_0 = K \natural H_0 \natural H_1 \natural H_2 \natural \dots \natural H_m \natural B_1 \natural B_2 \natural \dots \natural B_n$$

で、バンドのつながり方は抽象的には図 3 のようになっている、

$$K_0 - H_i = K_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

$$K_0 - B_i = K_{m+i} \quad (i = m + 1, m + 2, \dots, m + n)$$

を満たすものとして表わすことが出来る。

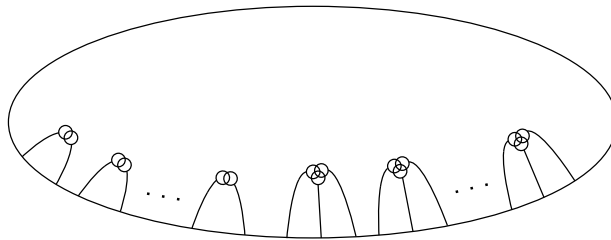


図 3

証明の概略 K_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) は K_0 から 1 回の交差交換で得られるので ($i = 0$ の場合は K_0 から K_0 への自明な交差交換を考える)、その交差交換を Hopf link のバンド和で置き換えることにより、図 4 のように K_0 に Hopf link H'_i をバンド和した形で表せる。また K_i ($i = m + 1, m + 2, \dots, m + n$) は K_0 から 1 回の delta 変形で得られるので、その delta 変形を Borromean rings のバンド和で置き換えることにより、図 4 のように K_0 に Borromean rings B'_i をバンド和した形で表せる。これらのバンドを全て同時に K_0 に付けて得られた有向結び目を K とおく。すなわち

$$K = K_0 \natural H'_0 \natural H'_1 \natural H'_2 \natural \dots \natural H'_m \natural B'_1 \natural B'_2 \natural \dots \natural B'_n.$$

ここで K_0 に付くバンドの位置を調整して、全体が抽象的には図 3 のような平面グラフになるようにしておく。

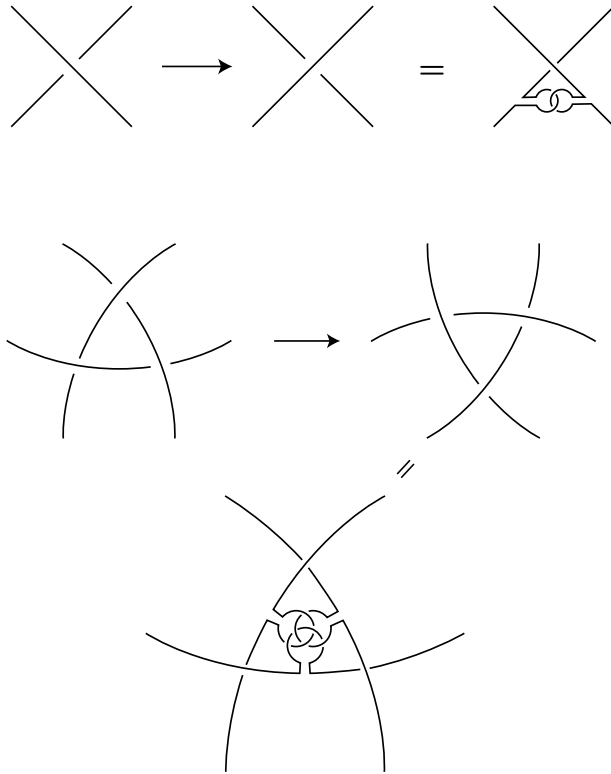


図 4

ここで図 5 のように H'_i をキャンセルするように H_i を、 B'_i をキャンセルするように B_i をつける。するとこれが求める

$$K_0 = K \natural H_0 \natural H_1 \natural H_2 \natural \cdots \natural H_m \natural B_1 \natural B_2 \natural \cdots \natural B_n$$

になっていることが分かる。□

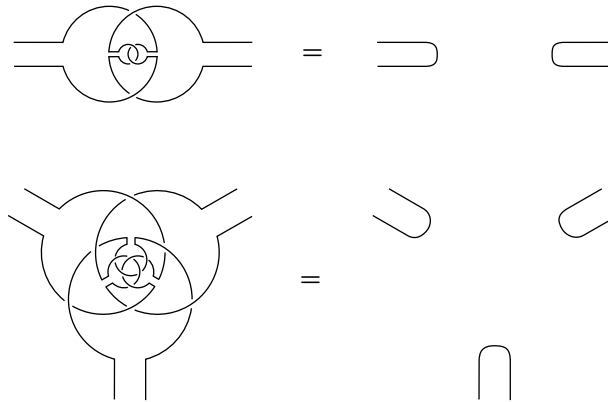


図5

主定理の証明の概略 補題11のバンド和のバンドたちを引っ張って来てMilnor link 状に絡ませる。ここで H_0 のバンドが H_1 のバンドに絡む回数が j 回であるものが J_j である。このとき J_j たちが全て互いに異なることは堀内澄子さんによる次の定理を応用することで示される。

$P(L; t, z)$ を成分数が r の有向絡み目 L の HOMFLYPT 多項式とし、

$$P(L; t, z) = \sum_{m \geq 1} P_{2m-r-1}(L; t) z^{2m-r-1}$$

によって $P_{2m-r-1}(L; t)$ を定義する。その t に関する n 階微分に $t = 1$ を代入したものを $P_{2m-r-1}^{(n)}(L; 1)$ とする。

定理12. [4] n を3以上の自然数とする。有向結び目 K_1 と K_2 が1回の C_n -変形で互いに移り合うとする。この C_n -変形に対応する *Jacobi diagram* を D とする。このとき

$$P_0^{(n)}(K_1; 1) - P_0^{(n)}(K_2; 1) = \begin{cases} 0 & : D \text{ が非平面的グラフのとき} \\ \pm n! \cdot 2^n & : D \text{ が平面的グラフのとき.} \end{cases}$$

以上より J_1, J_2, \dots が求めるものとなっていることが分かる。□

例13. 主定理の例として K_0 は自明な結び目、 $m = 2$ で K_1 は8の字結び目、 K_2 は 5_2 結び目、 $n = 1$ で K_3 は三葉結び目の場合の J_2 を証明の方法に沿って構成したものを図6に図示する。

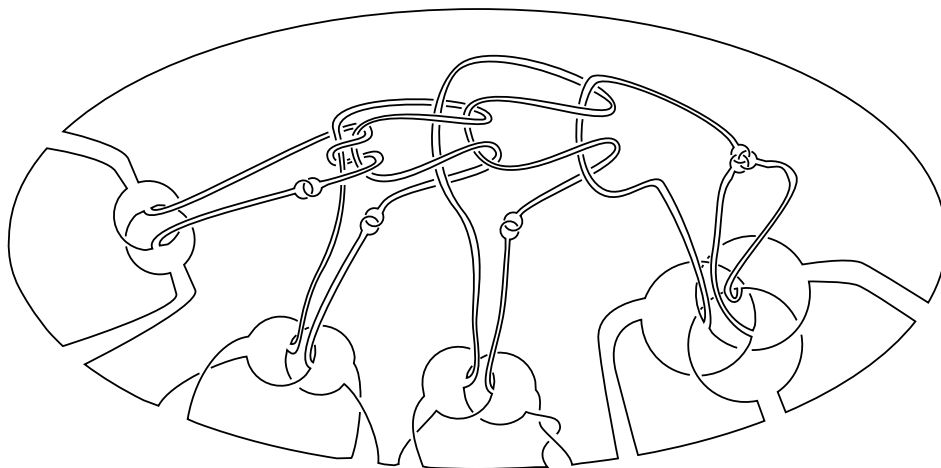


図 6

References

- [1] S. Baader: Note on crossing changes, *Quart. J. Math.*, 57, 139-142, 2006.
- [2] K. Habiro: Claspers and finite type invariants of links, *Geom. Topol.*, 4, 1-83, 2000.
- [3] M. Hirasawa and Y. Uchida: The Gordian complex of knots, *J. Knot Theory Ramifications*, 11(3), 363-368, 2002.
- [4] S. Horiuchi: The Jacobi diagram for a C_n -move and the HOMFLY polynomial, *J. Knot Theory Ramifications*, 16(2), 227-242, 2007.
- [5] S. Horiuchi: On a ball in a metric space of knots by delta moves, to appear in *J. Knot Theory Ramifications*.
- [6] A. Kawauchi: Almost identical imitations of $(3, 1)$ -dimensional manifold pairs, *Osaka J. Math.*, 26, 743-758, 1989.
- [7] S. Matveev: Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology spheres (Russian), *Mat. Zametki*, 42(2), 268-278, 345, 1987.
- [8] H. Murakami and Y. Nakanishi: On a certain move generating link-homology, *Math. Ann.*, 284(1), 75-89, 1989.
- [9] Y. Nakanishi: Private communication.
- [10] Y. Nakanishi and Y. Ohyama: Local moves and Gordian complexes, *J. Knot Theory Ramifications*, 15(9), 1215-1224, 2006.
- [11] Y. Ohyama: The C_k -Gordian complex of knots, *J. Knot Theory Ramifications*, 15(1), 73-80, 2006.
- [12] M. Okada: Delta-unknotted operation and the second coefficient of the Conway polynomial, *it J. Math. Soc. Japan*, 42(4), 713-717, 1990.
- [13] K. Taniyama: On unknotting operations of two-bridge knots, *Math. Ann.*, 291(4), 579-589, 1991.
- [14] Y. Uchida: On delta-unknotted operation, *Osaka J. Math.*, 30(4), 753-757, 1993.

Polynomial invariants for virtual links

宮澤 康行

山口大学大学院理工学研究科

1 Introduction

仮想結び目・絡み目 (virtual knots and links) およびそれに伴う基礎理論は、1996年 Kauffman [9] によって導入された。仮想結び目・絡み目の概念は厚みづけられた曲面に埋め込まれた結び目・絡み目という幾何学的解釈 [7] がなされるので、仮想結び目理論は古典的結び目理論の1つの拡張として展開されることがわかる。それゆえ、仮想結び目理論の研究課題の1つとして、仮想結び目の分類という問題が挙げられる。現時点では、分類の手段には不変量を用いるのが一般的である。そのため、多くの不変量、とくに多項式不変量が発見・定義されている。[1, 2, 3, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 20] 古典的結び目の多項式不変量を拡張・改良した形のもものが主流を占めるが、仮想結び目の特性を利用して構成されているものもある。ここでは、ジョーンズ多項式を拡張した形である不変量 [5, 6, 15, 16, 17, 18] を3つ紹介する。これら多項式の大きな特徴は仮想交点数 (virtual crossing 数) を評価できることである。仮想交点数とは仮想結び目・絡み目の不変量であり、古典的結び目・絡み目とどのくらいかけ離れているかその仮想度 (?) を表す量である。それゆえ、以下ではこの点に主眼をおいて結果等を述べる。蛇足であるが、仮想交点数は仮想結び目・絡み目を曲面上に実現したときの曲面の種数とも関係があることを付記しておく。

なお、次節以降、用語等をすべて日本語表記に統一するのは難しい点がある。そのため、英語表記と日本語表記が混在するが、ご容赦いただきたい。

2 Virtual Knots and Links

virtual link diagram とは、 \mathbb{R}^2 に横断的に交点をもつようにはめ込まれた閉曲線で、各交点に図1で示すような情報が与えられたものである。図1の左側の交点を *real crossing*, 右側の交点を *virtual crossing* と呼ぶ。



図 1: Crossings

図2は virtual knot diagram の例である。virtual crossing は本来実在の交点を表すものではない。diagram が曲面上に実現されれば存在しない交点である。



図 2: A virtual knot diagram

図 3 に示す diagram の局所的な変形を *classical Reidemeister move* といい, 図 4 に示す diagram の局所的な変形を *virtual Reidemeister move* という。virtual Reidemeister move は virtual link diagram と結び目の表記法である Gauss code diagram との対応関係から要請された diagram の変形である。classical Reidemeister move と virtual Reidemeister move を合わせて拡張 Reidemeister move という。

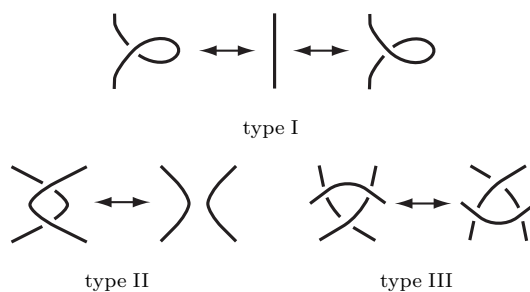


図 3: Classical Reidemeister moves

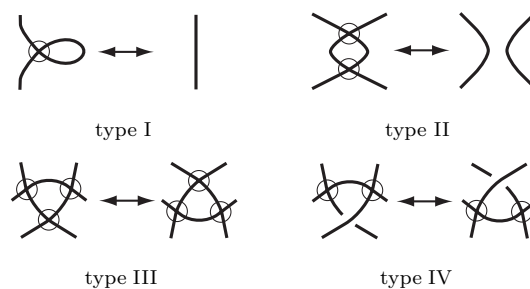


図 4: Virtual Reidemeister moves

2 つの virtual link diagram は有限回の拡張 Reidemeister move によって移り合うとき同値であると定め, その同値類を *virtual link* と呼ぶ。図 5 は同値な diagram の例である。

classical link diagram は virtual crossing をもたない virtual link diagram とみなせるので, virtual link は classical link の 1 つの拡張である。

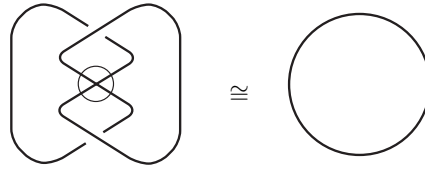


図 5: Equivalent diagrams

3 Graph Diagrams

この節では, virtual link の多項式不変量を定義するために用いるグラフ図式 (graph diagram) について説明する。

magnetic graph とは次の条件をみたす向き付けられた 3次元球面内の graph である。

- (1) 頂点 (vertex) の次数は 2
- (2) 各成分は偶数個 (≥ 0) の頂点を持つ
- (3) 各成分の辺 (edge) の向きは交替的

magnetic graph diagram とは, magnetic graph の \mathbb{R}^2 への射影から得られた正則表示のことである。図 6 は magnetic graph の例である。

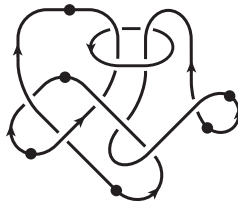


図 6: A magnetic graph diagram

classical link diagram は頂点のない magnetic graph diagram と考えられるので, magnetic graph diagram は classical link diagram の 1 つの一般化である。

classical link diagram を virtual link diagram に拡張するのを模倣して, virtual crossing を許容する magnetic graph diagram を定義する。それを, *virtual magnetic graph diagram* と呼ぶ。(簡単のため, VMG diagram と記述する。) 図 7 は VMG diagram の例である。

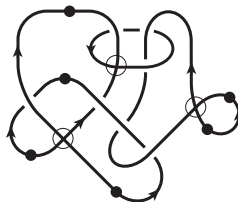


図 7: A VMG diagram

VMG diagram の頂点には 2 本の辺が接続している。頂点に対し接続している辺の 1 つを指定することを頂点に向き付けるという。(向きの与え方の手法は異なるが、向きの付いた頂点の概念は [4] において導入されている。) そのとき, diagram 上では頂点の向きを, 指定された辺の方向を向いた三角形によって表すことにする。図 8 の例では頂点は右方向の向きを持っている。

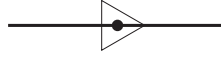


図 8: An orientation of a vertex

Decorated VMG diagram とは, 各頂点に向き付けられた VMG diagram のことである。(簡単のため, DVMG diagram と記述する。) 図 9 は DVMG diagram の例である。頂点のない DVMG diagram は virtual link diagram であるので, DVMG diagram は virtual link diagram の 1 つの一般化であると考えられる。

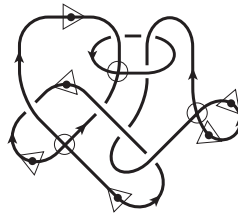


図 9: A DVMG diagram

2 つの DVMG diagram は有限回の拡張 Reidemeister move によって移り合うとき, 同値であると定め, その同値類を *decorated virtual magnetic graph* と呼ぶ。

上記の graph diagram の関係をまとめると次のようになる。

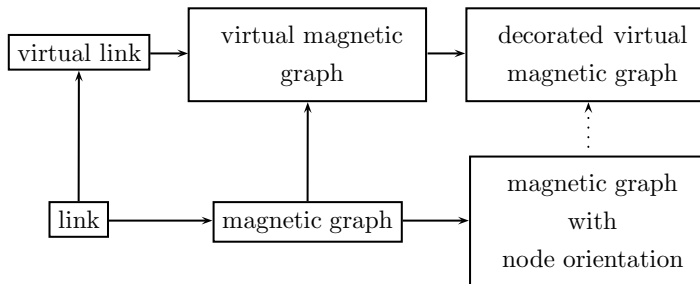


図 10: A relationship

4 Polynomial Invariants

ここでは, virtual link に対して定義される 3 つの多項式不変量を紹介する。

4.1 2-variable polynomial for oriented virtual links

まず, VMG diagram を用いて構成される不変量について述べる。

VMG diagram は交点がすべて virtual であるとき *pure* と言われる。

D を pure VMG diagram とし, $e(D)$ を D の辺の集合とする。 D の *weight map* とは, $e(D)$ から $\{1, -1\}$ への写像で, 隣接する 2 つの辺の像の積が -1 となるものこととする。 D の weight map の集合を $WM(D)$ で表す。weight map f による D の辺 e の像 $f(e)$ は e の weight と呼ばれる。 D の weight map が 1 つ与えられるということは, D の各辺に weight が与えられるということである。 D の各辺に weight が指定されると, D の virtual crossing は 2 つの型に分類される。1 つは交点を構成する 2 つの辺の weight の積が $+1$ であるもの, もう 1 つは weight の積が -1 となるものである。前者を *regular crossing*, 後者を *irregular crossing* という。irregular crossing を, それを形成している 2 つの辺のうち, weight が $+1$ のものを上交差点, -1 のものが下交差点となるように real crossing に変形することができる。この操作を D のすべての irregular crossing に対して行うことにより D から VMG diagram を作るすることができる。この diagram を weight map f に関する D の *raised diagram* といい, \widehat{D}_f で表す。

写像 $F_D : WM(D) \rightarrow \mathbb{Z}$ を $F_D(f) = w(\widehat{D}_f)$ で, 写像 $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}[A^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ を $g(m) = t^m$ で与える。ここで, $w(\widehat{D}_f)$ は \widehat{D}_f の *writhe* である。

$\mu(D)$ 成分を持つ pure VMG diagram D に対し, $2^{-\mu(D)} \sum_{f \in WM(D)} (g \circ F_D)(f)$ を D の *double bracket polynomial* といい, $\langle\langle D \rangle\rangle$ で表す。

不変量は状態和 (state sum) と呼ばれる手法を用いて構成される。

D を VMG diagram, c を D の real crossing とする。図 11 のように, c を平滑化する 2 種類の仕方を *0-splice*, ∞ -*splice* と呼ぶ。

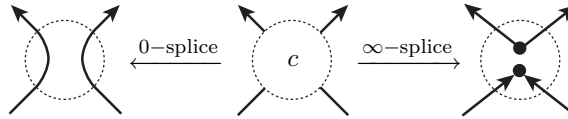


図 11: Two kinds of splices at c

D のステイト (state) とは, D の各 real crossing を平滑化 (0-splice または ∞ -splice) して得られた pure VMG diagram のことである。 D の state の集合を $s(D)$ で表す。

S を D の state とする。 $C_0(D; S)$ (resp. $C_\infty(D; S)$) を D から S を得るために 0-splice (resp. ∞ -splice) された D の real crossing の集合とし, $sg(D; S) = \sum_{c \in C_0(D; S)} \text{sign}(c) - \sum_{c \in C_\infty(D; S)} \text{sign}(c)$ とする。

$$P_D = (-A^3)^{-w(D)} \sum_{S \in s(D)} A^{sg(D; S)} \{-(A^2 + A^{-2})\}^{\mu(S)-1} \langle\langle S \rangle\rangle \in \mathbb{Q}[A^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$$

と定める。([6] では同様の多項式が raised diagram を用いずに定義されている。)

Theorem 4.1. VMG diagram D と D' が同値ならば, $P_D = P_{D'}$ が成り立つ。

L を virtual link, D を L の diagram とする。Theorem 4.1 により, $P_L = P_D$ によって L の多項式を定めることができる。

Corollary 4.2. P_L は *virtual link* の不変量である。

$\max \deg_t R_L$ を P_L の t の最大次数とし, $v(L)$ を L の virtual crossing 数とする。

Proposition 4.3. $v(L) \geq \max \deg_t R_L$.

Example 4.4. K を図 12 の *virtual knot* とする。 $P_K = \frac{1}{2}(A^4 + A^{-4}) - \frac{1}{4}(A^2 - A^{-2})^2(t^2 + t^{-2})$ なので, $\max \deg_t R_L = 2$ 。ゆえに, $v(K) = 2$ が示せる。

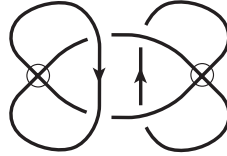


図 12: Kishino's knot

4.2 A multi-variable polynomial for oriented virtual links

次に DVMG diagram を用いて構成される多項式不変量について述べる。

D を DVMG diagram, v を D の頂点とする。 v に接続している辺がともに v から出て行く向きをもつとき, v を *north vertex*, ともに v に入ってくる向きをもつとき, *south vertex* と呼ぶ。

v の指数を, v が north vertex ならば 2, south vertex ならば -2 によって定め, $idx(v)$ で表す。

e_v を v の向きを与える D の辺とし, f を D の weight map とする。 f に関する v の符号を $\text{sign}_f(v) = \frac{1}{2} idx(v) f(e_v)$ で与える。従って, $\text{sign}_f(v) = \pm 1$ である。 D_j を D の成分, $\text{VX}(D)$ を D_j の頂点の集合とすると, $\text{vxw}_f(D_j) = \sum_{v \in \text{VX}(D_j)} \text{sign}_f(v)$ を f に関する D_j の *vertex writhe* と

いう。

写像 $F_D^{<j>} : \text{WM}(D) \rightarrow \mathbb{Z}$ を $F_D^{<j>}(f) = \text{vxw}_f(D_j)$ で,

写像 $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}[A^{\pm 1}, d_0, d_1, d_{-1}, \dots, d_n, d_{-n}, \dots]$ を $h(m) = d_m$ で与える。

D に対する多項式を次のように定義する。

$$X_D = 2^{-\mu(D)} \sum_{f \in \text{WM}(D)} \left(\prod_{j=1}^{\mu(D)} (h \circ F_D^{<j>})(f) \right).$$

さらに, $\overline{X}_D = X_D|_{d_0 = -(A^2 + A^{-2})}$ とする。

不変量は state sum を用いて構成される。

D を DVMG diagram, c を D の real crossing とする。 c を平滑化する仕方を図 13 のような 2 種類とし, 0-splice, ∞ -splice と呼ぶ。

D の state とは D の各 real crossing を平滑化して得られた DVMG diagram である。 D の state の集合を $s(D)$ で表す。

S を D の state とし, $sg(D; S)$ を 4.1 節と同様にして定義された値とする。

$$H_D = \sum_{S \in s(D)} A^{sg(D; S)} \overline{X}_S$$

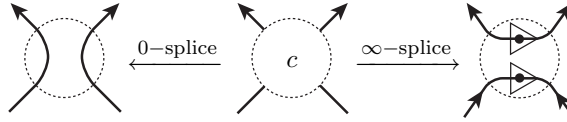


図 13: Two kinds of splices at c

とし,

$$Q_D = (-A^3)^{-w(D)} H_D \in \mathbb{Q}[A^{\pm 1}, d_0, d_1, d_{-1}, \dots, d_n, d_{-n}, \dots]$$

と定める。

Theorem 4.5. *DVMG diagram* D と D' が同値ならば, $Q_D = Q_{D'}$ が成り立つ。

L を virtual link, D を L の diagram とする。Theorem 4.5 により, $Q_L = Q_D$ によって L の多項式を定めることができる。

Corollary 4.6. Q_L は *virtual link* の不変量である。

多項式 P_L と Q_L の間には次の関係がある。

Theorem 4.7 ([5]). $Q_L|_{d_n = -\frac{1}{2}(A^2 + A^{-2})t^{n/2}} = -(A^2 + A^{-2})P_L$.

m を正の整数, Ω を非負整数の集合とする。写像 $q: \Omega^{2m} \rightarrow \mathbb{C}[A^{\pm 1}]$ が *almost zero map* であるとは, Ω^{2m} の元が有限個を除いて 0 に移されるときをいう。

L が virtual link のとき, ある正の整数 m と almost zero map q_L が存在して,

$$Q_L = \sum_{x \in \Omega^{2m}} \left(q_L(x) \prod_{1 \leq j \leq 2m} d_{y_j}^{x_j} \right)$$

と表せる。ここで, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2m})$, $y_j = (-1)^j \{j + (1 - (-1)^j)/2\}$, $1 \leq j \leq 2m$ 。

Q_L の *maximal weighted degree* を $\max\{\sum_{1 \leq j \leq 2m} \frac{y_j}{2} x_j; q_L(x) \neq 0\}$ によって定め, $\max \text{wdeg} Q_L$ によって表す。

Proposition 4.8. $v(L) \geq \max \text{wdeg} Q_L$.

Example 4.9. K を図 14 の *virtual knot* とする。このとき, $P_L = A^{-4} + \frac{1}{2}(A^{-6} - A^{-10})(t + t^{-1})$ より $\max \deg_t P_L = 1$ 。ところで,

$$\begin{aligned} R_D = & -(A^2 + A^{-2})(2A^{-4} + A^{-8}) + \frac{1}{2}(A^{-6} - A^{-10})(d_2 + d_{-2}) \\ & + \frac{1}{2}A^{-6}(d_2 + d_{-2})^2 + \frac{1}{2}(A^{-4} + A^{-8})(d_4 + d_{-4}). \end{aligned}$$

より $\max \text{wdeg} Q_K = 2$ 。ゆえに, $v(K) = 2$ が示せる。

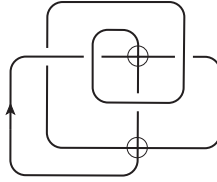


図 14: $v(K) = 1$ or 2 ?

4.3 A multi-variable polynomial for unoriented virtual links

ここでは、向きの付いていない virtual link の多項式不変量について述べる。

$|D|$ を unoriented virtual link diagram とし、 c を $|D|$ の real crossing とする。 c を平滑化する仕方は、図 15 のように 0-splice と ∞ -splice の 2 種類とする。平滑化された後は、実際には交差していないが、これを *null crossing* と呼ぶ。従って、 c を平滑化して得られる null crossing は、0-splice して得られる null crossing と ∞ -splice して得られる null crossing の 2 種類が存在する。前者を *type 0* の null crossing, 後者を *type ∞* の null crossing と呼ぶ。

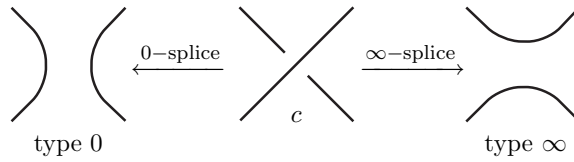


図 15: Two kinds of splices at c

$|D|$ の *state* とは、 $|D|$ の real crossing のうちのいくつかを平滑化して得られた diagram と定義する。 $|D|$ の *oriented state* とは、 $|D|$ の state に向きを与えることによって得られた oriented diagram とする。 $|D|$ の oriented state の集合を $os(D)$ で表す。

S を $|D|$ の oriented state とする。 S の type 0 (resp. type ∞) の null crossing が *admissible* とは、次の条件をみたすときをいう。

- (1) null crossing を構成する 2 本の string の向きは反対向き
- (2) 一方の string をその向きに進むとき、もう一方の string が左手側 (resp. 右手側) に見える

admissible でない null crossing は *inadmissible* と言われる。

S の交点は、real crossing, virtual crossing, admissible null crossing, inadmissible null crossing のどれかである。 S の交点の集合を $C(S)$, real crossing, virtual crossing, admissible null crossing, inadmissible null crossing の集合をそれぞれ、 $RC(S), VC(S), NC_+(S), NC_-(S)$ とすると、 $RC(S) = RC(S) \cup VC(S) \cup NC_+(S) \cup NC_-(S)$ が成り立つ。

写像 $y_{|D|} : C(S) \rightarrow \{0, 1\}$ を

$$y_{|D|}(c) = \begin{cases} 1 & \text{if } c \in NC_+(S) \cup RC(S) \cup VC(S), \\ 0 & \text{if } c \in NC_-(S), \end{cases}$$

によって与え、 $y_{|D|}(S) = \prod_{c \in C(S)} y_{|D|}(c)$ と定義する。

S の real crossing と virtual crossing すべてをその向きに従って平滑化すると、いくつかの向きの付いた自明な円周を得る。反時計回りの向きをもつ円周の数から時計回りの向きをもつ円周の数を引いた値を S の rotation number といい、 $rot(S)$ で表す。

H_S を 4.2 節で定義した多項式とし、 \overline{H}_S を H_S から $A = q = e^{\frac{\pi}{8}\sqrt{-1}}$ において得られる多項式とする。

$J_S = (-1)^{rot(S)} y_{|D|}(S)\overline{H}_S$ と定める。

$Wg(|D|; S) = (q^2 - q^{-2})^{n_0(|D|; S)} \{-(q^2 - q^{-2})\}^{n_\infty(|D|; S)} q^{w(S)}$ とする。ここで、 $n_0(|D|; S)$ 、 $n_\infty(|D|; S)$ はそれぞれ S の type 0, type ∞ の null crossing の数を表す。

不変量は state sum により次のように構成される。

$$R_{|D|} = (q^4)^{-sw(|D|)} (-1)^{v(|D|)} \sum_{S \in \text{Cos}(|D|)} Wg(|D|; S) J_S \in \mathbb{C}[d_1, d_{-1}, \dots, d_n, d_{-n}, \dots].$$

ここで、 $sw(|D|)$ は $|D|$ の self writhe を、 $v(|D|)$ は $|D|$ の virtual crossing の数を表す。

Theorem 4.10. *unoriented virtual link diagram* $|D|$ と $|D'|$ が同値ならば、 $R_{|D|} = R_{|D'|}$ が成り立つ。

$|L|$ を unoriented virtual link, $|D|$ をその diagram とするとき、Theorem 4.10 より、 $R_{|L|} = R_{|D|}$ によって $|L|$ の多項式を定めることができる。

Corollary 4.11. $R_{|L|}$ は *unoriented virtual link* の不変量である。

$R_{|L|}$ の maximal weighted degree, $\max \text{wdeg} R_{|L|}$, を 4.2 節と同様に定義する。

Proposition 4.12. $v(L) \geq \max \text{wdeg} R_{|L|}$.

Example 4.13. $|K|$ を図 16 の *unoriented virtual knot* とする。 K を $|K|$ に向きを与えた *virtual knot* とする。 $Q_K = -(A^2 + A^{-2})$ より $\max \text{wdeg} Q_K = 0$ 。ところで、

$$R_K = -4 + 2\sqrt{-3} - \frac{3}{2}\sqrt{-3}(d_2 + d_{-2}) + \frac{1}{4}(6 - \sqrt{-3})(d_2 + d_{-2})^2 - \sqrt{-3}(d_4 + d_{-4})$$

より、 $\max \text{wdeg} R_{|K|} = 2$ 。ゆえに、 $v(|K|) = v(K) = 2$ が示せる。

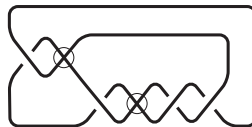


図 16: A virtual knot with trivial Q -polynomial

References

- [1] A. Bartholomew and R. Fenn, *Quaternionic invariants of virtual knots and links*, preprint.
- [2] J. S. Carter, M. Elhamdadi, M. Saito, D. S. Silver and S. G. Williams, *Virtual knot invariants from group biquandles and their cocycles*, preprint.

- [3] H. A. Dye and L. H. Kauffman, *Minimal surface representations of virtual knots and links*, *Algebr. Geom. Topol.* **5** (2005) 509-535.
- [4] A. Ishii, *An algebra for the Alexander-Conway polynomial*, *Proceedings of Workshop "Topology of Knots VIII"*, 2005, 171-180.
- [5] A. Ishii, *The pole diagram and the Miyazawa polynomial*, preprint.
- [6] N. Kamada, *An index of an enhanced state of a virtual link diagram and Miyazawa polynomial*, preprint.
- [7] N. Kamada and S. Kamada *Abstract link diagrams and virtual knots*, *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000) 93-106.
- [8] N. Kamada and Y. Miyazawa, *A 2-variable polynomial invariant for a virtual link derived from magnetic graphs*, *Hiroshima Math. J.* **35** (2005) 309-326.
- [9] L. H. Kauffman, *Virtual Knot Theory*, *Europ. J. Combinatorics* **20** (1999) 663-690.
- [10] L. H. Kauffman and V. O. Manturov, *Virtual biquandles*, *Fundamenta Mathematicae* **188** (2005) 103-146.
- [11] L. H. Kauffman and J. F. Martins, *Invariants of welded virtual knots via crossed module invariants of knotted surfaces*, preprint.
- [12] L. H. Kauffman and D. Radford, *Bi-oriented quantum algebras, and generalized Alexander polynomial for virtual links*, *Amer. Math. Soc. Contemp. Math.* **318** (2002) 113-140.
- [13] V. O. Manturov, *Multi-variable polynomial invariants for virtual links*, *J. Knot Theory Ramifications* **12** (2003) 1131-1144.
- [14] V. O. Manturov, *Kauffman-like polynomial and curves in 2-surfaces*, *J. Knot Theory Ramifications* **12** (2003) 1145-1153.
- [15] Y. Miyazawa, *Magnetic graphs and an invariant for virtual links*, *J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006) 1319-1334.
- [16] Y. Miyazawa, *A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links*, to appear in *J. Knot Theory Ramifications*.
- [17] Y. Miyazawa, *A variation of a virtual link polynomial and the virtual crossing number*, preprint.
- [18] Y. Miyazawa, *A multi-variable polynomial invariant for unoriented virtual knots and links*, preprint.
- [19] J. Sawollek, *On Alexander-Conway polynomials for virtual knots and links*, preprint.
- [20] D. S. Silver and S. G. Williams, *Alexander groups and virtual links*, *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001) 151-160.

点有限 1 の分割の拡張問題

大田春外

静岡大学教育学部

山崎薫里 (高崎経済大学) との共同研究

本稿を通して、 X は位相空間、 A は X の部分空間、 $I = [0, 1]$ は通常の距離を持つ単位閉区間を表す。 (X, A) の近傍拡張子のクラス、すなわち、任意の連続写像 $f: A \rightarrow Y$ が X における A の近傍¹ に連続に拡張できるような空間 Y のクラスを $ANE(X, A)$ で表す。Dydak [4, 5] は、距離位相を持つ任意の単体的複体が $ANE(X, A)$ に属するような (X, A) を特徴付けよという問題を提起し、それが A 上の任意の点有限 1 の分割が X 上の点有限 1 の分解に拡張可能である (X, A) として特徴付けられることを証明した。関連して、次の問題が提起された。

問題 1 (Dydak [4]). A 上の任意の点有限 1 の分割が X 上の点有限 1 の分割に拡張可能ならば、直積空間 $A \times I$ 上の任意の点有限 1 の分割は直積空間 $X \times I$ 上の点有限 1 の分割に拡張可能か。

距離位相を持つ単体的複体全体のクラスを \mathcal{C} で表す。上記の Dydak の結果より、問題 1 は、「 $\mathcal{C} \subseteq ANE(X, A)$ ならば $\mathcal{C} \subseteq ANE(X \times I, A \times I)$ が成立するか」と同値な問題である。Ohta-Yamazaki [10] は、連続体仮説の下で問題 1 が否定解を持つことを証明した。連続体仮説の必要性の有無は現時点では不明である。本講演では、関連する話題と共に、この結果について解説したい。

1. 1 の分割とその拡張

位相空間 X から I への連続関数の族 α が X 上の 1 の分割 (*partition of unity*) であるとは、任意の $x \in X$ に対して $\sum \{f(x) : f \in \alpha\} = 1$ が成り立つことをいう。ここで α は無限集合でもよく、その場合 $\sum f(x)$

¹ここで、 G が X における A の近傍であるとは、(i) G が X の開集合で $A \subseteq G$ を満たし、(ii) $[A] = 0$, $f[X \setminus G] = 1$ をみたす連続関数 $f: X \rightarrow I$ が存在することを言う。正規空間 X の閉集合 A の場合は (ii) は (i) から導かれる。

は有限和全体の最小上界として定義される. 空間 X 上の 1 の分割 α が 点有限 (*point-finite*) であるとは, 任意の点 $x \in X$ に対し

$$\{f \in \alpha : f(x) > 0\} \text{ が有限集合}$$

であることをいい, α が 局所有限 (*locally finite*) であるとは, 任意の点 $x \in X$ に対して x の近傍 G が存在して,

$$\{f \in \alpha : (\exists x \in G)(f(x) > 0)\} \text{ が有限集合}$$

であることをいう. 局所有限ならば点有限である. いま, 部分空間 A 上の 1 の分割 α と X 上の 1 の分割 β が与えられたとする. 全単射 $\varphi : \alpha \rightarrow \beta$ が存在して,

$$(\forall f \in \alpha)(\varphi(f)|_A = f)$$

が成り立つとき, β は α の 拡張 であるという. 1 の分割の拡張に関して, 次の概念が定義される. 集合 S の濃度を $|S|$ で表す.

定義 2 ([4, 17]). γ を無限濃度とする.

(1) $|\alpha| \leq \gamma$ である A 上の任意の 1 の分割 α が X 上の 1 の分割に拡張できるとき, A は X に P^γ -embedded であるという².

(2) $|\alpha| \leq \gamma$ である A 上の任意の点有限 1 の分割 α が X 上の点有限 1 の分割に拡張できるとき, A は X に $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedded であるという.

(3) $|\alpha| \leq \gamma$ である A 上の任意の局所有限 1 の分割 α が X 上の局所有限 1 の分割に拡張できるとき, A は X に $P^\gamma(\text{locally finite})$ -embedded であるという.

定義 3. すべての無限濃度 γ に対して A が X に P^γ -embedded のとき, A は X に P -embedded であるという. また, $P(\text{point-finite})$ -embedded, $P(\text{locally finite})$ -embedded も同様に定義される.

最初に述べた問題 1 は, 正確には次の形で提起された.

問題 1a (Dydak [4]). γ を任意の無限濃度とする. もし A が X に $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedded ならば, $A \times I$ も $X \times I$ に $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedded か.

²Przymusiński-Wage [14] による特徴付けを定義として採用した.

注意 1: 族正規空間³ X の任意の閉集合は X に P -embedded である. この逆も成立する. すなわち, 任意の閉集合が X に P -embedded であるような空間 X は族正規である. また, パラコンパクト T_2 空間 X の任意の閉集合は X に $P(\textit{locally finite})$ -embedded であり, 距離空間 X の任意の閉集合は X に $P(\textit{point-finite})$ -embedded である. 後の命題の逆は成立しない. より精密な結果については [4, 14, 17] を参照せよ.

2. 1 の分割の拡張と連続写像の拡張

(X, A) の拡張子のクラス, すなわち, 任意の連続写像 $f: A \rightarrow Y$ が X 上に連続に拡張可能であるような空間 Y のクラスを $AE(X, A)$ で表す. 前節で定義した 1 の分割の拡張概念が, どのようなクラスの空間 Y が $ANE(X, A)$ または $AE(X, A)$ に属することを特徴付けるかを示す. 距離空間全体のクラス \mathcal{M} に対する絶対 (近傍) レトラクト⁴ を AR (ANR) で表す. また, 位相空間 Y に対して, $w(Y)$ は Y の基底の最小濃度を表す.

定理 1 (Dydak [4], Morita [9], Przymusiński [13]). 任意の無限濃度 γ に対して, 次は同値である.

- (1) A は X に P^γ -embedded である.
- (2) A 上の任意の局所有限 1 の分割 α , ただし $|\alpha| \leq \gamma$, は X 上の 1 の分割に拡張できる.
- (3) 任意の完備 ANR Y , $w(Y) \leq \gamma$, に対して, $Y \in ANE(X, A)$.
- (4) 任意の Banach 空間の任意の凸閉集合 Y , $w(Y) \leq \gamma$, に対して, $Y \in AE(X, A)$.
- (5) 任意の完備 AR Y , $w(Y) \leq \gamma$, に対して, $Y \in AE(X, A)$.

定理 1 より, 任意の無限濃度 γ に対して次の関係を得る:

$$P^\gamma(\textit{locally finite})\text{-embedded} \Rightarrow P^\gamma \Leftarrow P^\gamma(\textit{point-finite})\text{-embedded}$$

³位相空間 X が族正規 (*collectionwise normal*) 空間であるとは, X の任意の閉集合の離散族 $\{F_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ に対して, 互いに交わらない開集合の族 $\{U_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ が存在して, $F_\lambda \subseteq U_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) が成り立つことを言う. 任意のパラコンパクト T_2 空間は族正規空間である.

⁴ Y が \mathcal{M} に対する絶対 (近傍) レトラクト (*absolute (neighborhood) retract*) であるとは, $Y \in \mathcal{M}$ であり, Y を閉集合として含む任意の $X \in \mathcal{M}$ に対して, Y が X の (X における Y のある近傍の) レトラクトであることを言う.

定理 2 (Dydak [4]). X が第 1 可算公理をみたすとき⁵, 任意の無限濃度 γ に対して, 次は同値である.

- (1) A は X に $P^\gamma(\text{locally finite})$ -embedded である.
- (2) $|K^0| \leq \gamma$ である任意の CW-複体 K に対して, $K \in ANE(X, A)$ ⁶.
- (3) $|K^0| \leq \gamma$ である任意の可縮 CW-複体 K に対して, $K \in AE(X, A)$.

定理 3 ([4]). 任意の無限濃度 γ に対して, 次は同値である.

- (1) A は X に $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedded である.
- (2) 任意の距離位相を持つ単体的複体 K , $w(K) \leq \gamma$, に対して, $K \in ANE(X, A)$.
- (3) 任意の距離位相を持つ可縮単体的複体 K , $w(K) \leq \gamma$, に対して, $K \in AE(X, A)$.

$P^\gamma(\text{locally finite})$ -embedding と $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedding について, 定理 1 の条件 (3)–(5) と同様な特徴付けが得られないかという疑問が生じる. 後者に関して, Yamazaki は次の定理 4 の (1), (3) の同値を証明し, その後の共同研究により (1), (3), (4) の同値が得られた. 可算個の閉集合の和集合は F_σ 集合 と呼ばれる. 距離空間の任意の開集合は F_σ 集合である. また, 可算個の完備部分空間の和集合として表される距離空間は σ -完備 (σ -complete) と呼ばれる.

定理 4 ([10]). 任意の無限濃度 γ に対して, 次は同値である⁷.

- (1) A は X に $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedded である.
- (2) 任意の σ -完備 ANR Y , $w(Y) \leq \gamma$, に対して, $Y \in ANE(X, A)$.
- (3) 任意の Banach 空間の任意の凸 F_σ 集合 Y , $w(Y) \leq \gamma$, に対して, $Y \in AE(X, A)$.
- (4) 任意の σ -完備 AR Y , $w(Y) \leq \gamma$, に対して, $Y \in AE(X, A)$.

問題 2. 任意の位相空間 X と X の任意の $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedded 閉集合 A に対して $Y \in AE(X, A)$ となる AR Y は, σ -完備で $w(Y) \leq \gamma$ を満たすか⁸.

⁵実際には, 第 1 可算公理より弱い仮定, X から第 1 可算公理をみたす空間 Y への連続閉写像 f で, 各点 $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y)$ がコンパクトであるものが存在するときに, 定理が成立することが証明された.

⁶ K^0 は K の 0-cell の集合である.

⁷(2), (4) の同値は定理 1 と同様に証明できる.

⁸任意の位相空間 X と X の任意の P^γ -embedded 閉集合 A に対して $Y \in AE(X, A)$ となるような AR Y は, 完備で $w(Y) \leq \gamma$ をみたす ([12, Corollary 3]).

3. コンパクト空間との直積と局所有限 1 の分割の拡張

問題 1a は, $P^\gamma(\text{point-finite})$ を P^γ または $P^\gamma(\text{locally finite})$ に置き換えると肯定解を持つことが知られている.

定理 5 (Alò-Sennott [1]). γ は無限濃度, A は X に P^γ -embedded であるとする. このとき, $w(Y) \leq \gamma$ である任意のコンパクト空間 Y に対して, $A \times Y$ は $X \times Y$ に P^γ -embedded である. 特に, $A \times I$ は $X \times I$ に P^γ -embedded である.

定理 6 (Yamazaki [18]). γ は無限濃度, A は X に $P^\gamma(\text{locally finite})$ -embedded であるとする. このとき, $w(Y) \leq \gamma$ である任意のコンパクト空間 Y に対して, $A \times Y$ は $X \times Y$ に $P^\gamma(\text{locally finite})$ -embedded である. 特に, $A \times I$ は $X \times I$ に $P^\gamma(\text{locally finite})$ -embedded である.

連続関数 $f : X \rightarrow I$ を用いて $f^{-1}(0)$ の形で表される集合を X の 零集合 (zero-set) と呼ぶ. 零集合の補集合を 余零集合 (cozero-set) と呼び, 余零集合からなる被覆を 余零被覆 (cozero-cover) という. P^γ -embedding と $P^\gamma(\text{locally finite})$ -embedding は局所有限な余零被覆を使って, それぞれ, 次のように特徴付けられる.

定理 7 (Shapiro [17]). A が X に P^γ -embedded であるためには, A の $|\Lambda| \leq \gamma$ である任意の局所有限な余零被覆 $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に対して, X の局所有限な余零被覆 $\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が存在して, すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $V_\lambda \cap A \subseteq U_\lambda$ が成り立つことが必要十分である.

定理 8 (Yamazaki [18]). A が X に $P^\gamma(\text{locally finite})$ -embedded であるためには, A の $|\Lambda| \leq \gamma$ である任意の局所有限な余零被覆 $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に対して, X の局所有限な余零被覆 $\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が存在して, すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $V_\lambda \cap A = U_\lambda$ が成り立つことが必要十分である.

注意 2. 定理 8 の「局所有限」を「点有限」に変えると, $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedding の特徴付けが得られるかという疑問は自然である. 答えは, $\gamma = \omega$ (=可算無限濃度) のとき肯定的, $\gamma > \omega$ のとき否定的であることが知られている (Yamazaki [20]),

非常に簡略に言えば, 定理 5, 6 はそれぞれ定理 7, 8 と「 Y がコンパクトのとき, $X \times Y$ の局所有限な余零被覆は X の局所有限な余零被覆に射

影される」という事実を使って証明される。ところが $Y = I$ の場合でさえ、 $X \times I$ の点有限な余零被覆の X への射影は点有限であるとは限らない。実際、 $I \times I$ の点有限な余零被覆 $\{I \times (0, 1]\} \cup \{I \times [0, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ の要素はすべて I に射影される。この理由により、少なくとも定理 5, 6 と同様のアイデアによって問題 1 の肯定解を得ることはできない。

4. 1 の分割の拡張と可算還元定理

問題 1 の (連続体仮説の下での) 否定解を得る鍵となった結果は、次の Yamazaki による定理である。

定理 9 ([10]). A が X に $P^\gamma(\textit{point-finite})$ -embedded であるためには、 A が X に P^γ -embedded かつ $P^\omega(\textit{point-finite})$ -embedded であることが必要十分である。

定理 5 と定理 9 より、問題 1a は次の問題と同値である。

問題 1b. γ を任意の無限濃度とする。もし A が X に $P^\gamma(\textit{point-finite})$ -embedded ならば、 $A \times I$ は $X \times I$ に $P^\omega(\textit{point-finite})$ -embedded か。

注意 3. 定理 9 の主張は、 $P^\gamma(\textit{point-finite}) = P^\gamma + P^\omega(\textit{point-finite})$ と図式化されるが、この種の命題を可算還元定理と呼ぶ。Przymusiński-Wage は定理 8 の「余零被覆」を「開被覆」に置き換えて得られる性質に対して可算還元定理が成立することを予想した ([14, Question 3])。彼らの予想は 4 半世紀後の今日まで証明されていないが、その余零被覆版と言える関係 $P^\gamma(\textit{locally finite}) = P^\gamma + P^\omega(\textit{locally finite})$ が成立するかどうか未解決である ([10, 11, 19])。

定理 9 より、 P^γ -embedded 集合 A が X に $P^\gamma(\textit{point-finite})$ -embedded であることを証明するためには、 $P^\omega(\textit{point-finite})$ -embedded であることを示せば十分である。いま A の可算な点有限 1 の分割 α をとる。もし A が X に P^γ -embedded ならば、 α は X の点有限 1 の分割 β に拡張される。このとき、 β が点有限でないような点の集合 B は、 X の可算個の余零集合の共通部分として表される。したがって、 B の点を解消するためには、 (X, A) が次の条件 (b) を満たすことが必要十分である。

- (b) $B \cap A = \emptyset$ であり、かつ X の可算個の余零集合の共通部分として表される任意の集合 B に対し、 $B \subseteq U$ かつ $U \cap A = \emptyset$ を満たす X の余零集合 U が存在する。

定理 10 ([10]). A が X に $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedded であるためには, A が X に P^γ -embedded かつ (X, A) が条件 (b) を満たすことが必要十分である.

定理 5 と定理 10 の結果として, 問題 1b は次の問題と同値である.

問題 1c. γ を任意の無限濃度, A が X に P^γ -embedded であるとする. このとき, もし (X, A) が条件 (b) を満たすならば, $(X \times I, A \times I)$ も条件 (b) を満たすか.

5. コンパクト空間との直積と点有限 1 の分割の拡張

最小の無限順序数を可算無限濃度と同じ記号 ω で表し, 順序数 λ と順序数の集合 $\{\mu : \mu < \lambda\}$ とを同一視する. 順序数 λ, μ に対して, ${}^\lambda\mu$ は λ から μ への写像全体の集合を表す. ${}^{<\omega}\omega = \bigcup_{n < \omega} n\omega$ とおく. X の零集合の族 $\{Z_\sigma : \sigma \in {}^{<\omega}\omega\}$ を用いて

$$S = \bigcup_{t \in {}^\omega\omega} \left(\bigcap_{n < \omega} Z_{t|n} \right)$$

と表される集合 S を X の ススリン-Z-集合 (*Suslin-Z-set*) と呼ぶ ([15]). 距離空間においては, 零集合と閉集合の概念, 余零集合と開集合の概念はそれぞれ一致し, ススリン-Z-集合は 解析集合 (*analytic set*) と呼ばれる ([6]). これらの集合に関して, 次の補題は基本的である. 以下, \mathbb{R} はカントル集合を表す.

補題 1 ([10]). X の任意の ススリン-Z-集合 B に対して, ヒルベルト立方体 Q の解析集合 S と連続写像 $f : X \rightarrow Q$ が存在して, $B = f^{-1}[S]$ が成立する.

補題 2 ([15]). Y がコンパクトのとき, 直積 $X \times Y$ の任意のススリン-Z-集合の X への射影は X のススリン-Z-集合である.

補題 3 ([6, 15]). 距離空間 Y の解析集合は $Y \times \mathbb{R}$ の可算個の開集合の共通部分 (= G_δ -集合) の射影である.

いま, (X, A) に関する次の条件 (a) を考える.

(a) $B \cap A = \emptyset$ である X の任意のススリン- \mathcal{Z} -集合 B に対し, $B \subseteq U$ かつ $U \cap A = \emptyset$ を満たす X の余零集合 U が存在する.

可算個の余零集合の共通部分 (より一般に, 余零集合全体の族から生成される σ -algebra に属する集合) はススリン- \mathcal{Z} -集合だから, (a) \Rightarrow (b) が成り立つ. 定理 10 と補題 1, 2, 3 より, 次の定理を得る.

定理 11 ([10]). 任意の無限濃度 γ に対して, 次は同値である.

(1) 任意のコンパクト T_2 空間 Y , ただし $w(Y) \leq \gamma$, に対して, $A \times Y$ は $X \times Y$ に $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedded である.

(2) $A \times I$ は $X \times I$ に $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedded である.

(3) 非可算濃度のあるコンパクト距離空間 Y が存在して, $A \times Y$ は $X \times Y$ に $P^\gamma(\text{point-finite})$ -embedded である.

(4) A は X に P^γ -embedded, かつ (X, A) は条件 (a) を満たす.

定理 10, 11 より, 我々の問題 1c は次の問題に帰結される.

問題 1d. γ を任意の無限濃度, A が X に P^γ -embedded であるとする. このとき, もし (X, A) が条件 (b) を満たすならば, (X, A) は条件 (a) を満たすか.

6. 位相空間の Hanner 化と反例の構成

パラコンパクト T_2 空間の任意の閉集合は P -embedded である. したがって, 問題 1d の否定解を得るためには, 条件 (b) を満たすが, (a) を満たさないようなパラコンパクト T_2 空間 X の閉集合 A を構成すればよい. その方法の 1 つは \mathbb{R} の部分空間の Hanner 化を考えることである. 以下, \mathbb{R} を通常位相を持つ実数空間として, $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ を部分空間とする. X の部分空間の位相を \mathcal{T} とするとき, X に新しい位相

$$\mathcal{T}_A = \{U \cup K : U \in \mathcal{T}, K \subseteq X \setminus A\}$$

を与えてできる空間 (X, \mathcal{T}_A) を X の A から定まる Hanner 化 と呼び, X_A で表す. このとき, X_A はパラコンパクト T_2 空間, A は X_A の閉集合である. まず (X_A, A) が条件 (a) または (b) を満たすための必要十分条件を与えよう.

補題 4 ([10]). $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ とする. (X_A, A) が条件 (a) を満たすための必要十分条件は, $B \cap A = \emptyset$ である \mathbb{R} の任意の解析集合 B に対して,

$B \cap X \subseteq F$ かつ $F \cap A = \emptyset$ を満たす \mathbb{R} の F_σ 集合 F が存在することである。

補題 5 ([10]). $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ とする. (X_A, A) が条件 (b) を満たすための必要十分条件は, \mathbb{R} の任意の可算個の F_σ 集合の族 $\{F_n : n < \omega\}$ で, $\bigcap_{n < \omega} F_n \cap A = \emptyset$ かつすべての $n < \omega$ について $F_n \cap A$ が A の開集合であるものに対し, $\bigcap_{n < \omega} F_n \cap X \subseteq F$ かつ $F \cap A = \emptyset$ を満たす \mathbb{R} の F_σ 集合 F が存在することである.

補題 4, 5 を利用して, 条件 (a), (b) に関する例を構成しよう. 例 1 は, 最初に Yamazaki [20] によって直接証明された.

例 1 ([10, 20]). \mathbb{Q} を有理数の集合とする. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は \mathbb{R} の G_δ 集合であるが F_σ 集合でない. 補題 5 より, この事実は $(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ が条件 (b) を満たさないことを示している. このとき, \mathbb{Q} は $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ に P -embedded であるが, 定理 10 より, $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ に $P^\omega(\text{point-finite})$ -embedded でない.

例 2 ([10]). A を \mathbb{R} の Bernstein 集合 (= A と $\mathbb{R} \setminus A$ が共に非可算コンパクト集合を含まないような集合 A) とする. 非可算解析集合はカントル集合を含むから, A と交わらないような \mathbb{R} の解析集合は高々可算集合である. 補題 4 より, この事実は (\mathbb{R}_A, A) が条件 (a) を満たすことを示している. ゆえに, 定理 11 より, 任意のコンパクト T_2 空間 Y に対して, $A \times Y$ は $X \times Y$ に $P(\text{point-finite})$ -embedded である.

注意 4. Sennott [16] は, $AE(X, A)$ がすべての AR を含むためには, A が X に P -embedded かつ (X, A) が次の条件 (s) を満たすことが必要十分であることを証明した.

(s) X 上の任意の連続な擬距離関数 d に対して, 次を満たす X の零集合 F が存在する: $A \subseteq F \subseteq \{x \in X : (\exists y \in A)(d(x, y) = 0)\}$.

補題 1 より, (s) \Rightarrow (a) が導かれる. 例 2 で構成した (X_A, A) は, この逆が成立しないことを示している. 実際, \mathbb{R} 上のユークリッドの距離関数 d は, X_A 上で連続で, 集合 $\{x \in X : (\exists y \in A)(d(x, y) = 0)\}$ は A に一致する. ところが, A は X_A の零集合でないから, (X_A, A) は条件 (s) を満たさない. この事実は, Dydak [4, Problem 12.10] に否定解を与える.

次の例は, 最初に述べた問題 1 に対する連続体仮説 (= CH) の下での反例を与える.

例 3 ([10]). CH を仮定する. 補集合が解析集合でないような \mathbb{R} の解析集合 S が存在する ([6, Corollary to Lemma 39.4]). $A = \mathbb{R} \setminus S$ とおいて, B を A を含むような \mathbb{R} のボレル集合全体の族とする. $|B| = 2^\omega$ だから, CH より, 最小の非可算順序数 ω_1 によって B を整列することができる. すなわち, $B = \{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. いま A はボレル集合でないから, 任意の $\alpha < \omega_1$ に対し $\bigcap_{\beta < \alpha} B_\beta \cap S$ は非可算集合である. したがって, 超限帰納法により, 任意の $\alpha < \omega_1$ に対して, 点

$$x_\alpha \in \left(\bigcap_{\beta < \alpha} B_\beta \cap S \right) \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$$

を選ぶことができる. $X = A \cup \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とおく. このとき, もし B が \mathbb{R} の可算個の F_σ 集合の共通部分で $B \cap A = \emptyset$ を満たすならば, ある $\alpha < \omega_1$ に対して $B_\alpha = \mathbb{R} \setminus B$. ゆえに, $B \cap X$ は高々可算集合である. 補題 5 より, この事実は (X_A, A) が条件 (b) を満たすことを意味する. 他方, $S = \mathbb{R} \setminus A$ は \mathbb{R} の解析集合である. もし $S \cap X \subseteq F$ かつ $F \cap A = \emptyset$ を満たす \mathbb{R} の F_σ 集合 F が存在したとすると, ある $\beta < \omega_1$ に対して, $B_\beta = \mathbb{R} \setminus F$. このとき, $x_{\beta+1} \in B_\beta = \mathbb{R} \setminus F$ だから, $S \cap X \subseteq F$ であることに矛盾する. ゆえに, 補題 4 より, (X_A, A) は条件 (a) を満たさない.

問題 3. 連続体仮説を仮定することなく, 条件 (b) を満たすが (a) を満たさないような P -embedded 集合 (X, A) の例を構成できるか.

7. Michael の問題

無理数の集合を \mathbb{P} で表す. 最後に, 問題 1 と Michael の問題⁹ 「任意の Lindelöf 正則空間¹⁰ X に対して, 直積空間 $X \times \mathbb{P}$ は正規か」とを比較して本稿を終えよう. いま, (X, A) に関する次の条件 (c) を考える.

- (c) $B \cap A = \emptyset$ である X の任意の零集合 B に対し, $B \subseteq U$ かつ $U \cap A = \emptyset$ を満たす X の余零集合 U が存在する.

任意の零集合は可算個の余零集合の共通部分として表されるから, 関係 (b) \Rightarrow (c) が成立する. また, X が正規空間ならば, 任意の閉集合 A に対

⁹Michael [8] による. 集合論を積極的に応用する動機となった問題の 1 つである.

¹⁰位相空間 X が Lindelöf 空間であるとは, X の任意の開被覆が可算部分被覆を含むことを言う. Lindelöf 正則空間は正規空間である.

して (X, A) は条件 (c) を満たす. 他方, X のススリン-Z-集合は, $X \times \mathbb{P}$ の零集合の射影として特徴付けられることが知られている ([6, 15]). したがって, 次の定理が成立する.

定理 12. (X, A) が条件 (a) を満たすためには, $(X \times \mathbb{P}, A \times \mathbb{P})$ が条件 (c) を満たすことが必要十分である.

定理 12 より, $X \times \mathbb{P}$ が正規で A が X の閉集合ならば, (X, A) は条件 (a) を満たす. 以上により, 問題 3 の肯定解となる X の閉集合 A に対しては, $X \times \mathbb{P}$ は正規でない. したがって, もしそのような X が Lindelöf 正則空間ならば, それは Michael の問題に対する否定解となる. Michael の問題は, 最初 CH の下での否定解が \mathbb{R} の部分空間の Hanner 化を用いて作られた後, Martin の公理など CH より弱い公理からも否定解が導かれることが証明された. しかし, 通常集合論の公理系内での反例が存在するかどうかは未解決である. また, そのような反例は \mathbb{R} の (一般に, 線形順序位相空間の) Hanner 化としては構成できないことも知られている ([2, 7, 8] とそれらの参考文献を参照). 上の例 3 の構成は, CH の下での Michael の問題の否定解にアイデアを得た¹¹. Michael の問題の研究経過から分かるように, 筆者は, 本研究は問題 1 の解決ではなく, 問題解明の端緒を開いたに過ぎないと考えている.

参考文献

- [1] R. A. Alò and L. I. Sennott, *Collectionwise normality and the extension of functions on product spaces*, Fund. Math. **76** (1972), 231–243.
- [2] K. Alster and G. Gruenhagen, *Products of Lindelöf spaces and GO-spaces*, Topology and its Appl. **64** (1995), 23–36.
- [3] E. K. van Douwen, *The integers and topology*, in: K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), Handbook of Set-theoretic Topology, North-Holland, 1984, 112–167.
- [4] J. Dydak, *Extension theory: the interface between set-theoretic and algebraic topology*, Topology Appl. **74** (1996), 225–258.

¹¹Michael の問題の CH の下での否定解は Michael [8] 自身によって与えられたが, 証明の中で実際に使われている集合論的仮定は $\mathfrak{b} = \omega_1$ である ([3, Section 10]). 我々の例 3 が $\mathfrak{b} = \omega_1$ から導かれるかどうかの検討が, 次の第一歩だろう.

- [5] J. Dydak, *Cohomological dimension theory*, in: R. J. Daverman and R. B. Sher (eds.), *Handbook of Geometric Topology*, North-Holland, Amsterdam (2002), 423–470.
- [6] T. Jech, *Set Theory*, Academic Press, New York, 1978.
- [7] L. B. Lawrence, *The influence of a small cardinal on the product of a Lindelöf space and the irrationals*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 535–542.
- [8] E. Michael, *Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable cartesian products*, Comp. Math. **23** (1971), 199–214.
- [9] K. Morita, *On generalizations of Borsuk’s homotopy extension theorem*, Fund. Math. **88** (1975), 1–6.
- [10] H. Ohta and K. Yamazaki, *Extension of point-finite partitions of unity*, Fund. Math. **191** (2006), 187–199.
- [11] H. Ohta and K. Yamazaki, *Extension problems of real-valued continuous functions*, in: E. Pearl (ed.) *Open Problems in Topology II*, Elsevier (2007), 187–199.
- [12] T. C. Przymusiński, *Collectionwise normality and absolute retracts*, Fund. Math. **98** (1978), 61–73.
- [13] T. C. Przymusiński, *Collectionwise normality and extensions of continuous functions*, Fund. Math. **98** (1978), 75–81.
- [14] T. C. Przymusiński and M. L. Wage, *Collectionwise normality and extensions of locally finite coverings*, Fund. Math. **109** (1980), 175–187.
- [15] C. A. Rogers and J. E. Jayne, *K-analytic sets*, in: C. A. Rogers et al., *Analytic Sets*, Academic Press, New York, 1980, 1–181.
- [16] L. I. Sennott, *On extending continuous functions into a metrizable AE*, Gen. Topology Appl. **8** (1978), 219–228.
- [17] H. L. Shapiro, *Extensions of pseudometrics*, Canad. J. Math. **18** (1966), 981–998.
- [18] K. Yamazaki, *Extensions of partitions of unity*, Topology Proc. **23** (1998), 289–313.
- [19] K. Yamazaki, *Extensions of mappings on product spaces*, Ph. D. Thesis, University of Tsukuba (2000).
- [20] K. Yamazaki, *Extending point-finite partitions of unity*, Houston J. Math. **29** (2003), 353–359.

POISSON STRUCTURE ON THE HOMOLOGY OF THE SPACE OF FRAMED LONG KNOTS

KEIICHI SAKAI

1. INTRODUCTION

The aim of this research is to understand the homological properties of the space \mathcal{K}_n of long knots in \mathbb{R}^n , $n > 3$, or its framed variants $\tilde{\mathcal{K}}_n$ and \mathcal{K}'_n defined below. This kind of research was initiated by V. Vassiliev [17] to study $H^*(\mathcal{K}_3)$ (notice that $H^0(\mathcal{K}_3)$ is the space of knot invariants). As well as being a direct generalization of \mathcal{K}_3 , the space \mathcal{K}_n is the first example of the embedding space $\text{emb}(M, N)$, an interesting subspace of the mapping space.

Firstly some non-trivial cohomology classes of \mathcal{K}_n were constructed in a similar way as the integral expression for finite type knot invariants [4], which can be regarded as a refinement of the iterated integral for loop spaces [5]. Recently the actions of ‘operads of little disks’ on $\tilde{\mathcal{K}}_n$ and \mathcal{K}'_n are defined in several ways [3, 13, 15], and induced double loop space structures are now being studied. These actions induce Poisson brackets (called the *Browder operations*) on the homology groups. The bracket is expected to yield more interesting classes which are not analogues to the finite type invariants. Our main result concerns these brackets.

Theorem 1.1 ([12, 13]). Suppose $n > 3$. The *Browder operation* on $H_*(\mathcal{K}'_n)$ induced by the action of little disks operad coincides with the *Gerstenhaber bracket* defined on the Bousfield spectral sequence converging to $H_*(\mathcal{K}'_n)$.

Poisson algebra structures appeared in the theorem rely on D. Sinha’s work [15] which is based on the ‘embedding calculus’ [8, 19]. By ‘approximating the knots by finitely many points,’ Sinha proved that \mathcal{K}'_n ($n > 3$) is weakly equivalent to a totalization of some ‘based’ operad. Such a description is a sufficient condition for a space to be a little disks object [11], hence $H_*(\mathcal{K}'_n)$ admits the Browder operation. On the other hand, Bousfield spectral sequence [1] is applied to compute the homology of such a totalization. In our case the E^2 -term turns out to be a ‘Hochschild homology’ of the operad, on which another Poisson algebra structure (called the *Gerstenhaber bracket*) was defined in [7]. Our theorem states that these two Poisson structures in fact coincide.

Below the notions of *little disks operad* and related *cosimplicial spaces* are fully used. See Appendices A and B, and references [2, 10, 11].

2. PRELIMINARIES

Definition 2.1. A *long knot* in \mathbb{R}^n is an embedding

$$f : \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

The author is supported by 21st century COE program at Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo.

such that $f(t) = (0, \dots, 0, t)$ when $|t| \geq 1$ (see Figure 1). Define \mathcal{K}_n to be the space of all long knots in \mathbb{R}^n , equipped with C^∞ -topology (avoiding wild knots).

Define the space $\tilde{\mathcal{K}}_n$ of *framed long knots* to be the space of pairs (f, w) where $f \in \mathcal{K}_n$ and $w \in \Omega SO(n)$ is a *framing* of f , that is, the map

$$w : \mathbb{R}^1 \longrightarrow SO(n)$$

such that the last column of the matrix $w(t)$ is $f'(t)/|f'(t)|$, and $w(t) = I_n$ if $|t| \geq 1$.

Analogously define \mathcal{K}'_n to be the space of pairs (f, h) , where $f \in \mathcal{K}_n$ and h is a path in Imm_n (the space of *long immersions*) connecting f and the trivial long immersion $f_0 : t \mapsto (0, \dots, 0, t)$. See the remark below. \square

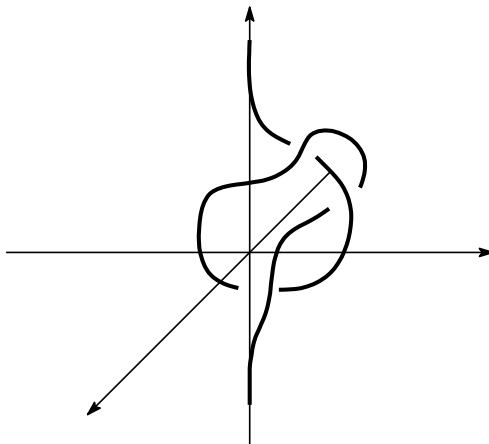


FIGURE 1. a long knot

Remark 2.2. Let ΩX be the based loop space of X . Consider the map

$$u : \mathcal{K}_n \longrightarrow \Omega S^{n-1}$$

defined by $u(f) : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^{n-1}$, $u(f)(t) = f'(t)/|f'(t)|$. By definition the spaces $\tilde{\mathcal{K}}_n$ and \mathcal{K}'_n are the total spaces of the following pull-back fibrations respectively;

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{K}}_n & \longrightarrow & \Omega SO(n) \\ \downarrow & & \downarrow \Omega\pi \\ \mathcal{K}_n & \xrightarrow{u} & \Omega S^{n-1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{K}'_n & \longrightarrow & P(\Omega S^{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}_n & \xrightarrow{u} & \Omega S^{n-1} \end{array}$$

where $\pi : SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ maps a matrix to its last column, and $P(\Omega S^{n-1}) \rightarrow \Omega S^{n-1}$ is the path-loop fibration. Because introduced in similar ways, the spaces $\tilde{\mathcal{K}}_n$ and \mathcal{K}'_n in fact behave similarly. But computation is easy in the case of \mathcal{K}'_n since the spheres are more accessible than $SO(n)$'s. So we will treat \mathcal{K}'_n below. \square

Recall that the space $\mathcal{D}_m(k)$ of *little balls* (see Appendix A) is homotopy equivalent to the *configuration space*

$$\text{Conf}(\mathbb{R}^m, k) := \{(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{R}^m)^k \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}.$$

In particular $\mathcal{D}_m(2) \simeq S^{m-1}$. If \mathcal{D}_m acts on the space X , the fixed generators of $H_r(\mathcal{D}_m(2))$ ($r = 0, m - 1$) determine a product and a degree $(m - 1)$ map

$$\begin{aligned} * : H_p(X, \mathbb{Q}) \otimes H_q(X, \mathbb{Q}) &\longrightarrow H_{p+q}(X, \mathbb{Q}), \\ \lambda_m : H_p(X, \mathbb{Q}) \otimes H_q(X, \mathbb{Q}) &\longrightarrow H_{p+q+m-1}(X, \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

induced by $\theta_2 : \mathcal{D}_m(2) \times X^2 \rightarrow X$. We call λ_m the *Browder operation*.

Theorem 2.3 ([6]). If \mathcal{D}_m acts on X , then $(H_*(X), \lambda_m)$ forms an $(m - 1)$ -Poisson algebra. That is, λ_m is a Lie bracket of degree $m - 1$, satisfying the following *Leibniz rule*; if we denote the degree of x by \tilde{x} , then

$$\lambda_m(x, y * z) = \lambda_m(x, y) * z + (-1)^{(\tilde{x}+m-1)\tilde{y}} y * \lambda_m(x, z). \quad \square$$

In the next section we explain that the operad \mathcal{D}_2 acts on a space weakly equivalent to \mathcal{K}'_n and, by Theorem 2.3, we have the desired Browder operation $\lambda = \lambda_2$ on $H_*(\mathcal{K}'_n)$.

3. LITTLE DISKS ACTION ON TOTALIZATION

The existence of the action of \mathcal{D}_2 is a consequence of a work of Sinha [14, 15], which is based on the *embedding calculus* [8, 19]. The idea is that ‘we may approximate embeddings by finitely many points’ via the evaluation map

$$ev_k : \mathcal{K}_n \longrightarrow \text{Map}(\text{Int } \Delta^k, \text{Conf}(\mathbb{R}^n, k) \times (S^{n-1})^k)$$

(where $\Delta^k := \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid -1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 1\}$), defined by

$$ev_k(f)(t_1, \dots, t_k) := (f(t_1), \dots, f(t_k); u(f)(t_1), \dots, u(f)(t_k))$$

(recall the map $u : \mathcal{K}_n \rightarrow \Omega S^{n-1}$ from Remark 2.2). It can be expected that ev_k might achieve more information about \mathcal{K}_n when k is increasing to infinity.

Sinha worked out along this idea. When $k \geq 2$, consider the map

$$\prod_{1 \leq i < j \leq k} \varphi_{ij} : \mathcal{D}_n(k) \longrightarrow (S^{n-1})^{\binom{k}{2}}, \quad \varphi_{ij}(b_1, \dots, b_k) := \frac{b_i(0) - b_j(0)}{|b_i(0) - b_j(0)|}.$$

Define $X_n(k)$ as the closure of $\text{Im } \prod \varphi_{ij} \subset (S^{n-1})^{\binom{k}{2}}$, and $X_n(0) = X_n(1) = \{*\}$.

Theorem 3.1 ([14, 15]). The collection $X_n = \{X_n(k)\}_{k \geq 0}$ forms an operad *with multiplication* (see below), and

$$\prod \varphi_{ij} : \mathcal{D}_n(k) \xrightarrow{\sim} X_n(k)$$

is the equivalence of operads (thus $X_n(k) \simeq \text{Conf}(\mathbb{R}^n, k)$).

Denote by X_n^\bullet the *associated cosimplicial space* (see Appendix B). Define the cosimplicial space Y_n^\bullet by letting $Y_n^k = X_n^k \times (S^{n-1})^k$. Then, when $n > 3$, there exists a weak homotopy equivalence

$$ev : \mathcal{K}_n \xrightarrow{\sim} \widetilde{\text{Tot}} Y_n^\bullet \quad (:= \text{Hom}(\tilde{\Delta}^\bullet, Y_n^\bullet)). \quad \square$$

‘Operad with multiplication’ means that there exists a basepoint of X_n in an operadic sense. That is, there are $\mu_k \in X_n(k)$ with compatibility condition;

$$\mu_k(\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_k}) = \mu_{j_1 + \dots + j_k}.$$

Indeed $\mu_k = (v_{ij}) \in X_n(k) (\subset (S^{n-1})^{\binom{k}{2}})$, with all v_{ij} being the ‘north pole.’

Corollary 3.2 ([15]). When $n > 3$, there is a weak equivalence $\mathcal{K}'_n \xrightarrow{\sim} \widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet$.

Outline of proof. Consider the levelwise fibration

$$X_n^\bullet \longrightarrow Y_n^\bullet \longrightarrow (S^{n-1})^\bullet.$$

Their totalizations also form a fibration. The totalization of the cosimplicial space $(S^{n-1})^\bullet$ is ΩS^{n-1} (geometric cobar construction). Thus $\widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet$ is weakly equivalent to the homotopy fiber of $\mathcal{K}_n \rightarrow \Omega S^{n-1}$, which is \mathcal{K}'_n . \square

In [11] it is proved that a totalization of a cosimplicial space \mathcal{O}^\bullet associated with an operad \mathcal{O} with multiplication is acted on by an operad weakly equivalent to \mathcal{D}_2 . Thus Corollary 3.2 immediately implies the following.

Theorem 3.3 ([11, 15]). An operad weakly equivalent to \mathcal{D}_2 acts on $\widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet$. \square

Remark 3.4. Theorem 3.1 does not imply the existence of an action of \mathcal{D}_2 on $\widetilde{\text{Tot}} Y_n^\bullet \sim \mathcal{K}_n$ since Y_n^\bullet does not come from an operad. But in fact \mathcal{K}_n ($n > 3$) is also weakly equivalent to a \mathcal{D}_2 -object; see [13]. \square

Thus the Browder operation λ is defined on $H_*(\widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet) \cong H_*(\mathcal{K}'_n)$. Our aim is to know the Poisson algebra $(H_*(\widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet), \lambda)$. By unraveling the construction in [11], we can describe the action from Theorem 3.3 explicitly in terms of operads.

Theorem 3.5 ([12]). The map $\theta_2 : \mathcal{D}_2(2) \times (\widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet)^2 \rightarrow \widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet$ is, up to homotopy, defined as follows; for any $f^\bullet, g^\bullet \in \widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet$ ($f^k, g^k : \tilde{\Delta}^k \rightarrow X_n^k$ for any k), and any $s \in S^1 = [-1, 1]/\sim$,

$$\begin{aligned} \theta_2(s; f^\bullet, g^\bullet)^k : \tilde{\Delta}^k &\longrightarrow X_n^k, \\ t &\longmapsto \begin{cases} f^{k_1}(t_1) \circ_j g^{k_2}(t_2), & -1 \leq s \leq 0, \\ g^{k_2}(t_2) \circ_j f^{k_1}(t_1), & 0 \leq s \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

where the parameters k_i satisfying $k_1 + k_2 = k + 1$, $t_i \in \tilde{\Delta}^{k_i}$ and j , depend on s, t (for detailed descriptions see [12]). \square

Remark 3.6. Recall $x \circ_i y = x(\text{id}, \dots, \text{id}, y, \text{id}, \dots)$ (Definition A.3). From the viewpoint that the equivalence $\mathcal{K}'_n \xrightarrow{\sim} \widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet$ is ‘approximation of knots by finitely many points,’ the formula in the above theorem looks like ‘shrinking one knot and pulling it through the another.’ It is conjectured that McClure-Smith action is equivalent to Budney’s [3], defined as in Figure 2.

To define the operad action, the framing of a knot seems essential. For instance Figure 2 contains ambiguity without framing (small knot can ‘round’ on the another). Indeed Budney defined an action of \mathcal{D}_2 for framed embeddings. \square

4. HOCHSCHILD HOMOLOGY

Here, as another consequence of Corollary 3.2, we introduce a homology spectral sequence and the Poisson bracket Ψ on it. We compare Ψ with the above λ and explain that they are same. This result gives us a method to compute λ .

Let X^\bullet be any cosimplicial space. In [1] an algebraic model $TS(X^\bullet)$ for $\widetilde{\text{Tot}} X^\bullet$ was introduced. $TS(X^\bullet)$ is the total complex of a second quadratic double complex whose $(-p, q)$ -entry is $S_q(X^p)$, the module of q -simplices of the space X^p . The differentials are

$$\begin{aligned} \partial : S_q(X^p) &\longrightarrow S_{q-1}(X^p), \\ \delta : S_q(X^p) &\longrightarrow S_q(X^{p+1}), \end{aligned}$$

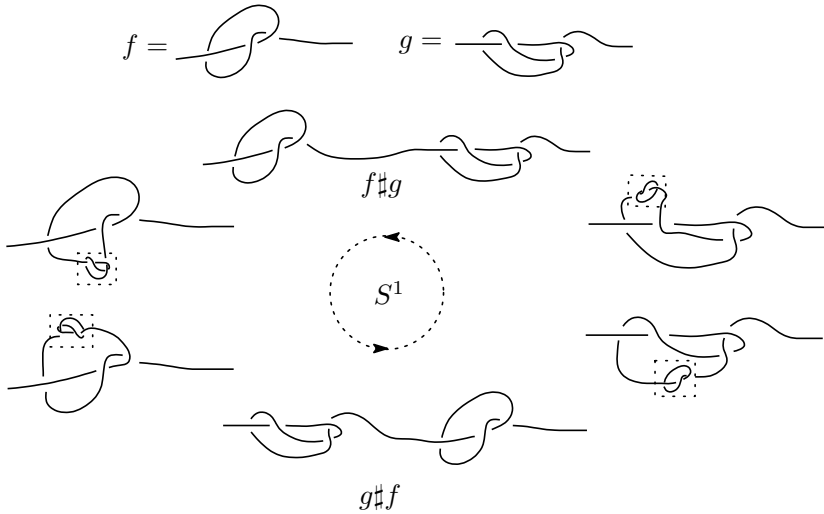


FIGURE 2. the map $S^1 \times (\widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet)^2 \rightarrow \widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet$

where ∂ is the usual boundary map of the singular chain complex, and

$$\delta := \sum_{0 \leq i \leq p+1} (-1)^i d_*^i,$$

with d^i 's being the coface maps of the cosimplicial space. The differential of the total complex $TS(X^\bullet)$ is $\partial_T := \partial + (-1)^p \delta$ on $S_q(X^p)$. Bousfield constructed a chain map

$$\varphi : S_*(\widetilde{\text{Tot}} X^\bullet) \longrightarrow (TS(X^\bullet), \partial_T)$$

which is quasi-isomorphism under some conditions on X^\bullet .

We define the filtration

$$F^p := \prod_{i \geq p} S_*(X^i).$$

This filtration generates a spectral sequence converging to $H_*(TS(X^\bullet), \partial_T)$ (under some conditions). Its E^1 -term is the ∂ -homology of $TS(X^\bullet)$, thus

$$E_{-p,q}^1 \cong H_q(X^p).$$

It turns out that our cosimplicial space X_n^\bullet satisfies the convergence condition. Now we study our E^1 -term $H_*(X_n^\bullet) \cong H_*(\mathcal{D}_n)$ (which is also an operad).

Definition 4.1 ([16]). Let $P_d(x_1, \dots, x_k)$ be the free graded Poisson algebra on the degree zero generator x_1, \dots, x_k with bracket $[\cdot, \cdot]$ of degree d . Define $\mathcal{POISS}_d(k)$ as the submodule of $P_d(x_1, \dots, x_k)$ spanned by the monomials which contain each generator x_i ($1 \leq i \leq k$) exactly once. \square

For example, $[x_1 x_2, x_3]$ is in $\mathcal{POISS}_d(3)$ and of degree d , while $[x_1, [x_1, x_2]]$ is not in $\mathcal{POISS}_d(2)$ since x_1 appears twice.

The sequence $\mathcal{POISS}_d = \{\mathcal{POISS}_d(k)\}_{k \geq 0}$ forms an operad; the maps

$$\gamma_k : \mathcal{POISS}_d(k) \times \prod_{1 \leq i \leq k} \mathcal{POISS}_d(j_i) \longrightarrow \mathcal{POISS}_d(j)$$

$(j = j_1 + \dots + j_k)$ are defined by

$$\begin{aligned} \gamma_k(A(x_1, \dots, x_k); B_1(x_1, \dots, x_{j_1}), B_2(x_1, \dots, x_{j_2}), \dots) \\ = A(B_1(x_1, \dots, x_{j_1}), B_2(x_{j_1+1}, \dots, x_{j_1+j_2}), \dots, B_k(\dots, x_j)), \end{aligned}$$

and the identity element is $x_1 \in \mathcal{POISS}_d(1)$. Moreover \mathcal{POISS}_d is an operad with multiplication; its basepoints are $\mu_k = x_1 \dots x_k \in \mathcal{POISS}_d(k)$. Notice that the above map γ_k looks similar as the operad structure of \mathcal{D}_n ; ‘inserting B_1, \dots, B_k into the balls of A ’ (see Figure 5). In fact the following holds.

Theorem 4.2 ([6]). When $n > 1$, $H_*(\mathcal{D}_n) \cong \mathcal{POISS}_{n-1}$ as an operad. □

Hence the E^1 -term is \mathcal{POISS}_{n-1} as a module; $E^1_{-p,q} = \mathcal{POISS}_{n-1}(p)|_{\text{deg}=q}$. The differential δ can be written as

$$(-1)^{\tilde{x}}\delta(x) = \mu_2 \circ_2 x + \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^i x \circ_i \mu_2 + (-1)^{k+1} \mu_2 \circ_1 x$$

(recall $x \circ_i y = x(\text{id}, \dots, \text{id}, y, \text{id}, \dots)$; Definition A.3). Thus we have described E^1 in terms of operads. In [16] the complex of this type is called the *Hochschild complex* of the operad $H_*(X_n)$. Thus we have the following.

Proposition 4.3 ([16]). The E^2 -term is the *Hochschild homology* of the operad $H_*(X_n)$. □

It is known that on the Hochschild homology a Poisson bracket is defined.

Theorem 4.4 ([7, 16]). Let \mathcal{O} be a multiplicative operad of graded modules. On the Hochschild complex (\mathcal{O}, δ) , define the product

$$\begin{aligned} * : \mathcal{O}(p)|_{\text{deg}=q} \times \mathcal{O}(r)|_{\text{deg}=s} &\longrightarrow \mathcal{O}(p+r)|_{\text{deg}=q+s}, \\ x * y &= (-1)^{p\tilde{y}} \mu_2(x, y), \end{aligned}$$

and the ‘bracket’

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{O}(p)|_{\text{deg}=q} \times \mathcal{O}(r)|_{\text{deg}=s} &\longrightarrow \mathcal{O}(p+r-1)|_{\text{deg}=q+s}, \\ \Psi(x, y) &= \sum_{1 \leq i \leq p} \pm x \circ_i y \pm \sum_{1 \leq j \leq r} \pm y \circ_j x \end{aligned}$$

(precise signs can be found in [12, 16]). Then $*$ and Ψ induce a (1-)Poisson algebra structure on the Hochschild homology $H_*(\mathcal{O}, \delta)$. □

The bracket Ψ is called the *Gerstenhaber bracket*. Thus E^2 -term of our spectral sequence becomes Poisson algebra. The proof of the following is a straightforward computation on the spectral sequence.

Lemma 4.5 ([12]). The map Ψ is well defined on E^r , $r \geq 2$. □

Now it can be seen that the formula for Ψ looks like that of λ on $H_*(\widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet)$ induced by the formula from Theorem 3.5. To prove the following precise form of Theorem 1.1, it is enough to compute the quasi-isomorphism φ explicitly.

Theorem 4.6 ([12, 13]). We regard $H_*(\mathcal{K}'_n)$ and E^∞ as Poisson algebras via the brackets λ and Ψ , respectively. Browder operation λ preserves the filtration $\varphi^{-1}F^*$ on $H_*(\widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet)$. Denote by $GH_*(\widetilde{\text{Tot}} X_n^\bullet)$ the quotient associated with the filtration. Then

$$GH_*(\mathcal{K}'_n) \xrightarrow[\cong]{\varphi_*} GH_*(TS(X_n^\bullet), \partial_T) \xleftarrow[\cong]{} E^\infty$$

is an isomorphism of Poisson algebras. □

Remark 4.7. At first the Gerstenhaber bracket was defined purely algebraically. But later it was conjectured by Deligne that the operad $S_*(\mathcal{D}_2)$ of chains acts on the Hochschild complex and the Gerstenhaber bracket is a consequence of the action. Nowadays Deligne’s conjecture has been proved by many people. In this sense Theorem 4.6 seems to be natural. □

5. CALCULATION

First we mention that $H_*(\mathcal{K}_n)$ contains a subalgebra of *chord diagrams*.

Recall X_n can be also seen as a cosimplicial space. The E^1 -term of our spectral sequence $(H_*(X_n), \delta)$ is a *Moore complex* of the cosimplicial module $H_*(X_n^\bullet)$ (see for example [1]). There is a canonical way to ‘reduce’ a Moore complex; restricting to $\bigcap \ker s_*^i$, we obtain an equivalent complex. We denote by \tilde{E}^1 the reduced complex.

Proposition 5.1 ([15]). $\tilde{E}_{**}^1(\subset \mathcal{POLSS}_{n-1}(*))$ is spanned by products of brackets in which each generator x_i appears in some brackets. Consequently $\tilde{E}_{-p,q}^1$ is not zero only if $q = (n - 1)k$ with $k + 1 \leq p \leq 2k$. □

So for example $[x_1, x_3][x_2, x_4] \in \tilde{E}_{-4,2(n-1)}^1$, while $x_2[x_1, x_3] \notin \tilde{E}_{-3,n-1}^1$.

The ‘diagonal terms’ $\tilde{E}_{-2k,(n-1)k}^1$ are spanned by the elements of the forms

$$[x_{i_1}, x_{j_1}] \cdots [x_{i_k}, x_{j_k}]$$

where $\{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k\}$ is a permutation of $\{1, 2, \dots, 2k\}$. Such elements correspond to *chord diagrams* with chords i_1j_1, \dots, i_kj_k (see Figure 3).

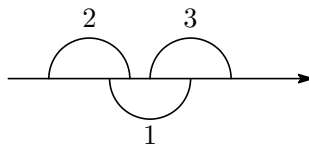


FIGURE 3. a chord diagram corresponding to $[x_2, x_5][x_1, x_3][x_4, x_6]$

Since the image of δ corresponds to *4-term relation* (Figure 4), we can show the following. We denote by \mathcal{A}_k the module of chord diagrams modulo 4-term relation.

Proposition 5.2 ([18]). When n is odd, $E_{-2k,(n-1)k}^2 \cong \mathcal{A}_k$ for any $k \geq 1$. This extends to the isomorphism of graded algebras

$$\bigoplus_k E_{-2k,(n-1)k}^2 \cong \mathcal{A} := \bigoplus_k \mathcal{A}_k.$$

When n is even, we have a similar isomorphism of graded algebras

$$\bigoplus_k E_{-2k,(n-1)k}^2 \cong (\mathcal{A}/\mathcal{A}_1) \otimes \Lambda[\iota]$$

where Λ denotes the exterior algebra, and ι is an element of degree $n - 3$ (odd). We remark that \mathcal{A}_1 is one dimensional. □

In fact one can show that $E_{-2k,k(n-1)}^2 \cong E_{-2k,(n-1)k}^\infty$ (moreover this spectral sequence rationally degenerates at E^2 ; see [9]). Notice that the total degree of $E_{-2k,(n-1)k}^\infty$ is $(n - 3)k$. Thus $\bigoplus_k H_{(n-3)k}(\mathcal{K}'_n)$ contains subalgebra of chord diagrams.

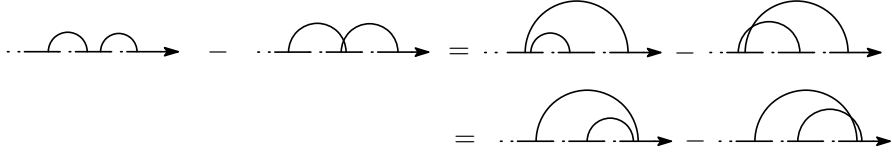


FIGURE 4. 4-term relation

Remark 5.3. Such a class can be realized in a geometric way; consider a singular long knot whose singularity is determined by a chord diagram, and ‘blow their singularity up.’ See [4, 12]. \square

The elements $[x_1, x_2] \in E_{-2, n-1}^2$ and $[x_1, x_3][x_2, x_4] \in E_{-4, 2(n-1)}^2$ determine non-trivial classes $\iota \in H_{n-3}(\mathcal{K}'_n)$ and $v_2 \in H_{2(n-3)}(\mathcal{K}'_n)$, respectively. It turns out that their bracket does not vanish on the spectral sequence. By Theorem 4.6 we can say as follows.

Theorem 5.4. When $n > 3$ is odd, $\lambda(\iota, v_2) \in H_{3n-8}(\mathcal{K}'_n)$ is not zero. Since the degree is not of the form $(n - 3)k$, $\lambda(\iota, v_2)$ is not in the subalgebra of chord diagrams. \square

Few classes except for those obtained from chord diagrams has been identified. But Theorem 5.4 says that the Browder operation (defined in a geometric way) yields another class.

APPENDIX A. LITTLE BALLS OPERAD

Here we review the notion of little balls operad. See also [6, 10, 11].

Definition A.1. Let $D^m \subset \mathbb{R}^m$ be the unit ball. A *little m -ball* is a map $c : D^m \hookrightarrow D^m$ of the form $c(x) = r(x - v)$, $0 < r \leq 1$, $v \in D^m$. The sequence $\mathcal{D}_m = \{\mathcal{D}_m(k)\}_{k \geq 0}$ of spaces

$$\mathcal{D}_m(k) := \{(c_1, \dots, c_k) \mid c_i \text{ little } m\text{-ball}, c_i(\text{Int } D^m) \cap c_j(\text{Int } D^m) = \emptyset\}$$

(by definition $\mathcal{D}_m(0) = \{*\}$) is called the *little m -balls operad*. \square

Proposition A.2 ([6, 10] etc). \mathcal{D}_m is indeed an operad; there exist

- (1) the maps

$$\gamma_k : \mathcal{D}_m(k) \times (\mathcal{D}_m(j_1) \times \dots \times \mathcal{D}_m(j_k)) \longrightarrow \mathcal{D}_m(j)$$

($j = j_1 + \dots + j_k$), denoted by $\gamma_k(x; y_1, \dots, y_k) = x(y_1, \dots, y_k)$, satisfying the following associativity; for any $x \in \mathcal{D}_m(k)$, $y_i \in \mathcal{D}_m(j_i)$ and z_l ,

$$x(y_1, \dots, y_k)(z_1, \dots, z_j) = x(y_1(z_1, \dots, z_{j_1}), y_2(z_{j_1+1}, \dots, z_{j_1+j_2}), \dots),$$

- (2) the element $\text{id} \in \mathcal{D}_m(1)$ (identity map $D^m \rightarrow D^m$) with

$$\text{id}(x) = x = x(\text{id}, \dots, \text{id})$$

for any $x \in \mathcal{D}_m(k)$. \square

Definition A.3. For any operad $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(k)\}_{k \geq 0}$, we use the notation

$$x \circ_i y := x(\overbrace{\text{id}, \dots, \text{id}}^{i-1}, y, \text{id}, \dots) \in \mathcal{O}(k + l - 1)$$

for any $x \in \mathcal{O}(k)$, $y \in \mathcal{O}(l)$ and $1 \leq i \leq k$. \square

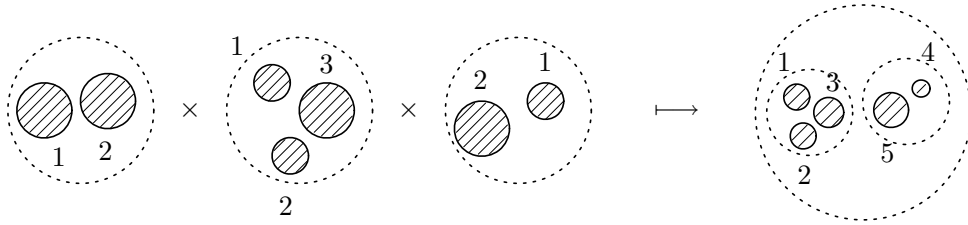


FIGURE 5. the map $\mathcal{D}_m(2) \times (\mathcal{D}_m(3) \times \mathcal{D}_m(2)) \rightarrow \mathcal{D}_m(3+2)$

When $\mathcal{O} = \mathcal{D}_m$, the operation \circ_i is ‘inserting y into the i -th ball of x .’

Definition A.4. The *action* of the little balls operad on the space X is a sequence of maps

$$\theta_k : \mathcal{D}_m(k) \times X^k \longrightarrow X,$$

denoted by $\theta_k(b; x_1, \dots, x_k) = b(x_1, \dots, x_k)$, which satisfies

(1) the compatibility condition: for any $b \in \mathcal{D}_m(k)$, $b_l \in \mathcal{D}_m(j_l)$ and $x_i \in X$,

$$b(b_1, \dots, b_k)(x_1, \dots, x_j) = b(b_1(x_1, \dots, x_{j_1}), b_2(x_{j_1+1}, \dots, x_{j_1+j_2}), \dots)$$

(2) $\text{id}(x) = x$ for any $x \in X$. □

Example A.5 ([10]). Let X be a based space. For any $b \in \mathcal{D}_m(k)$ and $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Omega^m X$, where $\gamma_i : (D^m, \partial D^m) \rightarrow (X, *)$, we define $b(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \Omega^m X$ by

$$b(\gamma_1, \dots, \gamma_k)(z) = \begin{cases} \gamma_i \circ b_i^{-1}(z) & z \in b_i(D^m), \\ * & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This defines an action of \mathcal{D}_m on $\Omega^m X$. □

In fact the action of \mathcal{D}_m characterizes the m -fold loop spaces.

Theorem A.6 ([10]). A based space X is weakly equivalent to an m -fold loop space if and only if X is acted on by \mathcal{D}_m and the induced monoid $\pi_0(X)$ is a group. □

APPENDIX B. COSIMPLICIAL SPACES

Here we define the cosimplicial spaces, especially those associated with an operad with multiplication. Readers also refer to [2, 11].

Proposition B.1. Let \mathcal{O} be an operad with multiplication μ (see §3) with $\mathcal{O}(0) = \{e\}$. If we define $\mathcal{O}^k := \mathcal{O}(k)$ and

$$d^i : \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{O}^{k+1}, \quad 0 \leq i \leq k+1,$$

$$s^j : \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{O}^{k-1}, \quad 0 \leq j \leq k-1,$$

by

$$d^i(x) = \begin{cases} \mu_2 \circ_2 x & i = 0, \\ x \circ_i \mu_2 & 1 \leq i \leq k, \\ \mu_2 \circ_1 x & i = k+1, \end{cases} \quad s^j(x) = x \circ_{j+1} e,$$

where $\mu_2 \in \mathcal{O}(2)$ is the basepoint, then $(\mathcal{O}^\bullet, d, s)$ defines a *cosimplicial space*; d^i and s^i satisfy the *cosimplicial identities* (see p. 267 of [2]). □

When $\mathcal{O} = X_n$ (see §3), which is equivalent to configuration space, the map d^i ‘doubles’ the i -th point and s^j ‘forgets’ the $(j+1)$ -st point.

Another example of a cosimplicial space is the *standard cosimplicial space* Δ^\bullet , $\Delta^k = \{-1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq 1\}$, d^i doubles t_i , and s^j forgets t_{j+1} . The *totalization* of a cosimplicial space X^\bullet is the space of cosimplicial maps

$$\mathrm{Tot} X^\bullet := \mathrm{Hom}(\Delta^\bullet, X^\bullet).$$

It is known that there is a *cofibrant resolution* $\tilde{\Delta}^\bullet \xrightarrow{\sim} \Delta^\bullet$. The *homotopy invariant totalization* defined by

$$\widetilde{\mathrm{Tot}} X^\bullet := \mathrm{Hom}(\tilde{\Delta}^\bullet, X^\bullet)$$

has a ‘precise’ homotopy type; for example $X^\bullet \xrightarrow{\sim} Y^\bullet$ implies $\widetilde{\mathrm{Tot}} X^\bullet \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{Tot}} Y^\bullet$. Some explanations can be found, for example, in [15].

REFERENCES

- [1] A. Bousfield, *On the homology spectral sequence of a cosimplicial space*, Amer. J. Math. 109 (1987), no. 2, 361–394.
- [2] A. Bousfield, D. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Math. 304, 1972.
- [3] R. Budney, *Little cubes and long knots*, Topology 46 (2007), no. 1, 1–27.
- [4] A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, R. Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimensions*, Algebr. Geom. Topol. 2 (2002), 949–1000.
- [5] K. T. Chen, *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 831–879.
- [6] F. Cohen, *On configuration spaces, their homology, and Lie algebras*, J. Pure Appl. Algebra 100 (1995), no. 1-3, 19–42.
- [7] M. Gerstenhaber, A. Voronov, *Homotopy G-algebras and moduli space operad*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 3, 141–153.
- [8] T. Goodwillie, M. Weiss, *Embeddings from the point of view of immersion theory II*, Geom. Topol. 3 (1999), 103–118.
- [9] P. Lambrechts, V. Turchin, I. Volić, *The rational homology of spaces of knots in codimension > 2*, math.AT/0703649
- [10] P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Math. 271, 1972.
- [11] J. McClure, J. Smith, *Cosimplicial objects and little n-cubes I*, Amer. J. Math. 126 (2004), no. 5, 1109–1153.
- [12] K. Sakai, *Poisson structures on the homology of the space of knots*, submitted, math.AT/0608326.
- [13] P. Salvatore, *Knots, operads and double loop spaces*, math.AT/0608490.
- [14] D. Sinha, *The topology of spaces of knots*, math.AT/0202287.
- [15] D. Sinha, *Operads and knot spaces*, J. Amer. Math. Soc. 19 (2006), no. 2, 461–486.
- [16] V. Tourtchine (Turchin), *On the homology of the spaces of long knots*, Adv. in topological quantum field theory, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. 179 (2004), 23–52.
- [17] V. Vassiliev, *Complements of discriminants of smooth maps*, Trans. Math. Monographs 98, AMS, Providence, RI (1992).
- [18] I. Volić, *Finite type knot invariants and calculus of functors*, to appear in Comp. Math. math.AT/0401440
- [19] M. Weiss, *Embeddings from the point of view of immersion theory I*, Geom. Topol. 3 (1999), 67–102.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO
E-mail address: ksakai@ms.u-tokyo.ac.jp

The Steenrod algebra and the automorphism group of additive formal group law

井上雅照

1 目的と歴史的背景

今回出てくるホモロジー、コホモロジー $H_*(-)$, $H^*(-)$ はすべて係数 \mathbb{F}_2 とする。 H^*H は安定コホモロジー作用素、その双対を H_*H とする。 H^*H をあるコホモロジー、 H_*H をあるホモロジーと考えることもできる。安定コホモロジー作用素 $h : H^n(-) \rightarrow H^m(-)$ とは、空間に対して自然であり

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^n(X) & \xrightarrow[\sigma]{\cong} & \tilde{H}^{n+1}(S^1 \wedge X) \\ \tilde{h} \downarrow & & \downarrow \tilde{h} \\ \tilde{H}^m(X) & \xrightarrow[\sigma]{\cong} & \tilde{H}^{m+1}(S^1 \wedge X). \end{array}$$

が可換になるような作用素である。 \tilde{H} は簡約コホモロジー、 σ は懸垂同型とする。また H^*H の積 $H^*H \otimes H^*H \rightarrow H^*H$ は安定コホモロジー作用素の合成で定義する。

目的は H_*H の構造を、今までに知られている Milnor の方法とは異なる方法で決定することである。歴史的に Steenrod や Milnor によってどのようにしてこの構造が得られたのかを解説する。まず Steenrod 作用素 Sq^i ($i \geq 0$) が得られた。これはコホモロジーに自然に $Sq^i : H^n(X, A) \rightarrow H^{n+i}(X, A)$ と作用し次の性質を持つことが知られている。

- (i) $Sq^0 = 1$
- (ii) $\dim x = n$ とすると、 $Sq^n(x) = x^2$
- (iii) $\dim x < n$ とすると、 $Sq^n x = 0$
- (iv) Cartan 公式: $Sq^k(xy) = \sum_{i=0}^k Sq^i x \cdot Sq^{k-i} y$

(v) Sq^1 は $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/4 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$ の Bockstein 作用素

(vi) Adem 関係式: $0 < a < 2b$ のとき $Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{\lfloor a/2 \rfloor} \binom{b-1-j}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j$

これらの性質から Sq^i は安定コホモロジー作用素 H^*H の元であることが言えるので、写像

$$F(Sq^1, Sq^2, \dots) \longrightarrow H^*H$$

が得られる。 $F(Sq^1, Sq^2, \dots)$ は Sq^i 達で生成される free associative 代数とする。 I を Adem 関係式で生成されるイデアルとし、

$$S^* := F(Sq^1, Sq^2, \dots)/I$$

と定義する。 S^* を Steenrod 代数という。このとき、 $S^* \rightarrow H^*H$ が定義でき、これが同型になることが Serre によって知られている。さらに Cartan 公式から S^* が Hopf 代数になり、 H^*H も Hopf 代数であることが知られている。実際には $S^* \rightarrow H^*H$ は Hopf 代数同型である。 S_* を S^* の双対 Hopf 代数とすると Hopf 代数同型 $S_* \cong H_*H$ が得られる。

Milnor は S_* の構造が

$$S_* \cong \mathbb{Z}/2[\xi_1, \xi_2, \dots], \quad \xi_i \in S_{2^i-1}$$

で余積構造が $\xi_n \rightarrow \sum_i \xi_{n-i}^{2^i} \otimes \xi_i$ となることを示した。これによって H_*H の構造が決定される。

今回の目標は H_*H の Hopf 代数構造を双対 Steenrod 代数 S_* 、特に Adem 関係式を使わずに決定することである。

2 加法形式群

定義 1. 可換環 R 上の形式群とは $F(x, y) \in R[[x, y]]$ で次の性質を満たすものである。

(i) $F(x, 0) = F(0, x) = x$

(ii) $F(x, y) = F(y, x)$

(iii) $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$

特に形式群 $G_a(x, y) = x + y$ を加法形式群と言う。

定義 2. F, G を形式群とする。 F から G への準同型は定数項 0 のべき級数 $f(x) \in R[[x]]$ で $f(F(x, y)) = G(f(x), f(y))$ を満たすものである。 $f(x)$ が可逆であるとき同型といい、さらに $f'(x) = 1$ を満たすとき厳密同型という。

$\text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(G_a)(R_*)$ を次数付き \mathbb{F}_2 代数 R_* 上の加法形式群の厳密同型全体とする。次数を込めて考えると $f(x) \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(G_a)(R_*)$ は $f(x) \in R_*[[x]]$ で

(i) $f(0) = 0, f'(0) = 1$

(ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

(iii) $x^k \in R_{k-1}$

を満たすものである。したがって $f(x) \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(G_a)(R_*)$ は

$$f(x) = x + a_1x^2 + a_2x^4 + \cdots + a_mx^{2^m} + \cdots, \quad a_i \in R_{2^i-1}$$

の形になることが分かる。 $A_* := \mathbb{F}_2[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots]$, ($\bar{\xi}_i \in A_{2^i-1}$) とすると、 $f(x) \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(G_a)(R_*)$ は

$$\chi : A_* = \mathbb{F}_2[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots] \longrightarrow R_*, \quad \chi(\bar{\xi}_i) = a_i$$

で表現される。言いかえると次の自然な同型

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}_2\text{-alg}}(A_*, R_*) \cong \text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(G_a)(R_*), \quad \chi \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \chi(\bar{\xi}_i)x^{2^i}$$

が存在する。さらに $\text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(G_a)(R_*)$ の積を $(g \cdot f)(x) = f(g(x))$ で定義すると $\text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(G_a)(R_*)$ は群になる。この群構造に対応する A_* の余積 $\Delta : A_* \rightarrow A_* \otimes A_*$ があって $\Delta(\bar{\xi}_n) = \sum_{i=0}^n \bar{\xi}_{n-i}^{2^i} \otimes \bar{\xi}_i$ となっている。まとめると次のようになる。

定理 3. $A_* := \mathbb{F}_2[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots]$ で余積 $\Delta(\bar{\xi}_n) = \sum_{i=0}^n \bar{\xi}_{n-i}^{2^i} \otimes \bar{\xi}_i$ となる Hopf 代数とする。このとき $\text{Hom}_{\mathbb{F}_2\text{-alg}}(A_*, R_*)$ は群となり、群の同型

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}_2\text{-alg}}(A_*, R_*) \cong \text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(G_a)(R_*), \quad \chi \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \chi(\bar{\xi}_i)x^{2^i}$$

がある。

A_* は Hopf 代数として Steenrod 代数 S_* と同型となることがわかる。この A_* を使って H_*H の構造を決定することが目標である。この 2 つを結びつけるために次の multiplicative 作用素が必要になる。

3 multiplicative 作用素

以後 X, Y は空間とする。

定義 4. R_* を次数付き \mathbb{F}_2 代数で $R_* = 0$ ($* < 0$) を満たすとする。コホモロジー次数 k が $\prod_{n \geq 0} H^{k+n}(X) \otimes R_n$ となるような次数付き環を (正確な書き方ではないが) $H^*(X) \otimes R_*$ と書く。次の性質を満たす自然な作用素 $\beta : H^*(-) \rightarrow H^*(-) \otimes R_*$ を multiplicative 作用素という：

- (i) β はコホモロジー次数を保つ。
- (ii) 次が可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(X) \otimes H^*(Y) & \xrightarrow{\quad \times \quad} & H^*(X \times Y) \\
 \beta \otimes \beta \downarrow & & \downarrow \beta \\
 H^*(X) \otimes R_* & \xrightarrow{1 \otimes \mu \otimes 1} & H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{(\times) \otimes m} H^*(X \times Y) \otimes R_* \\
 \otimes H^*(Y) \otimes R_* & & \otimes R_* \otimes R_*
 \end{array}$$

ここで \times はクロス積、 μ 成分の入れ替え、 m は R_* の積とする。

- (iii) $\beta(u) = u \otimes 1$ ($u \in H^1(S^1)$ は生成元)。

multiplicative 作用素 β は、簡約コホモロジーでも

$$\tilde{\beta} : \tilde{H}^*(X) \longrightarrow \tilde{H}^*(X) \otimes R_*$$

があり、次が可換になる：

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{H}^*(X) \otimes \tilde{H}^*(Y) & \xrightarrow{\quad \wedge \quad} & \tilde{H}^*(X \wedge Y) \\
 \tilde{\beta} \downarrow & & \downarrow \tilde{\beta} \\
 \tilde{H}^*(X) \otimes R_* & \xrightarrow{1 \otimes \mu \otimes 1} & \tilde{H}^*(X) \otimes \tilde{H}^*(Y) \xrightarrow{(\wedge) \otimes m} \tilde{H}^*(X \wedge Y) \otimes R_* \\
 \otimes \tilde{H}^*(Y) \otimes R_* & & \otimes R_* \otimes R_*
 \end{array}$$

ここで \wedge はスマッシュ積とする。この可換図式と multiplicative 作用素の定義の (iii) より次が成り立つ

補題 5. $\tilde{\beta}$ が安定作用素である、つまり

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^n(X) & \xrightarrow[\sigma]{\cong} & \tilde{H}^{n+1}(S^1 \wedge X) \\ \tilde{\beta} \downarrow & & \downarrow \tilde{\beta} \\ \tilde{H}^n(X) \otimes R_* & \xrightarrow[\sigma \otimes 1]{\cong} & \tilde{H}^{n+1}(S^1 \wedge X) \otimes R_* \end{array}$$

が成り立つ。ここで σ は懸垂同型である。

H を mod 2 Eilenberg-MacLane スペクトラムとする。 H はコホモロジーに対応するものである。 $\bar{\psi}$ を

$$\bar{\psi} : H^*(X) = [X, H]^* \longrightarrow [X, H \wedge H]^*, \quad \bar{\psi}(f) = i \wedge f \in [S^0 \wedge X, H \wedge H]^*.$$

と定義する。ここで $i : S^0 \rightarrow H$ は単位写像とする。また同型 $\kappa : H^*(X) \otimes H_*H \cong [X, H \wedge H]^*$ があるので、

$$\psi = \kappa^{-1} \bar{\psi} : H^*(X) \longrightarrow H^*(X) \otimes H_*H$$

を定義することができる。これは H_*H 上の multiplicative 作用素になる。

今から R_* は有限型、つまり R_n が有限次元であると仮定する。 $\text{Op}(R_*)$ を R_* 上の multiplicative 作用素全体の集合とする。今から R_* に対して自然な写像

$$\lambda : \text{Op}(R_*) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_2}(H_*H, R_*),$$

を定義する。ここで $\text{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\cdot, \cdot)$ は次数付き線形写像とする。

$H^*(X) \otimes R_*$ はコホモロジーになるので、これに対応するコホモロジーを $(HR_*)^*(X)$ と書く。このとき自然な同型

$$\bar{\lambda} : (HR_*)^*H \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{F}_2}^*(H_*H, R_*)$$

がある。ここで $(HR_*)^*H$ は $H^*(-)$ から $(HR_*)^*(-)$ への安定コホモロジー作用素とする。

multiplicative 作用素 $\beta : H^*(-) \rightarrow H^*(-) \otimes R_*$ に対して $\tilde{\beta}$ は安定作用素なので、 β を $H^*(-)$ から $(HR_*)^*(-)$ への安定コホモロジー作用素とすることができる。 β はコホモロジー次数を保つので $\beta \in (HR_*)^0H$ となり、次の可換図式を持つ：

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \xrightarrow{\psi} & H^*(X) \otimes H_*H \\ & \searrow \beta & \downarrow 1 \otimes \bar{\lambda}(\beta) \\ & & H^*(X) \otimes R_* \end{array}$$

$\text{Op}(R_*) \subset (HR_*)^0 H$ なので $\bar{\lambda}$ を $\text{Op}(R_*)$ に制限した写像を λ とすると、求める写像 $\lambda : \text{Op}(R_*) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_2}(H_* H, R_*)$ が得られる。

実際には次の定理が成り立つ。

定理 6. $\text{Hom}_{\mathbb{F}_2\text{-alg}}(\ , \)$ を次数付き代数準同型とするとする。このとき次の同型が存在する。

$$\lambda : \text{Op}(R_*) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_2\text{-alg}}(H_* H, R_*)$$

ただし R_* に対して自然とする。

したがって multiplicative 作用素 β に対して、

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \xrightarrow{\psi} & H^*(X) \otimes H_* H \\ & \searrow \beta & \downarrow 1 \otimes \lambda(\beta) \\ & & H^*(X) \otimes R_* \end{array}$$

が可換になるような代数準同型 $\lambda(\beta) : H_* H \rightarrow R_*$ が一つだけ存在する。

4 Steenrod の power operation

ここではもう 1 つの multiplicative 作用素 $H^*(X) \rightarrow H^*(X) \otimes D[n]_*$ を定義する。

G を m 次対称群 Σ_m の部分群とする。また

$$G \rightarrow EG \rightarrow BG$$

を普遍主 G 束とする。 G は X^m に自然に作用するので、 G の作用による商空間を $E_G(X) := EG \times_G X^m$ と定義する。このとき次の作用素

$$P_G : H^q(X) \rightarrow H^{mq}(E_G(X))$$

があることが知られている。また対角写像

$$d_G : BG \times X \rightarrow E_G(X)$$

も自然に定義できる。この 2 つを使って次の作用素

$$d_G^* P_G : H^q(X) \rightarrow H^{mq}(BG \times X)$$

が得られる。

$E^n = (\mathbb{Z}/2)^n$ の集合としての自己同型を $\text{Aut}_{\text{Set}}(E^n) \cong \Sigma_{2^n}$ とする。このとき

$$E^n \hookrightarrow \text{Aut}_{\text{Set}}(E^n) \cong \Sigma_{2^n}, \quad g \rightarrow (h \mapsto h + g)$$

のようにして E^n は $\text{Aut}_{\text{Set}}(E^n) \cong \Sigma_{2^n}$ の部分群とすることができる。 $P_n := P_{E^n}$, $d_n := d_{E^n}$ と定義すると、

$$d_n^* P_n : H^q(X) \longrightarrow H^{2^n q}(BE^n \times X)$$

となる。 $H^*(BE^n)$ のコホモロジーは

$$H^*(BE^n) \cong \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n], \quad \deg x_i = 1$$

である。 $GL_n := GL_n(\mathbb{Z}/2)$ は $E^n = (\mathbb{Z}/2)^n$ に作用するので GL_n は $H^*(BE^n)$ に作用する。この作用による不変部分環を $H^*(BE^n)^{GL_n}$ とすると、 $d_n^* P_n$ の像は

$$\begin{aligned} d_n^* P_n : H^*(X) &\longrightarrow H^*(BE^n)^{GL_n} \otimes H^*(X) \subset H^*(BE^n) \otimes H^*(X) \\ &\cong H^*(BE^n \times X) \end{aligned}$$

となることが知られている。

また $H^*(BE^n)^{GL_n} = \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]^{GL_n}$ は次のようになることが Dickson により知られている。 $q_{n,i}$ を

$$\prod_{\alpha \in E^n} (x + \alpha) = \sum_{s=0}^n q_{n,s} x^{2^s} \quad (q_{n,n} = 1)$$

とおくと、 $\deg q_{n,i} = 2^n - 2^i$ となる。このとき

$$\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]^{GL_n(\mathbb{F}_2)} \cong \mathbb{F}_2[q_{n,0}, q_{n,1}, \dots, q_{n,n-1}]$$

が知られている。したがって

$$d_n^* P_n : H^q(X) \longrightarrow (\mathbb{F}_2[q_{n,0}, q_{n,1}, \dots, q_{n,n-1}] \otimes H^*(X))^{2^n q}$$

となる。ここで $\Gamma_n = \mathbb{F}_2[q_{n,0}^{\pm 1}, q_{n,1}, \dots, q_{n,n-1}]$ とおき、

$$S_n := q_{n,0}^{-q} d_n^* P_n : H^q(X) \longrightarrow (\Gamma_n \otimes H^*(X))^q$$

とすると、 S_n は次数を保つ写像になる。

$\xi_i[n] = q_{n,i}/q_{n,0}$ とおくと、 $D[n]_* := \mathbb{F}_2[\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_n[n]]$ は Γ_n の部分環になる。このとき、Mùi により次が成り立つことが知られている。

補題 7. $\text{Im } S_n \subset D[n]_* \otimes H^*(X)$

写像

$$H^*(X) \xrightarrow{S_n} D[n]_* \otimes H^*(X) \longrightarrow H^*(X) \otimes D[n]_*$$

をまた S_n とする。ここで 2 番目の写像は入れ替え写像とする。このとき $S_n : H^*(X) \rightarrow H^*(X) \otimes D[n]_*$ は multiplicative 作用素になる。特に次が成り立つ。

定理 8. $H^*(B\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{F}_2[x]$ ($\deg x = 1$) とする。このとき

$$S_n(x) = \sum_{s=0}^n x^{2^s} \otimes \xi_s[n]$$

5 H_*H と $\text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(G_a)$ の関係

分類空間 $B\mathbb{Z}/2$ のコホモロジーは $H^*(B\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{F}_2[x]$ ($\deg |x| = 1$) となる。 R_* 上の multiplicative 作用素 β に対して $\beta(x)$ は

$$\beta : H^*(B\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{F}_2[x] \longrightarrow H^*(B\mathbb{Z}/2) \otimes R_* \cong R_*[[x]]$$

なので、 $\beta(x) \in R_*[[x]]$ となる。また $B\mathbb{Z}/2$ は H 空間、つまり積 $m : B\mathbb{Z}/2 \times B\mathbb{Z}/2 \rightarrow B\mathbb{Z}/2$ があり、そのコホモロジーは

$$m^* : H^*(B\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{F}_2[x] \longrightarrow H^*(B\mathbb{Z}/2 \times B\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{F}_2[x, y], \quad x \mapsto x + y$$

となる。これは加法形式群である。これと multiplicative 作用素の性質を使って次のことが成り立つ。

補題 9. $f_\beta(x) := \beta(x) \in R_*[[x]]$ とする。このとき $f_\beta(x) \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(G_a)(R_*)$ が成り立つ。

$\chi_\beta : A_* \rightarrow R_*$ を定理 3 で $f_\beta(x)$ に対応する代数準同型とする。今まで出てきた 2 つの multiplicative 作用素

$$\psi : H^*(X) \longrightarrow H^*(X) \otimes H_*H, \quad S_n : H^*(X) \longrightarrow H^*(X) \otimes D[n]_*$$

を考える。これらに対応した代数準同型写像

$$\chi_\psi : A_* \longrightarrow H_*H, \quad \chi_{S_n} : A_* \longrightarrow D[n]_*$$

が得られる。

また定理 6 より可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(X) & \xrightarrow{\psi} & H^*(X) \otimes H_*H \\
 \searrow S_n & & \downarrow 1 \otimes \lambda(S_n) \\
 & & H^*(X) \otimes D[n]_*
 \end{array}$$

が成り立つ。これと上のことより、

$$\begin{array}{ccc}
 A_* & \xrightarrow{\chi_\psi} & H_*H \\
 \searrow \chi_{S_n} & & \downarrow \lambda(S_n) \\
 & & D[n]_*
 \end{array}$$

が成り立つ。さらに定理 8 より、 $\chi_{S_n}(\bar{\xi}_i) = \xi_i[n] (i \leq n)$, $\chi_{S_n}(\bar{\xi}_i) = 0 (i > n)$ がわかるので、

$$\chi_{S_n} : A_* = \mathbb{F}_2[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots] \longrightarrow D[n]_* = \mathbb{F}_2[\xi_1[n], \dots, \xi_n[n]]$$

は $* \leq 2^n - 1$ では同型である。したがって、 n を十分大きくとることによって $\chi_\psi : A_* \rightarrow H_*H$ は単射であることがわかる。また Serre の結果より H_*H の Poincaré 級数が $\prod_{i=1}^{\infty} 1/(1 - t^{2^i - 1})$ であることがわかり、これは A_* の Poincaré 級数と同じであるので χ_ψ は全単射であることがいえる。

また $\psi : H^*(X) \rightarrow H^*(X) \otimes H_*H$ は comodule 写像なので χ_ψ は Hopf 代数写像であることが言える。したがって次の定理が成り立つ。

定理 10. $\chi_\psi : A_* \rightarrow H_*H$ は Hopf 代数同型である。

A_* の Hopf 代数構造は既に得られているので、このことから H_*H の構造も得ることができる。

MORAVA K-THEORIES OF CLASSIFYING SPACES OF COMPACT LIE GROUPS

MASAKI KAMEKO

ABSTRACT. This is the abstract for the talk I will give in the 54th Topology Symposium in August 6, 2007 at the University of Aizu. I will talk about the computational aspect of cohomology and generalized cohomology theories of classifying spaces of connected compact Lie groups.

1. INTRODUCTION

Let p be a prime number. Let G be a connected compact Lie group and let us denote by BG its classifying space. We say G has p -torsion if and only if $H_*(G; \mathbb{Z})$ has p -torsion. In the case G has no p -torsion, the mod p cohomology of BG is well-known. However, in the case G has p -torsion, the computation of the mod p cohomology is not an easy task. I refer the reader for the book of Mimura and Toda [9] for the detailed account on the cohomology of classifying spaces of compact Lie groups.

I will give the current state of computation of the mod p cohomology theory, Brown-Peterson cohomology and Morava K -theories of classifying spaces of some connected compact Lie groups. The coefficient ring of Brown-Peterson cohomology is

$$BP^* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots, v_n, \dots],$$

where $\deg v_n = -2(p^n - 1)$ and the coefficient ring of the Morava K -theory $K(n)$ is

$$K(n)^* = \mathbb{Z}/p[v_n, v_n^{-1}].$$

I will describe the results of the joint work with Yagita [2] and some other results obtained after writing of [2]. One of the explicit computational results is as follows:

Theorem 1.1. *For $p = 2$, $G = G_2$, the Morava K -theory $K(n)^*(BG_2)$ of the classifying space of the exceptional Lie group G_2 is given by*

$$K(n)^* \otimes_{BP^*} (BG_2).$$

As an $gr BP^*$ -module, we have that

$$gr BP^*(BG_2)$$

is isomorphic to

$$gr BP^*[[y_8, y_{12}, y_{14}]] / (y_{14}\rho_0, y_{14}\rho_{-2}, y_{14}\rho_{-6}) \bigoplus gr BP^*[[y_8, y_{12}, y_{14}]]\{w_4\},$$

where the index indicates the degree.

The author was partially supported by Japan Society for the Promotion of Science, Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 19540105.

The computation of the Brown-Peterson cohomology above is done by Kono and Yagita in [6] and the result above is conjectured in [6].

Theorem 1.2. *For $(G, p) = (G_2, 2), (E_6, 2), (F_4, 3), (E_7, 3), (E_8, 5)$ and $(PU(pm), p)$ where $p \nmid m$, the E_2 -term of the Adams spectral sequence for $P(n)^*(BG)$ has no odd degree elements and it collapses at the E_2 -level. In particular, we have*

$$K(n)^*(BG) = K(n)^* \otimes_{BP^*} BP^*(BG)$$

and the Morava K -theory $K(n)^*(BG)$ has no odd degree elements.

Before we begin to deal with the computation, we would like to mention the interpretation of K -theory in terms of representation theory. Recall the following theorem.

Theorem 1.3 (Atiyah-Segal). *There is an isomorphism*

$$R(G)^\wedge \rightarrow K(BG),$$

where $R(G)^\wedge$ is the completion of the complex representation ring of G with respect to the augmentation ideal.

Also, Morava $K(0)$ -theory is the ordinary cohomology with coefficient in the rational numbers \mathbb{Q} or its p -completion \mathbb{Q}_p . Thus, through deRham theory, it is related to differential forms. Morava $K(1)$ -theory is related to the p -localization of the complex K -theory and to vector bundles. Morava $K(2)$ -theory is related to the elliptic cohomology. Many mathematicians dream of geometric and/or representation theoretical interpretation of Morava K -theories and related cohomology theories, e.g. elliptic cohomology, complex cobordism theory. We hope the computation of Morava K -theories of classifying spaces might shed some light on such geometric and/or representation theoretical interpretation.

2. ORDINARY COHOMOLOGY THEORY

As we already mentioned, when G has no p -torsion, we have a satisfactory result:

Theorem 2.1. *If G has no p -torsion, then the induced homomorphism*

$$H^*(BG; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(BT; \mathbb{Z}/p)$$

is a monomorphism. If p is an odd prime, then the image of the above homomorphism is the ring of invariants of the Weyl group W ,

$$H^*(BG; \mathbb{Z}/p) = H^*(BT; \mathbb{Z}/p)^W = \mathbb{Z}/p[y_1, \dots, y_n]$$

where $\deg y_1 \cdots \deg y_n = 2^n |W|$ and $\deg y_1, \dots, \deg y_n$ are even. In particular, the mod p cohomology of BG is a polynomial algebra over \mathbb{Z}/p .

There are compact Lie groups G with p -torsion. The following is the list of p -torsions of simply connected, simple compact Lie groups.

Lie group	2-torsion	3-torsion	5-torsion	p -torsion ($p > 5$)
$SU(n)$	×	×	×	×
$Sp(n)$	×	×	×	×
$Spin(n)$	○	×	×	×
G_2	○	×	×	×
F_4	○	○	×	×
E_6	○	○	×	×
E_7	○	○	×	×
E_8	○	○	○	×

Most of the mod p cohomology theories of classifying spaces of the above Lie groups as graded \mathbb{Z}/p -modules are computed. Only the cases $p = 2$, $G = E_8$ and $p = 3$, $G = E_8$ remain unsolved, although some of details are not yet in the literature.

There are important examples of connected compact Lie groups with p -torsion. Among those are the projective classical groups, such as the projective unitary group $PU(n)$ which is the quotient of the unitary group $U(n)$ by its center S^1 . The ordinary cohomology theories of projective classical groups seem to be difficult to compute. Among the nontrivial cases, only the cases $p = 2$, $G = PO(4n + 2)$, $PU(4n + 2)$, $Sp(4n + 2)$ and $p = 3$, $G = PU(3)$ were computed in the 20th century (See [3], [4], [5]). The case $p > 3$, $G = PU(p)$ are computed in [2], [11], recently. The computation of $H^*(PU(p^n); \mathbb{Z}/p)$ ($n \geq 2$) seems to be difficult.

When G has p -torsion, there are odd degree elements in the mod p cohomology of BG , so that the induced homomorphism

$$H^*(BG; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(BT; \mathbb{Z}/p)$$

is no longer a monomorphism. Replacing the maximal torus by elementary abelian p -subgroups A 's, Quillen proved the following theorem.

Theorem 2.2. *There is an F -isomorphism*

$$H^*(BG; \mathbb{Z}/p) \rightarrow \varprojlim H^*(BA; \mathbb{Z}/p).$$

F -isomorphism implies that a power of $x \in \varprojlim H^(BA; \mathbb{Z}/p)$ is in the image of this homomorphism and each element in the kernel of this homomorphism is nilpotent.*

The cohomology of elementary abelian p -subgroups is not only useful in the computation of the mod p cohomology of classifying spaces but also important to our understanding it. So, we hope the following conjecture to be true.

Conjecture 2.3. *For $p > 2$, the induced homomorphism*

$$H^*(BG; \mathbb{Z}/p) \rightarrow \prod_A H^*(BA; \mathbb{Z}/p)$$

is a monomorphism where A ranges over the conjugacy classes of elementary abelian p -subgroups of G .

In the case $p = 2$, the above conjecture does not hold. See Kono-Yagita [6].

3. MORAVA K-THEORY AND BROWN-PETERSON COHOMOLOGY THEORY

The computation of generalized cohomology theories is easy when G has no p -torsion and the coefficient ring of the generalized cohomology theory has no odd

degree elements. Since the ordinary cohomology of BG has no odd degree elements, the E_2 -term

$$E_2^{p,q} = H^p(BG; E^q)$$

of the Atiyah-Hirzebruch spectral sequence converging to the generalized cohomology theory $E^*(BG)$ collapses at the E_2 -level and we have the following proposition.

Proposition 3.1. *The Brown-Peterson cohomology $BP^*(BG)$ is isomorphic to*

$$BP^* \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} H^*(BG; \mathbb{Z}_{(p)}).$$

The Morava K -theory $K(n)^(BG)$ is isomorphic to*

$$K(n)^* \otimes_{\mathbb{Z}/p} H^*(BG; \mathbb{Z}/p).$$

If G has p -torsion, then the mod p cohomology has an odd degree nonzero element. Our results seem to support the following conjecture.

Conjecture 3.2. *The Brown-Peterson cohomology of the classifying space of a connected compact Lie group has no odd degree elements.*

Many mathematicians believed that this conjecture should be true for all compact Lie groups including all finite groups. But a counterexample was constructed by Kriz in [7], [8]. We do not know any counterexample in the case of connected compact Lie groups.

There is a generalized cohomology theory $P(n)$ for $n \geq 0$. $P(0)$ is BP or its p -completion. We compute the $P(n)$ -cohomology in order to compute the Morava K -theories.

Theorem 3.3. *If the induced homomorphism*

$$\rho : BP^*(X) \rightarrow P(n)^*(X)$$

is an epimorphism for all $n \geq 0$, then the following hold: for all $n \geq 0$,

$$P(n)^*(BG) \cong P(n)^* \otimes_{BP^*} BP^*(BG)$$

and

$$K(n)^*(BG) \cong K(n)^* \otimes_{BP^*} BP^*(BG).$$

So, if we would like to show that

$$K(n)^*(X) \cong K(n) \otimes_{BP^*} BP^*(X)$$

for all n , it suffices to show that

$$BP^*(X) \rightarrow P(n)^*(X)$$

is an epimorphism for all n .

In the case $p = 2$, we have the following results for simply connected simple Lie groups.

$(p = 2)$	G	BP	Morava K
	G_2	○	○
	F_4	○	??
	E_6	○	○
	E_7	??	??
	E_8	??	??

The computation of the Brown-Peterson cohomology above is due to Kono and Yagita in [6]. The computation of Morava K -theories is a new result. Kono and Yagita compute the Brown-Peterson cohomology of $BSpin(n)$ for $n \leq 10$ and $BPU(4n+2)$, $BSp(4n+2)$, too. Wilson compute the Brown-Peterson cohomology of $BO(n)$ in [12] and Kono and Yagita compute their Morava K -theories in [6]. Recently, Inoue and Yagita compute the Brown-Peterson cohomology and Morava K -theories of $BSO(n)$ for $n \geq 2$ in [1]. In the case $p = 3$, we have the following results for simply connected simple Lie groups.

$(p = 3)$	G	BP	Morava K
	F_4	○	○
	E_6	○	??
	E_7	○	○
	E_8	??	??

The computation of $p = 3$, $G = F_4, PU(3)$ is done in [6]. In the case $p = 3$, $G = E_6$, in [2], we computed the Brown-Peterson cohomology of BE_6 , however, we could not conclude

$$K(n)^*(BE_6) = K(n)^* \otimes_{BP^*} BP^*(BE_6).$$

It remains to be an open problem. In the case $p = 5$, we have the following result for simply connected simple Lie groups.

$(p = 5)$	G	BP	Morava K
	E_8	○	○

4. ADAMS SPECTRAL SEQUENCE

In [6], they use the Atiyah-Hirzebruch spectral sequence in order to compute the Brown-Peterson cohomology. The Atiyah-Hirzebruch spectral sequence in [6] does not collapse at the E_2 -level. In [2], we use the Adams spectral sequence in order to compute $P(n)$ -cohomology and show that the assumption in Theorem 3.3 holds. The Adams spectral sequence is an spectral sequence converging to $P(n)$ cohomology whose E_2 -term is given by

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}(H^*(P(n); \mathbb{Z}/p), H^*(BG; \mathbb{Z}/p)) = \text{Ext}_{\mathcal{E}_n}(\mathbb{Z}/p, H^*(BG; \mathbb{Z}/p)),$$

where \mathcal{A} is the mod p Steenrod algebra and \mathcal{E}_n is the subalgebra generated by Milnor operations Q_n, Q_{n+1}, \dots . The E_2 -term could be computed by taking the (co)homology of the (co)chain complex

$$d_1 : grP(n)^* \widehat{\otimes} H^*(BG; \mathbb{Z}/p) \rightarrow grP(n)^* \widehat{\otimes} H^*(BG; \mathbb{Z}/p)$$

where

$$grP(n)^* = \mathbb{Z}/p[v_n, v_{n+1}, \dots,]$$

and

$$d_1(v \otimes x) = \sum_{k=n}^{\infty} vv_k \otimes Q_k x.$$

We compute this (co)chain complex. In this talk, we deal with the case $p = 2$, $G = G_2, E_6$ and give an outline of the computation.

First, we deal with the case $p = 2$, $G = G_2$. Let us recall the mod 2 cohomology of the classifying space of the exceptional Lie group G_2 . There is an non-toral elementary abelian 2-subgroup of rank 3, say A , in G_2 . The induced homomorphism

$$H^*(BG_2; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(BA; \mathbb{Z}/2)$$

is a monomorphism and the image of this induced homomorphism is the ring of invariants of general linear group $GL_3(\mathbb{F}_2)$ acting on the polynomial algebra $H^*(BA; \mathbb{Z}/2)$ in the usual manner. So, the mod 2 cohomology of BG_2 is the Dickson invariants

$$D = \mathbb{Z}/2[y_0, y_1, y_2]$$

where $\deg y_k = 2^3 - 2^k$ and through this inclusion, we have the action of the Steenrod algebra, in particular, the action of Milnor operations on $H^*(BG_2; \mathbb{Z}/2)$. Let R be the subalgebra of D generated by y_0^2 , y_1^2 and y_2^2 . Then D is a free R -module with the basis

$$\{1, y_0, y_0y_1, y_0y_2, y_1, y_2, y_1y_2, y_0y_1y_2\}.$$

Let us write $\beta_0 = y_0^2$, $\beta_1 = y_0y_1$, $\beta_2 = y_0y_2$ and $\beta_3 = y_0$. Then, we have

$$D = R\left\{1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_0}, \frac{\beta_1\beta_3}{\beta_0}, \frac{\beta_2\beta_3}{\beta_0}, \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\beta_0}\right\}.$$

Proposition 4.1. *There exist $f_1, f_2, f_3 \in \text{gr}P(n)^* \widehat{\otimes} R$ such that*

$$d_1(\beta_1) = f_1\beta_0, \quad d_1(\beta_2) = f_2\beta_0, \quad d_1(\beta_3) = f_3\beta_0,$$

where $\deg f_1 = 0$, $\deg f_2 = -2$, $\deg f_3 = -6$. Moreover, f_1, f_2, f_3 is a regular sequence in $\text{gr}P(n)^* \widehat{\otimes} R$.

Since R has no odd degree elements and since

$$\deg d_1(\beta_1\beta_2\beta_3/\beta_0^2) = 4,$$

the following proposition completes the proof of Theorem 1.1. The element

$$d_1(\beta_1\beta_2\beta_3/\beta_0^2)$$

corresponds to w_4 in Theorem 1.1.

Proposition 4.2. *Let R be a graded algebra over $\mathbb{Z}/2$ and suppose that R is an integral domain. Let f_1, \dots, f_n be elements in R . Let z_0 be an element in R and consider R -submodules C_k of*

$$R[z_0^{-1}] \otimes \Delta(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

generated by

$$\frac{\beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k}}{z_0^k},$$

where $\Delta(\beta_1, \dots, \beta_n)$ is a simple system of generators, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, $k > 0$ and $C_0 = R$. Consider the differential d given by $d(\beta_k) = z_0 f_k$ for $k = 1, \dots, n$ and by $d(xy) = d(x)y + xd(y)$. If f_1, \dots, f_n is a regular sequence, then the homology of (C, d) is given by

$$H_0(C, d) = R/(z_0 f_1, \dots, z_0 f_n)$$

and

$$H_k(C, d) = \{0\}$$

for $k > 0$.

Next, we deal with the case $p = 2$, $G = E_6$. The mod 2 cohomology $H^*(BE_6; \mathbb{Z}/2)$ is generated by $y_4, y_6, y_7, y_{10}, y_{18}, y_{32}, y_{48}$ and y_{34} with the relations

$$y_7 y_{10} = 0, \quad y_7 y_{18} = 0, \quad y_7 y_{34} = 0, \quad y_{34}^2 = y_{10}^2 y_{48} + y_{18}^2 y_{32} + \text{lower terms},$$

where the index indicates the degree. There is an elementary abelian 2-subgroup A of rank 5 in $F_4 \subset E_6$. The induced homomorphism

$$H^*(BE_4; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(BA; \mathbb{Z}/2)$$

is not a monomorphism. The image of this induced homomorphism is isomorphic to

$$H^*(BG_2; \mathbb{Z}/2) \otimes \mathbb{Z}/2[y_{16}^2, y_{24}^2]$$

and the action of Milnor operations on y_{16}^2, y_{24}^2 is trivial. The kernel of this induced homomorphism is the ideal generated by y_{10}, y_{18}, y_{34} and it has no odd degree elements. So, by investigating the long exact sequence of Ext groups induced by the short exact sequence

$$0 \rightarrow (y_{10}, y_{18}, y_{34}) \rightarrow H^*(BE_6; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(BG_2; \mathbb{Z}/2) \otimes \mathbb{Z}/2[y_{16}^2, y_{24}^2] \rightarrow 0$$

of \mathcal{E}_n -modules, we have the collapsing of the Adams spectral sequence.

5. BEYOND CONNECTED COMPACT LIE GROUPS

There seem to be several directions to extend the homotopy theory of classifying spaces of connected compact Lie groups. One of them is the study of the cohomology of finite Chevalley groups and free loop spaces of classifying spaces. I would like to end this talk with this.

For a connected compact Lie group G , there is a complexification $G(\mathbb{C})$. $G(\mathbb{C})$ is a connected reductive complex algebraic group and there is an reductive integral group scheme $G_{\mathbb{Z}}$ such that $G_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{C})$ as an algebraic group. Replacing \mathbb{C} by \mathbb{F}_q , we have finite Chevalley group $G(\mathbb{F}_q)$. By Friedlander-Quillen theory, if q is a power of p and if ℓ is a prime number not equal to p , then the mod ℓ cohomology of the finite Chevalley group is isomorphic to the mod ℓ cohomology of the following pull-back F_{ϕ^q} :

$$\begin{array}{ccc} F_{\phi^q} & \longrightarrow & BG^{\wedge} \\ \downarrow & & \downarrow 1 \times 1 \\ BG^{\wedge} & \xrightarrow{1 \times \phi^q} & BG^{\wedge} \times BG^{\wedge}, \end{array}$$

where ϕ^q is the Frobenius map and BG^{\wedge} is the Bousfield-Kan \mathbb{Z}/ℓ -completion. If $q - 1 \equiv 0$ modulo ℓ , the induced homomorphism

$$1 - \phi^{q*} : H^*(BG^{\wedge}; \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow H^*(BG^{\wedge}; \mathbb{Z}/\ell)$$

is zero and the Eilenberg-Moore spectral sequence for $H^*(F_{\phi^q}; \mathbb{Z}/\ell)$ has the same E_2 -term with the Eilenberg-Moore spectral sequence for $H^*(\mathcal{L}BG; \mathbb{Z}/\ell)$ where $\mathcal{L}BG$ is the free loop space of BG and it is the pull-back of the following diagram.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}BG & \longrightarrow & BG \\ \downarrow & & \downarrow 1 \times 1 \\ BG & \xrightarrow{1 \times 1} & BG \times BG. \end{array}$$

If G has no ℓ -torsion, both Eilenberg-Moore spectral sequences collapse at the E_2 -level and we have the same mod ℓ cohomology for finite Chevalley groups $BG(\mathbb{F}_q)$ and free loop space $\mathcal{L}BG$. Thus, we have the same mod ℓ cohomology.

On the other hand, the induced homomorphism

$$1 - \phi^{q^*} : K(n)^*(BG^\wedge) \rightarrow K(n)^*(BG^\wedge)$$

is not zero, where $K(n)^* = \mathbb{Z}/\ell[v_n, v_n^{-1}]$. So the E_2 -term of the Eilenberg-Moore spectral sequence for $K(n)^*(BG(\mathbb{F}_q))$ differs from the one for $K(n)^*(\mathcal{L}BG)$. Again, when G has no ℓ -torsion, we have a satisfactory answer for Morava K -theories of finite Chevalley groups.

Theorem 5.1 (Tanabe [10]). *If G has no ℓ -torsion, then $K(n)^*(BG(\mathbb{F}_q))$ has no odd degree elements.*

When G has an ℓ -torsion, we know little on the mod ℓ cohomology, Brown-Peterson cohomology and Morava K -theories of classifying spaces of finite Chevalley groups $G(\mathbb{F}_q)$ and the free loop space $\mathcal{L}BG$.

REFERENCES

- [1] K. Inoue and N. Yagita, The complex cobordism of BSO_n , preprint.
- [2] M. Kameko and N. Yagita, The Brown-Peterson cohomology of the classifying spaces of the projective unitary groups $PU(p)$ and exceptional Lie groups, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- [3] A. Kono and M. Mimura, On the cohomology of the classifying spaces of $PSU(4n+2)$ and $PO(4n+2)$, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10** (1974/75), no. 3, 691–720.
- [4] A. Kono and M. Mimura, Cohomology mod 2 of the classifying space of $PSp(4n+2)$, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **11** (1975/76), no. 2, 535–550.
- [5] A. Kono, M. Mimura and N. Shimada, Cohomology of classifying spaces of certain associative H -spaces, J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), no. 3, 607–617.
- [6] A. Kono and N. Yagita, Brown-Peterson and ordinary cohomology theories of classifying spaces for compact Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), no. 2, 781–798.
- [7] Kriz, Igor. Morava K -theory of classifying spaces: some calculations. Topology 36 (1997), no. 6, 1247–1273.
- [8] I. Kriz and K. P. Lee, Odd-degree elements in the Morava $K(n)$ cohomology of finite groups, Topology Appl. **103** (2000), no. 3, 229–241.
- [9] M. Mimura and H. Toda, *Topology of Lie groups. I, II*, Translated from the 1978 Japanese edition by the authors, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [10] M. Tanabe, On Morava K -theories of Chevalley groups, Amer. J. Math. **117** (1995), no. 1, 263–278.
- [11] A. Vistoli, On the cohomology and the Chow ring of the classifying space of PGL_p , preprint, math.AG/0505052.
- [12] W. S. Wilson, The complex cobordism of BO_n , J. London Math. Soc. (2) **29** (1984), no. 2, 352–366.

TOYAMA UNIVERSITY OF INTERNATIONAL STUDIES, TOYAMA 930-1292, JAPAN

E-mail address: kameko@tuins.ac.jp

結び目群の有限体上の線型表現とその応用 (鈴木正明氏 (秋田大学) との共同研究)

創価大学工学部 北野晃朗

2007 年 7 月 11 日

1 序

結び目群の $SU(2)$, $SL(2; \mathbb{C})$ などへの線型表現は結び目の補空間の幾何構造や非圧縮曲面, Casson 不変量など様々な観点から研究されています. 一般には与えられた群に対して線型表現の全体の空間や共役類の空間を決定すること, あるいは具体的に表現を 1 つ求めることでさえも非常に困難です. それは群の表示から定まる代数方程式系を解く, あるいは具体的に解を見つけるということが一般には困難だからです. そこでここでは標数 p の有限素体 \mathbb{F}_p 上の線型表現, 特に 2 次元特殊線型群 $SL(2; \mathbb{F}_p)$ への表現を考えます. $SL(2; \mathbb{F}_p)$ について基本的な事実をまとめておきましょう.

- $SL(2; \mathbb{F}_p)$ の center は $\{\pm I\}$.
- $SL(2; \mathbb{F}_p)$ の位数は $p(p^2 - 1)$.
- $SL(2; \mathbb{F}_2)$ は 3 次対称群 S_3 と同型.
- $SL(2; \mathbb{F}_3)/\{\pm I\}$ は 4 次交代群 A_4 と同型.
- $SL(2; \mathbb{F}_p)/\{\pm I\}$ ($p \geq 5$) は単純群.

有限群であることからコンピュータを用いることによって具体的に表現を探す事も可能となり, 比較的小さい p に対しては全ての表現を決定する事も可能となります. もちろん \mathbb{F}_p 上で全てが理解できるわけではありませんが, p をいろいろと動かす事でわかることもあります. 本講演では, 結び目の不変量として

- 線型表現が具体的に求まったときに計算可能となる twisted Alexander 多項式,

- 線型表現の共役類の個数, 及び全射な線型表現の共役類の個数,

この 2 つを用いた, 素な結び目の上の半順序の決定を中心に述べたいと思います. また時間が許せば今後の課題について幾つか挙げたいと思います.

以下の記号を用いることにします.

- K : S^3 内の結び目.
- $G(K) = \pi_1(S^3 - K)$: 結び目群
- $F_u = \langle x_1, \dots, x_u \rangle$: ランク u の自由群.
- p : 素数.
- \mathbb{F}_p : 標数 p の素体.
- \mathbb{Z}_p : p 進整数環.

2 twisted Alexander 多項式

表現付きの結び目の不変量として twisted Alexander 多項式があります. twisted Alexander 多項式は結び目の場合に Lin [12] によって, 一般の有限表示群の場合に和田 [16] によって導入され, その後, Jiang-Wang [3] や北野 [7], Kirk-Livingston [5] など多くの仕事がなされており, 今も活発に研究されています. 詳細は [2] を参考にして下さい.

ここでは結び目群の場合に限り, 表現も SL -表現のみを考えて和田の流儀に従って定義を与えます. 結び目群 $G(K)$ の Wirtinger 表示を 1 つ固定します.

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_u \mid r_1, \dots, r_{u-1} \rangle.$$

さらにそのアーベル化 $\alpha : G(K) \rightarrow \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$ と線型表現 $\rho : G(K) \rightarrow SL(n; R)$ を考えます. ここで R は一意分解整域です. これらは群環上の写像 $\tilde{\rho} : \mathbb{Z}[G(K)] \rightarrow \mathbb{Z}[SL(n; R)] = M(n; R)$ と $\tilde{\alpha} : \mathbb{Z}[G(K)] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を誘導します. さらにこれらから, 環準同型

$$\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha} : \mathbb{Z}[G(K)] \rightarrow M(n; R[t, t^{-1}]).$$

が定まります.

$F_u = \langle x_1, \dots, x_u \rangle$ を階数 u の自由群とします. 表示から決まる写像 $\mathbb{Z}[F_u] \rightarrow \mathbb{Z}[G(K)]$ と $\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha} : \mathbb{Z}[G(K)] \rightarrow M(n; R[t, t^{-1}])$ の合成を

$$\Phi : \mathbb{Z}[F_u] \rightarrow M(n; R[t, t^{-1}])$$

とします.

このとき $n \times n$ -行列

$$\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \in M(n; R[t, t^{-1}]),$$

を (i, j) -成分とする $(u-1) \times u$ -行列を M とおき, これを ρ に随伴する $G(K)$ の Alexander 行列と呼びます. ここで $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_u}$ は Fox の自由微分です.

ここで行列 M から第 1 列を取り除いた行列を M_1 と表します. ここで M_1 は係数を $R[t, t^{-1}]$ に持ちサイズが $n(u-1) \times n(u-1)$ の行列になります.

そこで $G(K)$ の表現 $\rho: G(K) \rightarrow SL(n; R)$ に対する twisted Alexander 多項式を

$$\Delta_{K, \rho}(t) = \frac{\det M_1}{\det \Phi(x_1 - 1)}$$

で定義します.

注意 2.1 • $\pm t^\varepsilon$ ($\varepsilon \in \mathbb{Z}$) 倍を除いて, $\Delta_{K, \rho}(t)$ は Wirtinger 表示の取り方に依らずに結び目の不変量として定まることが知られています.

- 分母 $\Delta_{K, \rho}^D(t) = \det \Phi(x_1 - 1)$, 分子 $\Delta_{K, \rho}^N(t) = \det M_1$ と表すと, この分子 $\Delta_{K, \rho}^N(t)$ が Lin の twisted Alexander 多項式になります.

3 Twisted Alexander 多項式と素な結び目の間の半順序

北野-鈴木-和田 [10] の結果を結び目群の場合に限ると次のような形になります.

定理 3.1 結び目群 $G(K)$, $G(K')$ の間に全射準同型写像 $\varphi: G(K) \rightarrow G(K')$ が存在すると仮定する. 任意の表現 $\rho': G(K') \rightarrow SL(n; R)$ に対して $\rho = \rho' \circ \varphi$ とおく. このとき, $\Delta_{K, \rho}^D(t) = \Delta_{K', \rho'}^D(t)$, かつ $\Delta_{K, \rho}(t)/\Delta_{K', \rho'}(t)$ は割り切れて Laurent 多項式になる.

注意 3.2 古典的な Alexander 多項式の場合の対応する結果はよく知られています ([1] の演習問題).

ここで群に関する概念を準備します.

1. 群 G の任意の全射準同型写像 $f: G \rightarrow G$ が G の自己同型写像になるとき G は Hopfian であるという.
2. 群 G の任意の自明でない元 x に対して, ある有限群 H と全射準同型 $\varphi: G \rightarrow H$ が存在して $\varphi(x) \neq 1$ となるとき, G を剰余有限であるという.

群論的に有限生成かつ剰余有限ならば Hopfian であることが、また、3次元多様体論から結び目群は剰余有限であることが証明されます。従って、

命題 3.3 結び目群は Hopfian である。

と言えます。

以下では素な結び目 K_1, K_2 を考えましょう。もしも $G(K_1)$ から $G(K_2)$ への全射準同型写像が存在するとき、 $K_1 \geq K_2$ と書き表すことにします。

命題 3.4 この 2 項関係 \geq は半順序関係になる。

なぜなら、反射律 $K \geq K$ は恒等写像から明らかに成り立ち、また全射の合成は全射になるので、推移律 $K_1 \geq K_2, K_2 \geq K_3$ ならば $K_1 \geq K_3$ も成立します。従って明らかではないのは

$$\text{反対称律 } K \geq K' \text{ かつ } K' \geq K \text{ ならば } K = K'$$

のみです。そこで $K \geq K'$ を与える全射を $\varphi: G(K) \rightarrow G(K')$, $K' \geq K$ を与える全射を $\psi: G(K') \rightarrow G(K)$ としましょう。この 2 つの合成は全射 $\psi\varphi: G(K) \rightarrow G(K)$ を与えますが、 $G(K)$ が Hopfian であることから同型写像になります。同様に $\varphi\psi: G(K') \rightarrow G(K')$ も同型写像になります。従って $G(K) \cong G(K')$ が成立し、 K, K' は素な結び目なので結び目群から同型類は決まり、 $K = K'$ となります。故に反対称律も成立し、以上より半順序になります。

コンピュータの助けを借りることで次の結果 [8] が得られます。

定理 3.5 Reidemeister-Rolfsen の knot table において半順序は以下ようになる:

$$\begin{aligned} &8_5, 8_{10}, 8_{15}, 8_{18}, 8_{19}, 8_{20}, 8_{21}, 9_1, 9_6, 9_{16}, 9_{23}, 9_{24}, 9_{28}, 9_{40}, \\ &10_5, 10_9, 10_{32}, 10_{40}, 10_{61}, 10_{62}, 10_{63}, 10_{64}, 10_{65}, 10_{66}, 10_{76}, 10_{77}, 10_{78}, 10_{82}, \\ &10_{84}, 10_{85}, 10_{87}, 10_{98}, 10_{99}, 10_{103}, 10_{106}, 10_{112}, 10_{114}, 10_{139}, 10_{140}, 10_{141}, \\ &10_{142}, 10_{143}, 10_{144}, 10_{159}, 10_{164} \end{aligned} \geq 3_1,$$

$$8_{18}, 9_{37}, 9_{40}, 10_{58}, 10_{59}, 10_{60}, 10_{122}, 10_{136}, 10_{137}, 10_{138} \geq 4_1,$$

$$10_{74}, 10_{120}, 10_{122} \geq 5_2.$$

証明の概略は以下の通りです。

10 交点以下の knot table にある結び目は全部で 249 個であり確かめるべき組み合わせは ${}_{249}P_2 = 61752$ 通り。

(1)61508 通りの場合については、古典的な Alexander 多項式を用いて全射の非存在を証明することが出来ます。

(2) そこで $p = 17$ までの素数で $SL(2; \mathbb{F}_p)$ -表現を考え, twisted Alexander 多項式に関する北野-鈴木-和田の定理を適用することにより全射の非存在を調べます. すると定理 3.5 に挙っている全射が存在する 58 通りを除く 61694 通りまで非存在を確かめることが出来ます.

(3) 残った場合の中で周期から全射の存在がわかるものもあり, それ以外のものについてコンピュータを用いて全射を探すことにより証明されました.

幾つか例を挙げて説明しましょう.

例 3.6 8_{11} から 3_1 へ全射が存在しないことを $SL(2; \mathbb{F}_5)$ -表現の twisted Alexander 多項式を用いて示すことが出来ます. $G(8_{11})$ の twisted Alexander 多項式の $SL(2; \mathbb{F}_5)$ -表現を全て求めます. 表現の共役類は 19 個あります.

そしてそれぞれに対して twisted Alexander 多項式の分母 $\Delta_{8_{11}, \rho_i}^D(t)$, 分子 $\Delta_{8_{11}, \rho_i}^N(t)$ をそれぞれ計算すると, 出てくる多項式は次の 10 種類になります.

$$\begin{aligned}
 (\Delta_{8_{11}, \rho}^N(t), \Delta_{8_{11}, \rho_i}^D(t)) = & \\
 (2t^6 + 2t^5 + t^4 + 4t^3 + t^2 + 2t + 2, t^2 + t + 1), & \\
 (3t^6 + 2t^5 + 4t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 2t + 3, t^2 + 4t + 1), & \\
 (t^8 + t^6 + t^2 + 1, t^2 + 1), & \\
 (2t^8 + 2t^7 + 4t^6 + t^5 + 4t^4 + t^3 + 4t^2 + 2t + 2, t^2 + 4t + 1), & \\
 (2t^8 + 3t^7 + 4t^6 + 4t^5 + 4t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 3t + 2, t^2 + t + 1), & \\
 (4t^8 + 3t^6 + t^4 + 3t^2 + 4, t^2 + 1), & \\
 (4t^8 + t^7 + t^6 + 3t^4 + t^2 + t + 4, t^2 + 4t + 1), & \\
 (4t^8 + 2t^7 + t^5 + 2t^4 + t^3 + 2t + 4, t^2 + 3t + 1), & \\
 (4t^8 + 3t^7 + 4t^5 + 2t^4 + 4t^3 + 3t + 4, t^2 + 2t + 1), & \\
 (4t^8 + 4t^7 + t^6 + 3t^4 + t^2 + 4t + 4, t^2 + t + 1) &
 \end{aligned}$$

となります.

一方で $G(3_1)$ の $SL(2; \mathbb{F}_5)$ -表現で twisted Alexander 多項式の分子, 分母が

$$\Delta_{3_1, \rho_0}^N(t) = t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1, \quad \Delta_{3_1, \rho_0}^D(t) = t^2 + 2t + 1$$

となるものがあります. ここで

- $\Delta_{8_{11}, \rho}^N(t)$ は $\Delta_{3_1, \rho_0}^N(t)$ で割り切れないか,
- または $\Delta_{8_{11}, \rho}^D(t) \neq \Delta_{3_1, \rho_0}^D(t)$ であること

がわかります. 従って北野-鈴木-和田の定理から, $G(8_{11})$ から $G(3_1)$ への全射が存在しないことがわかり,

$$8_{11} \not\geq 3_1$$

が証明されました.

コンピュータを用いて表現を探す事に関して, 結び目群の Wirtinger 表示においては生成元は全て共役になる事は重要です. すなわち, まず $SL(2; \mathbb{F}_p)$ の共役類分解を調べておきます. そして一つ共役類を固定します. 結び目群の生成元は互いに共役なのでこの固定した $SL(2, \mathbb{F}_p)$ の共役類の中で, 順番に行列を対応させてその写像が準同型になるかどうかチェックして行きます. 固定した共役類で全ての組み合わせを考えると次の共役類に取り替えて続けます.

次に全射の存在する例です.

例 3.7 $G(8_5)$ から $G(3_1)$ への全射を考えます. $G(8_5)$, $G(3_1)$ の Wirtinger 表示として次のものを取ります.

$$G(8_5) = \left\langle \begin{array}{l} y_1, y_2, y_3, y_4, \\ y_5, y_6, y_7, y_8 \end{array} \left| \begin{array}{l} y_7 y_2 \bar{y}_7 \bar{y}_1, y_8 y_3 \bar{y}_8 \bar{y}_2, y_6 y_4 \bar{y}_6 \bar{y}_3, y_1 y_5 \bar{y}_1 \bar{y}_4, \\ y_3 y_6 \bar{y}_3 \bar{y}_5, y_4 y_7 \bar{y}_4 \bar{y}_6, y_2 y_8 \bar{y}_2 \bar{y}_7 \end{array} \right. \right\rangle,$$

$$G(3_1) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_3 x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_2, x_1 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_3 \rangle,$$

ここで $\bar{x} = x^{-1}, \bar{y} = y^{-1}$ とします. 今 $\varphi: G(8_5) \rightarrow G(3_1)$ を

$$\begin{aligned} \varphi(y_1) &= x_3, & \varphi(y_2) &= x_2, & \varphi(y_3) &= x_1, & \varphi(y_4) &= x_3, \\ \varphi(y_5) &= x_3, & \varphi(y_6) &= x_2, & \varphi(y_7) &= x_1, & \varphi(y_8) &= x_3. \end{aligned}$$

と定義するとこの写像は明らかに全射になります. さらに関係子の像が自明になることを確認できるので準同型になります. 従って定義により

$$8_5 \geq 3_1$$

が成立します.

注意 3.8 ● 一般には, 2つの結び目の Wirtinger 表示を固定して, 生成元の行き先を語の長さを短い方からどんどん対応させて写像をつくり, コンピュータでそれが関係子を満たすかどうかを確かめて準同型写像を探してやります.

- 2橋結び目の群の間の全射に関して大槻-Riley-作間 [13] による構成法が知られています.

4 極小元, 周期的結び目, degree 1 map

任意の結び目群から自明な結び目群 ($\cong \mathbb{Z}$) へは全射が常に存在し, それはその結び目群のアーベル化によって与えられます. 非自明な結び目への全射の存在については周期的結び目, degree 1 maps など幾何学的な条件が幾つか知られています. ここではそれらと極小元に関する事柄について述べます.

まず結び目がファイバー結び目, あるいはトーラス結び目という特別な構造を持つ場合を考えます. K_1 と K_2 を S^3 内の結び目とし, K_1 を種数 g_1 のファイバー結び目とします. このとき, 次が成立します.

命題 4.1 もし全射準同型 $\varphi : G(K_1) \rightarrow G(K_2)$ が存在するならば, K_2 もまたファイバー結び目であり, その種数 g_2 は g_1 以下である.

注意 4.2 Silver-Whitten[15, Prop. 3.11] も同様の研究を行っている.

またトーラス結び目 $T(p, q)$ に対して次が成り立ちます.

命題 4.3 もし全射準同型 $\varphi : G(T(p, q)) \rightarrow G(K)$ が存在するならば, ある自然数の組 (r, s) が存在して K もトーラス結び目 $T(r, s)$ である. 特に r と s は p, q どちらかの約数になる.

これらの命題から次がわかります.

定理 4.4 結び目 $3_1, 4_1, 10_{124}$ は極小元.

続いて周期について考えます. 10 交点以下の結び目の周期については兎玉-作間 [9] により決定されているので, これと比較することにより次が得られます.

定理 4.5 次の半順序関係は周期的結び目とその商により実現される:

$$\begin{aligned} 8_5, 8_{15}, 8_{19}, 8_{21}, 9_1, 9_{16}, 9_{28}, 9_{40}, \\ 10_{61}, 10_{63}, 10_{64}, 10_{66}, 10_{76}, 10_{78}, 10_{98}, 10_{139}, 10_{141}, 10_{142}, 10_{144} \end{aligned} \geq 3_1,$$

$$8_{18}, 10_{58}, 10_{60}, 10_{122}, 10_{136}, 10_{138} \geq 4_1,$$

$$10_{120} \geq 5_2.$$

定理 4.6 定理の中で半順序関係を成立させるために実際に構成した全射準同型写像の中

で次の半順序においては degree 1 map で実現される:

$$8_{18}, 10_5, 10_9, 10_{32}, 10_{40}, 10_{103}, 10_{106}, 10_{112}, 10_{114}, 10_{159}, 10_{164} \geq 3_1,$$

$$9_{37}, 9_{40} \geq 4_1,$$

$$10_{74}, 10_{122} \geq 5_2.$$

5 不変量としての表現の共役類の個数

これまで与えられた p に対して $SL(2; \mathbb{F}_p)$ -表現を全て求め、それぞれに対して twisted Alexander 多項式という不変量を求めることで結び目群の間の全射の非存在などを調べてきました。この章では結び目群の $SL(2; \mathbb{F}_p)$ -表現の共役類の個数、あるいは、全射である表現の共役類の個数を結び目の不変量と考えて、それを用いて結び目を区別することや全射の存在についてどのようなことが言えるかについて述べます。

素数 p を固定し、

$$r(K, p) = \#\{\rho : G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F}_p)\} / \sim_{\text{共役}}$$

は結び目の不変量となります。

例 5.1 3_1 と 4_1 の場合について比べてみる。

p	2	3	5	7	11	13	17
$r(3_1, p)$	4	11	19	25	33	47	55
$r(4_1, p)$	3	11	17	31	31	45	49

自然な問題として次が挙げられます。

素数 p をいくつまで考えれば、 $SL(2; \mathbb{F}_p)$ -表現の共役類の個数で 10 交点以下の素な結び目は全て区別できるか？

命題 5.2 $p = 23$ までの $r(K, p)$ で 10 交点以下の素な結び目は全て区別できる。

注意 5.3 $p = 7$ まで考えれば、 $SL(2; \mathbb{F}_p)$ -表現による twisted Alexander 多項式で 10 交点以下の素な結び目は全て区別できる。

全射準同型の共役類の個数について考えてみましょう。

$$sr(K, p) = \#\{\rho : G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F}_p) \text{ 全射}\} / \sim_{\text{共役}}$$

は結び目の不変量となります。

命題 5.4 $p = 19$ までの $sr(K, p)$ で 10 交点以下の素な結び目は全て区別できる.

それでは先に述べた素な結び目の半順序に関してこの表現の個数という不変量はどのくらい有効でしょう. 確かめるべき組み合わせは ${}_{249}P_2 = 61752$ 通りでした.

- 命題 5.5**
1. $p \leq 13$ で, $r(K, p)$ を用いて全射なしといえるのは 45601 通り, $sr(K, p)$ を用いて全射なしといえるのは 49078 通り, $r(K, p)$ と $sr(K, p)$ を組み合わせて全射なしがいえるのは 49774 通り.
 2. $p \leq 17$ で, $r(K, p)$ を用いて全射なしといえるのは 47661 通り, $sr(K, p)$ を用いて全射なしといえるのは 50870 通り, $r(K, p)$ と $sr(K, p)$ を組み合わせて全射なしがいえるのは 51396 通り.

注意 5.6 Alexander 多項式で全射なしと判定できるものは 61508 通りでした. これだけ見ると $p = 17$ まででは Alexander 多項式にも及ばないことがわかります.

6 p 進表現

最後に結び目群の p 進整数環上の表現について述べます. 固定した素数 p に関して,

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

という射影系を考えてみましょう. ここから射影系

$$\cdots \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \rightarrow \cdots \rightarrow SL(2, \mathbb{F}_p)$$

が得られます. これらの極限として p 進整数環 \mathbb{Z}_p とその上の特殊線型群 $SL(2, \mathbb{Z}_p)$ が得られます. このとき次が成り立ちます.

定理 6.1 任意の表現 $\rho : G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F}_p)$ は $\hat{\rho} : G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{Z}_p)$ へ持ち上げ可能である.

注意 6.2 まず $p = 2$ の場合には群の中心拡大の議論を用いて証明できました. その後一般の場合については証明できないままでしたが, 以下の議論を九州大学の森下昌紀氏と Sydney 大学の J. Hillman 氏に教えて頂きました. ここで改めて感謝致します.

幾つかの記号を導入します.

$$\Gamma(n) := Ker(SL(2; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\text{mod } p^n} SL(2; \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})).$$

$SL(2; \mathbb{Z}_p) \rightarrow SL(2; \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ は全射であるので, 次の補題が成立する.

補題 6.3 $SL(2; \mathbb{Z}_p)/\Gamma(n) \cong SL(2; \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$.

さらに次も成立する.

補題 6.4 $\Gamma(n)/\Gamma(n+1)$ はアーベル群.

証明

任意の元 $A, B \in \Gamma(n)$ は $A = I + p^n A_1, B = I + p^n B_1$ と表すことができる. このとき $A^{-1} = I - p^n A_1 + (p^{n+1}$ 以上の項), $B^{-1} = I - p^n B_1 + (p^{n+1}$ 以上の項). 従って A, B の交換子を計算すると

$$\begin{aligned} [A, B] &= ABA^{-1}B^{-1} \\ &= (I + p^n A_1)(I + p^n B_1)(I - p^n A_1 + (\text{高次の項}))(I - p^n B_1 + (\text{高次の項})) \\ &= I + p^n(A_1 - A_1 + B_1 - B_1) + (\text{高次の項}) \\ &= I \pmod{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

すなわち, $[A, B] \in \Gamma(n+1)$.

補題 6.5 $H^2(G(K), \Gamma(n)/\Gamma(n+1)) = 0$.

証明

結び目 K の補空間 $S^3 - K$ は $K(G(K), 1)$ -空間であり, かつ $H^2(S^3 - K; \mathbb{Z}) = 0$ であるから, 普遍係数定理より補題は成立する.

ここで短完全系列

$$1 \rightarrow \Gamma(n)/\Gamma(n+1) \rightarrow SL(2; \mathbb{Z}_p)/\Gamma(n+1) \rightarrow SL(2; \mathbb{Z}_p)/\Gamma(n) \rightarrow 1$$

を考えよう. コホモロジーを取り補題を適用すると, 完全系列

$$H^1(G(K), SL(2; \mathbb{Z}/p^{n+1} \mathbb{Z})) \rightarrow H^1(G(K), SL(2; \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})) \rightarrow 0$$

を得る. 従って表現 $\rho \in H^1(G(K), SL(2; \mathbb{F}_p))$ は射影系 ($\rho_n \in H^1(G(K), SL(2; \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}))$) へ持ち上げることができる. 故に

$$\hat{\rho} = \varprojlim_n \rho_n \in \varprojlim_n H^1(G(K), SL(2; \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})) = H^1(G(K), SL(2; \mathbb{Z}_p))$$

は表現 ρ の持ち上げとなる.

ここまで述べてきた事により非自明な $SL(2; \mathbb{Z}_p)$ -表現は存在することがわかりました. p 進整数環 \mathbb{Z}_p は一意分解整域なので \mathbb{Z}_p 上の表現 $G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{Z}_p)$ に対して

twisted Alexander 多項式を定義することは可能です. もちろんこれらを直接扱うことは困難ですが, この不変量は意味を持ちます.

さらに, この \mathbb{Z}_p 上の twisted Alexander 多項式を $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 上へ射影して考える事は意味を持ちます. $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ($n \geq 2$) は一意分解整域ではないので $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 上 twisted Alexander 多項式を直接定義する事はできません. しかし, \mathbb{Z}_p を経由することで \mathbb{Z}_p -twisted Alexander 多項式 mod p^n は意味を持ちます. これらと $SL(2, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ -表現, あるいはこれらを用いてどれくらいの事が言えるかは今後の課題です.

参考文献

- [1] R. Crowell and R. Fox, Introduction to knot theory, GTM 57, Springer
- [2] H. Goda, T. Kitano and T. Morifuji, ねじれ Alexander 不変量, 数学メモアール第 5 巻, 日本数学会.
- [3] B. Jiang and S. Wang, *Twisted topological invariants associated with representations*, in Topics in Knot Theory, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 399, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993, 211–227.
- [4] A. Kawauchi (ed), A Survey of Knot Theory, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
- [5] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants*, Topology 38 (1999), 635–661.
- [6] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted knot polynomials: inversion, mutation and concordance*, Topology 38 (1999), 663–671.
- [7] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. 174 (1996), 431–442
- [8] T. Kitano and M. Suzuki, *A partial order on the knot table*, Experimental Math. 14(2005), 385–390.
- [9] T. Kitano and M. Suzuki, *A partial order on the knot table II*, preprint.
- [10] T. Kitano, M. Suzuki and M. Wada, *Twisted Alexander polynomial and surjectivity of a group homomorphism*, Algebr. Geom. Topol. 5 (2005), 1315–1324
- [11] K. Kodama and M. Sakuma, *Symmetry groups of prime knots up to 10 crossings*, Knot 90 (1990), 323–340.
- [12] X. S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 17 (2001), 361–380.
- [13] T. Ohtsuki, R. Riley and M. Sakuma, *Epimorphisms between 2-bridge link groups*,

preprint (2006).

- [14] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, Inc.
- [15] D. Silver and W. Whitten, *Knot group epimorphisms*, *J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006), 153–166.
- [16] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, *Topology* **33** (1994), 241–256.

192-8577 東京都八王子市丹木町 1-236

創価大学工学部情報システム工学科

kitano@soka.ac.jp

Character variety の断面から誘導される代数多様体族と knot contact homology

長郷 文和

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
日本学術振興会特別研究員 (PD)

E-mail: fukky@math.titech.ac.jp

URL: <http://www.math.titech.ac.jp/~fukky>

はじめに

本稿では、背景や動機を視点とした、本研究の概略について述べさせていただきます。尚、本研究に関する詳細な情報は、論文 [N3] (補遺 [N1, N2, GN, NY]) から得ることができます。

概要

この講演では、結び目群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現、特に、その表現の指標が成す集合 (character variety) のある断面を定義し、その構造を表現論的視点から解説する。更に、断面の幾何的性質を抽出することで得られる代数多様体¹ $\mathcal{F}(K)$ に注目する。 $\mathcal{F}(K)$ は、その構造から、代数多様体の列

$$\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}^{(3)}(K) \rightarrow \mathcal{F}^{(2)}(K) \rightarrow \mathcal{F}^{(1)}(K) = \{0\} \subset \mathbb{C}$$

を誘導するが、特に、中間多様体 $\mathcal{F}^{(2)}(K)$ の双対空間²が abelian knot contact homology という \mathbb{Z} 係数ホモロジー群と同型な構造を持つ。このとき、 $\mathcal{F}^{(2)}(K)$ の既約成分の個数は、その homology の Betti 数として解釈できることがわかる。これらの事実について解説する。

1 研究の背景と動機の概略

1.1 Casson-Lin invariant と $SU(2)$ 表現空間の断面：表現論的背景

整ホモロジー球面 M (i.e., $H_1(M; \mathbb{Z})=0$ を満たす向き付け可能な連結閉 3 次元多様体) に対し、**Casson invariant** $\lambda(M)$ ([AM, S]) という整数値不変量が定義される。そのアイデアを簡単に説明すると、整ホモロジー球面 M の Heegaard 分解 $M = H_n^1 \cup_g H_n^2$ を考え、それぞれのハンドル体 H_n^i の基本群 (i.e. 自由群 $F_n := \langle g_1, \dots, g_n \rangle$) に対し、 $SU(2)$ 表現空間³ $R(H_n^i) := \text{Hom}(F_n, SU(2))/\sim$ を構成する。ここで、 $F := H_n^1 \cap H_n^2$ の基本群 (i.e. 自由群 F_{2n}) に対する表現空間 $R(F) := \text{Hom}(F_{2n}, SU(2))/\sim$ を考えると、ハンドル体の貼り付け写像 g から誘導される各包含写像 $g_i: R(H_n^1) \xrightarrow{g_1} R(F_{2n}) \xleftarrow{g_2} R(H_n^2)$ の像の共通部分 $g_1(R(H_n^1)) \cap$

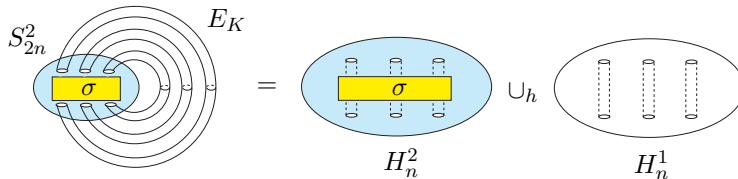
¹この講演では、広い意味での代数多様体、つまり代数的集合 (多項式族の共通零点集合) を指す。

² $\mathcal{F}(K)$ に付随した、ある商多項式環 $\mathcal{Q}^{(2)}(K)$ 、**nilradical** による商 $\mathcal{Q}^{(2)}(K)/\sqrt{0}$ は $\mathcal{F}(K)$ の座標環になる。

³本稿では、 $SU(2)$ 既約表現集合の $SO(3)$ の共役作用による商集合 (i.e., $SU(2)$ 既約表現の共役類集合) とする。

$g_2(R(H_n^2)) \subset R(F_{2n})$ は有限個の点から成ることがわかる. その各点には接空間の向きにより符号 “+,-” が定義されるが, この符号に付随した **algebraic intersection number** で $g_1(R(H_n^1)) \cap g_2(R(H_n^2))$ の点を数え上げることにより, Heegaard 分解に依らない整ホモロジー球面の整数値不変量 $\lambda: \{ \text{整ホモロジー球面} \} \rightarrow \mathbb{Z}$ を構成できる. これが Casson invariant のアイデアである.

Casson の構成を踏まえ, Xiao-Song Lin は, S^3 内の結び目 K の不変量, いわゆる **Casson-Lin invariant** $h(K)$ ([L]) を構成した. 具体的には, まず結び目の **braid** 表示 $\sigma \in \mathcal{B}_n$ を固定し, $2n$ -穴あき球面 S_{2n}^2 により, 結び目の外部空間 E_K のハンドル体分解 $E_K := H_n^1 \cup_h H_n^2$ を与える. 但し, genus には結び目の外部空間の境界が対応し, S_{2n}^2 の外部 H_n^1 は S^3 への標準的な埋め込み, 内部 H_n^2 は, 結び目の braid 表示に対応する “絡まった” genus をもつハンドル体となる様な状況を考える:



ここで, $2n$ -穴あき球面 $S_{2n}^2 := H_n^1 \cap H_n^2$ の基本群の表現空間⁴ $R(S_{2n}^2) := \text{Hom}(\pi_1(S_{2n}^2), SU(2)) / \sim$ を用いることで, Casson invariant と同様, ハンドル体の貼り付け写像から誘導される $SU(2)$ 表現空間の包含写像 $h_i: R(H_n^1) \xrightarrow{h_1} R(S_{2n}^2) \xleftarrow{h_2} R(H_n^2)$ の像の共通部分 $h_1(R(H_n^1)) \cap h_2(R(H_n^2)) \subset R(S_{2n}^2)$ を構成できる. ここで Lin は, $SU(2)$ 表現において, 各基本群の生成元である結び目の meridian⁵ の像が **trace-free**, つまり trace が 0 な表現⁶ に制限することで, 表現空間の断面 $R_0(H_n^1), R_0(H_n^2), R_0(S_{2n}^2)$ を考えた. このとき, 共通部分 $h_1(R_0(H_n^1)) \cap h_2(R_0(H_n^2)) \subset R_0(S_{2n}^2)$ は有限個の点からなり, Casson invariant と同様, 各点には符号 “+,-” が定義される. この符号に付随した algebraic intersection number により共通部分の点を数え上げることで, 結び目の braid 表示によらない整数値不変量 $h: \{ \text{結び目} \} \rightarrow \mathbb{Z}$ を構成できる. これが Casson-Lin invariant である.

ここで, 注目したいのが, Casson-Lin invariant は, 結び目の符号数 (signature) の $\frac{1}{2}$ 倍になるという点である. このように, 結び目群の $SU(2)$ trace-free 表現という特殊な表現の集合から, 結び目外部空間の非自明な大域的性質が現れるという現象は, 非コンパクト Lie 群 $SL(2, \mathbb{C})$ に対する結び目群の trace-free 表現の場合, どの様に反映されるのであろうか? これが, 表現論的視点から見た本研究の動機である.

1.2 Kauffman bracket skein module(KBSM) と character variety: 位相的背景

実は, 本研究の原点は『KBSM を研究するための新たな手法の開発』という位置付けで始められた KBSM の研究 ([N3]) にある. D. Bullock による **trace identity** と **Kauffman bracket skein relation** の対応付け ([B, PS]) により, **trace** の基本分解 (定義 2.1) という代数操作が, skein relation という位相操作に還元できるため, KBSM の研究が character variety の研究に応用できる. (KBSM に由来するより詳細な背景につきましては, 本講演・本稿の構成上の都合により, 割愛させていただきます. 詳しくは [N3] をご参照下さい.)

⁴Casson invariant と同様, $SU(2)$ 既約表現の共役類空間とする.

⁵即ち, H_n^1 の longitude, または S_{2n}^2 の境界.

⁶このような表現を **trace-free** 表現という. このとき, h_2 は本質的に braid 群の **Magnus** 表現 ([M]) に対応している.

2 $SL(2, \mathbb{C})$ -character variety の断面 $S_0(K)$ とその性質

この Section では、表題にある character variety の断面を定義し、その性質を述べる。Casson invariant や Casson-Lin invariant では、 $SU(2)$ 表現の共役類を考えたが、本研究では、 $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の指標集合 (character variety) について考える。

2.1 $SL(2, \mathbb{C})$ -character variety $X(G)$ と trace-free な断面 $S_0(K)$

以降では、有限生成有限表示群 G の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現 (i.e., 群準同型) を考える。 G の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現全体の集合を $\text{Hom}(G, SL(2, \mathbb{C}))$ と表す。表現 $\rho : G \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ の指標 χ_ρ を $\chi_\rho(g) := \text{trace}(\rho(g))$ で定義し、 G の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の指標全体の集合を $X(G)$ と書く：

$$X(G) := \{\chi_\rho \mid \rho \in \text{Hom}(G, SL(2, \mathbb{C}))\}.$$

$X(G)$ は集合であるが、Culler-Shalen([CS]) により、ある複素空間 \mathbb{C}^N 内の代数多様体と同一視できることが知られている。この同一視された代数多様体を同じ記号で $X(G)$ と書き、 G の character variety と呼ぶ。以降では、特に有限生成有限表示群として結び目群 G_K 、つまり結び目外部空間 $E_K := S^3 - N(K)$ の基本群 $\pi_1(E_K)$ を考える (但し $N(K)$ は結び目 $K \subset S^3$ の開管状近傍)。

Example (character variety). trefoil 結び目群 $G_{3_1} = \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ に対する character variety は $X(G_{3_1}) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid (y+2)(y+x^2-1)\}$ と表される。実際、

- $\text{Hom}(G_{3_1}, SL(2, \mathbb{C})) \equiv \{(\rho(a), \rho(b)) \in SL(2, \mathbb{C})^2 \mid \rho(abab^{-1}a^{-1}b^{-1}) = \rho(1)\}$

$$= \left\{ (A, B) \in SL(2, \mathbb{C})^2 \mid ABAB^{-1}A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
- $X(G_{3_1}) = \{\chi_\rho \mid \rho \in \text{Hom}(G_{3_1}, SL(2, \mathbb{C}))\}$

$$\equiv \left\{ (\text{trace}(A), \text{trace}(AB^{-1})) \in \mathbb{C}^2 \mid ABAB^{-1}A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ここで、 $SL(2, \mathbb{C})$ における trace は次の性質を満たすことに注意する：

- $\text{trace}(X^{-1}) = \text{trace}(X)$, $X \in SL(2, \mathbb{C})$.
- $\text{trace}(Y^{-1}XY) = \text{trace}(X)$, $X, Y \in SL(2, \mathbb{C})$.
- $\boxed{\text{trace}(XY) = \text{trace}(X) \cdot \text{trace}(Y) - \text{trace}(XY^{-1})}$, $X, Y \in SL(2, \mathbb{C})$.

特に 3 番目の関係式を **trace identity** または **Cayley-Hamilton identity** という。実は、trace identity を含む上記 3 つの関係式から、 A, B の任意の word⁷ の trace は、 $\text{trace}(A)$ と $\text{trace}(AB^{-1})$ の多項式で表される⁸。例えば、 $x := -\text{trace}(A)$, $y := -\text{trace}(AB^{-1})$ とするとき、

$$\text{trace}(ABAB^{-1}A^{-1}B^{-1}) = -y^3 - 2x^2y^2 - (x^4 + 2x^2 - 3)y - 2x^4 + 4x^2 \quad (1)$$

となる。ここで、 $2 - \text{trace}(ABAB^{-1}A^{-1}B^{-1}) = (y+2)(y+x^2-1)^2$ から⁹、上記を得る：

$$X(G_{3_1}) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid (y+2)(y+x^2-1) = 0\}$$

⁷ 普通の意味での word。例えば $A^3B^5AB^{-2}A^2$ など。

⁸ González Acuña-Montesinos による有限生成有限表示群に対しての強力な結果 ([GM]) により保証される。

⁹ 一般には、結び目群の関係式だけから $X(G_K)$ の定義多項式が導かれるとは限らない (注意 3.2 参照)

定義 2.1 (**trace の基本分解**) 上記操作 (1) の様に, trace identity 等により, 表現の trace を基本的な trace の多項式に分解する操作を, **trace の基本分解** という.

定義 2.2 結び目群 G_K に対し, その character variety $X(G_K)$ の断面 $S_0(K)$ とは, trace-free 表現の指標全体からなる $X(G_K)$ の部分集合, またはそれに対応する代数多様体を意味する:

$$S_0(K) := \{x_\rho \in X(G_K) \mid \chi_\rho(\mu) = 0\} \subset X(G_K).$$

2.2 $S_0(K)$ の特徴

断面 $S_0(K)$ を構成する点に関しては, 少なくとも次の性質が成り立つ:

1. 任意の結び目 K に対し, $S_0(K) \neq \emptyset$. (可換表現の指標から¹⁰)
2. $S_0(K)$ には少なくとも $\frac{|\Delta_K(-1)|-1}{2} + 1$ 個の点が存在する. (Section 2.2.1 参照)
3. **small** な結び目 K に対し, $\dim_{\mathbb{C}}(S_0(K))=0$. (small \Rightarrow **meridionally small** より)
4. 合成結び目 $K = K_1 \# K_2$ (但し $|\Delta_{K_i}(-1)| \neq 1, i = 1, 2$) に対し, $\dim_{\mathbb{C}}(S_0(K)) \geq 1$. ([K], p.816 の 11 行目参照). 但し $\Delta_K(t)$ は K の **Alexander** 多項式.
5. small な結び目 K に対し, $S_0(K)$ には少なくとも $\deg_l(A_K(m, l)) + 1$ 個の点が存在する ([N3] 参照). 但し $A_K(m, l)$ は結び目 K の $l-1$ で割られた **A**-多項式 ([CCGLS]).

本稿では, 性質 2 についてのみ解説する.

2.2.1 性質 2 について: **metabelian** 表現

$S_0(K)$ を構成している trace-free 表現の指標の代表格といえるのが, **metabelian** 表現である.

定義 2.3 (**metabelian** 表現) 群 G の表現 $\rho : G \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ で, 交換子群 $[G, G]$ の ρ による像 $\rho([G, G])$ が $SL(2, \mathbb{C})$ の可換部分群になるものを, **metabelian** 表現という.

従って, 可換表現は metabelian であるので, 非可換, 特に既約 metabelian 表現に注目する. 結び目群に対しては, 次の興味深い性質を持つ. μ, λ を K の標準的な meridian, longitude に代表される G_K の元とする.

命題 2.4 ([N1]) 結び目群 G_K の任意の既約 metabelian 表現 $\rho : G_K \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ は次を満たす.

$$\text{trace}(\rho(\mu)) = 0, \text{trace}(\rho(\lambda)) = 2.$$

これにより, 全ての既約 metabelian 表現の指標は, 断面 $S_0(K)$ に含まれることがわかる¹¹. その個数は有限個で, 次のように具体的に記述できる.

命題 2.5 ([N1]([K, L] の $SL(2, \mathbb{C})$ -version)) 結び目群 G_K の既約 metabelian 指標の個数は $\frac{|\Delta_K(-1)|-1}{2}$ である.

命題 2.5 により, 性質 2 が保証される. 既約 metabelian 表現については, 更に必要十分条件もわかる. まず, 結び目群 G_K の可換化 $\alpha_t : G_K \rightarrow \langle t \rangle$ を經由することで, 1次元表現 $\alpha_{-1} : G_K \rightarrow \mathbb{C}$, $\alpha_{-1}(\mu) = -1$ を構成する. α_{-1} は表現の **involution** $\iota : R(G_K) \rightarrow R(G_K)$, $\iota(\rho)(g) := \alpha_{-1}(g) \cdot \rho(g)$ ($g \in G_K$), 従って character variety 上の involution $\iota : X(G_K) \rightarrow X(G_K)$, $\iota(\chi_\rho) := \chi_{\iota(\rho)}$ を自然に誘導する.

¹⁰可換表現 $\rho_{\text{ab}} : G_K \rightarrow H_1(E_K) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$, $\rho_{\text{ab}}(\mu) = \text{diag}(\sqrt{-1}, -\sqrt{-1})$ の指標が常に含まれる (但し μ は結び目 K の meridian).

¹¹可約な場合, 命題 2.4 を満たさないものが存在する.

命題 2.6 ([NY]) 任意の結び目 K と, その既約表現 $\rho : G_K \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ に対し, 次は同値¹² :

- (1) ρ は metabelian
- (2) 任意の元 $g \in G_K$ に対し, $\text{trace}(\iota(\rho)(g)) = \text{trace}(\rho(g))$ (つまり $\iota(\chi_\rho) = \chi_\rho$)

3 断面 $S_0(K)$ の効率的評価 : 代数多様体 $\mathcal{F}(K)$ の構成

断面 $S_0(K)$ の定義多項式は, 結び目群の表示に依存するため, $S_0(K)$ 自身を不変量として扱うのは効率的ではない. そこで, Casson-Lin invariant に倣い, 既約成分の個数に注目する.

定義 3.1 (norm) 代数多様体 V に対し, その norm $\|V\|$ を (V の既約成分の個数) -1 とする.

任意の結び目 K に対し $S_0(K) \neq \emptyset$ であるため, norm $\|\cdot\|$ により, 結び目の非負整数値関数

$$s_0 : \{ \text{結び目} \} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad s_0(K) := \|S_0(K)\|.$$

が定義できる. つまり norm は, Casson-Lin invariant とは異なり, 単純に断面の既約成分 ($\dim_{\mathbb{C}}(S_0(K)) = 0$ の場合は点) の個数を **geometric intersection number** で数え上げていると解釈できる.

注意 3.2 Section 2.1 の例では, $X(G_{3_1})$ の定義多項式は, 結び目群の関係式のみから導かれたが, 一般に, 生成元の個数 n が 3 以上の群 G_K に対する $X(G_K)$ は, 結び目群の関係式から得られる定義多項式 (幾何的定義多項式) 以外に, 結び目外部空間の位相とは全く無関係な定義多項式 (非幾何的定義多項式) を持つ. これは, 自由群 $F_n (n \geq 3)$ の character variety $X(F_n)$ に, trace identity から導かれる非自明な定義多項式が存在するためである. (González Acuña-Montesinos([GM]) により, $X(F_n) (n \geq 1)$ の (弱い意味での) 定義多項式は決定されている.)

注意 3.2 のように, G_K の生成元が増えるほど, $X(G_K)$, 従って $S_0(K)$ の定義多項式は複雑になり, その評価が飛躍的に難しくなる. そこで Section 3.1 では, 結び目 K の braid 表示 $\sigma \in \mathcal{B}_n$ を固定することで, $X(G_K)$ の非幾何的定義多項式を排除し, 幾何的定義多項式 (σ に付随した形で記述) から生成される多項式族 (ideal) $\mathcal{SL}(\sigma)$ を導入する.

3.1 幾何的定義多項式を抽出する : ideal $\mathcal{SL}(\sigma)$ の導入

まず, 結び目 K の結び目群 G_K は, K の braid 表示 $\sigma \in \mathcal{B}_n$ に対し, 次のように表される :

$$G_K = \pi_1(H_n^1) *_{\pi(S_{2n}^2)} \pi_1(H_n^2) = \langle g_1, \dots, g_n \mid g_i = \sigma(g_i) (i = 1, \dots, n) \rangle.$$

但し, braid σ の自由群 $\pi_1(H_n^2) = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ への作用は, 次のように定義される :

$$\sigma_i(g_j) := \begin{cases} g_i \cdot g_{i+1} \cdot g_i^{-1}, & \text{if } j = i \\ g_{p_{i,i+1}(j)}, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \sigma_i^{-1}(g_j) := \begin{cases} g_{i+1} \cdot g_i \cdot g_{i+1}^{-1}, & \text{if } j = i + 1 \\ g_{p_{i,i+1}(j)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(但し $p_{i,i+1}$ は $i, i + 1$ の置換.) ここで, 関係式 $x_i = \sigma(x_i) (i = 1, \dots, n)$ のから得られる幾何的定義多項式は, この σ -作用を用いることで, 次のように形式的に構成される $f_\sigma, g_{\sigma, A_m}$ により記述される. まず, **trace** 関数 $t_g : X(G_K) \rightarrow \mathbb{C}, t_g(\chi_\rho) := \text{trace}(\rho(g)) (g \in G_K)$ に対し, $x_{ij} := -t_{g_i g_j} (1 \leq i < j \leq n), x_{ijk} := -t_{g_i g_j g_k} (1 \leq i < j < k \leq n), h_i := -t_{g_i^*} (1 \leq i \leq n)$. 但し $*$ は不定元) とし, $\mathcal{C}_n^{(3)} := \mathbb{C}[\{x_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}, \{x_{ijk}\}_{1 \leq i < j < k \leq n}]$ とおく. このとき $\mathcal{C}_n^{(3)}$ -加群 $\mathcal{A}_n := \sum_{i=2}^3 (\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{C}_n^{(3)} h_i)^{\otimes i}$ を考える (但し \otimes は $\mathcal{C}_n^{(3)}$ 上の tensor 積).

¹²この命題は $SU(2)$ 表現についても成り立つ.

- h_j に対し, 作用 $f_{\sigma_i}, f_{\sigma_i^{-1}}$ を次のように定義する:

$$f_{\sigma_i}(h_j) := \begin{cases} x_{i,i+1}h_i - h_{i+1}, & \text{if } j = i \\ h_{p_{i+1}(j)}, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad f_{\sigma_i^{-1}}(h_j) := \begin{cases} x_{i,i+1}h_{i+1} - h_i, & \text{if } j = i + 1 \\ h_{p_{i+1}(j)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $f_{\sigma_i^{\pm 1}}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_m}) := f_{\sigma_i^{\pm 1}}(h_{i_1}) \otimes \cdots \otimes f_{\sigma_i^{\pm 1}}(h_{i_m})$.

- \mathcal{A}_n 上の $C_n^{(3)}$ -線形写像 $c: \mathcal{A}_n \rightarrow C_n^{(3)}$ を次のように定義する:

$$c(h_{i_1} \otimes h_{i_2}) := \begin{cases} x_{i_1 i_2} & \text{if } i_1 < i_2 \\ 2 & \text{if } i_1 = i_2 \\ x_{i_2 i_1} & \text{if } i_1 > i_2 \end{cases}$$

$$c(h_{i_1} \otimes h_{i_2} \otimes h_{i_3}) := \text{sign}(\tau) x_{i_{\tau(1)} i_{\tau(2)} i_{\tau(3)}}$$

但し, τ は $i_{\tau(1)} \leq i_{\tau(2)} \leq i_{\tau(3)}$ を満たす 3 次対称群の元.

- (1) $f_{\sigma_i^{\pm 1}}(\sum_k s_k h_k) := \sum_k f_{\sigma_i^{\pm 1}}(s_k) f_{\sigma_i^{\pm 1}}(h_k)$ ($s_k \in C_n^{(3)}$): ねじれ $C_n^{(3)}$ -線形拡張.

- (2) 多項式 $s(x_{i_1 i_2}, x_{i_1 i_2 i_3}) \in C_n^{(3)}$ に対し,

$$f_{\sigma_i^{\pm 1}}(s(x_{i_1 i_2}, x_{i_1 i_2 i_3})) := s(f_{\sigma_i^{\pm 1}}(x_{i_1 i_2}), f_{\sigma_i^{\pm 1}}(x_{i_1 i_2 i_3})) : \underline{f_{\sigma_i^{\pm 1}} \text{ の } C_n^{(3)} \text{ への拡張.}$$

- (3) $f_{\sigma_i^{\pm 1}}(x_{i_1 \dots i_m}) := c \circ f_{\sigma_i^{\pm 1}}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_m}) : \underline{x_{i_1 \dots i_m} \text{ に対する } f_{\sigma_i^{\pm 1}} \text{ の作用.}$

- (4) $f_{\gamma_1 \gamma_2} := f_{\gamma_1} \circ f_{\gamma_2}$ ($\gamma_i \in \mathcal{B}_n$): 一般の braid への拡張.

により \mathcal{A}_n 上の作用 f_{σ} を定義する¹³.

- 真部分集合 $A_m \subset \{1, \dots, m\}$ に対し, $\epsilon_{A_m}(i) := \begin{cases} 1, & \text{if } i \notin A_m \\ 0, & \text{if } i \in A_m \end{cases}$ を定義する.

- $g_{\sigma, A_m}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_m}) := f_{\sigma}^{\epsilon_{A_m}(1)}(h_{i_1}) \otimes \cdots \otimes f_{\sigma}^{\epsilon_{A_m}(m)}(h_{i_m})$.

定義 3.3 (ideal $SL(\sigma)$) braid 表示 $\sigma \in \mathcal{B}_n$ に対し, $SL(\sigma)$ を以下の多項式で生成される $C_n^{(3)}$ の ideal とする:

$$c(f_{\sigma}(h_i \otimes h_j) - h_i \otimes h_j), \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

$$c(f_{\sigma}(h_i \otimes h_j \otimes h_k) - h_i \otimes h_j \otimes h_k), \quad (1 \leq i < j < k \leq n)$$

$$c(g_{\sigma, A_2}(h_i \otimes h_j) - h_i \otimes h_j), \quad (1 \leq i \leq j \leq n)$$

$$c(g_{\sigma, A_3}(h_i \otimes h_j \otimes h_k) - h_i \otimes h_j \otimes h_k), \quad (1 \leq i \leq j \leq k \leq n)$$

一般 6 角関係式, (if $n \geq 3$)

ここで, 一般 6 角関係式とは, ある特別な非幾何的定義多項式の一種である ([N3] 参照). 実際, 一般 6 角関係式以外の生成元 $c(f_{\sigma}(h) - h)$, $c(g_{\sigma, A_m}(h) - h)$ が $X(G_K)$ の幾何的定義多項式を実現していることが確認できる. この様に定義された代数多様体 $\mathcal{F}(\sigma)$ は, braid 表示の取り方に依らない¹⁴.

¹³ $\Phi_n: \mathcal{B}_n \rightarrow \text{Aut}(C_n^{(2)})$, $\Phi_n(\sigma) := f_{\sigma}$ は braid 群の Magnus 表現に対応している.

¹⁴実は, $SL(\sigma)$ に含まれる一般 6 角関係式を排除しても, その共通零点は Markov move 不変になるが, 一般 6 角関係式を入れることで, $S_0(K)$ の持つ重要な幾何構造が $\mathcal{F}(K)$ に反映されるため, 一般 6 角関係式は排除しない. この意味で, 一般 6 角関係式は幾何的定義多項式とも見れる.

定義 3.4 (Markov move) Braid 群 B_n の元 σ に対し, 次の 2 種類の操作

$$\sigma \leftrightarrow \sigma_i^{\mp 1} \sigma \sigma_i^{\pm 1} \quad (1 \leq i \leq n), \quad \sigma \leftrightarrow \sigma \sigma_{n+1}^{\pm 1}.$$

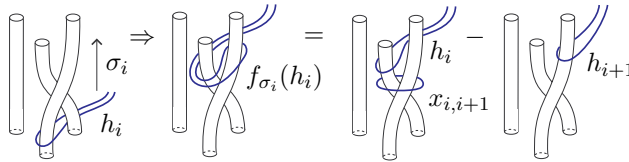
を Markov move という (前者をタイプ I, 後者をタイプ II という).

定理 3.5 (Markov move による不変性 [N3]) 結び目 K の braid 表示 $\sigma \in B_n$ に対し, 代数多様体 $\mathcal{F}(\sigma), \mathcal{F}(\sigma_i^{\mp 1} \sigma \sigma_i^{\pm 1}), \mathcal{F}(\sigma \sigma_{n+1}^{\pm 1})$ は同型¹⁵である.

結び目 K の任意の二つの braid 表示は, 有限回の Markov move で互いに移り合うため, 定理 3.5 は, $\mathcal{F}(\sigma)$ が braid 表示に依らない, つまり結び目不変量であることを示している. K のある braid 表示 σ に対し $\mathcal{F}(K) := \mathcal{F}(\sigma)$ と定義する. 特に $\mathcal{F}(K)$ の norm により, 非負整数値¹⁶ 不変量 $f: \{\text{結び目}\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, f(K) := \|\mathcal{F}(K)\|$ が定義できる.

4 $\mathcal{F}(K)$ の幾何的側面

$S\mathcal{L}(\sigma)$ ($\sigma \in B_n$) を生成する $f_\sigma(h_i)$ は, 次のような loop の局所操作¹⁷に対応する:



この性質により, $c \circ f_\sigma(h_i \otimes h_j), c \circ g_{\sigma, A_2}(h_i \otimes h_j)$ は共に $C_n^{(2)} := \mathbb{C}[\{x_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}]$ の元となることがわかる. つまり, 商多項式環 $C_n^{(3)}/S\mathcal{L}(\sigma)$ は, 次の分解 (filtration) $Q^{(d)}(\sigma) := C_n^{(d)}/S\mathcal{L}^{(d)}(\sigma)$ を誘導する:

$$Q(\sigma) = Q^{(3)}(\sigma) \supset Q^{(2)}(\sigma) \supset Q^{(1)}(\sigma) = \mathbb{C}.$$

但し $C_n^{(1)} := \mathbb{C}$ とし, $S\mathcal{L}^{(d)}(\sigma)$ は, $S\mathcal{L}(\sigma)$ の生成元のうち, $C_n^{(d)}$ の元であるものが生成する $C_n^{(d)}$ の ideal とする. この双対 (i.e., 各 $S\mathcal{L}^{(d)}(\sigma)$ の共通零点) を取ることにより, 次の列を得る.

$$\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}^{(3)}(\sigma) \xrightarrow{x_{ij}\text{-射影}} \mathcal{F}^{(2)}(\sigma) \xrightarrow{0\text{-射影}} \mathcal{F}^{(1)}(\sigma) = \{0\} \subset \mathbb{C}$$

各代数多様体 $\mathcal{F}^{(d)}(\sigma)$ は結び目の不変量となることがわかる. $\mathcal{F}^{(d)}(K) := \mathcal{F}^{(d)}(\sigma)$ と定義し, norm $\|\cdot\|$ により, 非負整数値関数¹⁸ $f_d(K) := \|\mathcal{F}^{(d)}(K)\|$ を定義する. (定義から, 任意の結び目 K に対し $f_1(K) = 0$.) これにより, $s_0(K)$ の挟み撃ち評価式を得ることができる (命題 4.1, 付録 A 参照).

命題 4.1 少なくとも次の性質が成り立つ:

1. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^{(3)}(K)) = 0$ ならば, $f_3(K) \geq s_0(K) \geq (|\Delta_K(-1)| - 1)/2$. (性質 2 の系)
2. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^{(3)}(K)) = 0$ を満たす small な結び目 K に対し, $f_3(K) \geq s_0(K) \geq \deg_l(A_K(m, l))$. (性質 5 の系)
3. 2-bridge knot $K = S(p, q)$ に対し, $\mathcal{F}^{(d)}(K) \cong S_0(K), f_d(K) = \frac{p-1}{2}$ ($d = 2, 3$). ([N4])
4. 合成結び目 $K = K_1 \# K_2$ (但し $|\Delta_{K_i}(-1)| \neq 1, d = 1, 2$) に対し, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^{(3)}(K)) \geq 1$. (性質 4 の系)

¹⁵代数多様体 V_1, V_2 が同型 (\cong) とは, 全単射多項式写像 $p: V_1 \rightarrow V_2$ が存在するときをいう.

¹⁶定義から (必要なら座標変換により) 常に $\mathcal{F}(K) \cap S_0(K) \neq \emptyset$ となるため.

¹⁷meridional knot を全て 0 に退化させた場合の $t = -1$ における KBSM の skein relation に対応する.

¹⁸任意の結び目 K に対し, $\mathcal{F}^{(d)}(K)$ ($i = 1, 2, 3$) が空ではないことによる.

5 $\mathcal{F}^{(d)}(K)$ の代数的側面 : abelian knot contact homology

まず, 結び目 K の braid 表示 $\sigma \in \mathcal{B}_n$ を固定し, n に付随した \mathbb{Z} 上の次数付き tensor 代数

$$\mathbb{Z}\langle \overbrace{a_{ij}}^{\text{deg } 0}, \overbrace{b_{ij}, c_{ij}}^{\text{deg } 1}, \overbrace{d_{ij}, e_i}^{\text{deg } 2} \rangle \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

に交換関係式 $v \otimes w = (-1)^{\text{deg } v \text{ deg } w} w \otimes v$ を導入した商環 \mathcal{T}_n を考える. \mathcal{T}_n は, 生成元の次数により, filtration $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^{(2)} \supset \mathcal{T}_n^{(1)} \supset \mathcal{T}_n^{(0)} = \mathbb{Z}[a_{ij}]$ (center : 多項式環) を持つ. 但し $\mathcal{T}_n^{(i)}$ は 0 次から i 次までの元が生成する \mathcal{T}_n の部分環とする. ここで, σ に付随した以下の条件を満たす differential $\partial_\sigma^{(i)} : \mathcal{T}_n^{(i)} \rightarrow \mathcal{T}_n^{(i-1)}$ ($i = 0, 1, 2$) が具体的に定義される¹⁹ :

1. $\partial_\sigma^{(i)}$ は次数を 1 下げる.
2. Leibniz rule : $\partial_\sigma^{(i)}(vw) = (\partial_\sigma^{(i)}v)w + (-1)^{\text{deg } v} v(\partial_\sigma^{(i)}w)$ を満たす.
3. $\partial_\sigma^{(i-1)} \circ \partial_\sigma^{(i)} = 0$.

(詳細は [Ng] を参照.) 特に, 条件 3 により homology が定義される.

定義 5.1 (braid に対する contact homology [Ng]) braid σ に対し, chain complex

$$0 \xrightarrow{\partial_\sigma^{(3)}} \mathcal{T}_n^{(2)} \xrightarrow{\partial_\sigma^{(2)}} \mathcal{T}_n^{(1)} \xrightarrow{\partial_\sigma^{(1)}} \mathcal{T}_n^{(0)} \xrightarrow{\partial_\sigma^{(0)}} 0$$

から定義される i 次の homology $HC_i^{\text{ab}}(\sigma)$ ($i = 0, 1, 2$) を, braid σ に対する i 次の abelian contact homology という.

実は, Markov move によって $HC_i^{\text{ab}}(\sigma)$ は (環同型を法として) 不変である ([Ng]). $HC_i^{\text{ab}}(K)$ を $HC_i^{\text{ab}}(\sigma)$ で定義し, 結び目 K の i 次の **abelian knot contact homology** という. ここで, 環同型 $\psi : \mathcal{C}_n^{(2)} \rightarrow \mathbb{Z}[a_{ij}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[a_{ij}]$, $\psi(x_{ij}) := -a_{ij}$ を考えると, ψ は環同型 $\tilde{\psi} : \mathcal{Q}^{(2)}(\sigma) \rightarrow HC_0^{\text{ab}}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ を誘導する.

定理 5.2 ([N3]) S^3 内の任意の結び目 K とその braid 表示 σ に対し, $\mathcal{Q}^{(2)}(\sigma)$ と $HC_0^{\text{ab}}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ は環同型である²⁰.

定理 5.2, 命題 4.1(性質 3) により, K が 2-bridge knot の場合, $HC_0^{\text{ab}}(K)$ は $S_0(K)$ の座標環であることがわかる. 一般の結び目に対しては, $HC_0^{\text{ab}}(K)$ は少なくとも $S_0(K)$ の座標環の一部の情報を反映した対象となっている.

また, $\mathcal{F}^{(2)}(K)$ が 0 次元のとき, $HC_0^{\text{ab}}(K)$ は変数消去により $\mathbb{Z}[z]/\langle p(z) \rangle$ と表され, $\text{deg}(p(z))$ が $HC_0^{\text{ab}}(K)$ の Betti 数となる. 一方で, \mathbb{C} は代数的閉体であるから $f_2(K) = \text{deg}(p(z)) - 1$ が成立し, $\mathcal{F}^{(2)}(K)$ の既約成分の個数は $HC_0^{\text{ab}}(K)$ の Betti 数となる. この議論は $\mathcal{Q}^{(3)}(\sigma)$ にも適用できる. つまり $\mathcal{Q}^{(3)}(\sigma)$ は, $\text{Im}(\tilde{\partial}_\sigma^{(1)}) = \mathcal{SL}^{(3)}(\sigma)$, $\text{Ker}(\tilde{\partial}_\sigma^{(0)}) = \mathcal{C}_n^{(3)}$ を満たす, ある chain complex $\dots \xrightarrow{\tilde{\partial}_\sigma^{(1)}} \mathcal{C}_n^{(3)} \xrightarrow{\tilde{\partial}_\sigma^{(0)}} 0$ の 0 次の homology として捉えられる. 従って, $\mathcal{F}^{(3)}(K)$ が 0 次元のとき, $\mathcal{F}^{(3)}(K)$ の既約成分の個数は, $\mathcal{Q}^{(3)}(\sigma)$ の Betti 数である²¹.

このように $\mathcal{F}^{(d)}(K)$ は, 何らかの対象の 0 次の部分を捉えていると考えられ, より大きな枠組みでの $\mathcal{F}^{(d)}(K)$ の研究が期待される.

¹⁹本来 $\partial_\sigma^{(i)}$ は $\partial_\sigma : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ の i 番目の filter への制限として定義される. 条件 1,2,3 を満たす differential ∂ を持つ次数付き代数を **differential graded algebra(DGA)** という. 対 $(\mathcal{T}_n, \partial)$ は DGA である.

²⁰特に $\mathcal{Q}^{(2)}(\sigma)$ は結び目の不変量となる.

²¹これらの現象は $\mathcal{F}^{(d)}(K)$ のモデルとなった Casson-Lin invariant が『ある Floer homology の Euler 数として解釈できる』という事実由来する性質であると考えられる.

謝辞

第 54 回トポロジーシンポジウムにおける講演の機会を与えて頂きました関係者の皆様に感謝申し上げます。また、本研究に関しまして、石川昌治先生をはじめ沢山の方々に、有益なコメントを頂きました。最後に、この研究を進めるにあたり、多大なコメントと励ましの言葉を下さり、そして今年 1 月に亡くなられた、カリフォルニア大学リバーサイド校の Xiao-Song Lin 先生に心より感謝致します。

参考文献

- [AM] S. Akbulut and J. McCarthy: *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres, an exposition*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.
- [B] D. Bullock: *Rings of $SL_2(\mathbb{C})$ -characters and the Kauffman bracket skein module*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), 521–542.
- [CCGLS] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. Long and P. Shalen: *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 47–84.
- [CS] M. Culler and P. Shalen: *Varieties of group presentations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983), 109–146.
- [GN] R. Gelca and F. Nagasato: *Some results about the Kauffman bracket skein module of the twist knot exterior*, J. Knot Theory Ramifications **15**, 1095–1106.
- [GM] F. González-Acuña and J.M. Montesinos: *On the character variety of group representations in $SL(2, \mathbb{C})$ and $PSL(2, \mathbb{C})$* , Math. Z., **214** (1993), 627–652.
- [K] E. Klassen: *Representations of knot groups in $SU(2)$* , Trans. Am. Math. Soc. **326** (1991), 795–828.
- [L] X.-S. Lin: *A knot invariant via representation spaces*, J. Differential Geom. **35** (1992), 337–357.
- [M] W. Magnus: *Ring of Fricke characters and automorphism group of free groups*, Math. Z. **170** (1980), 91–103.
- [N1] F. Nagasato: *Finiteness of a section of the $SL(2, \mathbb{C})$ -character variety of knot groups*, to appear, available at <http://www.math.titech.ac.jp/~fukky>.
- [N2] F. Nagasato: *Topological aspects of the Chebyshev polynomials and the character varieties*, to appear, available at <http://www.math.titech.ac.jp/~fukky>.
- [N3] F. Nagasato: *Algebraic varieties via a filtration of the KBSM and knot contact homology*, preprint, available at <http://www.math.titech.ac.jp/~fukky>.
- [N4] F. Nagasato: in preparation, a draft on this research will be available at <http://www.math.titech.ac.jp/~fukky>.
- [NY] F. Nagasato and Y. Yamaguchi: in preparation, a draft on this research will be available at <http://www.math.titech.ac.jp/~fukky>.
- [Ng] L. Ng: *Knot and braid invariants from contact homology I*, Geom. Topol. **9** (2005), 247–297.
- [PS] J.H. Przytycki and A.S. Sikora: *On skein algebras and $Sl_2(\mathbb{C})$ -character varieties*, Topology **39** (2000), 115–148.
- [S] N. Saveliev: *Lectures on the topology of 3-manifolds: an introduction to the Casson invariant*, de Gruyter textbook, Walter de Gruyter, Berlin, 1999.

A 付録：結び目不変量比較一覧表

* Montesinos-3 は Montesinos knot with length 3

K	$\dim(\mathcal{F}^{(3)})$	$\dim(\mathcal{F}^{(2)})$	f_3	f_2	$ \Delta_K(-1) $	$\deg_l(A_K(m, l))$	type
O	0	0	0	0	1	0	trivial
3_1	0	0	1	1	3	1	$S(3, 1)$
4_1	0	0	2	2	5	2	$S(5, 3)$
5_1	0	0	2	2	5	1	$S(5, 1)$
5_2	0	0	3	3	7	3	$S(7, 3)$
6_1	0	0	4	4	9	4	$S(9, 5)$
6_2	0	0	5	5	11	5	$S(11, 3)$
6_3	0	0	6	6	13	6	$S(13, 5)$
7_1	0	0	3	3	7	1	$S(7, 1)$
7_2	0	0	5	5	11	5	$S(11, 5)$
7_3	0	0	6	6	13	6	$S(13, 4)$
7_4	0	0	7	7	15	5	$S(15, 4)$
7_5	0	0	8	8	17	8	$S(17, 5)$
7_6	0	0	9	9	19	9	$S(19, 7)$
7_7	0	0	10	10	21	7	$S(21, 8)$
8_1	0	0	6	6	13	6	$S(13, 7)$
8_2	0	0	8	8	17	8	$S(17, 3)$
8_3	0	0	8	8	17	8	$S(17, 13)$
8_4	0	0	9	9	19	9	$S(19, 5)$
8_5	0	0	12	11	21	9	Montesinos-3
8_6	0	0	11	11	23	11	$S(23, 7)$
8_7	0	0	11	11	23	11	$S(23, 5)$
8_8	0	0	12	12	25	12	$S(25, 9)$
8_9	0	0	12	12	25	12	$S(25, 7)$
8_{10}	0	0	15	14	27	unknown	Montesinos-3
8_{11}	0	0	13	13	27	11	$S(27, 10)$
8_{12}	0	0	14	14	29	14	$S(29, 17)$
8_{13}	0	0	14	14	29	14	$S(29, 12)$
8_{14}	0	0	15	15	31	15	$S(31, 13)$
8_{15}	0	0	18	17	33	unknown	Montesinos-3
8_{16}	0	0	17	17	35	unknown	not small
8_{17}	0	0	18	18	37	unknown	–
8_{18}	??	??	??	??	45	unknown	–
8_{19}	0	0	3	2	3	unknown	Montesinos-3
8_{20}	0	0	6	5	9	5	Montesinos-3
8_{21}	0	0	9	8	15	unknown	Montesinos-3
9_{46}	0	0	6	5	9	4	Montesinos-3
10_{132}	0	0	8	5	5	8	Montesinos-3
$3_1 \# 3_1$	1	1	3	3	9	unknown	composite

正則 1-形式に対する Poincaré -Hopf 型定理とその応用

伊藤敏和

§0 はじめに

この講演で話す内容は 2000 年から始まり、今も続いている B. Scárdua 教授 (リオ・デ・ジャネイロ大学) との共同研究の成果の一部と、この過程で派生してきた疑問です。

1993 年に A. Douady - T. Ito によって「正則ベクトル場に対する Poincaré-Bendixson 型定理」 ([2]) が発見された。これを余次元 q の正則葉層構造へ拡張しようとして、いろいろな例を構成する中で、

基本予想 \mathbb{C}^n , $n \geq 3$, 内の原点中心, 半径 1 の閉円板 $\overline{D^{2n}(1)}$ の近傍 \cup で定義された余次元 q 正則葉層構造 \mathcal{F} は $\overline{D^{2n}(1)}$ の境界 $S^{2n-1}(1)$ に横断的でない。

を考えついた。

この基本予想を解く過程で得られた主要な結果は次のとおりである。しかし、我々はまだ完全な答を得ていない。

ω を閉円板 $\overline{D^{2n}(1)} \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, の近傍 \cup で定義された正則 1-形式とする。 $\text{Ker}(\omega) = \{Z \in T\cup \mid \omega(Z) = 0\}$ を ω で定義される正則分布とする。 $\text{Sing}(\omega)$ で ω の特異点の集合を表す。

定義 $\text{Ker}(\omega)$ が次の条件 (1) と (2) を満たすとき、 $\text{Ker}(\omega)$ が $2n-1$ 次元球面 $S^{2n-1}(1)$ に横断的であるという:

- (1) $\text{Sing}(\omega) \cap S^{2n-1}(1) = \emptyset$
- (2) $(\text{Ker}(\omega))_q + T_q S^{2n-1}(1) = T_q \mathbb{R}^{2n}$, for all $q \in S^{2n-1}(1)$

余次元 1 の場合に基本予想を考察し、得られた主要結果は次のとおりである。

- (1) \mathbb{C}^n , $n \geq 3$ において、 \mathcal{F} が斉次多項式係数の積分可能な 1-形式 ω で定義されているならば、 \mathcal{F} は $S^{2n-1}(1)$ に横断的でない。 ([6])
- (2) \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, において、 $\text{Ker}(\omega)$ が $S^{2n-1}(1)$ に横断的ならば、次の Poincaré-Hopf 型定理が成立する。 ([5])

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\omega) \cap \overline{D^{2n}(1)}} \text{Ind}(\omega : p) = (-1)^n$$

- (3) \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, において、 $\text{Ker}(\omega)$ が $S^{2n-1}(1)$ に横断的ならば、 ω は $D^{2n}(1)$ 内にただ 1 つの特異点を持ち、この特異点 p での ω のヤコービアンは $\det(D(\omega)(p)) \neq 0$ である。 ([5])

(4) \mathbb{C}^{2m+1} , $m \geq 1$, において, $\text{Ker}(\omega)$ は $S^{4m+1}(1)$ に横断的でない. ([5])

(5) ω は $\overline{D^{2n}(1)} \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, の近傍 \cup で定義された積分可能正則 1-形式とする. ω で定義された余次元 1 正則葉層構造 \mathcal{F} が $S^{2n-1}(1)$ に横断的であると仮定する. Möbius 変換によってただ 1 つの特異点は原点 0 と仮定してよい. このとき, \mathcal{F} が次の性質 (i)~(iii) を持つ葉 L を持つならば, $n = 2$ である.

性質 (i) $0 \in \bar{L}$, 性質 (ii) L は $\cup \setminus \text{Sing}(\omega)$ で閉集合である, 性質 (iii) L は各球面 $S^{2n-1}(r)$, $0 < r \leq 1$, に横断的である. ([7])

(6) \mathbb{C}^n , $n \geq 3$, において, ξ は \cup 上で定義された正則ベクトル場とする. もし, $\omega(\xi) = 0$ かつ ξ が $S^{2n-1}(1)$ に横断的であるならば, ω は積分可能でない. ([8])

基本問題 Consider $E \subset TC^n$ a holomorphic distribution in TC^n , $n \geq 3$, which is transverse to $S^{2n-1}(1) = \partial\overline{D^{2n}(1)}$ the boundary of the disc $\overline{D^{2n}(1)}$. What happens to E inside $\overline{D^{2n}(1)}$?

§1 正則ベクトル場に対する Poincaré-Bendixson 型定理

$Z = \sum_{i=1}^n f_i(z) \partial/\partial z_i$ を複素 n 次元空間 \mathbb{C}^n 上の正則ベクトル場とする. ここで, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ で, $f_i(z)$ は \mathbb{C}^n 上の正則関数である. また, $z_i = x_i + \sqrt{-1} y_i$, $z = x + \sqrt{-1} y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ とし, $f_i(z)$ を $f_i(z) = g_i(x, y) + \sqrt{-1} h_i(x, y)$ と実数値関数で表す. $\partial/\partial z_i = \frac{1}{2}(\partial/\partial x_i - \sqrt{-1} \partial/\partial y_i)$ に注意して, Z を実表示する.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^n f_i(z) \partial/\partial z_i \\ &= \frac{1}{2} \{ [\sum_{i=1}^n (g_i \partial/\partial x_i + h_i \partial/\partial y_i)] - \sqrt{-1} [\sum_{i=1}^n (-h_i \partial/\partial x_i + g_i \partial/\partial y_i)] \} \\ &= \frac{1}{2} (X - \sqrt{-1} Y) \end{aligned}$$

ここで, $X = \sum_{i=1}^n (g_i \partial/\partial x_i + h_i \partial/\partial y_i)$ と $Y = \sum_{i=1}^n (-h_i \partial/\partial x_i + g_i \partial/\partial y_i)$ とおく.

J を \mathbb{C}^n の複素構造から自然に引き起こされる \mathbb{R}^{2n} の複素構造とする. このとき, $JX = Y$, $JY = -X$, $[X, Y] = 0$ が成立する. だから, Z の解は $\{X, Y\}$ で定義される実 2 次元葉層構造 $\mathcal{F}(Z)$ の葉である.

定義 1.1 $M \subset \mathbb{C}^n$ を境界のない ($\partial M = \emptyset$) $2n-1$ 次元コンパクト C^∞ -多様体とする. 点 $P \in M$ で M と Z (又は $\mathcal{F}(Z)$) が横断的に交わるとは,

$$T_p M + \{X, Y\}_p = T_p \mathbb{R}^{2n}$$

が成立するときをいう. ここで, $\{X, Y\}_p$ は点 p において 2 つのベクトル場 X と Y で張られる $T_p \mathbb{R}^{2n}$ の部分ベクトル空間である.

さらに, すべて点 $p \in M$ で M と Z が横断的に交わるとき, M は Z に横断的であるという. このとき M 上に $\mathcal{F}(Z)$ によって 1 次元の葉層構造 $\mathcal{F}(Z)|_M$ が誘導される.

例 1.2 $\lambda \neq 0$ かつ負の実数でない数 $\lambda \in \mathbb{C}$ をとる. \mathbb{C}^2 上の線形ベクトル場 $Z = z_1\partial/\partial z_1 + \lambda z_2\partial/\partial z_2$ を考える. このとき, 原点を中心にした半径 $r > 0$ の 3 次元球面 $S^3(r)$ は Z に横断的である. そして, $S^3(1)$ に誘導される 1 次元葉層構造 $\mathcal{F}(Z)|_{S^3(1)}$ は次のようになっている.

Case 1 $\lambda = m/n$ が有理数のとき: $\mathcal{F}(Z)|_{S^3(1)}$ は Seifert fibration である.

Case 2 λ が正の無理数のとき: $\mathcal{F}(Z)|_{S^3(1)}$ は 2 つの閉軌道を持ち, 他は $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2, r_1^2 + r_2^2 = 1$ なるトーラス上の irrational flow (Kronecker flow) になっている.

Case 3 λ が実数でないとき: $\mathcal{F}(Z)|_{S^3(1)}$ は 2 つの閉軌道を持つ Morse-Smale flow である.

例 1.3 \mathbb{C}^2 上の非線形ベクトル場 $Z = (2z_1 + az_2^2)\partial/\partial z_1 + z_2\partial/\partial z_2, a \neq 0$ を考える. この Z は Dulac の標準形といわれているものである. $\Sigma(r) = \{z \in S^3(r) | (2z_1 + az_2^2)\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 0\}$ でもって, $S^3(r)$ 上の Z と接する点の集合とする. (i) $0 < r < r_0$ ならば $\Sigma(r) = \emptyset$, (ii) $r = r_0$ ならば $\Sigma(r_0)$ は S^1 に微分同相である. さらに, 葉から原点への距離関数はこの点で退化特異点となる. (iii) $r_0 < r$ ならば $\Sigma(r)$ は 2 つの S^1 の disjoint union $S^1 \amalg S^1$ に微分同相である. さらに, 1 つの S^1 は葉から原点への距離関数の極小点からなり, 他の S^1 は鞍点からなっている.

Poincaré-Hopf 型定理 1.4 ([2]) \mathbb{C}^n の部分集合 M が閉円板 $\overline{D^{2n}(1)}$ と微分同相とする. このとき, M の近傍で定義された正則ベクトル場 Z が ∂M と横断的に交わるならば, M 内に Z の特異点 p がただ 1 つ存在して, その指数は $\text{Ind}_p Z = 1$ である.

Poincaré-Bendixson 型定理 1.5 ([2]) \mathbb{C}^n の部分集合 M が閉円板 $\overline{D^{2n}(1)}$ と双正則微分同相とする. このとき, M の近傍で定義された正則ベクトル場 Z が ∂M と横断的に交わるならば, ∂M を横切る任意の葉 L (Z の解) は, ただ 1 つの特異点 p に行き着く, i.e. $p \in \bar{L}$.

さらに Z で定義される葉層構造 $\mathcal{F}(Z)$ を $M \setminus \{p\}$ に制限した $\mathcal{F}(Z)|_{M \setminus \{p\}}$ は $\mathcal{F}(Z)|_{\partial M} \times (0, 1]$ に C^ω -級微分同相である.

系 1.6 ([3]) 定理の仮定のもとで, $\mathcal{F}(Z)|_{\partial M}$ は少なくとも 1 つ compact leaf (閉軌道) を持つ.

注意: Poincaré-Dulac の標準形をもちいれば, $\overline{D^{2n}(1)}$ 内の $\mathcal{F}(Z)$ の構造はすべてわかる. ([3])

定理 1.7 ([9]) $\mathbb{C}^n, n \geq 2$, 上の孤立特異点を持つ多項式ベクトル場 Z を考える. 複素 n 次元射影空間 $\mathbb{C}P(n)$ 上の Z によって誘導される葉層構造を $\mathcal{F}(Z)$ は双曲型 (hyperbolic) の特異点しか持たないと仮定する. 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) $\mathcal{F}(Z)$ は \mathbb{C}^n 上で少なくとも n 本の separatrices を持ち, すべての p_j を中心に持つ半径 R_j の球面 $S^{2n-1}(p_j, R_j) \subset \mathbb{C}^n, \lim_{j \rightarrow \infty} R_j = +\infty$, に横断的である.

§2 基本予想を考察するための例

例 2.1 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = 2$ の場合 ([6])

ゼロでない複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}^*$ をとる. \mathbb{C} の部分集合 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ の凸閉包を $\mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \mathbb{C}$ と書く.

仮定 (1) $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ かつ $0 \in \mathcal{H}(\mu_1, \dots, \mu_n)$

仮定 (2) $0 \notin \mathcal{H}(c_1\lambda_1 + c_2\mu_1, \dots, c_1\lambda_n + c_2\mu_n)$ となる実数 c_1 と c_2 が存在する.

$\mathbb{C}^n, n \geq 3$, 上の 2 つの線形ベクトル場 $X = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \partial / \partial z_j$ と $Y = \sum_{j=1}^n \mu_j z_j \partial / \partial z_j$ を考える. 直接的な計算により $[X, Y] = 0$ が示せる. よって X と Y とで生成される \mathbb{C}^n 上の複素 2 次元の葉層構造 \mathcal{F} が定義される. この \mathcal{F} の特異点 p は $\dim_{\mathbb{C}} \{X, Y\}_p \leq 1$ となる点である. $\text{Sing}(\mathcal{F})$ をもって \mathcal{F} の特異点の集合を表すと, $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^n \{z_i - \text{軸}\}$ となる. また, 記号 $\Sigma(X)(r)$ をもって, X と球面 $S^{2n-1}(r)$ との接点集合とする. $\Sigma(X) = \bigcup_{r>0} \Sigma(X)(r)$ とおけば, $\Sigma(X) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \cdot \bar{z}_i = 0\}$ となる. 仮定 (1) より $\Sigma(X) \neq \emptyset$ かつ $\Sigma(Y) \neq \emptyset$ となり, $\Sigma(X)$ と $\Sigma(Y)$ は real cone になっている. さらに, 仮定 (2) より $\Sigma(X) \cap \Sigma(Y) = \{0\}$ が得られる. よって \mathcal{F} はすべての $q \in S^{2n-1}(1)$ に対して $T_q \mathcal{F} + T_q S^{2n-1}(1) = T_q \mathbb{R}^{2n}$ を満たす. そして, $S^{2n-1}(1)$ を横切る \mathcal{F} の葉 L は原点に行き着く, i.e. $\bar{L} \in 0$.

例 2.2 linear logarithmic foliation \mathcal{F} の場合 ($\text{codim}_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = 1$) ([6])

ゼロでない複素数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}^*$ は $\lambda_i / \lambda_j \in \mathbb{R}, (i \neq j)$ と $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$ を満たすとする. \mathbb{C}^3 上の linear logarithmic one form $\omega = z_1 z_2 z_3 \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{dz_j}{z_j} \right) = \lambda_1 z_2 z_3 dz_1 + \lambda_2 z_1 z_3 dz_2 + \lambda_3 z_1 z_2 dz_3$ を考える. ω は積分可能であるから, 葉層構造 $\mathcal{F}(\omega)$ を定義する. この $\mathcal{F}(\omega)$ は次の性質を持つ.

(i) ω の特異点の集合 $\text{Sing}(\omega)$ は $\text{Sing}(\omega) = \bigcup_{i \neq j} \{z_i = 0, z_j = 0\}$ である.

(ii) $\mathcal{F}(\omega)$ は $S^5(1)$ に $S^5(1) \setminus \text{Sing}(\omega) \cap S^5(1)$ で横断的である.

(iii) 原点を通る超平面 $P = \{\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0\}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^*$, を考える. $\mathcal{F}(\omega)$ を P 上に制限したものを $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(\omega)|_P$ と書く. $\text{Sing}(\omega)$ 以外の点では P は $\mathcal{F}(\omega)$ に横断的である. しかし, $\text{Sing}(\mathcal{F}_1) \cap (P \cap S^5(1)) = \emptyset$ であるが \mathcal{F}_1 は $P \cap S^5(1)$ に横断的でない.

問題 我々は §0 での \mathcal{F} と $S^{2n-1}(1)$ との横断性の定義において, $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap S^{2n-1}(1) = \emptyset$ を仮定したが, 上記例 2.1 と例 2.2 をみるかぎり, $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap S^{2n-1}(1) = \emptyset$ の仮定をせずに横断性を考え, logarithmic one form を典型例として含む理論を創れ.

例 2.3 積分可能な線形 1-形式の場合 ([6])

C^n , $n \geq 3$, 上の線形 1-形式 $\omega = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j) dz_i$ を考える. この ω が次の 2 つの仮定を満たす. 仮定 (1) $\text{Sing}(\omega) \cap S^{2n-1}(1) = \emptyset$, 仮定 (2) ω は積分可能である, i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$. このとき ω で定義される余次元 1 正則葉層構造 $\mathcal{F}(\omega)$ は $S^{2n-1}(1)$ に横断的でない.

証明 背理法で示す. もし横断的とすると, 仮定 (1) より, $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ は $\det(A) \neq 0$ となる. 一方, 仮定 (2) と $\det(A) \neq 0$ より ω は閉形式 $d\omega = 0$ となる. すなわち, 行列 A は対称行列 $a_{ij} = a_{ji}$ になる. 故に $\omega = \frac{1}{2} d(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} z_i z_j)$ となり, $\mathcal{F}(\omega)$ は $\varphi(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} z_i z_j$ の等高面として定義される. $|\varphi(z)|$ が $S^{2n-1}(1)$ 上で最大値を取る点 p で $\mathcal{F}(\omega)$ は $S^{2n-1}(1)$ に横断的でなくなる.

§3 正則 1-形式に対する Poincaré-Hopf 型定理

C^n , $n \geq 2$, の閉円板 $\overline{D^{2n}(1)}$ の近傍 U で定義された正則 1-形式 $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(z) dz_j$ を考える. $\text{Ker}(\omega) = \{Z \in T U \mid \omega(Z) = 0\}$ を ω によって定義される正則分布とする. そして, $\text{Sing}(\omega) = \{f_1 = 0, \dots, f_n = 0\}$ でもって ω の特異点の集合を表す. ω の孤立特異点 p に対して, p 点における ω の指数 $\text{Ind}(\omega : p)$ を次の写像 F の写像度と定義する. $F : S^{2n-1}(p : \epsilon) \rightarrow S^{2n-1}(1)$, $F(z) = \frac{(f_1(z), \dots, f_n(z))}{\sqrt{|f_1(z)|^2 + \dots + |f_n(z)|^2}}$ ここで, $S^{2n-1}(p : \epsilon)$ は点 p を中心とする半径 ϵ の $2n-1$ 次元球面を意味する.

正則 1-形式に対する Poincaré-Hopf 型定理 3.1 ([5]) もし $\text{Ker}(\omega)$ が S^{2n-1} に横断的ならば,

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\omega) \cap D^{2n}(1)} \text{Ind}(\omega : p) = (-1)^n$$

が成立する.

系 3.2 ([5]) (i) n は偶数である. (ii) $\text{Sing}(\omega) \cap D^{2n}(1) = \{p\}$ ただ 1 点である. (iii) $\det(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(p)) \neq 0$. (iv) $\text{Ker}(\omega)$ は $S^{4m+1}(1) \subset C^{2m+1}$ に横断的でない.

定理 3.1 の証明の概略 1-形式 $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(z) dz_j$ に対して, ω の gradient vector $\text{grad}(\omega) = \sum_{j=1}^n \overline{f_j(z)} \partial / \partial z_j$ を定義する. これは C^n の自然なエルミート計量で $\text{Ker}(\omega)$ に直交している. 半径方向ベクトル $\vec{R} = \sum_{j=1}^n z_j \partial / \partial z_j$ と $\text{grad}(\omega)$ とを組み合わせて, $S^{2n-1}(1)$ に横断的なベクトル $Z = \text{grad}(\omega) + \varphi \cdot \vec{R}$ を作る. ここで, φ は $S^{2n-1}(1)$ の近傍で定義された C^∞ - bump - function でいくつかの性質を持つ ([5] をみよ). この Z の実表示を $Z = \frac{1}{2} \{X - \sqrt{-1} J X\}$ とする. Z が $S^{2n-1}(1)$ に横断的であるか

ら, $S^{2n-1}(1)$ の近傍で定義された実 C^∞ -ベクトル場 $\xi = a(z) \cdot X(z) + b(z) \cdot JX(z)$ が構成できる. そして, ホモトピーの性質 $\prod_{2n-1}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = 0$, $n \geq 2$, より ξ を $\overline{D^{2n}(1)}$ の内部へ C^∞ -級に拡張 $\tilde{\xi} = \tilde{a}(z) \cdot X(z) + \tilde{b}(z) \cdot JX(z)$ できる. $\text{Sing}(\tilde{\xi}) = \text{Sing}(\omega)$ であることに注意して, $\tilde{\xi}$ に通常 Poincaré-Hopf 定理を用いれば, 定理の証明は終わる. 詳しくは [11] をみよ.

例 3.3 \mathbb{C}^{2n} , $n \geq 2$, 上の 1-形式 $\omega = \sum_{j=1}^n (z_{2j} dz_{2j-1} - z_{2j-1} dz_{2j})$ を取る. ω が積

分可能でないことは直接計算でわかる. 半径方向ベクトル $\vec{R} = \sum_{j=1}^{2n} z_j \partial / \partial z_j$ を取ると, $\omega(\vec{R}) = 0$ となり, $\text{Ker}(\omega)$ は $S^{4n-1}(1)$ に横断的であり, $\text{Sing}(\omega) = \{0\}$ で, $\text{Ind}(\omega : 0) = 1$ である.

§4 余次元 1 正則葉層構造に対する基本予想

\mathbb{C}^n , $n \geq 2$, 上の閉円板 $\overline{D^{2n}(1)} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| \leq 1\}$ の近傍 \cup で定義された積分可能正則 1-形式 ω で定義された余次元 1 葉層構造 $\mathcal{F}(\omega)$ と $S^{2n-1}(1) = \partial \overline{D^{2n}(1)}$ との横断性について考察する.

定理 4.1 ([6]) ω を \mathbb{C}^n , $n \geq 3$, 上の斉次多項式係数の積分可能な 1-形式とする. ω で定義される $\mathcal{F}(\omega)$ は $S^{2n-1}(1)$ に横断的ではない.

定理 4.2 ([6]) ω は $\overline{D^{2n}(1)} \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, の近傍 \cup で定義された積分可能正則 1-形式とする. $\mathcal{F}(\omega)$ が $S^{2n-1}(1)$ に横断的であると仮定する. Möbius 変換によってただ 1 つの特異点は原点 0 と仮定してよい. さらに $\mathcal{F}(\omega)$ が次の性質 (i) ~ (iii) を満たす葉 L を持つと仮定する. 性質 (i) $0 \in \bar{L}$, 性質 (ii) L は $\cup \setminus \text{Sing}(\omega)$ で閉集合である, 性質 (iii) L は各球面 $S^{2n-1}(r)$, $0 < r \leq 1$, に横断的である. このとき, $n = 2$ となる.

定理 4.3 ([8]) ξ は $\overline{D^{2n}(1)} \subset \cup \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, 上で定義された正則ベクトル場とする. もし, $\omega(\xi) = 0$ かつ ξ が $S^{2n-1}(1)$ に横断的であるならば, ω は積分可能でない.

定理 4.1 の証明の概略: もし $\mathcal{F}(\omega)$ が $S^{2n-1}(1)$ に横断的であると仮定すると, 原点は ω の孤立特異点になる. よって, Malgrange の定理より, 原点の近傍 W で $\omega|_W = \varphi \cdot d\psi$ と書ける. ここで, φ と ψ は W 上の正則関数で, φ は W 上ゼロにならない. ω の係数は斉次多項式ゆえ, φ, ψ も多項式になり, $\mathcal{F}(\omega)$ は $\overline{D^{2n}(1)}$ 上で ψ の等高面として定義される. それゆえ, $|\psi|$ が $S^{2n-1}(1)$ 上で最大値を取る点で $\mathcal{F}(\omega)$ は $S^{2n-1}(1)$ に横断的でなくなり, 仮定に反する.

Malgrange の定理 ([10]): Supposons qu'on ait $\text{codim Sing}(\omega) \geq 3$, et $\omega \wedge d\omega = 0$; alors ω admet un facteur intégrant, c'est-à-dire qu'il existe f et g , fonctions holomorphes en 0, avec $f(0) \neq 0$, telles qu'on ait $\omega = fdg$.

定理 4.2 の証明の概略: $n \geq 3$ と仮定する. Malgrange の定理から, 原点の近傍 V 上では正則関数の等高面 $L \cap V = \{\psi = 0\}$ となる. J. Milnor ([12]) によつて, $k \leq n-1$ なら, ホモトピー $\Pi_k(\psi^{-1}(0) \cap S^{2n-1}(\epsilon)) = 0$ となる. 性質 (iii) により, $\psi^{-1}(0) \cap S^{2n-1}(\epsilon) = L \cap S^{2n-1}(\epsilon)$ は $L \cap S^{2n-1}(1)$ に微分同相である. よつて, $L \cap S^{2n-1}(1)$ は simply connected である. $\mathcal{F}(\omega)$ を $S^{2n-1}(1)$ に制限して得られる $S^{2n-1}(1)$ 上の横断的正則葉層構造 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(\omega)|_{S^{2n-1}(1)}$ は compact, simply connected な葉を持つ. Brunella's Global Stability Theorem によつて, \mathcal{F}_1 の各葉は compact で自明な holonomy を持つ. \mathcal{F}_1 は leaf space $Q = S^{2n-1}(1)/\mathcal{F}_1$ 上の Seifert fibration になる. ホモトピー完全例 $\Pi_2(L \cap S^{2n-1}(1)) \rightarrow \Pi_2(S^{2n-1}(1)) \rightarrow \Pi_2^{orb}(Q) \rightarrow \Pi_1(L \cap S^{2n-1}(1)) \rightarrow \Pi_1(S^{2n-1}(1)) \rightarrow \Pi_1^{orb}(Q)$ より $\Pi_2^{orb}(Q) = 0$ かつ $\Pi_1^{orb}(Q) = 0$ となる. 一方, 一般論で, $\Pi_1^{orb}(Q) = 0$ ならば $\Pi_2^{orb}(Q) \cong H_2^{orb}(Q; \mathbb{Z}) \neq 0$ となるから, $\Pi_2^{orb}(Q) = 0$ に矛盾する.

Brunella's Global Stability Theorem ([1]) Let \mathcal{F} be a transversely holomorphic foliation of complex codimension one on a compact connected manifold M . Assume that there exists a compact leaf L of \mathcal{F} with finite holonomy. Then \mathcal{F} is a Seifert fibration.

§5 非可積分正則 1-形式

例 2.3, 例 3.3 と定理 4.3 より \mathbb{C}^{2m} 内の $S^{4m-1}(1)$ に横断的な非可積分正則 1-形式の性質について考察する.

$2m \times 2m$ 複素歪称行列の集合を $\mathcal{A}(2m)$ と書き, $\mathcal{A}(2m)$ の元で行列式が 0 でないものの部分集合を $A(2m)$ と書く. $m \geq 2$ に対して, もし $A = (a_{ij}) \in A(2m)$ ならば 1-形式 $\Omega_A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_i dz_j$ は非可積分で, $S^{4m-1}(r)$, $r > 0$, に横断的である.

特別な場合として, $\Omega_{J(2m)} = \sum_{j=1}^m (z_{2j-1} dz_{2j} - z_{2j} dz_{2j-1})$ と $\Omega_l = \sum_{j=1}^m (z_{2j-1} dz_{2j} - (l_j z_{2j} + z_{2j-1}^l) dz_{2j-1})$, $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{N}^m$ を考える.

定理 5.1 ([8]) $\text{Ker}(\Omega_{J(2m)})$, $\text{Ker}(\Omega_A)$, と $\text{Ker}(\Omega_l)$ は原点を通る積分多様体を持たない.

$S^{4m-1}(1)$ に横断的な非可積分正則 1-形式は本質的に異なる型がどれだけあるかを考察する. この部分的な結果は次の定理である.

定理 5.2 ([8]) Ω は $\overline{D^{4m}(1)} \subset \mathbb{C}^{2m}$ の近傍 U で定義された正則 1-形式で, (1) $\Omega(\vec{R}) = 0$ と (2) $\text{Sing}(\Omega) \cap S^{4m-1}(1) = \emptyset$ を満たすと仮定する. ただし, $\vec{R} = \sum_{j=1}^{2m} z_j \partial / \partial z_j$ は \mathbb{C}^{2m} の半径方向ベクトルである. このとき, $\text{Ker}(\Omega)$ は $\text{Ker}(\Omega_{J(2m)})$ にホモトピックである. そのホモトピーは上記の (1) と (2) の性質を満たす正則 1-形式 Ω_s , $0 \leq s \leq 1$, $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega_1 = \Omega_{J(2m)}$ によつて結ばれる.

問題 Classify the non-integrable germs of holomorphic one forms ω with an isolated singularity at the origin and $\text{Ker}(\omega)$ transverse to all small spheres centered at the origin.

References

- [1] M. Brunella: A global stability theorem for transversely holomorphic foliations, *Ann. Global Anal. Geom.* 15-2(1997), 179-186.
- [2] T. Ito: A Poincaré-Bendixson type theorem for holomorphic vector fields, *RIMS Kokyuroku* 878(1994), 1-9.
- [3] T. Ito: The number of compact leaves of a one-dimensional foliation on the $2n-1$ dimensional sphere S^{2n-1} associated with a holomorphic vector field, *RIMS Kokyuroku* 955(1996), 75-79.
- [4] T. Ito and B Scárdua: Holomorphic foliations of codimension one transverse to polydiscs, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 575(2004), 37-44.
- [5] T. Ito and B Scárdua: A Poincaré -Hopf-type theorem for holomorphic one-forms, *Topology*, 44(2005), 73-84.
- [6] T. Ito and B Scárdua: On holomorphic foliations transverse to spheres, *Moscow Mathematical Journal*, 5-2(2005), 75-93.
- [7] T. Ito and B Scárdua: On the non-existence of a codimension one holomorphic foliation transverse to a sphere, *Mathematical Research Letters*, 12(2005), 713-717.
- [8] T. Ito and B Scárdua: On the classification of non-integrable complex distributions, *Indagationes Mathematicae*, 17-3(2006), 397-406.
- [9] T. Ito and B Scárdua: A geometric characterization of linear hyperbolic flows on C^n , *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 26(2006), 1569-1578.
- [10] B. Malgrange: Frobenius avec singularités I. Codimension un, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 46(1976), 163-173.
- [11] J. Milnor: *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.
- [12] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. Math. Studies*, Princeton University Press, 61(1968).

可解リー群の余次元 1 作用の剛性について

浅岡 正幸 (京都大学大学院理学研究科)

1 Lie 群の局所自由作用

Lie 群 G の多様体 M への C^∞ 級 (右) 作用 $\rho : M \times G \rightarrow M$ が局所自由 (locally free) であるとは, すべての $p \in M$ に対して $\{g \in G \mid \rho(p, g) = p\}$ が離散集合であることを言う. このとき, $\dim M - \dim G$ を作用の余次元と呼ぶことにする. 余次元 n の局所自由作用は, M の各点の周りで適切な座標 $M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n \times G$ を取れば局所的には

$$(\mathbb{R} \times G) \times G \ni ((x, g), h) \mapsto (x, gh) \in \mathbb{R} \times G$$

の形で書くことができる. 特に, $p \in M$ の作用 ρ による軌道 $\{\rho(p, g) \mid g \in G\}$ を $\mathcal{O}(p; \rho)$ と書くことにすると, 軌道全体の集合 $\{\mathcal{O}(p; \rho)\}_{p \in M}$ は余次元 n 葉層構造をなしている.

例 1 (等質作用). Lie 群 G に対して, G' を G を余次元 n 閉部分群として含む Lie 群, Γ を G' の一様格子 (cocompact lattice) とする. すると, 商空間 $M = \Gamma \backslash G'$ は自然な余次元 n 局所自由作用を持つ. このように構成される作用を等質作用 (homogeneous action) という.

例 2 (suspension construction). M_0 を n 次元閉多様体とし, $\text{Diff}^\infty(M_0)$ でその上の C^∞ 級微分同相写像全体のなす群を表わすものとする. Lie 群 G とその一様格子 Γ に対して, 準同型 $h : \Gamma \rightarrow \text{Diff}^\infty(M_0)$ を一つ決める. Γ の $M_0 \times G$ への作用を

$$\gamma \cdot (p, g) = (h(\gamma)(p), \gamma g)$$

で定めると, 閉多様体 $M = \Gamma \backslash (M_0 \times G)$ は自然な G の余次元 n 局所自由作用を持つ.

C^∞ 級群作用の同値関係としては, 次の二つのものを考えるのは自然であろう. G を Lie 群, $\rho_1 : M_1 \times G \rightarrow M_1$ と $\rho_2 : M_2 \times G \rightarrow M_2$ を多様体上の C^∞ 級作用とする. また, $0 \leq r \leq \infty$ とする.

- ρ_1 と ρ_2 が C^r -共役 (conjugate) であるとは, C^r 級微分同相写像 $H : M_1 \rightarrow M_2$ と G の自己同型 $A : G \rightarrow G$ で,

$$H(\rho_1(p, g)) = \rho_2(H(p), A(g))$$

がすべての $p \in M_1$ と $g \in G$ について成り立つものがあることを言う.

- ρ_1 と ρ_2 が C^r -軌道同値 (orbit equivalent) であるとは, C^r 級微分同相写像 $H : M_1 \rightarrow M_2$ で,

$$H(\mathcal{O}(p; \rho_1)) = \mathcal{O}(H(p); \rho_2)$$

がすべての $p \in M_1$ について成り立つものがあることを言う.

作用の C^r -共役による分類の問題は,

1. C^r -軌道同値類での分類
2. 与えられた C^r -軌道同値類に含まれる C^r -共役類の分類

の二つに分解することができる.

余次元 0 や $G = \mathbb{R}$ といった極端な場合には, 局所自由作用の分類問題についての答えはある意味では出ている. すなわち,

- M が連結, かつ $\dim M = \dim G$ のとき, すべての G の M への C^∞ 級局所自由作用は, 等質作用と C^∞ -共役.
- $G = \mathbb{R}$ のとき, その C^∞ 級局所自由作用は固定点を持たない flow と見なすことができる. $\dim M \geq 3$ では, その分類は C^0 -軌道同値でさえ絶望的である. ($\dim M = 2$ は後述)

本稿の主題は, non-compact な Lie 群の閉多様体上の余次元 1 局所自由作用の分類問題である. 前半では, これまでに知られていた結果について概観する. まず, \mathbb{R}^n の場合には作用は容易に変形しうることを見る. 次に, それとは対照的に, ある種の可解群はその余次元 1 作用が適当な条件の下で等質作用と共役になるという剛性を持つことを見る. 後半では, 実 1 次元 affine 変換群の余次元 1 作用の分類に関する筆者が最近得た結果を紹介する. この場合には, ある意味で有限次元分だけの等質作用からの変形が存在することが示される.

2 \mathbb{R}^n の余次元 1 局所自由作用

例 2 の構成を, 準同型 $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Diff}^\infty(S^1)$ に適用することで, \mathbb{R}^n の $(n+1)$ 次元トーラス \mathbb{T}^{n+1} への余次元 1 局所自由作用が構成できる. 当然ながら, ほとんどの場合は等質作用と軌道同値ではないものが出る.

\mathbb{Z}^n から $\text{Diff}^\infty(S^1)$ への準同型は互いに可換な n 個の C^∞ 級微分同相写像の組と対応するが, 一般に S^1 上の C^∞ 級微分同相写像を固定したとき, それと可換な C^∞ 級微分同相写像はそれほど多くない (N.Kopell [16]). しかし, その一方で微分同相写像は, 摂動によって簡単に変わる多くの共役不変な量を持つ (例えば, 固定点を持つときはその点での微分が共役類の不変量となる). 従って大雑把には, suspension construction によって構成される作用の軌道同値類のなす集合

は、ほぼ S^1 上の微分同相写像の共役類と同程度の自由度を持ち、それは大きなものであるといえる。

一方で、軌道同値類を固定しても、それに含まれる共役類はたくさんある場合もある。

例 3 (自明な suspension から決まる作用の軌道同値類). 自明な準同型から構成される suspension 上の作用 $\rho_I : \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^{n+1}$ は、 $\rho_I((x, y), v) = (x + v, y)$ ($x \in \mathbb{T}^n, y \in \mathbb{T}^1 = S^1, v \in \mathbb{R}^n$) と書ける. S^1 から $GL(n, \mathbb{R})$ への C^∞ 級写像 A に対して、 \mathbb{R}^n の \mathbb{T}^{n+1} への局所自由作用 ρ_A を

$$\rho_A((x, y), v) = (x + A(y)v, y)$$

で定める. この作用は ρ_I と C^∞ -軌道同値である. しかし、 ρ_A と ρ_B が C^∞ -共役であることの必要十分条件は、ある S^1 上の C^∞ 級微分同相写像 h と $H \in GL(n, \mathbb{R})$ で $B(y) = (A \circ h(y)) \cdot H$ をみたすものがあることである. S^1 から $GL(n, \mathbb{R})$ への C^∞ 級写像をこのような関係で割った空間は無限次元の自由度を持つため、軌道同値類を固定しても、共役類の自由度は大きいといえる.

以上のように、 \mathbb{R}^n の余次元 1 局所自由作用は一般には強い柔軟性を示す¹. しかし、このような柔軟性を許せば、低次元の場合にはある程度分類は可能である. \mathbb{R} の局所自由作用は固定点を持たない flow と見なすことができることを思い出そう. このような作用を許す 2 次元多様体は \mathbb{T}^2 にしかないことは容易にわかる.

定理 2.1 (C.L.Siegel [19]). \mathbb{T}^2 上の固定点を持たない C^∞ 級 flow は C^∞ 級大域切断を持つ. 特に \mathbb{R} の作用として見たときに、ある微分同相写像による suspension が定める作用と C^∞ -軌道同値.

円周上の微分同相写像の共役類については力学系理論の視点から多くの研究がある ([15] の Section 11,12 など参照のこと) がここでは深入りしないことにする.

\mathbb{R}^2 の 3 次元閉多様体への C^∞ 級局所自由作用の C^0 -軌道同値による分類も G.Chatelet-H.Rosenberg-D.Weil [9] によって成されているが、こちらにも深入りはしないことにする.

3 可解群の余次元 1 作用の剛性

可換群の場合とは対照的に、非可換な可解群の場合は余次元 1 局所自由作用が強い剛性を持つ場合がある.

¹その一方で、よい性質をもつ irrational rotation たちが定める suspension の場合には、 C^∞ -軌道同値類に含まれるすべての作用が線形作用と C^∞ -共役になることも知られている (J.L.Arraut-N.M.Dos Santos [1]).

Lie 群 G の多様体 M 上への C^∞ 作用 $\rho : M \times G \rightarrow M$ があるとき, 各 $g \in G$ に対して微分同相写像 ρ_g を $\rho_g(p) = \rho(p, g)$ で定める. ある M の体積 dv がすべての ρ_g で不変であるとき, ρ は dv を保つ, という.

$\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ を向きを保つ実数直線上の affine 変換のなす群とする.

定理 3.1 (Ghys [11]). $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の 3次元閉多様体への C^∞ 級局所自由作用がある C^0 級体積を保つならば, その作用はある等質作用と C^∞ -共役である.

例 3 として挙げたように, \mathbb{R}^n の作用の場合は体積保存を仮定してもこのような剛性は導かれないことに注意.

$\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の余次元 1 等質作用は, 以下のように完全に分類されている. $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ を $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\}$ の普遍被覆群とし, $\{X^t\}_{t \in \mathbb{R}}, \{S^x\}_{x \in \mathbb{R}}, \{U^y\}_{y \in \mathbb{R}}$ をそれぞれ, $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ の部分群

$$\left\{ \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}_{x \in \mathbb{R}}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \right\}_{y \in \mathbb{R}}$$

の持ち上げで定まる $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ の 1 変数部分群とする. また, Solv を半直積 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ で, 群の構造が

$$(t, x, y) \cdot (t', x', y') = (t + t', x + e^{-t}x', y + e^t y')$$

で与えられているものとする. 連結, 単連結, かつ, ユニモジュラーな 3次元 Lie 群で $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ を閉部分群として含むものは, $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$, または Solv と同型であり, それらの中で $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ は $\{X^t U^y \in \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \mid t, y \in \mathbb{R}\}$, または $\{(t, 0, y) \in \text{Solv} \mid t, y \in \mathbb{R}\}$ と同一視できる. 従って, 任意の $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の余次元 1 等質作用は, $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$, または Solv の一様格子による商空間上の, この同一視による等質作用と共役であることがわかる.

Ghys の結果は, M.Belliart-O.Birembaux [8], A.Yamakawa-N.Tsuchiya [20, 21], M.Belliart [5, 6] らによって高次元の可解群の作用の剛性定理へと一般化された. ここでは, 最も一般的な形である Belliart [6] の定理について述べることにする. G を連結かつ単連結な可解 Lie 群, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を G の Lie 環 \mathfrak{g} の複素化, Ad を G の $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上の随伴表現とすると, Lie の定理により, \mathfrak{g} のイデアルの列 $\{0\} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} \subset \dots \subset \mathfrak{g}_n^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ で, すべての $k = 1, \dots, n$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}} / \mathfrak{g}_{k-1}^{\mathbb{C}} = 1$, かつ $\mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}}$ は Ad で不変であるようなものが存在する. 各 $k = 1, \dots, n$ について, Ad から誘導される $\mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}} / \mathfrak{g}_{k-1}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}$ 上の表現を指標 $\chi_k : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ と同一視することにする. $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ を G の modular 関数, すなわち, $\Delta(g) = \det Ad(g)$ で与えられる指標とする. G を余次元 1 閉部分群とするユニモジュラーな Lie 群 G_Δ を

$$(g, t) \cdot (g', t') = (gg', t + \Delta^{-1}(g)t')$$

を群演算とする半直積 $G \times \mathbb{R}$ で定める.

定理 3.2 (M.Belliart [6]). 連結かつ単連結な可解 Lie 群 G について $\Delta = |\chi_i^{-1} \cdot \chi_j^\alpha|$ がすべての $i, j = 1, \dots, n$ と $\alpha \in [0, 1]$ について成り立たないとする. このとき, G の閉多様体への C^∞ 級余次元 1 局所自由作用がある C^0 級体積を保存するならば, その作用は G_Δ のある一様格子による商空間への自然な等質作用と C^∞ -共役である.

定理の条件をみたま可解 Lie 群の例としては以下のものがある.

- \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) 上の affine 変換で線形部分が対角行列であるもの全体.
- \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) 上の affine 変換で線形部分が上三角行列であるもの全体.

証明では, まず, ある Banach 空間を係数する群の 1 次コホモロジーの消滅を示すことで, 作用がその軌道のなす葉層と横断的なある C^0 級線場を保つこと示す. この線場の方向の作用の伸び率は Δ^{-1} で表わされるため, 力学系理論でよく知られた方法によって, 線場に沿った葉層の各葉は C^∞ 級であることが示される. 線場の不変性からこの 1 次元葉層が C^∞ 級であることが確認でき, それを用いれば後は簡単に C^∞ -共役が構成できる.

なお最近, Belliart は上の定理の証明を進展させることで, 以下の定理を証明したらしい².

定理 3.3 (M.Belliart [7]). 上の定理において, 体積保存の仮定は必要ない. すなわち, 上の定理の仮定をみたま可解群のすべての C^∞ 級余次元 1 局所自由作用は, 上に挙げた等質作用と C^∞ -共役である.

4 $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の余次元 1 局所自由作用

定理 3.1 を見て誰もが考えるであろう次の問題は 20 年以上未解決のままであった.

問題 4.1. すべての $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の 3 次元閉多様体への C^∞ 級局所自由作用はある体積を保つか? すなわち, 等質作用と C^∞ -共役か?³

本節では, 最近筆者が得た $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の余次元 1 局所自由作用の分類を紹介する. その分類の帰結として, 定理 3.3 で扱われた群とは異なり, $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の場合には等質作用と共役でない作用が存在する, という上の問題の否定的解決が得られる.

以下では, $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ を $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ の部分群 $\{X^t U^y \mid t, y \in \mathbb{R}\}$ と同一視することにする.

²筆者はまだ完全には証明をチェックしていない

³定理 3.3 は $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の場合には適用できないことに注意.

4.1 知られていた結果

まず、これまでに知られていた結果を概観する. $\rho: M \rightarrow \text{Aff}_+(\mathbb{R}) \rightarrow M$ を $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の 3 次元閉多様体上の C^∞ 級局所自由作用とする. $g \in \text{Aff}_+(\mathbb{R})$ に対して, ρ_g で M 上の微分同相写像 $p \mapsto \rho(p, g)$ を表わすことを思い出そう.

定理 4.2 (Ghys [12]). M 上のある C^∞ 級閉 1-形式 ω で,

$$\log \det D\rho_{X^T}(p) = \int_{\{\rho_{X^t}(p)\}_{0 \leq t \leq T}} \omega \quad (1)$$

が, $\rho_{X^T}(p) = p$ をみたすすべての組 $(p, T) \in M \times \mathbb{R}$ について成り立つものが存在する. さらに, 次の二つが成り立つ:

- ω の *de Rham* コホモロジー類 $[\omega]$ は, ρ に対して一意に定まる.
- $[\omega] = 0$ であることと, ρ がある体積を保つことは同値である.

系 4.3. M が 3 次元有理ホモロジー球面ならば, ρ はある体積を保ち, 特に等質作用と C^∞ -共役である.

不変体積の存在が示せる場合がもうひとつ知られている.

定理 4.4 (Ghys⁴). M の基本群が可解ならば, ρ はある体積を保ち, 特に等質作用と C^∞ -共役である.

実際, flow $\{\rho_{X^t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ が Anosov flow であること (すぐ下の定理を参照) と Plante [18] による基本群が可解である多様体上の Anosov flow の分類 ($H^1(M; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ がわかる) を持ちいれば, 後は簡単な計算から $[\omega] = 0$ が導かれる.

一方で, 筆者は C^∞ -位相同値についての完全な分類を得た.

定理 4.5 (A. [2]). $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の 3 次元閉多様体上の C^∞ 級局所自由作用は, すべて等質作用と C^∞ -位相同値である.

定理の証明では 3 次元 Anosov flow の理論が重要な役割を果たす. 閉多様体 M' 上の flow $\Phi = \{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ が Anosov であるとは, $\lambda > 1$, TM' 上のノルム $\|\cdot\|$, TM' の $D\Phi$ 不変な連続な splitting $TM' = T\Phi \oplus E^s \oplus E^u$ で, 次の二つをみたすものがあることを言う:

- $T\Phi$ は flow の軌道に沿った TM' の 1 次元部分束.
- $\|D\Phi^t(v^s)\| \leq \lambda^{-t}\|v^s\|$, $\|D\Phi^t(v^u)\| \geq \lambda^t\|v^u\|$ がすべての $t > 0$, $v^s \in E^s$, $v^u \in E^u$ について成り立つ.

⁴Ghys 自身の証明は出版されていない. ここでは, Ghys のアイデアをもとに, 筆者が定理 4.5 の証明の核心部分を用いて再構成した証明 ([3]) の概略を述べている.

ρ が等質作用であれば, $\{\rho_{X^t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ が Anosov flow であることはすぐに確かめられる. 定理の証明の核心部分は, ρ が等質作用でなくても $\{\rho_{X^t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ が Anosov flow であることを示すことである. いったんそれがなされれば, 定理は Barbot-Ghys[4, 14] による C^2 級の不変葉層を許す 3 次元 Anosov flow の分類から従う. 核心部分の証明は, 射影的 Anosov flow と呼ばれる力学系の理論から得られるが, ここでは深入りしないことにする.

4.2 C^∞ -共役類の分類

定理 4.4, 4.5 と等質作用の分類から, 同一視 $\text{Aff}_+(\mathbb{R}) \cong \{X^t U^y \mid t, y \in \mathbb{R}\}$ による $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ の商空間上の等質作用と C^∞ -軌道同値な作用を C^∞ -共役で分類すれば, $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の余次元 1 局所自由作用の分類は完成する. そこで, $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ の一様格子 Γ を固定して $M_\Gamma = \Gamma \backslash \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ とおき, ρ_Γ を $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の上の同一視による自然な M_Γ 上の等質作用, \mathcal{A}_Γ を $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の M_Γ 上の C^∞ 級局所自由作用で, $\mathcal{O}(p, \rho) = \mathcal{O}(p, \rho_\Gamma)$ がすべての $p \in M_\Gamma$ について成り立つもの全体のなす集合とし, \mathcal{A}_Γ の元の C^∞ -共役による分類を考えることにする.

$\alpha_\Gamma : \mathcal{A}_\Gamma \rightarrow H^1(M_\Gamma; \mathbb{R})$ を定理 4.2 の 1-形式から定まる写像とする. 最初の定理は, α_Γ が大雑把には C^∞ -共役類からの写像と考えることができることを主張する.

定理 4.6 (A. [3]). $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}_\Gamma$ が恒等写像とイソトピックな微分同相写像によって C^∞ -共役であることと, $\alpha_\Gamma(\rho_1) = \alpha_\Gamma(\rho_2)$ であることは同値である.

証明は, Anosov 力学系についてのいくつかの知られている結果を組み合わせることで得られるので, ここでは述べない.

後は α_Γ の像を決定すれば分類は完成するが, それを述べるためにいくつかの準備をする. \cosh^{-1} を $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ の $[0, \infty)$ への制限の逆関数とする. 各 $P \in \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ (2, \mathbb{R}) に対して, その $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ への射影を考えることで, $\text{tr } P$ を定義することができる. P のノルム $\|P\|$ を

$$\|P\| = \begin{cases} 2 \cosh^{-1} \left(\frac{\text{tr } P}{2} \right) & (|\text{tr } P| > 2) \\ 0 & (|\text{tr } P| \leq 2) \end{cases}$$

で定める.

$$\Delta_\Gamma = \left\{ a \in H^1(M_\Gamma; \mathbb{R}) \mid \sup \left\{ \frac{|a(g)|}{\|g\|} \mid g \in \Gamma, \|g\| > 0 \right\} < 1 \right\}$$

と置く⁵. ここで, $a(g)$ は Γ と M_Γ の基本群の同一視を用いて定義されている.

⁵ M_Γ を双曲面 S の単位接束と見なすことができるとき, この集合は $H_1(S; \mathbb{R}) \cong H_1(M_\Gamma; \mathbb{R})$ 上の stable norm と呼ばれるノルム ([17] などを参照せよ) の双対として $H^1(M_\Gamma; \mathbb{R})$ に定まるノルムの開単位球である.

定理 4.7 (A. [3]). α_Γ の像は Δ_Γ に等しい.

Δ_Γ は $H^1(M_\Gamma; \mathbb{R})$ の凸な開部分集合をなすことが知られている. 従って, 次が成り立つ.

系 4.8. M_Γ が 3次元有理ホモロジー球面ではないとき, \mathcal{A}_Γ は, 体積を保存しない作用を含む.

α_Γ の像が Δ_Γ に含まれることは, ほとんど直接的な計算によって証明できる. 難しいのは逆で, その証明は二段階に別れる. $\alpha \in \Delta_\Gamma$ が与えられたとする. まず, E.Cawley [10] が 2次元 Anosov 微分同相写像の $C^{1+\text{Hölder}}$ -共役類のなす空間の構成に用いた方法を応用して, 等質作用に付随する Anosov flow $\{(\rho_\Gamma)_{X^t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ を適切に変形する. この変形は大雑把には $\text{flow}\{(\rho_\Gamma)_{U^y}\}_{y \in \mathbb{R}}$ の軌道による葉層 \mathcal{L} に沿っており, 変形によって得た Anosov flow は \mathcal{L} を保つ. 次に, Ghys[13] と同じ方法でこの Anosov flow の時間の適切な取り替えを行うことで, 得られた flow がある作用 $\rho \in \mathcal{A}_\Gamma$ に付随する $\text{flow}\{\rho_{X^t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ となるようにできる. 初めの変形を適切に取っておけば, この作用が $\alpha_\Gamma(\rho) = \alpha$ をみたすことが示せ, 定理の証明が完成する.

4.3 非等質的作用に付随する 1次元葉層

$\rho \in \mathcal{A}_\Gamma$ に対して, 二つの $\text{flow}\{\rho_{X^t}\}_{t \in \mathbb{R}}$, $\{\rho_{U^y}\}_{y \in \mathbb{R}}$ の軌道のなす 1次元葉層をそれぞれ \mathcal{L}_X , \mathcal{L}_U とする. 作用の構成方法をよく見ると, 葉層 \mathcal{L}_U は Ghys [13] で構成された Anosov flow の不安定葉層と同じものであることがわかり, ある意味ですでに知られているものであると言える. 一方, 次の定理が示すように, 非等質作用については葉層 \mathcal{L}_X を具体的に記述することは困難である.

定理 4.9 (A. [3]). もしも, 互いに横断的な二つの 2次元 C^2 葉層の組 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ でその交わりが \mathcal{L}_X となるものがあるならば, 作用 ρ は等質作用と C^∞ -共役.

その一方で, Anosov flow の一般論から, 同じ条件をみたす $C^{1+\text{Hölder}}$ 級 2次元葉層の組は常に存在することがわかっている.

4.4 残された問題

最後に, $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ の余次元 1 作用に関して残された問題を二つ挙げる.

問題 4.10 (解析的作用). 実解析的作用で, 等質作用と C^∞ -共役でないものはあるか?

問題 4.11 (連続な変形). 連続, もしくは滑らかな写像 (または局所的な写像) $s: \Delta_\Gamma \rightarrow \mathcal{A}_\Gamma$ で, $\alpha_\Gamma \circ s(\alpha) = \alpha$ をみたすものが取れるか?

残念ながら, 筆者の構成からはこれらの問題に答えることはできない.

References

- [1] J. L. Arraut, and N. M. Dos Santos, Differentiable conjugation of actions of R^p . *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **19** (1988), no. 1, 1–19.
- [2] M. Asaoka, Regular projectively Anosov flows on three-dimensional manifolds. preprint (arXiv:math.DS/0504208).
- [3] M. Asaoka, Non-homogeneous locally free actions of the affine group. preprint, arXiv:math.DS/0702833.
- [4] T. Barbot, Caractérisation des flots d’Anosov en dimension 3 par leurs feuilletages faibles. *Ergod. Th. Dyn. Sys.* **15** (1995), no. 2, 247–270.
- [5] M. Belliard, Actions localement libres de groupes non unimodulaires. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **7** (1998), no. 1, 35–50.
- [6] M. Belliard, Locally free actions of solvable Lie groups and cohomology. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **26** (2006), no. 1, 1–17.
- [7] M. Belliard, A differentiable classification of certain locally free actions of solvable Lie groups. preprint.
- [8] M. Belliard, and O. Birembaux, Actions localement libres de groupes résolubles. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **44** (1994), no. 5, 1519–1537.
- [9] G. Chatelet, H. Rosenberg, and D. Weil, A classification of the topological types of R^2 -actions on closed orientable 3-manifolds. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43** (1974), 261–272.
- [10] E. E. Cawley, The Teichmüller space of an Anosov diffeomorphism of T^2 . *Invent. Math.* **112** (1993), no. 2, 351–376.
- [11] É. Ghys, Sur les Actions localement libres du groupe affine. Thèse de 3ème cycle, Lille, 1979.
- [12] É. Ghys, Actions localement libres du groupe affine. *Invent. Math.* **82** (1985), no. 3, 479–526.
- [13] É. Ghys, Flots d’Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup. (4)* **20** (1987), no. 2, 251–270.
- [14] É. Ghys, Rigidité différentiable des groupes fuchsien. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **78** (1993), 163–185.
- [15] A. Katok and B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1995.

- [16] N. Kopell, Commuting diffeomorphisms. *1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)* pp. 165–184, *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*
- [17] D. Massart, Stable norms of surfaces: local structure of the unit ball of rational directions. *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 6, 996–1010.
- [18] J. F. Plante, Anosov flows, transversely affine foliations, and a conjecture of Verjovsky. *J. London Math. Soc. (2)* **23** (1981), no. 2, 359–362.
- [19] C. L. Siegel, Note on the differential equations on the torus. *Ann. of Math. (2)* **46**, (1945). 423–428.
- [20] N. Tsuchiya and A. Yamakawa, Rigidity of codimension one locally free actions of solvable Lie groups. *Current trends in transformation groups*, 181–200, *K-Monogr. Math.*, 7, *Kluwer Acad. Publ., Dordrecht*, 2002.
- [21] A. Yamakawa and N. Tsuchiya, Codimension one locally free actions of solvable Lie groups. *Tohoku Math. J. (2)* **53** (2001), no. 2, 241–263.

BAUER-FURUTA INVARIANTS AND A NON-SMOOTHABLE INVOLUTION ON $K3\#K3$

東京大学数理科学研究科 COE 研究員 中村 信裕

1. 序

筆者は X. Liu 氏との共同研究 [14, 15] において、 $K3$ を始めとする楕円曲面上に、特定の微分構造に対して滑らかになれない局所線型な巡回群の作用を構成した。例えば次のことを示した。

定理 1.1 ([14, 15]). $K3$ 曲面上の局所線型な巡回群(位数は 3, 5, 7) の作用で、標準的なものを含む無限個の微分構造に対して滑らかになれないものが存在する。

このことの証明は、二つのステップからなっていた。

- (1) 滑らかな作用が満たすべき拘束条件を与える。
- (2) 局所線型作用であって、もし滑らかなら上記拘束条件を破ることになるものを具体的に構成する。

(2) のために、Edmonds-Ewing による局所線型作用の実現定理 [6] が用いられた。

(1) にはゲージ理論が用いられた。実際、F. Fang [7] によって得られ、筆者 [16] によって拡張された \mathbb{Z}_p 作用下における Seiberg-Witten 不変量 (以下、SW 不変量) の mod p 消滅定理と、楕円曲面の SW 不変量の具体的な値が用いられた。より詳しく言うなら、mod p 消滅定理は「ある条件が満たされるなら、SW 不変量が p の倍数である」という形をとっている。したがって、もし SW 不変量が p で割り切れなければ滑らかな作用に対する制約が得られることになる。

しかしながら、mod p 消滅定理によるこの方法は、SW 不変量が 0 である場合には使うことができない。

一方で、SW 不変量の安定コホモトピー版が Bauer-Furuta [4] によって定義されており、これは通常の SW 不変量の真の精密化になっていることが知られている。例えば、 $K3$ の幾つかの連結和に対して、通常の SW 不変量は 0 であるが Bauer-Furuta の不変量は 0 でないことが知られている [2, 10]。

では、mod p 消滅定理の Bauer-Furuta 不変量版は言えるだろうか？言えるとしたら、それを用いて通常の SW 不変量が 0 であるような多様体の上に滑らかになれない局所線型作用は構成できるであろうか？

本講演では、これらがともに Yes であることを説明したい。即ち、ある場合には involution の下での Bauer-Furuta 不変量の消滅定理が成立すること、そして、その応用として、ホモトピー $K3\#K3$ 上に滑らかになれない局所線型 \mathbb{Z}_2 作用が存在することをお話したいと思う。(文献は [17] である。)

まず応用について述べよう。

定理 1.2. $X = K3\#K3$ 上の局所線型 \mathbb{Z}_2 作用で、 X の任意の微分構造に対して滑らかになれないものが存在する。

定理 1.2 の証明は上記の楕円曲面の場合と平行である。即ち、滑らかな作用に対する拘束条件を得るのに、後述の Bauer-Furuta 不変量の消滅定理とともに古田幹雄氏、亀谷幸生氏、南範彦氏によるホモトピー $K3\#K3$ に対する非消滅定理 [10] を用いる。

また、局所線型作用の構成には前述の Edmonds-Ewing の実現定理を用いるが、位数 2 の場合には定理 1.1 におけるような奇素数位数の場合より精密な考察が必要となった。すると、今度は、この考察の精密化の副産物として $K3$ の involution に対しても次が得られた。

定理 1.3. $X = K3$ 曲面上の局所線型 \mathbb{Z}_2 作用で、次の性質を満たすものが存在する。

- (1) 固定点が孤立している。
- (2) $H^+(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ へ自明に作用する。
- (3) X の任意の微分構造に対して滑らかになれない。

尚、ホモトピー $K3$ 上の滑らかな involution は、固定点が孤立しているなら $H^+(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ へ自明に作用することが J. Bryan [5] により示されている。

さて、involution の下での Bauer-Furuta 不変量の消滅定理を述べよう。 X を向き付けられた滑らかな閉 4 次元多様体とし、 \mathbb{Z}_2 が向きを保って作用しているとする。 \mathbb{Z}_2 作用で不変な Riemann 計量を一つ固定すると接枠束に \mathbb{Z}_2 作用が持ち上がるが、この接枠束への作用が、さらにある Spin^c 構造 c に持ち上がっていると仮定する。 Spin^c 構造 c の determinant line bundle に \mathbb{Z}_2 作用で不変な接続 A_0 を固定すると、対応する Dirac 作用素は \mathbb{Z}_2 同変であり、その同変指数 $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2} D_{A_0}$ は \mathbb{Z}_2 の表現環 $R(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2 - 1)$ に値を持ち、 $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2} D_{A_0} = k_+ C_+ + k_- C_-$ と書ける。但し、 C_+ は \mathbb{Z}_2 の自明な複素 1 次元表現を、 C_- は ± 1 の掛け算による複素 1 次元表現を表す。

以下、任意の群 G と任意の G 空間 V に対して、 V^G を G 作用の固定点集合とする。また $b_+^G = \dim H^+(X; \mathbb{R})^G$ とする。

定理 1.4. 次の条件が満たされると仮定する。

- (1) $b_1 = 0, b_+ \geq 2, b_+^{\mathbb{Z}_2} \geq 1$.
- (2) $b_+ - b_+^{\mathbb{Z}_2}$ は奇数。
- (3) $d(c) = 2(k_+ + k_-) - (1 + b_+) = 1$.
- (4) $2k_{\pm} < 1 + b_+^{\mathbb{Z}_2}$.

このとき c の Bauer-Furuta 不変量は 0 である。

Remark 1.5. $d(c)$ は Spin^c 構造 c に対する Seiberg-Witten モジュライの仮想次元である。これは、指数定理により、 c の determinant line bundle L と X の位相的データで次のように書ける。

$$d(c) = \frac{1}{4}(c_1(L)^2 - \text{Sign}(X)) - (1 + b_+).$$

Remark 1.6. $d(c) = 1$ で $k_+ + k_-$ が偶数のとき Bauer-Furuta 不変量は \mathbb{Z}_2 に値をもち、 $d(c) = 1$ で $k_+ + k_-$ が奇数のとき Bauer-Furuta 不変量は常に 0 である。また、 $d(c) = 1$ のとき、通常の SW 不変量は定義により 0 であることに注意しよう。

2. $K3\#K3$ 上の non-smoothable な作用の構成

この節では、 $K3\#K3$ 上の滑らかになれない局所線型 \mathbb{Z}_2 作用の構成 (定理 1.2) を述べる。以下、断わりの無い限り、多様体は全て向き付けられており、群作用は向きを保つものと仮定する。

まず局所線型作用の定義を思い出しておこう。

定義 2.1. 位相多様体 X への有限群 G の位相的な作用が局所線型であるとは、各点 $x \in X$ に対し、 x の固定部分群を G_x としたときに、 x の G_x 不変な近傍 U_x が取れ、 U_x は G_x のある実線型表現と同変に同相になっていることを言う。

Remark 2.2. 微分多様体への滑らかな作用は局所線型である。なぜならば、滑らかな作用は自然に接束へと持ち上がるので、各軌道に対して同変な近傍が取れるという G チューブ定理から局所線型であることがわかる。

2(i). $K3\#K3$ 上の滑らかな \mathbb{Z}_2 作用に対する制約. Dirac 作用素の同変指数は同変指数定理によって固定点の情報で書くことができる。したがって、定理 1.4 を用いると、Bauer-Furuta 不変量と固定点に関する情報との関係をつけることができる。

X を \mathbb{Z}_2 が滑らかに作用する単連結な滑らかな 4 次元多様体とする。Atiyah-Bott[1] によると、このときさらに固定点が孤立しているなら、作用はスピン構造に持ち上がることが知られている。したがって、スピン構造から決まる Spin^c 構造 c_0 にも \mathbb{Z}_2 作用が持ち上がる。すると、 G スピン定理 [1] により、次の公式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{ind}_g D &= k_+ - k_- = \frac{1}{4} \sum_{p \in X^{\mathbb{Z}_2}} \varepsilon(p), \\ \text{ind } D &= k_+ + k_- = -\frac{1}{8} \text{Sign}(X). \end{aligned}$$

ここで、 $\varepsilon: X^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow \{\pm 1\}$ は、 \mathbb{Z}_2 作用の c_0 への持ち上げの様子から決まる各固定点への符号の割り振りである。(このように、同変指数が奇数位数のときのように固定点データのみからは決まらず、作用のよりグローバルな様子を見なければいけないところが、偶数位数のときの少し厄介な点である。) これを解くと、次が得られる:

$$2k_{\pm} = -\frac{1}{8} \text{Sign}(X) \pm \frac{1}{4} \sum_{p \in X^{\mathbb{Z}_2}} \varepsilon(p).$$

ここで、 k_{\pm} は整数であり、 $\frac{1}{8} \text{Sign}(X)$ は偶数なので、 $\sum \varepsilon(p)$ は 8 の倍数になることに注意しよう。

さて、もし c_0 の Bauer-Furuta 不変量が 0 でなければ定理 1.4 から滑らかな作用に対して ε に対する制約が得られる。一方、Furuta-Kametani-Minami[10] は $K3\#K3$ と同じ有理係数のコホモロジー環を持つスピン多様体では、全てのスピン構造に対して Bauer-Furuta 不変量が 0 でないことを示している。したがって、次を示すことができる。

命題 2.3. X を $K3\#K3$ と同じコホモロジー環を持つ単連結で滑らかなスピン多様体とし、 \mathbb{Z}_2 が滑らかに作用しているとする。もし $b_+^{\mathbb{Z}_2} = 5$ で、固定点が孤立しているならば、

$$(2.4) \quad \left| \sum_p \varepsilon(p) \right| \geq 8.$$

Proof. $d(c_0) = 1$ は容易にわかる。もし $\sum \varepsilon(p) = 0$ なら $2k_{\pm} < 1 + b_+^{\mathbb{Z}_2}$ であるので、定理 1.4 より Bauer-Furuta 不変量が 0 であることが結論され矛盾である。 \square

2(ii). $\varepsilon(p)$ についての **Atiyah-Bott の判定法**. 先に進む前に、Atiyah-Bott[1] による $\varepsilon(p)$ の計算法を復習しよう。 $\iota: X \rightarrow X$ を、 \mathbb{Z}_2 作用を生成する involution としよう。 ι 不変な計量を固定すると ι は自然に接束 F に持ち上がる、 $\iota_*: F \rightarrow F$. 一方、スピンの構造は F の二重被覆 $\varphi: \hat{F} \rightarrow F$ として与えられるのであった。ここで \hat{F} はある $\text{Spin}^c(4)$ 束である。

さて、 P, Q を異なる固定点とし、 $\varepsilon(P)$ と $\varepsilon(Q)$ を比較したい。このために、接束 F の中で、 P 上のファイバー F_P の点 y と、 Q 上のファイバー F_Q の点 y' とを結ぶ道 s をとる。するとこのとき、 $-\iota_*s$ は s と同じ端点を持つ。ここで “ $-$ ” はファイバーごとに -1 倍することを意味する。 s と $-\iota_*s$ を結べば F 内に円周 C ができる。このとき Atiyah-Bott の判定法は次である。

命題 2.5 ([1]). $\varphi^{-1}(C)$ が二つの連結成分からなることと $\varepsilon(P) = \varepsilon(Q)$ は同値である。いいかえると、 $\varphi^{-1}(C)$ が連結であることと $\varepsilon(P) = -\varepsilon(Q)$ は同値である。

2(iii). **Edmonds-Ewing による局所線型作用の構成**. 前述のように局所線型 \mathbb{Z}_2 作用の構成に Edmonds-Ewing による実現定理 [6] を用いる。我々の目的のためにこの実現定理の非常に特別な場合を述べる。

定理 2.6 ([6]). $\Psi: V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$ を、 *even* な \mathbb{Z}_2 不変ユニモジュラー対称二次形式で、以下を満たすと仮定する。

- (1) $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$ 加群として V は、ランクが n の自明な $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$ 加群 T と自由な $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$ 加群 F の直和 $T \oplus F$ に同型である。
- (2) 任意の $v \in V$ に対して、 $\Psi(v, gv)$ は偶数である。ここで、 g は \mathbb{Z}_2 の生成元を表す。
- (3) G 符号定理が成り立つ。すなわち $\text{Sign}(g, (V, \Psi)) = 0$.

このとき Ψ を交点形式として持つような \mathbb{Z}_2 作用付き単連結 4 次元閉多様体 X が存在して、固定点の数は $n + 2$ 個である。

Remark 2.7. 定理 2.6 において Ψ は *even* であることを仮定しているので、Freedman の定理により X の homeotype は一意である。

我々の目的のためには、Edmonds-Ewing の作用の構成法も思い出す必要がある。彼らの構成をひとことで言うなら「同変なハンドルによる構成」である。すなわち、作用付きの 0 ハンドルをまず用意し、2 ハンドルを与えられたユニモジュラー形式を実現するように同変に貼っていき、最後にある作用付きの可縮な多様体で蓋をするというものである。少し詳しく見て行こう。

\mathbb{C}^2 に \mathbb{Z}_2 を ± 1 の掛け算で作用させ、 B_0 をその \mathbb{C}^2 内の単位球体としよう。そして、 K を $S_0 = \partial B_0$ 中の \mathbb{Z}_2 不変な結び目とする。すると、 K の framing はある同変な埋め込み $S^1 \times D^2 \rightarrow S_0$ で表される。まず 0-framing は、 $f_0: S^1 \times D^2 \rightarrow S_0$ であって、 $f_0(S^1 \times \{0\}) = K$, であり $f_0(S^1 \times \{1\})$ は K との linking number が 0 であり、 $S^1 \times D^2 \subset \mathbb{C}^2$ への \mathbb{Z}_2 作用は ± 1 の掛け算で与えられるものである。一般の r -framing は $f_r: S^1 \times D^2 \rightarrow S_0$ は $f_r(z, w) = f_0(z, z^r w)$ で与えられるが、このときの $S^1 \times D^2$ への \mathbb{Z}_2 作用は $g(z, w) = (-z, (-1)^{r-1} w)$ である。

結び目 K と framing r が与えられたときに、 $D^2 \times D^2$ への \mathbb{Z}_2 作用を適当に決めてやることで、 \mathbb{Z}_2 作用付き多様体 $W = B_0 \cup_{f_r} D^2 \times D^2$ を作るができる。

さて、 H_1, \dots, H_n を $D^2 \times D^2$ のコピーで \mathbb{Z}_2 が ± 1 の掛け算で作用するものとする。もし framing r が偶数なら、各 H_i を f_r を用いて同変に B_0 に貼ることができる。

Edmonds-Ewing の構成は三つのステップからなる。

ステップ 1. 与えられたユニモジュラー形式 Ψ を S_0 中の framed link L で表す。定理 2.6 の仮定のもとで、 Ψ の \mathbb{Z}_2 不変部分 T への制限 $\Psi|_T$ は基底の取り換えによって対角成分が偶数でそれ以外が奇数である行列 (a_{ij}) で表されることが示されている。また、 S_0 内の二つの \mathbb{Z}_2 不変な結び目 K, K' の linking number は常に奇数であることも示されている。すると任意の n 成分のリンクから出発して、同変に成分間の crossing を変えてやることで $\Psi|_T$ を framed link L_T で表すことができる。そこまでくれば、 Ψ の他の部分をリンクで表すのは容易である。

ステップ 2. ハンドル H_1, \dots, H_n と自由な 2 ハンドルをリンク L に沿って同変に B_0 に貼っていくことで滑らかな \mathbb{Z}_2 作用付き 4 次元多様体 X_0 が構成される:

$$X_0 = B_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_n \cup (\text{自由なハンドルたち}).$$

ステップ 3. X_0 の境界は \mathbb{Z}_2 が自由に作用する \mathbb{Z} ホモロジー 3 球面 Σ である。定理 2.6 の仮定のもと、局所線型 \mathbb{Z}_2 作用付きの可縮な 4 次元多様体 Z で、固定点が丁度一点で作用も込みで Σ を境界に持つものが存在することが示されている。すると $X = X_0 \cup Z$ が求めるものである。

上のような構成で得られた作用は最後の固定点の周りを除いて滑らかである、即ち、 X_0 の上では滑らかである。 X_0 上で符号の分布 ε を決定しよう。 B_0 そして各 H_1, \dots, H_n は、それぞれ丁度一つずつ固定点を持っていた。そこで、各 H_i の固定点と B_0 の固定点で ε の値を比較する。各 i について $W = B_0 \cup H_i$ 上で考えればよい。 W はある結び目 K と framing に対して $W = B_0 \cup_{fr} D^2 \times D^2$ として与えられるものであった。 P を B_0 の固定点とし、 Q を $D^2 \times D^2$ の固定点とする。

このとき次を示すことができる。

命題 2.8. K が自明な結び目だったとする。もし $r \equiv 2 \pmod{4}$ なら $\varepsilon(P) = \varepsilon(Q)$ 。もし $r \equiv 0 \pmod{4}$ なら $\varepsilon(P) = -\varepsilon(Q)$ 。

したがって、もし $\Psi|_T$ を表す framed link L_T の各成分が自明な結び目ならば、 X_0 上の符号の分布 ε は貼り合わせの行列 (a_{ij}) の対角成分の mod 4 で決まる。

2(iv). $K3\#K3$ 上の滑らかになれない局所線型 \mathbb{Z}_2 作用. $X = K3\#K3$ 上に滑らかになれない局所線型 \mathbb{Z}_2 作用を構成しよう。まず X の交点形式は、 H を hyperbolic form としたときに $4E_8 \oplus 6H$ と同型であることに注意する。定理 2.6 により、 $4E_8 \oplus 6H$ に適当な \mathbb{Z}_2 作用を構成すれば X 上の局所線型作用が得られる。

$\Psi = 4E_8 \oplus 6H \curvearrowright \mathbb{Z}_2$ を以下のように作用させる。まず hyperbolic な部分 $6H$ のうち、ある $2H$ に二つの H の入れ換えで作用させる。同様に $2E_8 \oplus 2E_8$ も二つの $2E_8$ の入れ換えとして作用させる。残りの $4H$ へは自明に作用させる。この自明な $4H$ を T と書こう。

ここで次の行列を考える:

$$(2.9) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

すると A で表される対称形式は、even、不定値、ユニモジュラーであることがわかるので、 $4H$ と同型であることがわかる。したがって、 $\Psi|_T$ は行列 A で表されると見做して良い。さらに、 A は以下のように、各成分が自明な結び目であるようなリンクで表すことができる。 $p: S^3 \rightarrow S^2$ を Hopf fibration とする。 S^2 上に相異なる 8 点を取り、 p による逆像を考えるとそれが求めるリンクである。

すると §2(iii) の同変なハンドルによる構成により、 X_0 上で滑らかで、 X 全体には局所線型に延びる \mathbb{Z}_2 作用が構成される。

もし X_0 上の滑らかな作用が X 全体に滑らかに延びたとすると、命題 2.3 によって、 $|\sum \varepsilon(p)| \geq 8$ である。しかし、命題 2.8 によると、 A から作られた作用が $|\sum \varepsilon(p)| \geq 8$ を満たすのは不可能である。それゆえ X_0 上の作用は X 全体に滑らかに延びない。

ここで、我々はさらに強く、今構成した作用が **non-smoothable** であることを主張したい。

その前に non-smoothable であるとはどういう意味であるかをはっきりさせておこう。 X を向き付けられた位相多様体とし、 G を有限群としよう。もし X に微分構造が入り、ある微分構造 σ を固定したなら、その微分多様体を X_σ と書くことにする。 X への G 作用に関する次の二つの集合を考えよう。

$$\begin{aligned} LL(G, X) &= \{X \text{ 上の局所線型 } G \text{ 作用の homeo による共役類全体} \} \\ C^\infty(G, X_\sigma) &= \{X_\sigma \text{ 上の滑らかな } G \text{ 作用の diffeo による共役類全体} \}. \end{aligned}$$

すると、微分構造を忘れる写像 $\Phi_\sigma: C^\infty(G, X_\sigma) \rightarrow LL(G, X)$ がある。

定義 2.10. 局所線型作用が微分構造 σ に関して non-smoothable であるとは、そのクラスが Φ_σ の像に含まれないことである。

さて、 X_σ が滑らかな 4 次元多様体で $G = \mathbb{Z}_2$ のときに話しを戻そう。スピンの構造は接束を用いて構成されるため、その定義に微分構造を implicit に使っている。したがってスピン構造への作用の持ち上げに関する符号の分布 ε も微分構造によるかもしれない。

しかしながら、この符号の分布 ε の定義は位相多様体上の局所線型な作用に拡張することができ、微分構造によらないことがわかる。詳細は省略するが、概ね以下のようなものである。

n 次元位相多様体 M に対して、接マイクロバンドル τM が定義される。するとこの接マイクロバンドルを用いて、位相的なスピン構造を考えることが可能である。より詳しく言うなら、Kister-Mazur の定理 [13] によって、 τM は、 \mathbb{R}^n の原点と向きを保つ同相写像全体のなす位相群 $\text{STop}(n)$ を構造群とする \mathbb{R}^n 束 τM と同一視される。一方、[12] や [8] にある TOP/DIFF のホモトピー群に関する深い結果を用いると、 $n \geq 2$ のときに inclusion $\text{SO}(n) \rightarrow \text{STop}(n)$ が π_0, π_1, π_2 の同型を誘導することがわかる。あとは接束からスピン構造を定義するやり方を真似れば良い。

符号の分布は、Atiyah-Bott の判定法 (命題 2.5) のやり方で定義してしまえば良い。すなわち、接マイクロバンドルの束 F を考え、二つの固定点 P, Q 上の F のファイバー上の点を結ぶパスをとり、それを作用 $-l_*$ で写したパスと結んだ円周を考え、位相的なスピン構造への引き戻しが連結かどうかで符号を判定すればよい。するとこれは局所線型作用に対して定義され、微分構造によらず、滑らかなときには以前の定義と一致することがわかる。

結論として、われわれの構成した作用が non-smoothable であることがわかり、定理 1.2 が示される。また、 $K3$ の場合 (定理 1.3) の証明も、同様のやりかたでなされる。

3. Bauer-Furuta 不変量の消滅定理の証明

この節では Bauer-Furuta 不変量の消滅定理 (定理 1.4) の証明を説明する。証明は [3] における Bauer の議論に触発されたものである。スピンの構造上のモノポール写像は $\text{Pin}(2)$ 同変になるが、これを調べるのに Bauer は Bredon コホモロジー上の同変な障害理論を用いている。実際、Bauer-Furuta 不変量は、ある同変安定コホモトピー群の元として定義されるが、Bauer は $\text{Pin}(2)$ 同変なコホモトピー群から S^1 同変なコホモトピー群への \mathbb{Z}_2 作用を忘れる写像が 2 倍写像であることを示している。このことから、ある場合には SW 不変量が 2 の倍数であることがしるがう。

もし Spin^c 構造に \mathbb{Z}_2 が作用している場合には、モノポール写像には $\text{Pin}(2)$ の代わりに $\mathbb{Z}_2 \times S^1$ が作用する。この状況で Bredon コホモロジーを具体的に計算し、Bauer の議論を踏襲することで我々の消滅定理は示される。

3(i). **Bauer-Furuta 不変量.** ここでは Bauer-Furuta 不変量について説明する。群作用のある状況では、自然にその同変版が定義され、もともとの不変量はその特別な場合になっているので、はじめから同変版について述べることにする。

以下、 \mathbb{Z}_2 作用付き 4 次元多様体 X は定理 1.4 の仮定を満たしているとする。 $S^+(S^-)$ を Spin^c 構造 c の正 (負) スピノル束とし、 L を determinant line bundle とする。

\mathcal{C}, \mathcal{U} を、つぎのような空間とする。

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \Omega^1(X) \oplus \Gamma(S^+), \\ \mathcal{U} &= \Gamma(S^-) \oplus i\Omega^+(X) \oplus \Omega^0(X)/\mathbb{R}.\end{aligned}$$

ここで、 \mathbb{R} は定値写像のなす空間を表す。(正確にはこれらの空間の適当なソボレフ・ノルムでの完備化をとらなければならないが、解析の詳細は省略する。)

序にあるように L に \mathbb{Z}_2 不変な接続 A_0 を一つ固定する。**モノポール写像** $\mu: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}$ を次で定義する:

$$\mu(a, \phi) = (D_{A_0+ia}\phi, F_{A_0+ia}^+ - q(\phi), d^*a).$$

ここで、 $q(\phi)$ は、 S^+ の自己準同型 $\phi \otimes \phi^*$ の trace free part をクリフォード積を通じて複素 2 形式と同一視したものである。 Spin^c 構造 c に \mathbb{Z}_2 が作用している我々の状況では μ は $\mathbb{Z}_2 \times S^1$ 同変となる。

モノポール写像 μ に古田幹雄氏 [9] によって導入された有限次元近似の方法を用いると、十分大きな \mathcal{C}, \mathcal{U} の部分空間 V, W に対して、これらの一点コンパクト化の間の写像 $f: S^V \rightarrow S^W$ が定義される。(正確には V と f は W を取ることに応じて定まるものである。) すると f は suspension に関して良い性質をもっており、これを用いて**同変 Bauer-Furuta 不変量** $\text{FB}^{\mathbb{Z}_2}(c)$ が次の同変安定コホモトピー群の要素として定義される [4]:

$$\text{FB}^{\mathbb{Z}_2}(c) = [f] \in \{\text{ind}_{\mathbb{Z}_2} D, H^+\}^{\mathbb{Z}_2 \times S^1} = \text{colim}_{U \subset \mathcal{U}} [S^U \wedge S^{V-W}, S^U \wedge S^0]^{\mathbb{Z}_2 \times S^1}.$$

ここで S^{V-W} は S^V の W による desuspension を表すが、それは S^W から S^V への写像のなす空間とみなすことができる。

\mathbb{Z}_2 作用が無い状況で考えると、もともとの Bauer-Furuta 不変量 $\text{FB}(c)$ が $\{\text{ind} D, H^+\}^{S^1}$ の元として定義される。同変な不変量との関係は、 $\phi: \{\text{ind}_{\mathbb{Z}_2} D, H^+\}^{\mathbb{Z}_2 \times S^1} \rightarrow \{\text{ind} D, H^+\}^{S^1}$ を \mathbb{Z}_2 作用を忘れる写像としたときに、 $\text{FB}(c) = \phi(\text{FB}^{\mathbb{Z}_2}(c))$ である。

一般にこのようなコホモトピー群の計算は容易でないが、 S^1 のときの幾つかの場合については [4] で計算されている。 $d(c) = 1$ のときには、

$$(3.1) \quad \{\text{ind } D, H^+\}^{S^1} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{ind } D = k_+ + k_- \text{ が偶数,} \\ \{0\}, & \text{ind } D = k_+ + k_- \text{ が奇数.} \end{cases}$$

3(ii). **障害類としての Bauer-Furuta 不変量.** さらに $\text{ind } D > 0$ のときには $\{S^V, S^W\}^{S^1} \cong \{S^V/S^1, S^W\}$ が示されている。すると Freudenthal の懸垂定理によって、十分大きな V, W に対して $\{S^V/S^1, S^W\}$ は通常のコホモトピー群 $[S^V/S^1, S^W]$ で実現されることがわかる。すると、 $[S^V/S^1, S^W]$ は通常障害理論で調べることができる。

一方、 S^V/S^1 は CP^N の何回かの懸垂と同じホモトピー型をしていることがすぐにわかるので、次が言える。

命題 3.2. $d(c) = 1$ とし、 $n = \dim S^V/S^1$ と置く。(このとき $\dim S^W = n - 1$ である。) すると、 $r \neq n$ のとき $H^r(S^V/S^1, *; \pi_r(S^W)) = 0$ であり、また $H^n(S^V/S^1, *; \pi_n(S^W)) \cong \mathbb{Z}/2$ である。

したがって、標準的な障害理論を用いれば次がわかる。

定理 3.3 ([11], Chapter VI 参照). $H^n(S^V/S^1, *; \pi_n(S^W))$ の部分群 J が存在して、

$$[S^V/S^1, S^W] \cong H^n(S^V/S^1, *; \pi_n(S^W))/J.$$

同型は $f \in [S^V/S^1, S^W]$ に差の障害類 $d(f, \underline{0})$ を対応させることで得られる。ここで $\underline{0}$ は S^V 全体を基点につぶす写像である。

このようにして Bauer-Furuta 不変量を障害類の言葉で書くことができる。すなわち $f: S^V \rightarrow S^W$ がモノポール写像の有限次元近似のときに $\text{FB}(c) = d(f, \underline{0})$ である。

3(iii). **同変障害理論と同変 Bauer-Furuta 不変量.** 直前の小節では \mathbb{Z}_2 作用を考えない場合の議論をしたが、 \mathbb{Z}_2 作用があるときも、ある場合には、同変な障害理論を用いることによって、同変 Bauer-Furuta 不変量を Bredon コホモロジーの要素として定まる同変障害類と見做すことができる。

Bredon コホモロジーは、 G -CW 複体に対して定義される同変コホモロジー理論の一種である。以下、Bredon コホモロジーと同変障害理論について粗く説明するが、詳細については [17] とその中にある文献を見られたい。

まず G -CW 複体を思い出す。とりあえずここでは G をコンパクト Lie 群とする。

定義 3.4. G -CW complex K は、以下を満たす G 空間 K^n たちの和である：

- K^0 は軌道 G/H たちの disjoint union である。
- K^n は K^{n-1} に n 胞体 $\sigma \cong G/H_\sigma \times D^n$ を貼り合わせの G 写像 $a_\sigma: G/H_\sigma \times S^{n-1} \rightarrow K^{n-1}$ で貼ってえられる。
- K の位相は (K^n) についての colimit topology である。

さらにいくつかのものを用意する。

定義 3.5. G の canonical orbit のカテゴリー \mathcal{O}_G は、対象が G/H (但し H は G の閉部分群)、射が G 写像 $G/H \rightarrow G/I$ の G ホモトピー類であるカテゴリーである。

Bredon コホモロジーの係数にあたるものは次で与えられる。Abel をアーベル群のなすカテゴリーとする。

定義 3.6. 反変関手 $\mathcal{O}_G \rightarrow \text{Abel}$ を (G) 係数系と呼ぶ。

Bredon コホモロジーの定義を粗く述べる。 K を G -CW 複体とし、 $M: \mathcal{O}_G \rightarrow \text{Abel}$ を係数系とする。このときコチェイングループ $C_G^n(K, M)$ は各 n 胞体 σ に対してアーベル群 $M(G/H_\sigma)$ の元を対応させる関数全体である。(一般に胞体ごとに行き先の群が異なることに注意。)

そして、コバウンダリー写像は粗く言うと、大体次で与えられるようなものである。 $(n+1)$ 胞体 τ と n コチェイン $\varphi \in C_G^n(K, M)$ に対し、

$$(\delta\varphi)(\tau) = \sum_{\sigma: n \text{ 胞体}} [\tau: \sigma] M(G/H_\tau \rightarrow G/H_\sigma)\varphi(\sigma) \in M(G/H_\tau).$$

ここで $[\tau: \sigma]$ は、しかるべく定義された結合係数である。

さて、同変な障害理論のために次のような係数系を考える。

定義 3.7. 整数 $n \geq 1$ を固定する。 Y を G 空間であって、 G に各閉部分群 H に対して Y^H は空でない、弧状連結で n 単純な空間だとする。このとき係数系 $\pi_n(Y)$ を、 $\pi_n(Y)(G/H) = \pi_n(Y^H)$ で定義する。

すると、 G 写像 $f: K^n \rightarrow Y$ が与えられたときに、それがいつ同変に $(n+1)$ -skelton に延びるかや、二つの G 写像がいつ G ホモトピックになるか等を、 $\pi_n(Y)$ を係数とする Bredon コホモロジーの言葉で書くことができる。

われわれに必要な場合をまとめると次のようになる。

定理 3.8. $n = \dim S^V/S^1$ と置く。もし、 $r \neq n$ のとき $H_{\mathbb{Z}_2 \times S^1}^r(S^V, *; \pi_r(S^W)) = 0$ ならば、 $H_{\mathbb{Z}_2 \times S^1}^n(S^V, *; \pi_n(S^W))$ の部分群 J' が存在して、

$$\{S^V, S^W\}^{\mathbb{Z}_2 \times S^1} \cong H_{\mathbb{Z}_2 \times S^1}^n(S^V, *; \pi_n(S^W))/J'.$$

3(iv). **Bauer-Furuta 不変量の消滅定理の証明.** 定理 3.8 により、もしトップ以外の階数の Bredon コホモロジーが消えていれば、同変 Bauer-Furuta 不変量が同変な障害理論の言葉で書ける。実は、定理 1.4 の仮定の下ではそれが成立している。

まず次が言える。

補題 3.9. もし $2k_\pm < 1 + b_+^{\mathbb{Z}_2}$ なら、 $k \leq n-2$ のとき $C_{\mathbb{Z}_2 \times S^1}^k(S^V, *; \pi_k(S^W)) = 0$ 。

これは、各胞体 σ ごとに、次元の関係から $\pi_k(S^W)(G/H_\sigma) = \pi_k((S^W)^{H_\sigma}) = 0$ が言えることで示される。

次が一つのキーとなる命題である。

補題 3.10. もし $b_+ - b_+^{\mathbb{Z}_2}$ が奇数なら、 $H_{\mathbb{Z}_2 \times S^1}^{n-1}(S^V, *; \pi_{n-1}(S^W)) = 0$ 。

Remark 3.11. もし $b_+ - b_+^{\mathbb{Z}_2}$ が偶数なら、 $H_{\mathbb{Z}_2 \times S^1}^{n-1}(S^V, *; \pi_{n-1}(S^W)) \cong \mathbb{Z}_2$ 。

補題 3.10 は、 S^V の群作用から定まる G -CW 複体の構造をきちんと見ることでわかる。

以上のことから、定理 1.4 の仮定のもとで、同変 Bauer-Furuta 不変量 $\text{FB}^{\mathbb{Z}_2}(c)$ は最高次の Bredon コホモロジー $H_{\mathbb{Z}_2 \times S^1}^n(S^V, *; \pi_n(S^W))$ の要素で書くことができる。

次に、トップの階数において常コホモロジーと Bredon コホモロジーの比較をする。実は、 \mathbb{Z}_2 作用を忘れる自然な写像 $\bar{\phi}: H_{\mathbb{Z}_2 \times S^1}^n(S^V, *; \underline{\pi}_n(S^W)) \rightarrow H^n(S^V/S^1, *; \pi_n(S^W)) \cong \mathbb{Z}/2$ があり、これが 2 倍写像であることがわかる。これは、都合の良い十分大きな V, W をとると、 S^V の高い次数の胞体が自由な G 胞体である、すなわち $G/\{e\} \times D^k$ の形をしており \mathbb{Z}_2 が自由に作用することから得られる。したがって $\bar{\phi}$ は 0 写像である。

ここで次の可換図式を考えよう:

$$\begin{array}{ccc} H^n(S^V/S^1, *; \pi_n(S^W)) & \longrightarrow & H^n(S^V/S^1, *; \pi_n(S^W))/J \cong \{S^V, S^W\}^{S^1} \\ \bar{\phi} \uparrow & & \uparrow \phi \\ H_{\mathbb{Z}_2 \times S^1}^n(S^V, *; \underline{\pi}_n(S^W)) & \longrightarrow & H_{\mathbb{Z}_2 \times S^1}^n(S^V, *; \underline{\pi}_n(S^W))/J \cong \{S^V, S^W\}^{\mathbb{Z}_2 \times S^1}. \end{array}$$

さて、 $\text{FB}(c) = \phi(\text{FB}^{\mathbb{Z}_2}(c))$ であり、 $\bar{\phi}$ は 0 写像であった。したがって、 $\text{FB}(c) = 0$ が得られる。かくして定理 1.4 は示された。

3(v). **いくつかの注意.** 最後にいくつか注意を述べておきたい。

Remark 3.12. $d(c) = 0$ で $b_1 = 0$ の場合に限れば、SW 不変量の mod p 消滅定理 [7, 16] をこの節の方法で示すことも可能である。

Remark 3.13. $d(c) = 1$ とし、involution の代わりに奇素數位数の \mathbb{Z}_p 作用が与えられたとしよう。このとき、この節の議論のある部分はうまく働くがある部分はそうでない。例えば、しかるべき条件の下で低い次元の Bredon コホモロジー群が 0 になることは示せる。しかし、たとえ $(n-1)$ 次までのコホモロジーが消えていても、忘却写像は 0 写像にはならないので、 \mathbb{Z}_p 作用下でこのような消滅定理が言えることは期待できない。

Remark 3.14. $d(c) \geq 2$ のときにこのような消滅定理を示すのも簡単ではないかもしれない。なぜなら、常コホモロジーにおいても $(n-2)$ 次が既に消えていないからである。

References

- [1] M. F. Atiyah and R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II Applications*, Ann. Math. **88** (1968), 451–491.
- [2] S. Bauer, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. II*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 21–40.
- [3] S. Bauer, *Almost complex 4-manifolds with vanishing first Chern class*, preprint, math.GT/0607714.
- [4] S. Bauer and M. Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: I*, Invent. Math. **155** (2004), 1–19.
- [5] J. Bryan, *Seiberg-Witten theory and $\mathbb{Z}/2^p$ actions on spin 4-manifolds*, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 1-2, 165–183.
- [6] A. L. Edmonds and J. H. Ewing, *Realizing forms and fixed point data in dimension four*, Amer. J. Math. **114** (1992), 1103–1126.
- [7] F. Fang, *Smooth group actions on 4-manifolds and Seiberg-Witten invariants*, International J. Math. **9**, No.8 (1998) 957–973.

- [8] M. H. Freedman and F. Quinn, *Topology of 4-manifolds*, Princeton Mathematical Series, 39. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.
- [9] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ -conjecture*, *Math. Res. Lett.* **8** (2001), no. 3, 279–291.
- [10] M. Furuta, Y. Kametani, N. Minami, *Stable-homotopy Seiberg-Witten Invariants for Rational Cohomology $K3\#K3$'s*, *Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo* **8** (2001), No. 1, 157–176.
- [11] S. Hu, *Homotopy theory*, *Pure and Applied Mathematics*, Vol. VIII, Academic Press, New York, 1959.
- [12] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations*. *Annals of Mathematics Studies*, No. 88. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1977.
- [13] J. M. Kister, *Microbundles are fibre bundles*. *Ann. of Math. (2)* **80** (1964) 190–199.
- [14] X. Liu and N. Nakamura, *Pseudofree $\mathbb{Z}/3$ -actions on $K3$ surfaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), no. 3, 903–910.
- [15] X. Liu and N. Nakamura, *Unsmoothable group actions on elliptic surfaces*, preprint.
- [16] N. Nakamura, *Mod p vanishing theorem of Seiberg-Witten invariants for 4-manifolds with \mathbb{Z}_p -actions*, *Asian J. Math.* **9**, (2006), no.4, 731–748.
- [17] N. Nakamura, *Bauer-Furuta invariants under \mathbb{Z}_2 -actions*, preprint, math.GT/0705.1595.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1, KOMABA, MEGURO-KU, TOKYO, 153-8914, JAPAN

E-mail address: nobuhiro@ms.u-tokyo.ac.jp

ABSTRACT FOR “THE TOPOLOGY OF SYMPLECTIC AND HYPERKÄHLER QUOTIENTS”

MEGUMI HARADA

ABSTRACT. We provide a brief overview of the “Kirwan method” in equivariant symplectic and hyperkähler geometry. This is a method pioneered by Frances Kirwan in 1984, in a celebrated theorem which asserts that a natural map from the rational Borel-equivariant cohomology of a Hamiltonian G -space (under certain technical conditions) to the ordinary rational cohomology of its symplectic quotient is in fact a surjection. We discuss this theorem in the larger context of equivariant symplectic and hyperkähler geometry, and indicate several directions of generalizations of this theory.

CONTENTS

1. Introduction	1
2. Kirwan surjectivity in K -theory	3
3. Kirwan surjectivity in hyperkähler geometry	6
4. Kirwan surjectivity for orbifolds	8
References	9

1. INTRODUCTION

This abstract concerns current research themes in equivariant symplectic and hyperkähler geometry, and in particular, their connections to representation theory, combinatorics, and algebraic geometry. More specifically, one can use techniques in equivariant symplectic and hyperkähler geometry to compute topological invariants, such as various cohomology theories, of spaces with such geometric structures. The purpose of this abstract is to provide a general overview of this field of research, providing motivation for its central questions, presenting recent results, and indicating promising future directions.

We first recall that symplectic geometry is the mathematical framework of classical mechanics. The phase space of a classical mechanical system with holonomic constraints can be interpreted as a symplectic manifold, i.e. a manifold equipped with a closed, non-degenerate differential 2-form. This symplectic form is the geometric data needed to translate a Hamiltonian function on the system to the dynamics of the system. Examples of symplectic manifolds are any 2-dimensional surface equipped with its area form, cotangent bundles T^*M , toric varieties, and flag manifolds. A symplectic manifold is Kähler if there is also a complex structure compatible with the symplectic form; when there are *three* Kähler structures

on M , with associated compatible complex structures interacting like the *quaternions*, then M is hyperkähler. Many hyperkähler manifolds appear naturally in physics and representation theory. Examples from physics are $T^*\mathbb{P}^1$ with the Eguchi-Hansen metric, K3 surfaces, and moduli spaces of Higgs bundles over a Riemann surface; examples arising in representation theory are quiver varieties, as studied by Nakajima [26].

In this abstract, we will mainly be concerned with the theory of the symmetries of manifolds with such structures, given by an action of a compact connected Lie group G . For example, consider the group of rotations $SO(3)$ acting on the classical phase space $T^*\mathbb{R}^3$. These symmetries can be encoded in a moment map $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, which is a suitably compatible collection of Hamiltonian functions, each of which encodes, in this case, a rotation about one axis. Here, the moment map is exactly the classical angular momentum (hence the name “moment map”). Symplectic manifolds with an action of a Lie group G and a corresponding moment map are called Hamiltonian G -spaces. For a hyperkähler manifold M , we require that there be a moment map $\mu_i : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$, $i = 1, 2, 3$, for *each* of the three Kähler structures. Given a symplectic Hamiltonian G -space, the symplectic quotient is defined as $M//G := \mu^{-1}(0)/G$. The reduced space inherits a symplectic structure from M . In the hyperkähler case, we take the hyperkähler quotient $M///G$ to be the quotient by G of the intersection of the zero-level sets of all three moment maps; this is again hyperkähler.

The structure of a Hamiltonian G -space is frequently useful in computing certain topological invariants, such as the Betti numbers, or the ring structure on ordinary cohomology. The computation of such invariants of a symplectic quotient is of great interest, due in part to a celebrated theorem which states that in many circumstances, the symplectic quotient procedure is equivalent to the algebraic-geometric construction of a geometric-invariant-theory (“GIT”) quotient. Since many moduli spaces arising in mathematics are GIT quotients, symplectic geometry is fundamental to the study of these moduli problems. We now recall briefly why the study of cohomology rings of moduli spaces is important. Suppose \mathcal{M} is a moduli space of some mathematical objects. Then a family of such objects over X may be thought of as a map $f : X \rightarrow \mathcal{M}$, which induces a map $f^* : E^*(\mathcal{M}) \rightarrow E^*(X)$ for a cohomology theory E^* . Thus knowledge of $E^*(\mathcal{M})$ gives constraints on possible families of such objects, and one wants general methods for computing $E^*(\mathcal{M})$.

There is a “meta-principle” for computing such invariants of Hamiltonian quotients of various types, which we call here the *Kirwan method*. Let M be a Hamiltonian G -space of some type (symplectic, hyperkähler, or some other variant), M_G the corresponding Hamiltonian quotient of M by G , and E^* a cohomology (or orbifold cohomology) theory. Then the Kirwan method consists of the following three steps:

The Kirwan method:

- (1) **Kirwan surjectivity principle:** For M , M_G , and E^* as above, there is a natural ring homomorphism

$$\kappa : E_G^*(M) \rightarrow E^*(M_G)$$

which is *surjective*. In particular, in order to compute $E^*(M_G)$, it suffices to compute $E_G^*(M)$ and $\ker(\kappa)$.

- (2) Compute $E_G^*(M)$.
- (3) Compute $\ker(\kappa)$.

The point of this method is that one can often compute the last two objects, $E_G^*(M)$ and $\ker(\kappa)$, using *equivariant* techniques which are unavailable on the quotient. In the case where M is a symplectic Hamiltonian G -space, $M_G = M//G$ is its symplectic quotient, and $E^* = H^*(-; \mathbb{Q})$ is rational cohomology, this "Kirwan method" has been well-developed; in particular, Step (1) in this case was proven by Kirwan [21], and various explicit solutions of Steps (2) and (3) can be found e.g. in [20, 28, 10, 11]. *The proposed research program consists mainly of proving the Kirwan surjectivity principle and completing the Kirwan method for a variety of Hamiltonian quotients M_G and a variety of theories E^* .*

We now provide a brief overview of the rest of this abstract. In Section 2, we discuss the current status of this "Kirwan method" in the situation of topological, integral K -theory and symplectic quotients. In Section 3, we do the same for the situation in hyperkähler geometry in rational Borel-equivariant cohomology. Finally, in Section 4, we review current work in the setting of *orbifold* versions of both cohomology and K -theory in the symplectic quotient case.

2. KIRWAN SURJECTIVITY IN K -THEORY

My recent work with collaborator Gregory D. Landweber makes progress on the Kirwan method for the case in which $E^* = K^*$ is complex (integral) K -theory. By K -theory, we mean topological, integral K -theory, taking $K^0(X)$ to be the isomorphism classes of virtual complex vector bundles over X when X is compact, or for more general X , taking $[X, \text{Fred}(\mathcal{H})]$ for a complex separable Hilbert space \mathcal{H} . In the equivariant case, by $K_T(X)$ we mean Atiyah-Segal T -equivariant K -theory [27], built from T -equivariant vector bundles if X is a compact T -space, and T -equivariant maps $[X, \text{Fred}(\mathcal{H})]_T$ if X is noncompact (here \mathcal{H} contains every irreducible representation of T , see e.g. [3]). In particular, we note that K -theory incorporates possible torsion information, since in K -theory, the relevant geometric objects are vector bundles over the space in question, rather than differential forms. One main reason that K -theory is relevant is because in many of the moduli space examples, cohomology classes of interest to algebraic geometers are *defined using vector bundles* in the first place. Hence it is more natural to work *directly* with the vector bundles, thought of as K -theory classes. Another motivation is that certain aspects of the Kirwan method for $E^* = H^*(-; \mathbb{Z})$ only works if certain additional restrictive conditions hold, whereas our K -theory results hold with no such conditions.

In our first paper [15], we prove the following:

Theorem 2.1. (Harada, Landweber) *Let (M, ω) be a Hamiltonian G -space with proper moment map $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Assume that 0 is a regular value of μ and the group G acts freely on $\mu^{-1}(0)$. Then the Kirwan map κ induced by the inclusion $\iota : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$,*

$$\begin{array}{ccc}
 K_G^*(M) & \xrightarrow{\iota^*} & K_G^*(\mu^{-1}(0)) \\
 & \searrow \kappa & \downarrow \cong \\
 & & K^*(M//G)
 \end{array}$$

is a surjection.

Thus we complete step (1) of the Kirwan method in this case. A key element in our arguments is the K -theoretic Atiyah-Bott lemma, which is a K -theoretic analogue of a fact originally proven in [2] in the setting of Borel equivariant cohomology. In this manuscript, we use the following formulation, given in [15, Lemma 2.1]; a version in the algebraic category is given in [29, Lemma 4.2].

Lemma 2.2. *Let a compact connected Lie group G act fiberwise linearly on a Spin^c -vector bundle $\pi : E \rightarrow X$ over a compact G -manifold X . Assume that a circle subgroup $S^1 \subset G$ acts by restriction on E so that its fixed point set is precisely the zero section X . Choose an invariant metric on E and let D and S denote the disc and sphere bundles, respectively. Then the long exact sequence for the pair (D, S) in equivariant K -theory splits into short exact sequences*

$$0 \longrightarrow K_G^*(D, S) \longrightarrow K_G^*(D) \longrightarrow K_G^*(S) \longrightarrow 0.$$

As we noted in [15], the above Atiyah-Bott lemma is a crucial step in many Morse-theoretic proofs in symplectic geometry using the moment map μ , and once we have a K -theoretic Atiyah-Bott lemma, it may be expected that many symplectic-geometric results in the setting of rational Borel equivariant cohomology carry over to that of (integral) K -theory. Indeed, the results in this section can be viewed as illustrations of this principle.

In a second paper [14], we exploit this Atiyah-Bott lemma and give solutions to Steps (2) and (3) for $E^* = K^*$ in certain cases. More specifically, we have the following results.

The first theorem is a K -theoretic version of injectivity into T -fixed points.

Theorem 2.3. ([14, Theorem 2.5]) *Let T be a compact torus and (M, ω) a Hamiltonian T -space with moment map $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$. Suppose there exists a component of the moment map which is proper and bounded below, and further suppose that the T -fixed points M^T has only finitely many connected components. Let $f := \mu^\xi$ be a generic component of μ as in Lemma ???. Let $\iota : M^T \hookrightarrow M$ be the inclusion of the fixed point set into M . Then the restriction map*

$$(1) \quad \iota^* : K_T^*(M) \rightarrow K_T^*(M^T)$$

is injective.

Thus, in order to compute $K_T^*(M)$, it suffices to identify the image of ι^* . Moreover, under certain conditions on the T -orbit stratification of M , the image of ι^* can be completely described by the combinatorics of a graph (called the GKM graph), briefly recalled below. This is a K -theoretic analogue of results in [11]. More specifically, we have the following. We first need a definition.

Definition 2.4. Let T be a compact torus and (M, ω) a Hamiltonian T -space. We say that the action is **GKM** if M^T consists of finitely many isolated points, and the T -isotropy weights at each fixed point $p \in M^T$ are pairwise linearly independent in $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$.

We now briefly recall the construction of the combinatorial and graph-theoretic data used in our theorem. Let N denote the subset of M given by

$$N := \{p \in M \mid \text{codim}(\text{Stab}(p)) = 1\}.$$

Thus N consists of the points in M whose T -orbits are exactly one-dimensional. The *equivariant one-skeleton* of M is then defined to be the closure \overline{N} of N . Hence

$$\overline{N} = \{p \in M \mid \text{codim}(\text{Stab}(p)) \leq 1\} = N \cup M^T.$$

The GKM condition states that at each fixed point $p \in M^T$, the T -isotropy weights are pairwise linearly independent in $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$. Each T -weight space corresponds to a component of N , the closure of which is either an $S^2 \cong \mathbb{P}^1$ (with north and south poles being T -fixed points $\{p, q\} \subseteq M^T$) or a copy of \mathbb{C} (with origin a T -fixed point). Thus, given the GKM condition, the one-skeleton \overline{N} is a collection of projective spaces \mathbb{P}^1 and affine spaces \mathbb{C} , glued at T -fixed points. By definition, each component of N is equipped with a T -action which is specified by a weight in $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^* \cong \text{Hom}(T, S^1)$; this weight appears in the T -weight decomposition of the isotropy action on the corresponding T -fixed point.

From this data we construct the *GKM graph*, a labelled graph $\Gamma = (V, E, \alpha)$, associated to the GKM T -space M . The vertices V of Γ are the T -fixed points $V = M^T$, and there is an edge $(p, q) \in E$ exactly when there exists an embedded $\mathbb{P}^1 \subset \overline{N}$ containing as its two T -fixed points $\{p, q\} \subset \mathbb{P}^1$. Additionally, we label each edge (p, q) with the weight $\alpha_{(p,q)}$ specifying the T -action on the corresponding \mathbb{P}^1 as discussed above.

We can then define the Γ -*subring* of $K_T^*(M^T)$ to be

$$K^*(\Gamma, \alpha) := \left\{ h : V \rightarrow K_T^*(\text{pt}) \cong R(T) \mid \begin{array}{l} h(p) - h(q) \equiv 0 \pmod{e(\alpha_{(p,q)})} \\ \text{for every edge } (p, q) \in E \end{array} \right\} \subseteq K_T^*(M^T).$$

The K -theoretic GKM theorem in Hamiltonian torus geometry is then the following.

Theorem 2.5. ([14, Theorem 4.4]) *Let T be a compact torus and (M, ω) a Hamiltonian T -space with moment map $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$. Suppose there exists a component of the moment map which is proper and bounded below, and that the T -action on M is GKM. Then the inclusion $\iota : M^T \hookrightarrow M$ induces an isomorphism*

$$\iota^* : K_T^*(M) \rightarrow K^*(\Gamma, \alpha) \subseteq K_T^*(M^T).$$

Finally, we can give an explicit solution to Step (3) in the abelian case. We have the following.

Theorem 2.6. ([14, Theorem 3.1]) *Let T be a compact torus and (M, ω) a Hamiltonian T -space with moment map $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$. Suppose there exists a component of the moment map which is proper and bounded below, and further suppose that $\Sigma := M^T$ has only finitely many connected components. Let*

$$(2) \quad Z := \{\mu(C) \mid C \text{ a connected component of } \text{Crit}(\|\mu\|^2) \subseteq M\} \subseteq \mathfrak{t}^* \cong \mathfrak{t}$$

be the set of images under μ of components of the critical set of $\|\mu\|^2$. Suppose that T acts freely on the level set $\mu^{-1}(0)$, and let $M//T$ be the symplectic quotient. For $\xi \in \mathfrak{t}$, define

$$\begin{aligned} M_\xi &:= \{x \in M \mid \langle \mu(x), \xi \rangle \leq 0\}, \\ \mathcal{K}_\xi &:= \{\alpha \in K_T^*(M) \mid \alpha|_{M_\xi} = 0\}, \quad \text{and} \\ \mathcal{K} &:= \sum_{\xi \in Z} \mathcal{K}_\xi. \end{aligned}$$

Then there is a short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow K_T^*(M) \xrightarrow{\kappa} K^*(M//T) \longrightarrow 0,$$

where $\kappa : K_T^*(M) \rightarrow K^*(M//T)$ is the Kirwan map.

3. KIRWAN SURJECTIVITY IN HYPERKÄHLER GEOMETRY

A longstanding question in the topology of hyperkähler quotients is whether a hyperkähler analogue of the Kirwan surjectivity theorem holds, i.e., whether the natural map

$$(3) \quad \kappa_{HK} : H_G^*(M) \rightarrow H^*(M//G)$$

is surjective, where $M//G$ is now the *hyperkähler* quotient as described in the introduction. Not much is known in general about this question, although certain special cases have been computed. For instance, Konno proved a hyperkähler Kirwan surjectivity in the cases of hypertoric varieties [22] and hyperpolygon spaces [23]. In the gauge theory setting, recent work of Daskalopoulos, Weistman, and Wilkin [6] proves hyperkähler Kirwan surjectivity for certain cases of moduli spaces of Higgs bundles.

In the hyperkähler setting, however, it turns out that there is more data to use: in a large class of examples, the hyperkähler quotient $M//G$ is equipped with a natural Hamiltonian S^1 -action. This can occur, for instance, when the original hyperkähler manifold is a cotangent bundle $T^*\mathbb{C}^n$, the S^1 rotates the fibers with weight 1, and the G -action is induced from a linear G -action on \mathbb{C}^n . Many examples of interest, including hypertoric varieties, hyperpolygon spaces, and the quiver varieties as defined by Nakajima, arise by such a construction. It is therefore natural to also ask a different, but related, question: is the S^1 -equivariant Kirwan map

$$(4) \quad \kappa_{HK}^{S^1} : H_{G \times S^1}^*(M) \rightarrow H_{S^1}^*(M//G)$$

surjective? We now give a brief summary of what is known on this topic.

First, a general proof of (4) is not known, but my collaborator Nicholas Proudfoot and I have proved it in certain cases. In [16], we show the surjectivity of both $\kappa_{HK}^{S^1}$ and a T^d -equivariant version of in the case of hypertoric varieties. It is natural to consider an equivariant version in this case because hypertoric varieties, being the hyperkähler analogues of toric varieties, are naturally equipped with a large torus action. We have the following; for details and notation we refer the reader to [16]. (For the purposes of this abstract, the point is that there is an explicit description of the cohomology as a quotient of a polynomial ring, the generators of which have geometric interpretations, and the relations are given in terms of the combinatorial data of the affine hyperplane arrangement defining the hypertoric variety.)

Theorem 3.1. *Let M be the hypertoric variety corresponding to a smooth, cooriented arrangement \mathcal{H} . Given any minimal set $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ such that $\bigcap_{i \in S} H_i = \emptyset$, let $S = S_1 \sqcup S_2$ be the unique splitting of S such that $(\bigcap_{i \in S_1} G_i) \cap (\bigcap_{j \in S_2} F_j) = \emptyset$ (see (??)). Then the $T^d \times S^1$ -equivariant cohomology of M is given by*

$$H_{T^d \times S^1}^*(M) \cong \mathbb{Z}[u_1, \dots, u_n, x] \Big/ \left\langle \prod_{i \in S_1} u_i \times \prod_{j \in S_2} (x - u_j) \mid \bigcap_{i \in S} H_i = \emptyset \right\rangle.$$

Theorem 3.2. *In the notation of Theorem 3.1, the S^1 -equivariant cohomology ring of M is given by*

$$H_{S^1}^*(M) \cong H_{T^d \times S^1}^*(M) / \langle \sum a_i u_i \in \ker i^* \rangle.$$

This last theorem then implies

Corollary 3.3. *In the setting of Theorem 3.2, the equivariant Kirwan map $\kappa_{HK}^{S^1}$ is surjective.*

In [17] we prove surjectivity of $\kappa_{HK}^{S^1}$ in the case of hyperpolygon spaces, which are hyperkähler analogues of polygon spaces and are a special case of quiver varieties. Again, we first give an explicit and combinatorial description of the cohomology ring in terms of geometrically motivated generators and combinatorially defined relations. For details and notation we refer the reader to [17].

Theorem 3.4. *The equivariant cohomology ring $H_{S^1}^*(X)$ is isomorphic to $\mathbb{Q}[c_1, \dots, c_n, p, x] / \mathcal{J}$, where \mathcal{J} is generated by the following two families:*

- 1) $p - c_i^2$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$
- 2) $\prod_{j \in \overline{S^c}} (c_j + c_{n_S}) \times \prod_{i \in \overline{S}} (c_i + x)$ for all $\emptyset \neq S \in \mathcal{S}$,

where $m_S \in S$ and $n_S \in S^c$ are the minimal elements of the two sets, $\overline{S} = S \setminus \{m_S\}$, and $\overline{S^c} = S^c \setminus \{n_S\}$.

Using this explicit combinatorial description and an argument using equivariant formality, we also obtain the following.

Corollary 3.5. *In the setting of Theorem 3.4, the equivariant Kirwan map κ_{S^1} is surjective.*

In both of these cases, we give explicit descriptions of the S^1 -equivariant cohomologies of the hyperkähler quotients in terms of generators and relations. In the case of hypertoric varieties, this description is in terms of an **affine hyperplane arrangement** \mathcal{H} , so there are close connections between the theory of hypertoric varieties and combinatorics, as mentioned above. Taking this further, Tara Holm and I have proved a **GKM theorem for hypertoric varieties** equipped with a natural $T \times S^1$ action [13], thus obtaining a combinatorial description of $H_{T \times S^1}^*(M; \mathbb{Z})$ for a hypertoric variety M . If the i th hyperplane of the arrangement is

$$H_i = \{x \in (\mathfrak{t}^d)^* \mid \langle x, a_i \rangle = \langle -\tilde{\lambda}, \varepsilon_i \rangle\}$$

then we define the half-spaces

$$(5) \quad \begin{aligned} F_i &= \{x \in (\mathfrak{t}^d)^* \mid \langle x, a_i \rangle \geq \langle -\tilde{\lambda}, \varepsilon_i \rangle\} \\ &\quad \text{and} \\ G_i &= \{x \in (\mathfrak{t}^d)^* \mid \langle x, a_i \rangle \leq \langle -\tilde{\lambda}, \varepsilon_i \rangle\}, \end{aligned}$$

which intersect in the hyperplane H_i . For details we refer the reader to [13]. We have the following.

Theorem 3.6. *Let M be a hypertoric variety associated to an affine, cooriented, rational, smooth hyperplane arrangement \mathcal{H} such that $\Delta = \cap_i F_i$ is nonempty and bounded. Then the action of $T^d \times S^1$ on M is GKM.*

In particular, in [13, Theorem 3.5], we give an explicit GKM description of the generators for the equivariant cohomology $H_{T^d \times S^1}^*(M)$ given above. Let $H^*(\Gamma)$ denote the graph cohomology associated to the GKM graph of M . We specify a $T^d \times S^1$ weight as a pair

$$(\alpha, c) \in (\mathfrak{t}^d)_{\mathbb{Z}}^* \oplus \mathbb{Z}.$$

Let x denote the equivariantly constant class in $H^*(\Gamma)$ corresponding to the integral basis element for $Lie(S^1)$.

Theorem 3.7. *Let M be a hypertoric variety associated to an affine, cooriented, rational, smooth hyperplane arrangement \mathcal{H} such that $\Delta = \cap_i F_i$ is nonempty and bounded. Let \mathcal{I} be the ideal*

$$\mathcal{I} := \left\langle \prod_{i \in S_1} u_i \times \prod_{j \in S_2} (x - u_j) \mid \bigcap_{i \in S} H_i = \emptyset \right\rangle$$

and let $H^*(\Gamma)$ denote the graph cohomology associated to M . Then the inclusion $M^{T^d \times S^1} \hookrightarrow M$ induces an isomorphism

$$H_{T^d \times S^1}^*(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u_1, \dots, u_n, x] / \mathcal{I} \xrightarrow{\cong} H^*(\Gamma)$$

$$u_i \longmapsto \rho_i,$$

$$x \longmapsto x,$$

where ρ_i is given by

$$\rho_i(v) = \begin{cases} (\eta_{v,i}, \langle \eta_{v,i}, \sum_{j \in K_v} a_j \rangle), & \text{if } i \in I_v \\ (0, 0), & \text{if } i \in J_v \\ (0, 1), & \text{if } i \in K_v. \end{cases}$$

4. KIRWAN SURJECTIVITY FOR ORBIFOLDS

Orbifolds are singular spaces, but their singularities are “mild” in the sense that a neighborhood of any point can be modelled by \mathbb{R}^n / Γ for Γ some finite group, so they are “almost manifolds” up to these possible finite stabilizer groups. Orbifolds arise naturally, for instance, as moduli spaces studied in algebraic geometry and in string theory. There has been a flurry of recent interest in defining and using orbifold analogues of classical topological invariants such as Betti numbers, cohomology rings, K -theory, and Chow rings.

Chen-Ruan orbifold cohomology rings were introduced in [5] as the degree 0 piece of the Gromov-Witten theory of an orbifold, following work in physics [30]; for our purposes here it can be understood as the “orbifold analogue of (usual) cohomology”. This ring carries, in addition to the data of the usual singular cohomology ring of the underlying space, more delicate information (e.g. about the orbifold structure groups Γ above). These orbifold cohomology rings are of recent interest due to their connections to physics, in particular to the theory of mirror symmetry.

In a recent manuscript [7], Rebecca Goldin and I give a computation of the Chen-Ruan orbifold cohomology of orbifold hypertoric varieties, which are hyperkähler quotients of quaternionic affine space $\mathbb{H}^n \cong T^*\mathbb{C}^n$ by a linear abelian action. Our main technique is to prove the following, which is Step (1) of the Kirwan method for this case.

Theorem 4.1. *For $M = T^*\mathbb{C}^n$ a hyperkähler Hamiltonian T -space with a linear T -action, $M_T = T^*\mathbb{C}^n // T$ its hyperkähler quotient, and $E^* = H_{CR}^*$ the Chen-Ruan orbifold cohomology, there is a ring homomorphism $\kappa : NH_T^*(T^*\mathbb{C}^n) \rightarrow H_{CR}^*(T^*\mathbb{C}^n // T)$ which is surjective.*

Here $NH_T^*(T^*\mathbb{C}^n)$ is the *inertial cohomology* introduced by Goldin, Holm, and Knutson [8]. We then solve Steps (2) and (3) of the Kirwan method to obtain an explicit combinatorial description (via the data of an affine hyperplane arrangement \mathcal{H}) of the orbifold cohomology of hypertoric varieties. For details, we refer the reader to [7].

REFERENCES

- [1] M.F. Atiyah and R. Bott. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 308(1505):523–615, 1983.
- [2] M. F. Atiyah and G. Segal. Twisted K -theory. *Ukr. Mat. Visn.*, 1(3):287–330, 2004.
- [3] W. Chen and Y. Ruan. A new cohomology theory of orbifold. *Comm. Math. Phys.*, 248(1):1–31, 2004.
- [4] G. Daskalopoulos, J. Weitsman, and G. Wilkin. Morse theory and hyperkähler Kirwan surjectivity for Higgs bundles. ArXiv:math/0701.5560
- [5] R. Goldin and M. Harada. Orbifold cohomology of hypertoric varieties, arXiv:math.DG/0607421.
- [6] R. Goldin, T. S. Holm, and A. Knutson. Orbifold cohomology of torus quotients, arXiv:math.SG/0502429. To be published in *Duke Math. J.*
- [7] R. F. Goldin. The cohomology rings of weight varieties and polygon spaces. *Adv. Math.*, 160(2):175–204, 2001.
- [8] R. F. Goldin. An effective algorithm for the cohomology ring of symplectic reductions. *Geom. Funct. Anal.*, 12(3):567–583, 2002, math.SG/0110022.
- [9] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson. Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem. *Invent. Math.*, 131:25–83, 1998.
- [10] V. Guillemin, V. Ginzburg, Y. Karshon. Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions. American Mathematical Society, 2002.
- [11] M. Harada and T. Holm. The equivariant cohomology of hypertoric varieties and their real loci. *Comm. Anal. Geom.*, 13(3):527–559, 2005.
- [12] M. Harada and G. D. Landweber. The K -theory of abelian symplectic quotients. *Math. Res. Lett.*, to appear.
- [13] M. Harada and G. D. Landweber. Surjectivity for Hamiltonian G -spaces in K -theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear, math.SG/0503609.
- [14] M. Harada and N. Proudfoot. Properties of the residual circle action on a hypertoric variety. *Pacific J. Math.*, 214(2):263–284, 2004.
- [15] M. Harada and N. Proudfoot. Hyperpolygon spaces and their cores. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(4):1445–1467, 2005.
- [16] J.-C. Hausmann and A. Knutson. The cohomology rings of polygon spaces. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 48(1):281–321, 1998.

- [17] T. J. Jarvis, R. Kaufmann, and T. Kimura. Stringy K-theory and the Chern character, arXiv:math.AG/0502280.
- [18] L. C. Jeffrey and F. C. Kirwan. Localization for nonabelian group actions. *Topology*, 34:291–327, 1995.
- [19] F. Kirwan. *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, volume 31 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1984.
- [20] H. Konno. Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds. *Int. J. of Math.*, 11(8):1001–1026, 2000.
- [21] H. Konno. On the cohomology ring of the hyperkähler analogue of the polygon spaces. *Contemp. Math.*, 309:129–149, 2002.
- [22] P. B. Kronheimer. The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients. *J. Differential Geom.*, 29(3):665–683, 1989.
- [23] H. Nakajima. Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras. *Duke Math. J.*, 72(2):365–416, 1994.
- [24] G. Segal. Equivariant K-theory. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 34:129–151, 1968.
- [25] S. Tolman and J. Weitsman. The cohomology rings of symplectic quotients. *Comm. Anal. Geom.*, 11(4):751–773, 2003, math.DG/9807173.
- [26] G. Vezzosi and A. Vistoli. Higher algebraic K-theory for actions of diagonalizable groups. *Invent. Math.*, 153(1):1–44, 2003.
- [27] E. Zaslow. Solitons and helices: the search for a math-physics bridge. *Comm. Math. Phys.*, 175(2):337–375, 1996.

双曲空間内のホロ球面的幾何学

泉屋 周一 (北海道大学 大学院理学研究院)

概要

「特異点論の応用としての微分幾何学」を研究し始めてから、かれこれ 10 年近くになります。その流れの中で、双曲空間内の部分多様体論として、なにか面白い幾何学を研究しているらしいと言うことを最近になって認識してきました。その幾何学を私は「**ホロ球面的幾何学**」と名付けました。本講演では、このホロ球面的幾何学について、これまでにわかったことを紹介します¹。

1 序

最初にホロ球面的幾何学とは何かを、ポアンカレ円板上で初等幾何学的に解説します [7]。ポアンカレ円板とは、原点を中心とする半径 1 の円板の内部で、その上のリーマン計量として、 $ds^2 = 4(dx^2 + dy^2)/(1 - x^2 - y^2)$ を与えたものです。従って、ユークリッド平面とは共形同値で、ユークリッド平面上での円はポアンカレ円板上でも曲率一定の曲線となります。特に、円板内にあるユークリッド平面上の円はポアンカレ円板としても円となります。このリーマン計量にたいする測地線は理想境界 (半径 1 の円周) に直交するようなユークリッド平面上の円であり、この測地線を直線として採用すると、ガウス・ボヤイ・ロバチェフスキーの非ユークリッド幾何学 (双曲幾何学) のモデルを与えることは良く知られた事です。ここで、ユークリッド平面での直線の特徴を整理すると

- (1) 2 点を結ぶ**最短線**である。
- (2) **真っ直ぐ**である (速さが一定のとき加速度は零)。
- (3) **円の半径を無限大にしたときの極限**と思える。

などが挙げられます。ポアンカレ円板内での測地線は (1)、(2) の特徴を持った曲線を求めたものです。

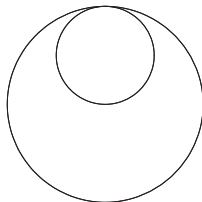


図 1 : ホロ円

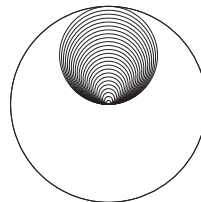


図 2 : 円の極限としてのホロ円

一方、(3) の特徴を持った曲線として**ホロ円**があります。境界の円周に接する円を**ホロ円**²と呼びます (図 1)。このホロ円は半径を無限大にした円の極限であると解釈されます (図 2)。このように、ポアンカレ円板内には、2 種類の直線の類似物が存在するわけです。一つは、測地線を「直線」と見なす場合で、その結果、双曲幾何のモデルが得られました。そこで、**素朴な発想**として、以下のような疑問が起こります。

ホロ円を直線と見なすとどのような幾何学が得られるのだろうか？

この疑問に関連して、以下のような事も考えられます：

¹ここでは、双曲空間内に話を限っているので、このホロ球面的幾何学となりますが、ここで話す内容の大部分はミンコフスキー空間内の空間的部分多様体の話に一般化出来ることが、最近解ってきました [14, 15, 19, 20]。いわゆる「特殊相対論的部分多様体論」とでも言いましょうか？いずれ何処かの機会にお話したいと思います。

²「ホロ」(horo) という意味は時計に関係したもの、もしくは天球上をさすものの様です。

- (1) ユークリッドの公理は満たされているのか？
- (2) 平行はどのように定義するか？
- (3) 二つのホロ円の成す角はどのように定義するか？

これらの、疑問に関して、すぐに解る事は以下の 2 つの性質です。

(ア) ユークリッド幾何の公理 1 を満たさない: 任意の 2 点を通るホロ円はちょうど 2 本ある。

(イ) 境界の円周に同じ点で接するホロ円を平行と定義すると、平行線公理を満たす。

証明は与えませんが、以下の図を見ていただければ、容易に理解できると思います。

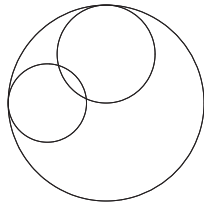


図 3 : 公理 1 を満たさない

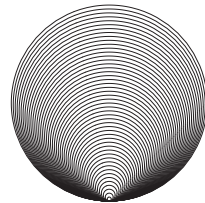


図 4 : 平行線公理を満たす

このように、この幾何学も非ユークリッド幾何学なのですが、平行線公理こそがユークリッド幾何学をユークリッド幾何学ならしめていると思えるので、この幾何学はある意味でユークリッド幾何学もどきであると言えます。この幾何学をとりあえず**ホロ円的幾何学**と呼びます。ここで、2 つのホロ円の法線角を以下のように定めてみます。いま、図 5 のように 2 つのホロ円がポアンカレ円板上にあるとします。このとき、それぞれのホロ円が境界の円周と接する点を考え、図 6 のようにポアンカレ円板の中心からその点を結ぶユークリッド平面上の単位ベクトルを考えます。これらのベクトルをホロ円の**ホロ法線ベクトル**と呼びます。この 2 本のホロ法線ベクトルのユークリッド幾何学の意味での角度を 2 つのホロ円の成す**ホロ法線角**と定めます。このように定義すると、2 つのホロ円が平行であることは、ホロ法線角が零度であるということに対応します。ただし、ホロ円は直線の性質と円の性質を両方持っているので、ホロ法線角が π であっても 2 つのホロ円は平行ではありません。

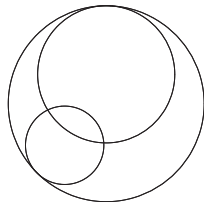


図 5 : 2 つのホロ円

⇒

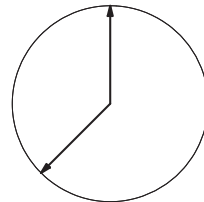


図 6 : 対応するホロ法線ベクトル

次に、図 7 のように、3 つのホロ円をポアンカレ円板上で考えてみます。すぐわかることは、ユーク

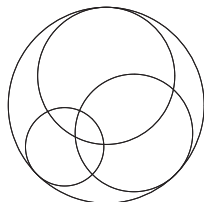


図 7 : ホロ三角形

⇒

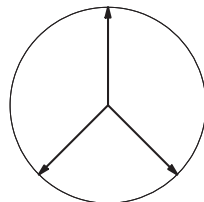


図 8 : 対応するホロ法線ベクトル

リッド幾何学の公理 1 を満たさないで、三角形が 4 つできていると言うことです。この 4 つの三角形をすべて同等に扱うこともできますが、話が複雑になるので、真ん中に出来た凸三角形のみを考えます。この三角形を特徴付けるために、考えている 3 つのホロ円にたいして、それぞれホロ法線ベクトルを左側に見るように向きをつけます。このとき、ホロ法線ベクトルがどの辺でも三角形の内側を向いている三角形をここでは**凸ホロ三角形**と呼びます。境界の円周に接する点を固定したまま 3 つのホロ円の半径を十分大きくする (平行なホロ円を取り直す) と必ず、このような三角形を作ることができます。図 8 から、以下の定理が成り立つことがわかります。

定理 1.1 凸ホロ三角形のホロ法線角の和は 2π である。

ほかの三つの三角形では、向き付けを行うと、向きがホロ円の向きと逆になる辺もあるので、回転方向がいろいろ変わります。この場合は、もう少し細かく調べる必要がありますが、同様な性質を持つ事が解ります。また、このように考えると、ユークリッド平面上の閉じた有向折れ線と同じように**閉じた有向ホロ折れ線**も考えることができ、以下の定理が成り立ちます。

定理 1.2 閉じた有向ホロ折れ線のホロ法線角の和は $2\pi \times$ 回転数である。

従って、ホロ法線角の総和は位相不変量で、もちろんそれは双曲不変量です。一方、ホロ法線角が零という性質 (平行性) も双曲不変ですが、ホロ法線角自体は双曲不変量ではありません。それは $SO(2)$ 不変量です。このように、ホロ法線角はその総和と零であることが双曲不変であることがわかり、その部分多様体版では、平坦性と全曲率が双曲不変であることが示唆されます。以下、双曲空間内でのホロ球面的部分多様体論を考えます。

2 双曲空間内の曲面の微分幾何

ここでは、双曲空間のモデルとして、ミンコフスキー空間モデルを考えます。一般次元の場合でも成り立つことが多いのですが、ここでは簡単のため、3次元の双曲空間をあつかいます。最初にミンコフスキー空間における諸概念の復習をします。 $\mathbb{R}^4 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R} (i = 0, 1, 2, 3)\}$ を 4次元ベクトル空間として、その上の**擬内積**を任意のベクトル $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$ に対して $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^3 x_iy_i$ と定め、対 $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を **4次元ミンコフスキー空間**と呼び、 \mathbb{R}_1^4 と表します。零でないベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^4$ が**空間的**とは $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ を満たすこと、**光的**とは $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ を満たすこと、**時間的**とは $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$ を満たすことです。ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^4$ と実数 c に対して**擬法線ベクトル \mathbf{v} を持つ超平面**は $HP(\mathbf{v}, c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^4 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = c\}$ で与えられます。このとき、 $HP(\mathbf{v}, c)$ がそれぞれ**空間的超平面**、**時間的超平面**、**光的超平面**であるとは対応する擬法線ベクトル \mathbf{v} がそれぞれ時間的、空間的、光的であることと定めます。一般にベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^4$ の**ノルム**を $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|}$ とします。

ミンコフスキー空間内には以下の 3種類の**擬超球**が考えられます： $H^3(-1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$ を**双曲空間**と呼び、 $S_1^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^4 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$ を**ド・シッター空間**と呼びます。さらに、**(開) 光錐**とは $LC^* = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$ のことです。また、ユークリッド空間の場合と同様に、任意の 3 個のベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}_1^4$ に対して、ベクトル $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3$ を

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 = \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

と定めます。ただし $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は \mathbb{R}_1^4 の標準基底として $\mathbf{x}_i = (x_0^i, x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ とします。このとき、ベクトル $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3$ は $\mathbf{x}_i (i = 1, 2, 3)$ に疑直交します。

ここで、双曲空間 $H_+^3(-1)$ 内³の曲面論⁴を解説します [9]。開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ における、埋め込み $\mathbf{x} : U \rightarrow H_+^3(-1)$ を考えます。この時、 $M = \mathbf{x}(U)$ と表し、 M と U を同一視します。 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \equiv -1$ なの

³ $H^3(-1)$ の $x_0 > 0$ の部分です。

⁴この部分は、第 50 回トポロジシンポジウムでも解説しました。なお、余次元が高い場合の研究については [3, 11, 13, 16, 17] を参照してください。

で $u = (u_1, u_2) \in U$ 対して、 $\langle \mathbf{x}_{u_i}, \mathbf{x} \rangle \equiv 0 \quad (i = 1, 2)$ となり、ベクトル

$$\mathbf{e}(u) = \frac{\mathbf{x}(u) \wedge \mathbf{x}_{u_1}(u) \wedge \mathbf{x}_{u_2}(u)}{\|\mathbf{x}(u) \wedge \mathbf{x}_{u_1}(u) \wedge \mathbf{x}_{u_2}(u)\|},$$

を考えると $\langle \mathbf{e}, \mathbf{x}_{u_i} \rangle \equiv \langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle \equiv 0, \quad \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \equiv 1$ と言う性質をもちます。さらに、 $\mathbf{x} \pm \mathbf{e}$ は光的ベクトルとなります。ここで、写像 $\mathbb{L}^\pm : U \rightarrow LC^*$ を $\mathbb{L}^\pm(u) = \mathbf{x}(u) \pm \mathbf{e}(u)$ で定め $\mathbf{x}(U) = M$ の**双曲的ガウス標形**、写像 $\mathbb{E} : U \rightarrow S_1^3$ を $\mathbb{E}(u) = \mathbf{e}(u)$ と定め $\mathbf{x}(U) = M$ の**ド・シッターガウス標形**と呼びます。ここで、 \mathbb{L}^\pm と \mathbb{E} を通常のガウス写像の様に扱い、 $\mathbf{x}(U) = M$ の曲率等を定めます。最初に、 $\mathbb{E}_{u_i}(u_0)$ は $p_0 = \mathbf{x}(u_0)$ における $M = \mathbf{x}(U)$ の接ベクトルであることが示され、さらに、 U と M の同一視によって、 $d\mathbf{x}(u_0)$ は $T_{p_0}M$ 上の高等写像 $id_{T_{p_0}M}$ と同一視されます。従って、 $\mathbb{L}^\pm, \mathbb{E}$ の $u_0 \in U$ における微分写像 $d\mathbb{L}^\pm(u_0), d\mathbb{E}(u_0)$ はそれぞれ、 $T_{p_0}M$ 上の線形変換とみなされます。この時、 $A_{p_0} = -d\mathbb{E}(u_0) : T_{p_0}M \rightarrow T_{p_0}M$ を**ド・シッター型作用素**と呼び、 $S_{p_0}^\pm = -d\mathbb{L}^\pm(u_0) : T_{p_0}M \rightarrow T_{p_0}M$ を**双曲的型作用素**と呼びます。定義から、 $S_p^\pm = -id_{T_pM} \pm A_p$ が成り立ち、固有方向 (主方向) は共通です。また S_p^\pm の固有値 (双曲的主曲率) を $\bar{\kappa}_p^\pm A_p$ の固有値 (ド・シッター主曲率) を κ_p で表すと $\bar{\kappa}_p^\pm = -1 \pm \kappa_p$ と言う関係があります。さらに、 $K_\ell^\pm(u_0) = \det S_p^\pm$ を**双曲的ガウス・クロネッカー曲率**とよび、 $K_e(u_0) = \det A_p$ を**外在的ガウス曲率**と呼びます。また、 $H(u_0) = (\text{trace} A_p)/2$ を**平均曲率**とよびます。ここで、 $\mathbf{x}_{u_i} (i = 1, 2)$ は空間的ベクトルなので、 M 上にリーマン計量 (第一基本量) を $ds^2 = \sum_{i=1}^2 g_{ij} du_i du_j$ を $g_{ij}(u) = \langle \mathbf{x}_{u_i}(u), \mathbf{x}_{u_j}(u) \rangle$ と定めます。さらに、**双曲的第二基本量**を $\bar{h}_{ij}^\pm(u) = \langle -\mathbb{L}_{u_i}^\pm(u), \mathbf{x}_{u_j}(u) \rangle$ 、さらに**ド・シッター第二基本量**を $h_{ij}(u) = -\langle \mathbf{e}_{u_i}(u), \mathbf{x}_{u_j}(u) \rangle$ と定義すると、関係式 $\bar{h}_{ij}^\pm(u) = -g_{ij}(u) \pm h_{ij}(u)$ が得られます。このとき、 $K_\ell^\pm = \det(\bar{h}_{ij}^\pm)/\det(g_{\alpha\beta}), K_e = \det(h_{ij})/\det(g_{\alpha\beta})$ が成り立ちます。また、リーマン計量から、 M の断面曲率 $K_I(u_0) = -R_{1212}/(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})$ が定まりますが、それを、**内在的ガウス曲率**と呼びます。このとき、これらの曲率の間には次の関係があります：

$$K_e = K_I + 1, \quad K_h^\pm = 1 \mp 2H + K_e = 2 \mp 2H + K_I$$

3 ホロ球面的幾何学

ホロ球面的幾何学とは、ホロ球をユークリッド空間内の平面のように見なした幾何学です。ここで**ホロ球面**とは光的超曲面と双曲空間の交わりとして得られる曲面 $HS^2(\mathbf{v}, c) = H_+^3(-1) \cap HP(\mathbf{v}, c)$ の事です (ここで、 \mathbf{v} は光的ベクトル)。この、ホロ球面は、**全臍的曲面**でその双曲的ガウス・クロネッカー曲率が零であるものとして知られています [9]。また、 \mathbb{L}^\pm が定ベクトルとなることの必要十分条件が $M = \mathbf{x}(U)$ がホロ球面の一部であることも知られています。一方、任意の光的ベクトル $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in LC_+^*$ に対して、

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0} \right) \in S_+^2 = \{ \mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0, x_0 = 1 \}.$$

と定め、Bryant-Epstein-小林 [2, 4, 22] に従って、**双曲的ガウス写像**を

$$\tilde{\mathbb{L}}^\pm : U \rightarrow S_+^2 : \tilde{\mathbb{L}}^\pm(u) = \widetilde{\mathbb{L}^\pm(u)}$$

と定義します。この双曲的ガウス写像を用いて、曲率を定めるとどのような性質をもつでしょうか？ 双曲的ガウス標形の場合とは違って、その微分写像 $d\tilde{\mathbb{L}}^\pm(u_0)$ は T_pM 上の線形変換とはなりません。そこで、いま、各点で $T_p\mathbb{R}_+^4 = T_pM \oplus N_pM$ と言う、 M の接空間と法平面への直交分割が存在するので、その接成分への標準射影 $\Pi_p : T_p\mathbb{R}_+^4 \rightarrow T_pM$ を考えます。そして、線形変換

$$\tilde{S}_p^\pm = -\Pi_p \circ d\tilde{\mathbb{L}}^\pm(u_0) : T_pM \rightarrow T_pM$$

を**ホロ球面的型作用素**と定めます。このとき、 $\mathbb{L}^\pm(u_0) = (\ell_0^\pm(u_0), \ell_1^\pm(u_0), \ell_2^\pm(u_0), \ell_3^\pm(u_0))$ とすると、

$$\Pi_p \circ \tilde{\mathbb{L}}_{u_i}^\pm = - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\ell_0^\pm(u_0)} (\bar{h}^\pm)^j_i \mathbf{x}_{u_j}$$

が成り立ちます。ここで、 \tilde{S}_p^\pm の固有値 $\tilde{\kappa}_i^\pm(p)$, ($i = 1, 2$) を **ホ口球面的主曲率**と呼ぶと、双曲的主曲率との間には $\tilde{\kappa}_i^\pm(p) = (1/\ell_0^\pm(p))\kappa_i^\pm(p)$. という関係があります。ここで、**ホ口球面的ガウス・クロネッカー曲率**を $\tilde{K}_h^\pm(u) = \det \tilde{S}_p^\pm = \tilde{\kappa}_1^\pm(p)\tilde{\kappa}_2^\pm(p)$ と定義すると、双曲的ガウス・クロネッカー曲率との間には

$$\tilde{K}_h^\pm(u) = \left(\frac{1}{\ell_0^\pm(u)} \right)^2 K_h^\pm(u).$$

という関係が成り立ちます。

注意 3.1 (1) $\tilde{\kappa}^\pm(p)$ は双曲不変量ではなく、 $SO(3)$ 不変量です。

(2) $\tilde{\kappa}_i^\pm(p)$ の値が双曲不変になる為の必要十分条件は $\tilde{\kappa}_i^\pm(p) = 0$ となる事です。

(3) 双曲的ガウス標形を正規化して双曲的ガウス写像を作るための関数 $1/\ell_0^\pm(u)$ は、双曲空間のモデルの取り方に依存しない関数です (ポアンカレボールモデルや上半モデル等でも定まる)。

4 ホ口球面的全曲率とホ口球面的絶対全曲率

ここでは、ホ口球面的ガウス・クロネッカー曲率の大域的性質についての結果を紹介します。 M を向き付け可能な閉曲面として、 $f: M \rightarrow H_+^3(-1)$ を埋め込み (はめ込みでも良い) とします。このとき、 $f(M)$ の $H_+^3(-1)$ 内での外向きの単位法線ベクトル場を \mathbb{E} とします。このとき、**大域的双曲的ガウス標形**が

$$\mathbb{L}^\pm: M \rightarrow LC_+^*: \mathbb{L}^\pm(p) = f(p) \pm \mathbb{E}(p)$$

と定義されます。この写像を用いて、前節と同様にして、**大域的雙曲的ガウス・クロネッカー曲率関数** $\mathcal{K}_h^\pm: M \rightarrow \mathbb{R}$ を定めることが出来ます。さらに、**大域的雙曲的ガウス写像** $\tilde{\mathbb{L}}^\pm: M \rightarrow S_+^{n-1}: \tilde{\mathbb{L}}^\pm(p) = \frac{\mathbb{L}^\pm(p)}{|\mathbb{L}^\pm(p)|}$ も定義出来、それにより、**大域的ホ口球面的ガウス・クロネッカー曲率関数** $\tilde{\mathcal{K}}_h^\pm: M \rightarrow \mathbb{R}$ も同様に定義出来ます。これらの曲率関数の間には、以下の関係があることも同様です：

$$\tilde{\mathcal{K}}_h^\pm(p) = \left(\frac{1}{\ell_0^\pm(p)} \right)^2 \mathcal{K}_h^\pm(p)$$

このとき、以下の全曲率と絶対全曲率に関する定理が成り立ちます [3, 18]：

定理 4.1 M を向き付け可能な平曲面で、 $f: M \rightarrow H_+^3(-1)$ を埋め込み (はめ込み) とする。このとき、以下のガウス・ボンネ型公式とチャーン・ラーショフ型不等式が成り立つ：

$$\int_M \tilde{\mathcal{K}}_h^\pm da_M = 2\pi\chi(M) \quad (\text{ガウス・ボンネ型公式}),$$

$$\int_M |\tilde{\mathcal{K}}_h^\pm| da_M \geq 2\pi(4 - \chi(M)) \quad (\text{チャーン・ラーショフ型不等式}),$$

ただし $\chi(M)$ は M のオイラー標数で、 da_M は M の面積素とする。

注意 4.2 上記のガウス・ボンネ型公式は、 n が偶数の場合の、向き付け可能な閉 n 次元多様体で $n+1$ 次元双曲空間にはめ込まれている場合にも成立します [18]。さらに、平面曲線 $\gamma: S^1 \rightarrow H_+^2(-1)$ の場合は、その測地的曲率を κ_g とすると、 $\tilde{\kappa}_h(s) = (\kappa_g(s) - 1)/\ell_0(s)$ に対して、等式

$$\int_{S^1} \tilde{\kappa}_h(s) ds = 2\pi \times \gamma \text{ の回転数}$$

が成り立ちます。この等式は定理 1.2 の曲線版と理解できます。また、チャーン・ラーショフ型不等式も、一般次元の双曲空間内の余次元が高い場合にも一般化されますが、ここでは曲面の場合と以下の曲線の場合に限って述べます。

$\gamma : I \rightarrow H_+^3(-1)$ を双曲空間内の単位速度曲線とします。このとき、**単位接ベクトル** $t(s) = \gamma'(s)$ に対して、 $\|t'(s) - \gamma(s)\| \neq 0$ のとき、**単位主法線ベクトル**を

$$n(s) = \frac{t'(s) - \gamma(s)}{\|t'(s) - \gamma(s)\|}$$

と定めます。また、**双曲的曲率**を $\kappa_h(s) = \|t'(s) - \gamma(s)\|$ とします。さらに、**単位従法線ベクトル**を $e(s) = \gamma(s) \wedge t(s) \wedge n(s)$ と定めると、 γ に沿った \mathbb{R}_1^4 の擬正規直交枠 $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ が得られます。このとき、**双曲的捩率**も定まり、以下の**フルネ・セレ型の公式**が成り立ちます [11] :

$$\begin{cases} \gamma'(s) = t(s) \\ t'(s) = \kappa_h(s)n(s) + \gamma(s) \\ n'(s) = -\kappa_h(s)t(s) + \tau_h(s)e(s) \\ e'(s) = -\tau_h(s)n(s), \end{cases}$$

ここで、 $\gamma(s), n(s), e(s)$ の第一成分を、それぞれ $\gamma_0(s), n_0(s), e_0(s)$ として、空間曲線の**ホロ球面的リブシッツ・キリング曲率**を

$$\tilde{\kappa}_h(s) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\gamma_0(s) + \cos \theta n_0(s) + \sin \theta e_0(s)} \right)^2 |1 - \kappa_h(s)| d\theta$$

と定めると、以下の不等式が得られます [3] :

定理 4.3 $\gamma : S^1 \rightarrow H_+^3(-1)$ を埋め込みとすると、以下の不等式が成り立つ :

$$\int_{S^1} \tilde{\kappa}_h(s) ds \geq 8\pi \quad (\text{フェンチェル型不等式})$$

さらに、 γ が非自明な結び目のとき、

$$\int_{S^1} \tilde{\kappa}_h(s) ds \geq 16\pi \quad (\text{ファリ・ミルナー型不等式})$$

が成り立つ。

注意 4.4 ユークリッド空間内の閉じた曲線の場合、これらの不等式は、空間曲線の曲率そのものを積分することにより、それぞれ 2π 以上と 4π 以上です。これは、空間曲線の周りの管曲面の面積が 4π で評価できることによりですが、双曲空間の場合はそのような評価が出来ないので、リブシッツ・キリング曲率から $|1 - \kappa_h(s)|$ だけの積分に変えた評価が出来ないので、 8π と 16π となります。また、フェンチェル型不等式で等号成立の特徴付けはまだ解りません。

5 ホロ平坦曲面

ホロ球面的曲率の値が、双曲不変になるための必要十分条件は、その値が零なので、双曲幾何学的にはこの意味で平坦な曲面が重要だと思われまます。そのような曲面をホロ平坦曲面と呼びます。双曲空間 $H_+^3(-1)$ 内の曲面 $M = \mathbf{x}(U)$ が**ホロ平坦**であるとは $\tilde{K}_h^+ \equiv 0$ なることとします⁵。定義から、それは条件 $K_h^+ \equiv 0$ と同値です。また、条件 $K_I + 2(1 - H) \equiv 0$ と同値です。このホロ平坦曲面の重要性はこの関係式にもよります。双曲空間内の曲面が**線形ワインガルテン曲面**であるとは関係式

$$aK_I + 2b(H - 1) \equiv 0, \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

⁵ここで、 $\tilde{K}_h^- \equiv 0$ としても良いのですが、議論が平行に進むので、こちらだけを考えます。

を満たす事です。この曲面のクラスは以下の重要な場合を含みます。 $a \neq 0, b = 0$ の場合は $K_I \equiv 0$ となり、リーマン幾何学の意味での**平坦曲面**となり、 $a = 0, b \neq 0$ の場合は**平均曲率 1 曲面**となります。どちらも、近年非常に良く研究されている曲面です。これらの曲面が良く研究される理由は、**ワイエルシュトラス型の表現公式**が成り立つためです。さらに線形ワインガルテン曲面が**ブライアント型**であるとは、 $a + b \neq 0$ を満たす場合です。Galvez 等 [5] は、ブライアント型の線形ワインガルテン曲面はワイエルシュトラス型の表現公式を持つ事を証明しました。平均曲率 1 曲面にたいしては、Bryant [2] がワイエルシュトラス型の表現公式を証明して、その後この方法が爆発的に発展したために、この場合はブライアント型と呼ばれています。ここで、唯一例外の場合である $a + b = 0$ の場合 (**非ブライアント型**) がホロ平坦曲面です。この場合は、ワイエルシュトラス型の表現公式がないので、1 変数複素関数論の強力な手法が使えず、詳しい研究が今まで出来ませんでした。

6 ホロ円織面

この節では、このホロ平坦曲面を含む特別な曲面のクラスを考えます。ユークリッド空間内の平坦な曲面は**可展開面**と呼ばれる**線織面**の特別な場合です。線織面は直線の 1 径数族として与えられる曲面で、直線の存在がその平坦性に反映していると考えることが出来ます。ここで、ホロ平坦性を反映させる曲線としてホロ円が考えられます。単位速度曲線 $\gamma : I \rightarrow H_+^3(-1)$ が**ホロ円**であるとは $\kappa_h(s) \equiv 1, \tau_h(s) \equiv 0$ を満たす事です。いま、 $\mathbf{a}_0 \in H_+^3(-1), \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in S_1^3, \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 0 (i \neq j)$ に対して、

$$\sigma(s) = \mathbf{a}_0 + s\mathbf{a}_1 + \frac{s^2}{2}(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_2)$$

は、ホロ円であることが簡単な計算からわかります。さらに、微分方程式の解の一意性から任意のホロ円はこのような径数付けをもつことが解ります。ここで、線織面に類似な概念として、ホロ円の 1 径数族で与えられる $H_+^3(-1)$ 内の曲面を**ホロ円織面**と呼びます。最初に解る事として以下の定理が成り立ちます [21] :

定理 6.1 任意のホロ平坦曲面は (少なくとも局所的には) ホロ円織面としての径数付けをもつ。

従って、我々の考えるべき曲面のクラスは、ホロ円織面であることが解ります。次に、ホロ円織面の一般的性質について解説します。滑らかな写像 $\gamma : I \rightarrow H_+^3(-1), \mathbf{a}_i : I \rightarrow S_1^3, (i = 1, 2, 3)$ で $\{\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が \mathbb{R}_+^4 の擬直交枠をなすものを考えます。このとき、

$$F_{(\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} : \mathbb{R} \times I \rightarrow H_+^3(-1) : F_{(\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}(s, t) = \gamma(t) + s\mathbf{a}_1(t) + \frac{s^2}{2}(\gamma(t) + \mathbf{a}_2(t))$$

を**ホロ円織面** (の径数表示) と呼びます。いま、 $t = t_0$ を固定すると、 $F_{(\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}(s, t_0)$ はホロ円となりますがそれを**母ホロ円**と呼びます。ここで、ホロ円織面に対してその**基本的不変量**を以下のように定めます： $\{\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が \mathbb{R}_+^4 の擬直交枠であることから、各ベクトルを行ベクトルとみて、縦に並べると、ローレンツ群に属する 4 次行列の 1 径数族

$$A(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \mathbf{a}_1(t) \\ \mathbf{a}_2(t) \\ \mathbf{a}_3(t) \end{pmatrix} \in SO_0(3, 1)$$

が得られます。この行列の 1 径数族から、ローレンツ群のリー環内の曲線

$$C(t) = A'(t)A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \\ c_1(t) & 0 & c_4(t) & c_5(t) \\ c_2(t) & -c_4(t) & 0 & c_6(t) \\ c_3(t) & -c_5(t) & -c_6(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3, 1)$$

が得られます。任意に与えられた $\mathfrak{so}(3, 1)$ 内の曲線 $C(t)$ と初期データ $A(0) \in SO_0(3, 1)$ に対して、線形常微分方程式 $A'(t)A^{-1}(t) = C(t) \in \mathfrak{so}(3, 1)$ のただ一つの解 $A(t) \in SO_0(3, 1)$ が存在するので、この $A(t)$ からホロ円織面を作る事ができます。その意味で $C(t)$ がホロ円織面の基本的不変量です。このようにして、 $\mathfrak{so}(3, 1)$ への C^∞ 写像の空間 $C^\infty(I, \mathfrak{so}(3, 1))$ をホロ円織面全体の空間と見なす事ができます。ここで、この空間は Whitney C^∞ -位相によって位相空間とします。

7 ホロ平坦ホロ円織面

ホロ円織面 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}(s, t)$ に対して、 $\ell(t) = \gamma(t) + a_2(t) \in LC_+^*$ と表すとき、このホロ円織面がホロ平坦であるとは、 $\ell(t)$ が任意の点 (t, s) に於いて、 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}(s, t)$ の光的法線ベクトルとなることです。この条件を、基本的不変量で言い表すと以下の命題となります：

命題 7.1 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ がホロ平坦である為の必要十分条件は $c_2(t) = c_1(t) - c_4(t) = 0$ である。

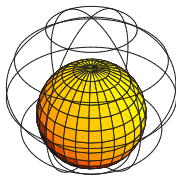
一般にホロ円織面は特異点を持ちます。特にホロ平坦なホロ円織面の特異点は以下のように特徴づける事が出来ます。 (s, t) がホロ平坦なホロ円織面 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}(s, t)$ の特異点であるための必要十分条件は

$$\left(1 + \frac{s^2}{2}\right) c_3(t) + s c_5(t) + \frac{s^2}{2} c_6(t) = 0$$

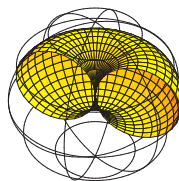
です。各 $t = t_0$ を固定すると、特異点は s に関する 2 次方程式の解となります。従って、各 $t = t_0$ に対して、そこを通る母ホロ円上にある特異点の個数はジェネリックには 2 個以下であることが解ります。これは、ユークリッド空間内の可展開面の場合に、 $t = t_0$ を固定した場合に、母線上に現れる特異点はジェネリックには一個以下と言う性質と比較すると興味深いことです。ここで、上記の 2 次方程式の判別式は

$$\delta_C(t) = c_5^2(t) - 2c_3(t)(c_3(t) + c_6(t))$$

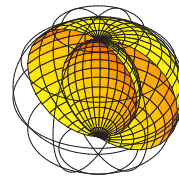
で、この判別式によって、各母ホロ円上に特異点が何個載っているかが判定されます。一方、可展開面は古典的な分類結果として、柱面、錐面、接線曲面の一部分またはその張り合わせであると言う事実が知られています [8]。最初にこの分類に類似する、ホロ平坦ホロ円織面の分類を考えます。 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ が一般化されたホロ錐であるとは、条件 $c_1(t) = c_2(t) = c_3(t) = c_4(t) = 0$ を満たす事とします。一般化されたホロ錐にはさらに以下の様なものがあります： $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ が一つの頂点を持つホロ錐であるとは、条件 $c_1(t) = c_2(t) = c_3(t) = c_4(t) = c_5(t) = 0, c_6(t) \neq 0$ を満たす事です。また $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ が二つの頂点を持つホロ錐とは、条件 $c_1(t) = c_2(t) = c_3(t) = c_4(t) = 0, c_5(t) \neq 0$ を満たしさらに $\text{and } \exists \lambda \text{ s.t. } c_5(t) = \lambda c_6(t)$ を満たす事です。さらに $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ が錐的ホロ球面であるとは、条件 $c_1(t) = c_2(t) = c_3(t) = c_4(t) = c_6(t) = 0, c_5(t) \neq 0$ をみたすことで、これらの三つの場合をホロ錐と呼びます。また、 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ が半ホロ錐であるとは、条件 $c_1(t) = c_2(t) = c_3(t) = c_4(t) = 0, c_5(t) \neq 0$ を満たし、さらに関数 $c_6(t)$ が孤立零点を持つ事とします。以下は、ホロ錐の図をポアンカレボールモデルのなかで描いたものです：



錐的ホロ球面



一つの頂点を持つホロ錐



二つの頂点を持つホロ錐

これらは、みな Dupin の cyclide です。また、これらの図では頂点がみな真ん中にある場合ですが頂点が端の方にずれていても、ホロ錐です。

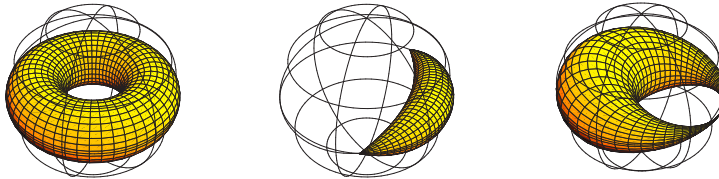


一つの頂点が中心からづれたホロ錐 二つの頂点が中心からづれたホロ錐

一方、 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ が**正則ホロ平坦ホロ円織面**であるとは、 $c_3(t) \neq 0$ であり、かつ

$$\begin{cases} c_5(t_0) = 0 & \text{if } \exists t_0 \in I \text{ s.t. } c_3(t_0) + c_6(t_0) = 0, \\ \delta_C(t) < 0 & \text{if } c_3(t) + c_6(t) \neq 0. \end{cases}$$

を満たす事です。ユークリッド空間内の可展開面の場合、正則で完備なものは Hartman-Nirenberg の定理 [6] から、柱面しかないことが知られています。しかし、ホロ平坦ホロ円織面の場合、様々な完備曲面が存在します。たとえば以下の図はこれらの、正則ホロ平坦ホロ円織面の中でホロ柱面とも呼ばれるべき曲面をポアンカレボールモデルの中に描いたものです。これらもまた、Dupin の Cyclide です。



ホロトーラス

バナナ

クロワッサン

最後に、 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ が**ホロ平坦接ホロ円織面**とは条件、 $c_2(t) = c_1(t) - c_4(t) = c_3(t) = 0$ をみたし、関数 $c_1(t)c_6(t)$ が孤立零点を持つ事です。このとき、以下の分類定理が、可展開面の古典的分類定理の類似です。

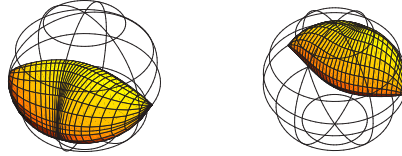
定理 7.2 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ をホロ平坦ホロ円織面とする。さらに、特異点の分枝の一方は $\gamma(t)$ 上にあると仮定する。このとき、 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ 以下のホロ平坦ホロ円織面のどれかの部分集合である：

- (1) 正則ホロ平坦ホロ円織面
- (2) ホロ錐
- (3) 半ホロ錐
- (4) ホロ平坦接ホロ円織面
- (5) 上記の 4 種類の曲面の張り合わせからなるホロ円織面

ここで、正則ホロ平坦ホロ円織面の一つの例として

$$F_{(\gamma, e, \pm n)}(s, t) = \gamma(t) + se + \frac{s^2}{2}(\gamma(t) \pm n(t))$$

を考えます。この曲面を**平面曲線の従法線のホロ円織面**と呼びます。この曲面はホロ平坦なので、曲率線がホロ円でその方向に沿ったホロ円の曲率は零ですが言い換えると、その方向に沿ったドシッター主曲率は 1 です。さらに γ の双曲の曲率が $\kappa_h(t) = 1$ なる点では、その点から出ている母ホロ円上のすべての点が臍点です。この曲面は、Willmore 予想に関連して得られた、塩浜・高木の定理⁶[24] の双曲空間版 [25] への J. Aledo and J. A. Gálvez[1] によって与えられた反例⁷の曲面の具体的な径数付けとなっています。実際の曲面の図は以下のようなものです：



8 ホロ平坦ホロ円織面の特異点

定理 7.2 の分類のなかで、もっとも興味深い特異点を持つものはホロ平坦接ホロ円織面です。ここで、リー環 $\mathfrak{so}(3, 1)$ の線形部分空間

$$\mathfrak{hf}_\sigma(3, 1) = \left\{ C = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & 0 & c_4 & c_5 \\ c_2 & -c_4 & 0 & c_6 \\ c_3 & -c_5 & -c_6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3, 1) \mid c_2 = c_1 - c_4 = c_3 = 0 \right\}$$

を考えます。ホロ平坦ホロ円織面の定義から、この線形空間への C^∞ 写像全体 $C^\infty(I, \mathfrak{hf}_\sigma(3, 1))$ の空間 (Whitney C^∞ -位相の相対位相を与える) をホロ平坦ホロ円織面の空間とします。このとき、曲面上の特異点集合は二つの分枝をもち、そのうちの一つはいつも γ 上にあることが解ります。そして、ジェネリックにはそれら二つの分枝は時々衝突したり、一方が無窮遠に飛んで行ったりする場合 (曲面の**エンド**に特異点が漸近する) があります。その様子は以下の特異点の分類定理により解ります。

定理 8.1 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}$ をホロ平坦接ホロ円織面で、特異点集合の分枝の一つは γ 上にあるとする。

(A) $c_5(t_0) \neq 0$ で $c_6(t_0) \neq 0$ とすると、 $(0, t_0)$ と $(-s(t_0), t_0)$ が特異点である。ただし、 $s(t) = 2c_5(t)/c_6(t)$ とする。この場合以下がなりたつ：

- (1) 点 $(0, t_0)$ が**カスプ状曲面**であるための必要十分条件は $c_1(t_0) \neq 0$ である。
- (2) 点 $(0, t_0)$ が**つばめの尾**であるための必要十分条件は $c_1(t_0) = 0$ かつ $c'_1(t_0) \neq 0$ である。
- (3) 点 $(-s(t_0), t_0)$ がカスプ状曲面であるための必要十分条件は $(c_1 - s')(t_0) \neq 0$ である。
- (4) 点 $(-s(t_0), t_0)$ が**つばめの尾**であるための必要十分条件は $(c_1 - s')(t_0) = 0$ ($(c_1 - s')'(t_0) \neq 0$) である。

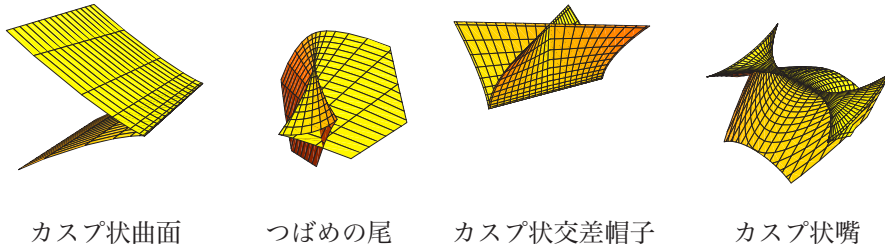
(B) $c_5(t_0) = 0$ で $c_6(t_0) \neq 0$ とすると $s(t_0) = 0$ となる。従って、 $(0, t_0) = (-s(t_0), t_0)$ が特異点である。このとき、点 $(0, t_0)$ が**カスプ状嘴**であるための必要十分条件は $c'_5(t_0) \neq 0$, $c_1(t_0) \neq 0$ かつ $(c_1 - s')(t_0) \neq 0$ である。

(C) $c_5(t_0) \neq 0$ で $c_6(t_0) = 0$ とするとき、点 $(0, t_0)$ が**カスプ状交差帽子**であるための必要十分条件は $c_1(t_0) \neq 0$ かつ $c'_6(t_0) \neq 0$ である。この場合、 $\gamma(t_0)$ が母ホロ円 $F_{(\gamma, a_1, a_2)}(s, t_0)$ 上の唯一の特異点であり、もう一つの特異点集合の分枝は t_0 で無窮遠に漸近する。

⁶ 「主曲率の一つが一定の完備曲面は球面 (全臍的) か臍点が存在しないかのいずれかである」と言う定理です。

⁷ リーマン計量だけ与えられていて、存在定理からそのような反例が存在すると言う主張です。

この定理に現れた、特異点の図を図示すると以下のようになります：



これらの特異点のうちで、カスパ状曲面とつばめの尾はルジャンドル特異点論における波面の特異点として、ジェネリックに現れるものです。また、この 2 種類の特異点は双曲空間内の平坦曲面 ($K_I \equiv 0$) の特異点としてもジェネリックに現れます [23]。さらに、ユークリッド空間内の可展開面の特異点として、ジェネリックに現れるものはカスパ状曲面、つばめの尾、カスパ状交差帽子の 3 種類であることが知られています [8]。また、双曲空間内の外在的平坦曲面 ($K_e \equiv 0$) の特異点は、ベルトラミ・クラインのモデルを考えるとユークリッド空間内の可展開面の特異点と微分同相であることがわかり、これら 3 種類の特異点がジェネリックに現れることが解ります。一方、ホロ平坦ホロ円織面では、これら 3 種類の特異点の他に、カスパ状嘴がジェネリックに現れることが解りました。この特異点は波面の特異点の分岐の分類に現れるもので波面の空間内では不安定ですぐに 2 つのつばめの尾か 2 つのカスパ状曲面に分岐してしまうものです。しかし、この平坦ホロ円織面の空間内では、ジェネリックに現れ、少し位相移動しても安定であることがわかります。このように、ホロ平坦曲面は非特異な場合にも、特異点の分類においても、他の平坦性 ($K_h \equiv 0, K_e \equiv 0$) を持つ曲面より遥かに興味深い曲面であると思われます。また、全空間としての双曲空間は、曲率正の場合の 3 次元球面や曲率零の場合のユークリッド空間と比較して、これまた豊富な幾何学を保有していることがこのホロ球面的幾何学の研究を通して理解できます。

参考文献

- [1] J. Aledo and J. A. Gálvez, *Complete surfaces in the hyperbolic space with a constant principal curvature*, Math. Nachr. **278** (2005), 1111–1116.
- [2] R. L. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space* in Théorie des variétés minimales et applications (Palaiseau, 1983–1984), Astérisque No. 154–155, (1987), 12, 321–347, 353 (1988).
- [3] M. Buosi, S. Izumiya and M. A. Soares Ruas, *Lower bounds for total Absolute Horospherical curvature of Submanifolds in Hyperbolic Space*. in preparation.
- [4] C. L. Epstein *The hyperbolic Gauss map and quasiconformal reflections*. J. Reine Angew. Math., **372** (1986), 96–135
- [5] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, *Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. A plateau problem at infinity*, Trans. A.M. S. **356** (2004), 3405–3428.
- [6] P. Hartman and L. Nirenberg, *On spherical image whose jacobians do not change signs*. Amer. J. Math. **81**, (1959) 901–920.
- [7] 泉屋 周一、非ユークリッド平面上のユークリッド的世界。数学通信 12 巻 2 号、市民講演会記録 (2007) 掲載予定

- [8] S. Izumiya and N. Takeuchi, *Geometry of ruled surfaces*. Applicable math. in the golden age, J. C. Misra ed. Narosa Publ. House, (2003) 305–338.
- [9] S. Izumiya, D. Pei and T. Sano, *Singularities of hyperbolic Gauss maps*. Proc. London Math. Soc., **86** (2003), 485–512
- [10] S. Izumiya, D. Pei, T. Sano and E. Torii, *Generic differential geometry of hyperbolic plane curves*. Acta. Math. Sinica. **20** (2004), 543–550.
- [11] S. Izumiya, D-H. Pei and T. Sano, *Horospherical surfaces of curves in Hyperbolic space*. Publ. Math. Debrecen, **64** (2004), 1–13.
- [12] S. Izumiya, D-H. Pei and M. Takahashi, *Singularities of Evolutes of hypersurfaces in Hyperbolic space*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, **47** (2004), 131–153.
- [13] S. Izumiya, D-H. Pei, M.C. Romero Fuster and M. Takahashi, *On the horospherical ridges of submanifolds of codimension 2 in hyperbolic n -space $H_+^n(-1)$* . Bull. Braz. Math. Soc. **35** (2) (2004), 177–198.
- [14] S. Izumiya, D. Pei and M.C. Romero Fuster, *Umbilicity of spacelike submanifolds of Minkowski space*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **134A** (2004), 375–387.
- [15] S. Izumiya, D. Pei and M.C. Romero Fuster, *The lightcone Gauss map of a spacelike surface in Minkowski 4-space*, Asian J. Math., **8** (2004), 511–530.
- [16] S. Izumiya, D-H. Pei, M.C. Romero Fuster and M. Takahashi, *The horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic n -space*. Journal of London Mathematical Society, **71** (2005), 779–800.
- [17] S. Izumiya, D-H. Pei and M.C. Romero Fuster, *The horospherical geometry of spacelike surfaces in Hyperbolic 4-space*. Israel Journal of Mathematics, **154** (2006), 361–379.
- [18] S. Izumiya and M. C. Romero Fuster, *The horospherical Gauss-Bonnet type theorem in hyperbolic space*. Journal of Math. Soc. Japan, **58** (2006), 965–984.
- [19] S. Izumiya, M. Kossowski, D. Pei and M.C. Romero Fuster, *Singularities of lightlike hypersurfaces in Minkowski 4-space*. Tohoku Mathematical Journal, **58** (2006), 71–88
- [20] S. Izumiya and M. C. Romero Fuster, *Lightlike flat geometry on submanifolds of codimension two in Minkowski space*. Selecta Mathematica New Series, **13** (2007), 23–55.
- [21] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in Hyperbolic space*. Preprint (2007), <http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp/literature/back/2007.html>
- [22] T. Kobayashi, *Asymptotic behaviour of the null variety for a convex domain in a non-positively curved space form*, Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, **36** (1989), 389–478.
- [23] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), no. 2, 303–351.
- [24] K. Shiohama and R. Takagi, *A characterization of a standard torus in \mathbb{E}^3* , J. Differential Geom. **4** (1970), 477–485.
- [25] M. Zhisheng, *Complete surfaces in \mathbb{H}^3 with a constant principal curvature*, in: Differential Geometry and Topology, Lecture Notes in Mathematics **1369** Springer-Verlag, Berlin, (1989), 176–182.

ON THE LARGE-SCALE GEOMETRY OF THE WEIL-PETERSSON METRIC

KENNETH J. SHACKLETON

Abstract

In this proceedings article we begin by discussing joint work with Javier Aramayona and Hugo Parlier, studying the geometry of the pants graph of a surface after Hatcher and Thurston. Inspired by a recent theorem of Brock's, the aim of this work is to reinforce the pants graph as a good combinatorial model for the Weil-Petersson metric. We then discuss a question of Brock's and in two important cases prove, in outline, the existence of an algorithm for the computing of distances in the pants graph.

KEYWORDS: Weil-Petersson metric; mapping class group; pants graph.

1 Introduction

When studying a complicated object in low dimensional geometry, such as the Weil-Petersson metric on Teichmüller space, it can often be helpful to introduce a combinatorial model to the setting and study this instead. Such models are often constructed from curves on a given surface. Of course we sacrifice much of the structure we had to begin with, be it analytic or algebraic, but in return we should expect to have greatly simplified matters.

An excellent example of such a model is the pants graph after Hatcher and Thurston, where an important theorem of Brock's tells us that this is the correct combinatorial model for the Weil-Petersson metric.

2 The pants graph

Let Σ be a compact, connected and orientable surface of genus $g(\Sigma)$ and $|\partial\Sigma|$ boundary components, and refer to as the *mapping class group* $\text{Map}(\Sigma)$ the group of all self-homeomorphisms of Σ up to homotopy. We shall refer to as a *curve* on Σ the free homotopy class of any simple closed loop that neither bounds a disc nor a 3-holed sphere containing two components of $\partial\Sigma$. (For example, if Σ has negative Euler characteristic, then Σ carries a hyperbolic metric and any curve may then be uniquely represented by a simple closed geodesic.) A *multicurve* is then by definition a set of pairwise distinct and pairwise disjoint curves, examples of which include single curves and the empty set. A *pants decomposition* is

2000 MSC: 57M50 (primary); 05C12 (secondary)

a multicurve maximal subject to inclusion. Every pants decomposition cuts the surface into a disjoint union of 3-holed spheres. Finally, two distinct pants decompositions are said to be related by an *elementary move* if they agree on all but a pair of curves, either intersecting once or intersecting twice with zero algebraic intersection.

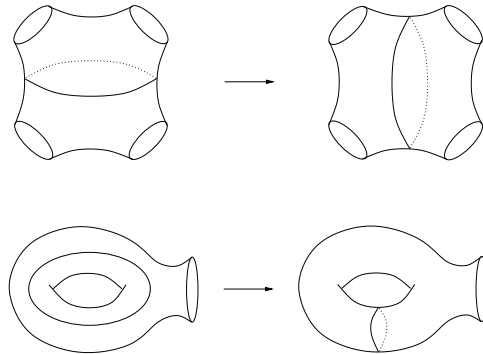


Figure 1: The two types of elementary move.

After Hatcher and Thurston [11], to the surface Σ one may associate a graph $\mathcal{P}(\Sigma)$, the *pants graph*, whose vertices are all the pants decompositions of Σ and any two vertices are connected by an edge if and only if they differ by an elementary move. (See Fig. 1.) Since this graph is connected, one may define a path-metric d on $\mathcal{P}(\Sigma)$ by first assigning length 1 to each edge and then regarding the result as a length space. We shall often refer to the pants graph by name or just by \mathcal{P} , suppressing the notation for the surface.

The pants graph, with its own geometry, is a fundamental object to study, for it features in several major topics: Brock [4] revealed deep connections with volumes of hyperbolic 3-manifolds and proved the pants graph is the correct combinatorial model for the Weil-Petersson metric on Teichmüller space, for the two are quasi-isometric and thus share the same large-scale geometry. (The notion of a quasi-isometry is a (coarse) weakening of the notion of an isometry. To be more precise recall that, by definition, a map $\phi : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ between metric spaces is said to be a *quasi-isometric embedding* if there exist constants $K \geq 1$ and $C \geq 0$ such that

$$\frac{1}{K}d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq Kd_X(x_1, x_2) + C$$

for all $x_1, x_2 \in X$. The map ϕ is said to be a *quasi-isometry* if in addition there exists a quasi-isometric embedding $\phi^{-1} : Y \rightarrow X$ and a constant $C' \geq 0$ such that $d_X(\phi^{-1} \circ \phi(x), x)$ and $d_Y(\phi \circ \phi^{-1}(y), y)$ are both at most C' . Two metric spaces are said to be *quasi-isometric* if there exists a quasi-isometry between them. Examples of quasi-isometric metric spaces include any two bounded metric spaces, and the real line and \mathbb{Z} .)

The mapping class group admits a natural action on the pants graph by isometries, and indeed it is a theorem of Margalit's [13], bootstrapping to a theorem of Ivanov's [11], that the isometry group of (\mathcal{P}, d) is almost always isomorphic to the mapping class group. In addition, Masur-Schleimer [16] proved the pants graph of any closed surface of genus at least 3 is one-ended, so that the complementary graph of any bounded set of vertices has exactly one unbounded component. With only a few exceptions the pants graph is not hyperbolic in the sense of Gromov [6], for it almost always contains a quasi-isometrically embedded copy of the Euclidean plane.

3 Motivation and main results

To appreciate the authors' motivation in writing [1] and [2] requires us to first recall some more background material: It is well known that the Weil-Petersson metric is not complete, for as noted by Wolpert [19] and by Chu [7], the lengths of simple closed geodesics can approach zero in finite time. The completion of the Weil-Petersson metric is in fact characterised by attaching so-called strata [14], and each corresponds bijectively with a multicurve on the surface. Each stratum is the lower dimensional Teichmüller space, or product of such spaces, associated to a noded surface, on which the length of each component of just the corresponding multicurve has degenerated to zero. It is a theorem of Wolpert [20] that each stratum is a totally geodesic subspace of the completed Weil-Petersson metric.

The quasi-isometry defined by Brock [4] extends very naturally to the completion of the Weil-Petersson metric, sending each stratum to the subgraph of \mathcal{P} spanned by all vertices containing the corresponding multicurve. It is an immediate consequence that each of these subgraphs of \mathcal{P} is uniformly quasi-convex, so that each such subgraph has a uniform neighbourhood containing every geodesic connecting any two of its vertices. (For any two vertices x and y of a metric graph, by a *geodesic from x to y* we mean a shortest sequence of vertices, beginning with x and ending with y , where any consecutive pair spans an edge.)

The objective of [1] and [2] is to understand to what extent the geometry of the Weil-Petersson metric is replicated in the pants graph. In particular, we seek to establish the full combinatorial analogue of Wolpert's theorem, that, for any multicurve ω , the subgraph \mathcal{P}_ω spanned by every pants decomposition containing ω be *totally geodesic*, and as such contains every geodesic connecting any two of its vertices. (We reserve the word *convex* to describe subgraphs that contain at least one geodesic between any two of its vertices.) This remains an intriguing and open problem, owing largely to the demanding combinatorics of the pants graph.

The first results in this vein are recalled here as Theorem 1 and Theorem 2.

Theorem 1 (APS) *Let Σ be a compact, connected and orientable surface, and let ω be a codimension 1 multicurve on Σ . Then, the subgraph \mathcal{P}_ω of $\mathcal{P}(\Sigma)$ is totally geodesic.*

We remark that for any codimension 1 multicurve ω , the graph \mathcal{P}_ω is isomorphic to a Farey graph. Indeed, one can show that all Farey subgraphs are thus accounted for – this is precisely Lemma 6 of [1], for instance.

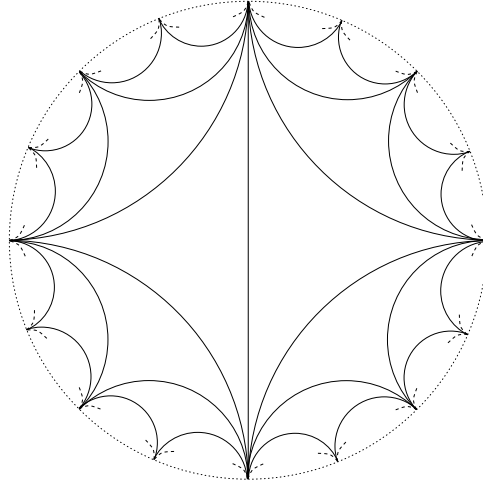


Figure 2: The Farey graph can be represented on a disc, with edges in the interior and vertices on the bounding circle.

To decipher the statement of the second theorem, recall that a multicurve on Σ is said to be a *2-handle multicurve* only if its complement is the union of 3-holed spheres and two further surfaces, each homomorphic to either a 1-holed torus or a 4-holed sphere only one boundary component of which is to represent a curve. Similarly, the subgraph \mathcal{P}_ω of \mathcal{P} spanned by all pants decompositions containing the 2-handle multicurve ω is isomorphic to the product of two Farey graphs.

Theorem 2 (APS) *Let Σ be a compact, connected and orientable surface, and denote by ω any 2-handle multicurve on Σ . Then, the subgraph \mathcal{P}_ω of \mathcal{P} is totally geodesic.*

Considering Wolpert’s theorem and Brock’s theorem, Aramayona-Parlier-S have asserted the following conjecture. The statement of this conjecture generalises both Theorem 1 and Theorem 2 above.

Conjecture 3 (APS) *Let Σ be a compact and orientable surface (possibly disconnected), and let ω be one of its multicurves. Then, the subgraph \mathcal{P}_ω of \mathcal{P} is totally geodesic.*

In Section 5, the last section of this note, we apply Theorem 1 to prove the existence of an algorithm for the computing of distances in the pants graph of 5-holed sphere or the pants graph of the 2-holed torus. The argument almost applies to all surfaces, but is currently in need of an affirmative solution to Conjecture 3 to deliver the decisive contradiction. That is, at present we can prove the following theorem whose statement is comparable with that of Theorem 1 from [17].

Theorem 4 *There exists a computable increasing function $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that the following holds: Suppose Σ is either the 5-holed sphere or the 2-holed torus. Let ν_0 and ν_n be any two pants decompositions of Σ , and let $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$ be any geodesic. Then, $\iota(\nu_1, \nu_n) \leq F(\iota(\nu_0, \nu_n))$.*

Among other things, Theorem 4 implies the number of pants decompositions that can lie on a geodesic connecting two given vertices μ and ν is both finite and controlled in terms of some visible data (here the intersection number $\iota(\mu, \nu)$). Thus, a geodesic connecting μ and ν can be found algorithmically as a shortest path in a bounded search space of pants decompositions, and by reading off the length of this path we determine the distance $d(\mu, \nu)$.

The proof of Theorem 4 uses a “nesting” argument to carry “large” intersection number with ν all the way from ν_1 to the penultimate vertex ν_{n-1} . In some respects this argument is not unlike that carried out for Harvey’s [9] *curve complex*, where Leasure [12] gives the first proof of the existence of a distance computing algorithm for closed surfaces of genus at least 2 and subsequently, and independently, the author [17] proves the existence of a distance computing algorithm for all surfaces. Theorem 4 provides a partial answer to a question of Brock’s [5], prompted by Leasure’s thesis.

4 Applications

Let us indicate two consequences of Theorem 1, the first regarding the dynamics of the natural action of the mapping class group and the second the global geometry of the pants graph. First, note that for any hyperbolic self-isometry f of a Farey graph, there exists a bi-infinite geodesic invariant under the action of f^2 .

Corollary 5 *Let $f \in \text{Map}(\Sigma)$ be any mapping class leaving invariant a subgraph of $\mathcal{P}(\Sigma)$ isomorphic to a Farey graph, on which it acts as a hyperbolic self-isometry. Then, there exists a bi-infinite geodesic in $\mathcal{P}(\Sigma)$ invariant under the action of f^2 .*

We remark that examples of such mapping classes include those whose restriction to the complement of some complexity 1 subsurface Y is the identity and whose restriction to Y is a pseudo-Anosov mapping class. There exists an analogous corollary of Theorem 2, offering an invariant convex plane. It would be of much interest to extend this to all pure mapping classes, finding plenty of invariant convex subgraphs of the pants graph.

Second, let ω be a multicurve on Σ with the maximal number $\lfloor (3g(\Sigma) + |\partial\Sigma| - 3)/2 \rfloor$ of complexity 1 complementary surface components. Then, the subgraph of $\mathcal{P}(\Sigma)$ spanned by all pants decompositions containing ω is isomorphic to a product of Farey graphs, each totally geodesic by Theorem 1. Considering one bi-infinite geodesic in each Farey graph, we deduce the following. Note, by a *line* in the free abelian group \mathbb{Z}^r we shall mean a coset of any one of the \mathbb{Z} -factors.

Corollary 6 *Let r denote the integer $\lfloor (3g(\Sigma) + |\partial\Sigma| - 3)/2 \rfloor$. There exists a quasi-isometric embedding from \mathbb{Z}^r , given the L^1 -metric, into $\mathcal{P}(\Sigma)$ such that the image of any line is a geodesic.*

Thus, infinitely many of the maximal quasi-flats in $\mathcal{P}(\Sigma)$ identified by the Geometric Rank Theorem [6, 3, 8] are convex in their principal directions. Nonetheless, establishing the existence of convex maximal flats remains an open problem.

5 Computing distances

The aim of this section is to prove, at least in outline, the statement of Theorem 4 and then from this deduce the existence of an algorithm for the computing of distances in the two pants graphs. The main idea of the proof is to argue by contradiction, supposing that $\iota(\nu_1, \nu_n)$ is too “large”, and then carry “large” intersection with ν_n all the way from ν_1 to the penultimate vertex ν_{n-1} . Since $\iota(\nu_{n-1}, \nu_n)$ is in fact only 1 or 2 and, in particular, is controlled, we arrive at a contradiction.

To this end, suppose for contradiction that $\iota(\nu_1, \nu_n) \gg \iota(\nu_0, \nu_n)$. (This vague statement can be given a precise meaning by retrospectively deciding just how large $F(\iota(\nu_0, \nu_n))$ needs to be to make the argument work, and instead begin by supposing $\iota(\nu_1, \nu_n) > F(\iota(\nu_0, \nu_n))$.) We shall use the same notation to represent both a set curves of Σ and a multiloop on Σ in general position, emphasising the latter by appending “ $\subset \Sigma$ ” when expedient.

Consider any (closed) subinterval J of $\nu_n - \nu_0 \subset \Sigma$ such that, say, $|\nu_1 \cap J| \geq 100$. Then, there exist at least 10 components of $\nu_1 - J$ pairwise homotopic relative to J . Since $|\nu_1 \cap \nu_0|$ and $|\nu_1 \cap \nu_2|$ are both at most 2, all but at most 4 of these arcs are disjoint from both ν_0 and ν_2 . Using J , we can complete any one of these arcs to form a curve δ . We can note at

once that $\iota(\delta, \nu_0)$ is zero, for $J \subset \nu_n - \nu_0$, and so $\delta \in \nu_0$. If in addition $\iota(\delta, \nu_2)$ is zero, so that $\delta \in \nu_2$, then we arrive at two contradictions: the first, which generalises to higher indices, is that ν_0, ν_1, ν_2 is a geodesic whose ends are both contained in a common Farey graph, that corresponding to $\{\delta\}$, but with a vertex not contained in this Farey graph, namely ν_1 . This is contrary to the statement of Theorem 1. (The second contradiction, and which does not generalise, is that in fact ν_0 and ν_2 are both equal!) It follows that $\nu_2 \cap J$ is not empty. Applying this argument to every such (closed) subinterval J of $\nu_n - \nu_0$, we find plenty of components $\nu_2 - J$ parallel to, and interleaved with, many components of $\nu_1 - J$. Each such subarc of ν_2 is necessarily disjoint from ν_0 .

This argument can be applied inductively with respect to index, ensuring that there are many components of $\nu_m - J$ parallel to and interleaved with many components of $\nu_{m-1} - J$ and so forth, so that in particular each such component of $\nu_m - J$ is disjoint from ν_0 . We at this point decide how large $F(\iota(\nu_0, \nu_n))$ needs to be to ensure $\iota(\nu_{n-1}, \nu_n)$ is at least 3. This gives a contradiction, and we complete a sketch proof of Theorem 4. The formal version of this argument is in preparation, and will appear in [18].

Applying Theorem 4 inductively, reversing the given geodesic and repeating, we deduce the following.

Corollary 7 *There exists a computable increasing function $F' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that the following holds: Suppose Σ is either the 5-holed sphere or the 2-holed torus. Let ν_0 and ν_n be any two pants decompositions of Σ , and let $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$ be any geodesic. Then, $\iota(\nu_0, \nu_j) + \iota(\nu_j, \nu_n) \leq F'(\iota(\nu_0, \nu_n))$ for each $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.*

For any two pants decompositions μ and ν of Σ , the 5-holed sphere or the 2-holed torus, denote by $T(\mu, \nu)$ the set of pants decompositions P that contain the (possibly empty) multicurve $\mu \cap \nu$ and are such that $\iota(\mu, P) + \iota(P, \nu) \leq F(\iota(\mu, \nu))$. Then, the set $T(\mu, \nu)$ is finite and has cardinality bounded above explicitly in terms of $\iota(\mu, \nu)$; one way to see this is to regard $\mu \cup \nu \subset \Sigma$ as a grid on Σ and mark on this grid, away from the set of points $\mu \cap \nu \subset \Sigma$, at most $F(\iota(\mu, \nu))$ points and then attempt to connect these up to form a pants decomposition containing the multicurve $\mu \cap \nu$ and without introducing any additional intersection with either μ or ν . There are other ways of seeing that the number of geodesics connecting any two vertices is necessarily finite; as noted by Cyril Lecuire, one can do this by instead passing from an infinite sequence of pants decompositions to a limiting lamination in the Hausdorff topology before appealing to Theorem 1.

According to Corollary 7, the set $T(\mu, \nu)$ contains the vertices of every geodesic in $\mathcal{P}(\Sigma)$ connecting μ to ν . Thus, any shortest path from μ to ν built from pants decompositions contained in $T(\mu, \nu)$ is a geodesic. If we read off the length of such a path, we have then succeeded in computing the distance $d(\mu, \nu)$ as required. \diamond

We conclude this note with an observation. Like the pants graph, the *curve graph* after Harvey [9] is locally infinite, and between any two vertices of distance at least 2 there exist infinitely many geodesics. To address this, Masur-Minsky [15] identified a special class of geodesics they call the *tight geodesics*. These not only exist between any two vertices of the curve graph, but there only ever exist finitely many. If Conjecture 3 turns out to be false, or perhaps worse too complicated to prove, we might instead consider various naïve notions of tight geodesic for the pants graph. It is unclear what a good notion of tightness might be here, but we might start by saying that a geodesic ν_0, \dots, ν_n is *tight* if, for any two indices $i < j$, we have $\nu_i \cap \nu_j \subseteq \nu_i \cap \dots \cap \nu_j$. The argument outlined for Theorem 4 then implies the number of tight geodesics between any two vertices of *any* pants graph is always controlled and finite, however we have yet to establish their existence, equivalently that the subgraphs of the pants graph corresponding to multicurves are all at least convex. This would still be more than enough, using the same argument outlined earlier, to deduce the existence of an algorithm for computing distances in any pants graph.

Acknowledgements

The author is supported by a long-term Japan Society for the Promotion of Science post-doctoral fellowship, number P06034, and he wishes to thank the JSPS for its support. The author continues to be grateful to Javier Aramayona, Eiko Kin, Sadayoshi Kojima, Cyril Lecuire, Hugo Parlier, Makoto Sakuma, and Mitsuhiro Takazawa for many stimulating conversations on this topic.

References

- [1] J. Aramayona, H. Parlier, K. J. Shackleton, *Totally geodesic subgraphs of the pants complex* : arXiv:math.GT/0608752.
- [2] J. Aramayona, H. Parlier, K. J. Shackleton, *Constructing convex planes in the pants complex* : arXiv:math.GT/0702837.
- [3] J. A. Behrstock, Y. N. Minsky, *Dimension and rank for mapping class groups* : to appear in Ann. Math. (2)
- [4] J. F. Brock, *The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores* : Journal of the American Mathematical Society **16** no. 3 (2003) 495–535.
- [5] J. F. Brock, *Weil-Petersson translation distance and volumes of mapping tori* : Communications in Analysis and Geometry **11** no. 5 (2003) 987–999.
- [6] J. F. Brock, B. Farb, *Curvature and rank of Teichmüller space* : American Journal of Mathematics **128** (2006) 1–22.

- [7] T. Chu, *The Weil-Petersson metric in the moduli space* : Chinese J. Math. **4** (1976) no. 2 (29–51)
- [8] U. Hamenstädt, *Geometry of the mapping class groups III: Quasi-isometric rigidity* : arXiv:math.GT/0512429.
- [9] W. J. Harvey, *Boundary structure of the modular group* : in “Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference” (ed. I. Kra, B. Maskit), Annals of Mathematical Studies No. 97, Princeton University Press (1981) 245–251.
- [10] A. E. Hatcher, W. P. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface* : Topology **19** (1980) 221–237.
- [11] N. V. Ivanov, *Automorphisms of complexes of curves and Teichmüller spaces* : International Mathematics Research Notices **14** (1997) 651–666.
- [12] J. P. Leasure, *Geodesics in the complex of curves of a surface* : PhD thesis University of Texas (2002), available on the Texas at Austin Digital Archive from January 2006.
- [13] D. Margalit, *Automorphisms of the pants complex* : Duke Mathematical Journal **121** No. 3 (2004) 457–479.
- [14] H. A. Masur, *Extension of the Weil-Petersson metric to the boundary of Teichmüller space* : Duke Mathematical Journal **43** no. 3 (1976) 623–635.
- [15] H. A. Masur, Y. N. Minsky, *Geometry of the complex of curves II: Hierarchical structure* : Geometry & Functional Analysis **10** (2000) 902–974.
- [16] H. A. Masur, S. Schleimer, *The pants complex has only one end* : in “Spaces of Kleinian groups” (eds. Y. N. Minsky, M. Sakuma, C. M. Series) London Math. Soc. Lecture Note Ser. **329** (2006) 209–218.
- [17] K. J. Shackleton, *Tightness and computing distances in the curve complex* : preprint, University of Southampton (2004).
- [18] *Computing distances in two pants complexes* : in preparation.
- [19] S. A. Wolpert, *Noncompleteness of the Weil-Petersson metric for Teichmüller space* : Pacific J. Math. **61** no. 2 (1975) 573–577.
- [20] S. A. Wolpert, *Geometry of the Weil-Petersson completion of Teichmüller space* : Surveys in Differential Geometry VIII: Papers in honor of Calabi, Lawson, Siu and Uhlenbeck, editor S. T. Yau, International Press (2003).

Kenneth J. Shackleton
(Professor Sadayoshi Kojima Laboratory)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology
2-12-1 O-okayama
Meguro-ku
Tokyo
152-8552 Japan
e-mail: shackleton.k.aa@m.titech.ac.jp
e-mail: kjs2006@alumni.soton.ac.uk

