

第 58 回

トポロジーシンポジウム

講演集

2011年8月8日～8月11日

於 筑 波 大 学

平成2011年度科学研究費基盤研究 (A)

課題番号 22244004, 23244008

は し が き

この講演集は 2011 年 8 月 8 日から 8 月 11 日までの間、平成 23 年度科学研究費補助金 基盤研究 (A)「3 次元多様体論の深化」(研究代表者：小島定吉 課題番号：22244004) および 基盤研究 (A)「写像の特異点論の新展開」(研究代表者：佐伯修 課題番号：23244008) の助成により筑波大学において開催される第 58 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。

その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこの講演集は、

平成 23 年度科学研究費

研究種目 基盤研究 (A)

研究代表者 小島定吉

研究課題名 3 次元多様体論の深化

課題番号 22244004

により作成されたものである。

世話人： 加藤久男 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)
川村一宏 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)
石井 敦 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)
石川剛郎 (北海道大学大学院理学研究院)
上 正明 (京都大学大学院理学研究科)

第58回トポロジーシンポジウム

プログラム

8月8日 (月)

14:00 ~ 15:00

大城佳奈子 (日本女子大学) Pallets of quandles and coloring invariants of spatial graphs 1

15:30 ~ 16:30

花 木 良 (奈良教育大学) 結び目, 絡み目及び空間グラフの準射影図とその応用に
ついて 11

8月9日 (火)

9:30 ~ 10:30

張 娟 姫 (広島大学) Bridge numbers of links and minimal numbers of meridian
generators of link groups 23

11:00 ~ 12:00

遠 藤 久 顕 (大阪大学) Lefschetz ファイバー空間の構成と改変について 29

13:30 ~ 14:30

酒 井 克 郎 (筑波大学) 単体複体, 帰納極限と無限次元多様体に関する話題 41

15:00 ~ 16:00

吉 野 太 郎 (東京大学) 位相的ブローアップについて 49

16:30 ~ 17:30

葛 谷 充 伸 (京都大学) ゲージ群の A_n -型の有限性 59

8月10日 (水)

9:30 ~ 10:30

福永知則 (北海道大学) Turaev's theory of phrases and its application to curves and links 67

11:00 ~ 12:00

伊藤哲也 (東京大学) Topology of invariant group orderings 75

13:30 ~ 14:30

山本卓宏 (九州産業大学) 安定な可微分写像の特異点と特異値集合について 85

15:00 ~ 16:00

入江慶 (京都大学) Displacement energy of unit cotangent bundles 93

16:30 ~ 17:30

石田裕昭 (大阪市立大学) Topological toric manifolds 103

8月11日 (木)

9:30 ~ 10:30

丹下基生 (京大数理研) レンズ空間におけるデーン手術実現問題について 115

11:00 ~ 12:00

伊藤昇 (早稲田大学) Khovanov homology for an unnormalized Witten-Reshetikhin-Turaev invariant 125

Pallets of quandles and coloring invariants of spatial graphs

大城 佳奈子 (日本女子大学)*

概 要

本稿では, カンドルのパレットを導入し, 空間グラフの不変量を与える. また, 二面体カンドルのパレットについて得られた結果を紹介する. その結果は, 空間グラフ射影図に対して与えられる Fox 彩色のすべての適切な頂点彩色条件を決定したことを意味する.

1. 空間グラフ

空間グラフ (spatial graph) とは 3 次元空間 \mathbb{R}^3 (または, 3 次元球面 S^4) 内に埋め込まれた有限グラフのことをいう. 2 つの空間グラフ G_1, G_2 が同値であるとは, $f(G_1) = G_2$ となる向きを保存する同相写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在するときをいう.

空間グラフを平面上に 2 重点のみを持つように射影し, 各交点に射影前の上下の情報を加えた図を射影図という. 射影図内でグラフの各辺は上下の情報により幾つかの成分に分割されるが, 各々の成分を **arc** と呼ぶ. 射影図を各交点周りで局所的に見たとき, 各交点周りには 3 つの arc が現れる. その中で射影前の上下の情報が一番上である arc を **over-arc**, 残りの arc を **under-arc** と呼ぶ.

図 1 の空間グラフ射影図に対する局所変形は **R-変形**とよばれ, 次のことが知られている: 2 つの空間グラフ G_1, G_2 が同値である必要十分条件は, G_1 と G_2 の射影図が R-変形を有限回使って互いに移りあうことである.

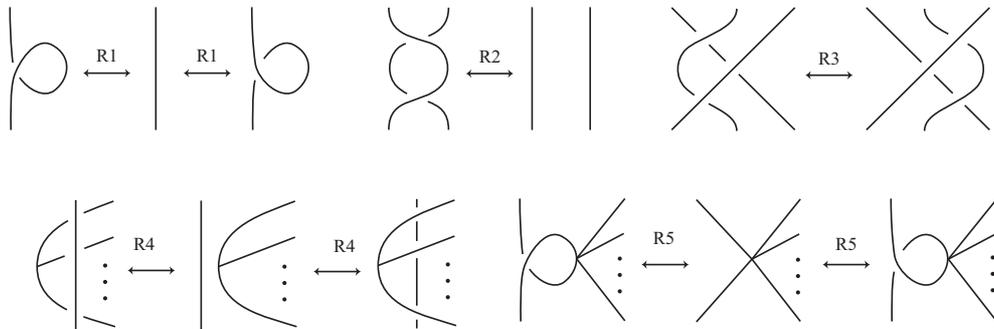


図 1: R-変形

2. カンドルとカンドルのパレット

カンドルとは 1982 年に D. Joyce [5] と S. Matveev [6] によって独立に定義された代数系であり, その演算は結び目のライデマイスター変形に対応している.

キーワード: 空間グラフ (spatial graph), カンドル (quandle), 二面体カンドル (dihedral quandle), パレット (pallet), 彩色 (coloring), Fox 彩色 (Fox coloring)

*e-mail: ooshirok@fc.jwu.ac.jp

定義 2.1 集合 X がカンドル (quandle) であるとは, 二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ が指定されていて, 次の性質を満たすときをいう.

- (1) 任意の $a \in X$ に対し, $a * a = a$.
- (2) 任意の $a \in X$ に対し, 写像 $S_a: X \rightarrow X, x \mapsto x * a$ が全単射である.
- (3) 任意の $a, b, c \in X$ に対し, $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$.

元 $a \in X$ に対する (2) で与えられた写像 S_a を a による対称変換という. すべての元での対称変換が対合になっているようなカンドルは 対合的カンドル (involutory quandle) (または 圭 (kei)) と呼ばれる.

例 2.2 X を任意の集合とする. 演算 $*$ を $a * b = a$ と定めればカンドル演算となる. このような自明な演算を持つカンドルを自明カンドル (trivial quandle) と呼ぶ. これは対合的カンドルである.

例 2.3 X を集合 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ ($p \geq 3$) とし, 演算 $*$ を $a * b = 2b - a$ で定めるとカンドルになる. これを位数が p の 2 面体カンドル (dihedral quandle) といい, R_p で表す. これもまた対合的カンドルになる.

X をカンドルとする. X の元 $a \in X$ に対し, a とその対称変換 S_a の対 (a, S_a) を a^{+1} で, a とその対称変換の逆写像 S_a^{-1} の対 (a, S_a^{-1}) を a^{-1} で書き表す. そのようなカンドルの元と写像の対をすべて集めてきた集合を \mathcal{S}_X とおく:

$$\mathcal{S}_X = \{a^\epsilon \mid a \in X, \epsilon \in \{-1, +1\}\}.$$

注意 2.4 X が対合的カンドルであるときは, すべての元での対称変換は対合になっている. ゆえにすべての元 $a \in X$ で $a^{+1} = a^{-1}$ が成り立ち,

$$\mathcal{S}_X = \{a^{+1} \mid a \in X\}$$

となる. 本稿では, 対合的カンドルを扱う場合, 上付きの符号 $+1$ は省略する.

定義 2.5 集合 $\cup_{n \in \mathbb{Z}_+} (\mathcal{S}_X)^n$ の部分集合 P がカンドル X のパレットであるとは次の性質を満たすときをいう.

(P1) 任意の $(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P$ に対し,

$$(a_2^{\epsilon_2}, \dots, a_n^{\epsilon_n}, a_1^{\epsilon_1}) \in P.$$

(P2) 任意の $(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P$ に対し,

$$S_{a_n}^{\epsilon_n} \circ \dots \circ S_{a_1}^{\epsilon_1} = \text{id}.$$

(P3) 任意の $(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P$ と任意の $x \in X$ に対し,

$$(S_x(a_1)^{\epsilon_1}, \dots, S_x(a_n)^{\epsilon_n}) \in P \text{ かつ } (S_x^{-1}(a_1)^{\epsilon_1}, \dots, S_x^{-1}(a_n)^{\epsilon_n}) \in P,$$

(P4) 任意の $(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P$ に対し,

$$(a_2^{\epsilon_2}, S_{a_2}^{\epsilon_2}(a_1)^{\epsilon_1}, a_3^{\epsilon_3}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P \text{ かつ } (S_{a_1}^{-\epsilon_1}(a_2)^{\epsilon_2}, a_1^{\epsilon_1}, a_3^{\epsilon_3}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P.$$

特に, $(S_X)^n$ の空でない部分集合となるパレットを X の n -パレットと呼ぶ.

例 2.6 任意の正整数 n に対し, 集合

$$U_n = \{(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in (S_X)^n \mid S_{a_n}^{\epsilon_n} \circ \dots \circ S_{a_1}^{\epsilon_1} = \text{id}\}$$

はカンドル X のパレットになる. これを **universal n -パレット** と呼ぶ. 集合

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n.$$

は X のすべてのパレットを部分集合として含むパレットである. これを **universal パレット** と呼ぶ.

例 2.7 X を対合的カンドルとする. 任意の正整数 n に対し, 集合

$$C_n = \{(a_1, \dots, a_n) \in (S_X)^n \mid S_{a_n}^{\epsilon_n} \circ \dots \circ S_{a_1}^{\epsilon_1} = \text{id} \text{ かつ } a_1 = \dots = a_n\}$$

はカンドル X のパレットになる. これを **classical n -パレット** と呼ぶ. 集合

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n.$$

もパレットであり, これを **classical パレット** と呼ぶ.

3. パレット付きカンドル彩色

X をカンドル, P を X のパレットとする. D を向き付けられた空間グラフ射影図とする.

定義 3.1 D の (X, P) -彩色とは D の各 arc に対する X の元の割り当てであり, 各交点と各頂点の周りで次の条件を満たすものをいう.

- 交点 c において, e_o を over-arc, e_r を e_o の向きに沿って見たとき右側に位置する under-arc, e_l を左側に位置する under-arc とする. 3 本の arc e_o, e_r, e_l に割り当てられた X の元をそれぞれ a_1, a_2, a_3 とすると, $a_2 * a_1 = a_3$ が成り立つ (Figure 2).

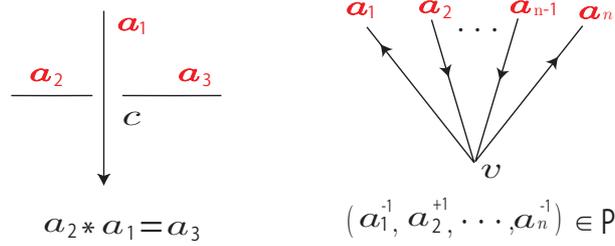


図 2: 彩色条件

- n 価頂点 v において, v の近傍に現れる一つの arc を勝手に選び, e_1 とおく. e_1 から v の周りを時計回りに進み, 順番に現れてくる arc を, e_1, e_2, \dots, e_n と順序付けて表す. n 本の arc e_1, \dots, e_n に割り当てられた X の元をそれぞれ a_1, \dots, a_n とすると,

$$(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P$$

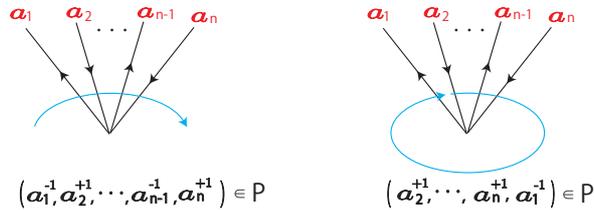
が成り立つ. ただし, 各 arc e_i ($i = 1, \dots, n$) において, e_i の向きが頂点 v に向かう方向であるとき $\epsilon_i = +1$, そうでないとき $\epsilon_i = -1$ とする (Figure 2).

D の (X, P) -彩色の集合を $\text{Col}_{(X,P)}(D)$ と表す.

命題 3.2 2つの射影図 D と D' が同値な向き付けられた空間グラフを表すなら, $\text{Col}_{(X,P)}(D)$ と $\text{Col}_{(X,P)}(D')$ の間に全単射が存在する. ゆえに, D の (X, P) -彩色数 $\#\text{Col}_{(X,P)}(D)$ は向き付けられた空間グラフの不変量になる.

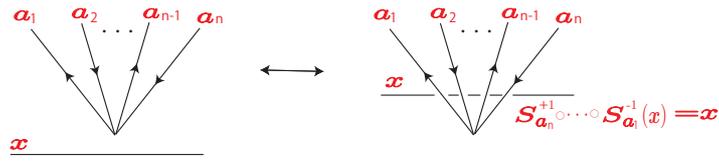
パレットの条件 (P1) は“頂点周りでの彩色条件が満たされているかどうかは最初に選ぶ arc に依存しない”ということを保証する条件である.

$$(P1) (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P \Rightarrow (a_2^{\epsilon_2}, \dots, a_n^{\epsilon_n}, a_1^{\epsilon_1}) \in P.$$

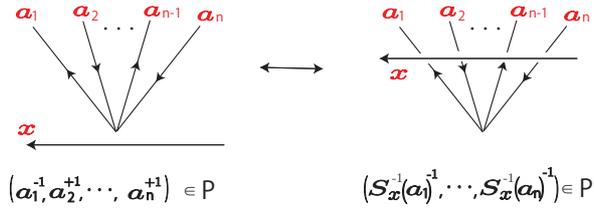


パレットの条件 (P2), (P3), (P4) は空間グラフ射影図の R4 または R5-変形に対応する条件になっている. つまり, それぞれの R-変形一回で移りあう 2 つの射影図 D と D' に対し, $\text{Col}_{(X,P)}(D)$ と $\text{Col}_{(X,P)}(D')$ の間の全単射を与える.

$$(P2) (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P \Rightarrow S_{a_n}^{\epsilon_n} \circ \dots \circ S_{a_1}^{\epsilon_1} = \text{id}.$$

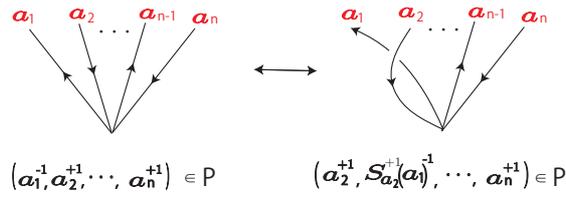


(P3) $(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P \Rightarrow \forall x \in X, \epsilon \in \{\pm 1\}, (S_x^\epsilon(a_1)^{\epsilon_1}, \dots, S_x^\epsilon(a_n)^{\epsilon_n}) \in P.$



(P4) $(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P \Rightarrow (a_2^{\epsilon_2}, S_{a_2}^{\epsilon_2}(a_1)^{\epsilon_1}, a_3^{\epsilon_3}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P$ かつ

$(S_{a_1}^{-\epsilon_1}(a_2)^{\epsilon_2}, a_1^{\epsilon_1}, a_3^{\epsilon_3}, \dots, a_n^{\epsilon_n}) \in P.$



X が対合的カンドルであるとき, 有向空間グラフ G の不変量 $\text{Col}_{(X,P)}(G)$ の値は G の向きに依存しない. ゆえに, 対合的カンドルを使うと彩色数は向き付けられていない空間グラフの不変量となる.

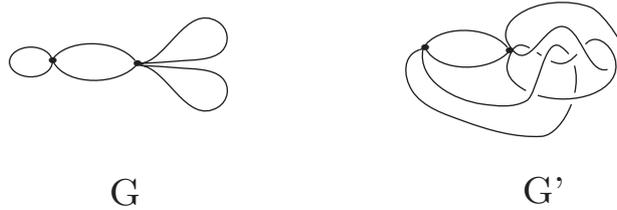


図 3: 彩色

例 3.3 G と G' を図 3 で与えられた空間グラフとする. これらが同値でないことは, 位数 3 の二面体カンドル R_3 と次のパレット P を使って言うことができる.

$P = P_4 \cup P_6$. ただし,

$$P_4 = \{(0, 0, 1, 1), (0, 0, 2, 2), (0, 1, 0, 2), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 2, 1), \\ (0, 2, 0, 1), (0, 2, 1, 2), (0, 2, 2, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 2), \\ (1, 0, 2, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 2, 2), (1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 0), \\ (1, 2, 2, 1), (2, 0, 0, 2), (2, 0, 1, 0), (2, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 1) \\ (2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 0), (2, 2, 0, 0), (2, 2, 1, 1)\}$$

かつ $P_6 = \{(a, a, a, a, a, a) \mid a \in \{0, 1, 2\}\}$.

図 4 の G の射影図 D は a, b にどの様に X の元を代入しても, $a \neq b$ である限り (X, P) -彩色の彩色条件を満たしている. ゆえに, $\sharp\text{Col}_{(X,P)}(G) = 6$ が成り立つ. 一方, G' の射影図 D' については, 頂点周りでの彩色条件を満たすように各 arc にどの様に X の元を割り当てても, 彩色条件を満たさない交点を持つ. ゆえに, $\sharp\text{Col}_{(X,P)}(G') = 0$ が成り立つ. よって, G と G' は同値でないことが言える.

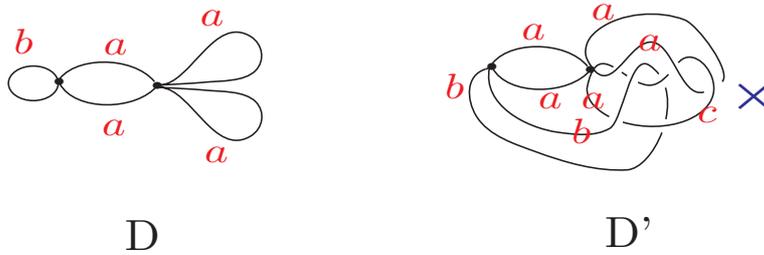


図 4: 彩色

パレットを取り換えると状況は変わり得る. 例えば, パレット P を classical パレットに取り換えると G と G' における (X, P) -彩色数は同じになる. よって classical パレットでは G と G' を区別することが出来ない. 一方, P を universal パレットに取り換えると G と G' は彩色数で区別される. しかし, その計算は複雑になる. この様に, 適切なパレットを選ぶことで計算をより単純化させることも可能である.

4. Fox 彩色

絡み目の射影図に対して Fox 彩色 [1, 2, 3] と呼ばれるものが定義されている. Fox p -彩色とは, 絡み目射影図の各 arc に対する $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元の割り当てであり, 各交点周りで図 5 の様な彩色条件を満たすものをいう.

Fox 彩色は偶数価数の頂点しか持たない空間グラフの射影図に対する彩色として拡張され, 研究が行われた. Ishii-Yasuhara [4] は頂点での彩色条件を次の様に与えた. n 価頂点の周りの各 arc に割り当てられた $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元を a_1, \dots, a_n とする (図 6). 頂点での彩色条件は $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ を満たすことである. これは位数 p の二面体カンドル R_p とその classical パレットを使った空間グラフの彩色

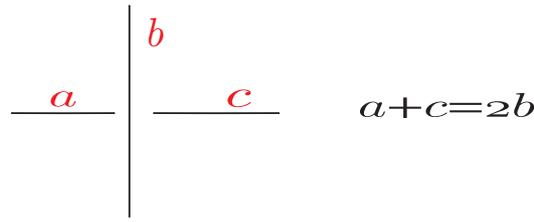


図 5: Fox 彩色

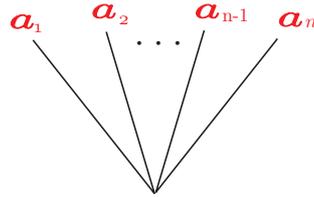


図 6: Fox 彩色

に一致する. 一方, 頂点での彩色条件を $a_1 - a_2 + \cdots - a_n = 0$ で与えた Fox 彩色についても研究された. これは, 二面体カンドル R_p とパレット

$$P = \{(a_1, \dots, a_n) \in \bigcup_{n \in 2\mathbb{Z}_+} (\mathcal{S}_{R_p})^n \mid a_1 - a_2 + \cdots - a_n = 0\}$$

を使った彩色に一致する. この様に, 空間グラフの射影図に対する Fox 彩色は二面体カンドルとそのパレットを使った彩色として解釈され, パレットは頂点周りの彩色条件を与えている.

5. 二面体カンドルのパレット

この章では二面体カンドル R_p の n -パレットについて得られた結果を紹介する. これは Fox-彩色における n 個頂点周りの彩色条件について得られた結果でもある.

n を正整数, p を 3 以上の整数とする. R_p の各成分は代表元 $0, \dots, p-1$ で表されていたことに注意する.

定理 5.1 (i) n が奇数のとき, R_p の n -パレットは存在しない.

(ii) n が偶数のとき, R_p の n -パレット全体の集合は, 集合 V の空でない部分集合のすべての元の和集合からなる集合族に等しい:

$$\{R_p \text{ の } n\text{-パレット}\} = \left\{ \bigcup_{w \in W} w \mid W \subset V, W \neq \emptyset \right\}$$

ただし, 集合 V は次で与えられる.

(1) $n = 2$ かつ p が奇数のとき,

$$V = \{ \{(a, a) \mid a \in R_p \} \}.$$

$n = 2$ かつ p が偶数で $p/2$ が奇数であるとき,

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \{(a, a) \mid a \in R_p, a \equiv 0 \pmod{2}\}, \\ \{(a, a) \mid a \in R_p, a \equiv 1 \pmod{2}\}, \\ \{(a, a + \frac{p}{2}) \mid a \in R_p\} \end{array} \right\}.$$

$n = 2$ かつ p と $p/2$ が共に偶数であるとき,

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \{(a, a) \mid a \in R_p, a \equiv 0 \pmod{2}\}, \\ \{(a, a) \mid a \in R_p, a \equiv 1 \pmod{2}\}, \\ \{(a, a + \frac{p}{2}) \mid a \in R_p, a \equiv 0 \pmod{2}\}, \\ \{(a, a + \frac{p}{2}) \mid a \in R_p, a \equiv 1 \pmod{2}\} \end{array} \right\}.$$

(2) n が 4 以上の偶数で, p が奇数であるとき,

$$V = \{\eta_k \mid k \in \{1, \dots, p\}, k|p\}.$$

ただし, $\eta_k = \{\mathbf{a} \in R_p^n \mid \varphi_{n,p}(\mathbf{a}) = k, \kappa_{n,p}(\mathbf{a}) = 0\}$.

(3) n が 4 以上の偶数で, p が偶数であるとき,

$$\begin{aligned} V = & \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{k,\kappa,\mu} \mid k \in \{1, \dots, p\}, k|p, k \equiv 1 \pmod{2}; \kappa \in \{0, \frac{p}{2}\}; \\ -n < \mu < n, \mu \equiv 0 \pmod{2}, \frac{n-|\mu|}{2} \equiv \kappa \pmod{2} \end{array} \right\} \\ \cup & \left\{ \beta_{k,\epsilon} \mid k \in \{1, \dots, p\}, k|p, k \equiv 0 \pmod{2}, \frac{p}{k} \equiv 1 \pmod{2}; \epsilon \in \{0, 1\} \right\} \\ \cup & \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{k,\kappa,\mu,\epsilon} \mid k \in \{1, \dots, p\}, k|p, k \equiv \frac{p}{k} \equiv 0 \pmod{2}; \kappa \in \{0, \frac{p}{2}\}; \\ 0 \leq \mu < n, \mu \equiv 0 \pmod{2}, \frac{n-\mu}{2} \equiv \frac{\kappa}{k} \pmod{2}; \epsilon \in \{0, 1\} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

ただし,

$$\alpha_{k,\kappa,\mu} = \{\mathbf{a} \in R_p^n \mid \varphi_{n,p}(\mathbf{a}) = k, \kappa_{n,p}(\mathbf{a}) = \kappa, \mu_{n,p}(\mathbf{a}) = \mu\},$$

$$\beta_{k,\epsilon} = \{\mathbf{a} \in R_p^n \mid \varphi_{n,p}(\mathbf{a}) = k, \kappa_{n,p}(\mathbf{a}) = 0, \epsilon_{n,p,k}(\mathbf{a}) = \epsilon\},$$

$$\gamma_{k,\kappa,\mu,\epsilon} = \left\{ \mathbf{a} \in R_p^n \mid \varphi_{n,p}(\mathbf{a}) = k, \kappa_{n,p}(\mathbf{a}) = \kappa, \mu_{n,p,k}(\mathbf{a}) = \mu, \epsilon_{n,p,k}(\mathbf{a}) = \epsilon \right\}.$$

写像 $\varphi_{n,p}, \kappa_{n,p}, \mu_{n,p}, \mu_{n,p,k}, \epsilon_{n,p,k}$ については以下で定義を与える. 任意の $\mathbf{a} \in R_p^n$ に対し, a_i で \mathbf{a} の第 i 成分を表す. すなわち, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$.

- $\varphi_{n,p}$ は $\mathbf{a} \in R_p^n$ の成分をすべて含む R_p の部分カンドルで最小のものの位数を表すものである. 正確には, $p/\varphi_{n,p}(\mathbf{a})$ で最小の部分カンドルの位数を与える.

$$\varphi_{n,p} : R_p^n \rightarrow \{1, \dots, p\}, \mathbf{a} \mapsto \max\{k \mid k|p, a_1 \equiv \dots \equiv a_n \pmod{k}\}.$$

- $\kappa_{n,p}$ は $\mathbf{a} \in R_p^n$ の成分の交代和を与える写像である.

$$\kappa_{n,p} : R_p^n \rightarrow \mathbb{Z}_p, \mathbf{a} \mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i.$$

- $\mu_{n,p}$ は $\mathbf{a} \in R_p^n$ の成分の中で偶数成分と奇数成分の数の差を与える写像である.

$$\mu_{n,p} : R_p^n \rightarrow \mathbb{Z}, \mathbf{a} \mapsto E(\mathbf{a}) - O(\mathbf{a}).$$

ただし,

$$E(\mathbf{a}) = \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$O(\mathbf{a}) = \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

$k \in \{1, \dots, p\}$ を p の偶数因数とし, $S_k = \{\mathbf{a} \in R_p^n \mid \varphi_{n,p}(\mathbf{a}) = k\}$ とする.

- $\mu_{n,p,k}$ は $\mathbf{a} \in S_k$ の成分をすべて含む最小の部分カンドル $R_{p/k}^n$ の中の元として, 写像 $\mu_{n,p/k}$ による値をとり, その絶対値を与える写像である.

$$\mu_{n,p,k} : S_k \rightarrow \mathbb{Z}, \mu_{n,p,k}(\mathbf{a}) = \left| \mu_{n, \frac{p}{k}} \left(0, \frac{a_2 - a_1}{k}, \dots, \frac{a_n - a_1}{k} \right) \right|$$

- $\epsilon_{n,p,k}$ は $\mathbf{a} \in S_k$ の各成分の偶奇を与える写像である.

$$\epsilon_{n,p,k} : S_k \rightarrow \{0, 1\}, \epsilon_{n,p,k}(\mathbf{a}) = \begin{cases} 0 & (a_1 \equiv \dots \equiv a_n \equiv 0 \pmod{2}), \\ 1 & (a_1 \equiv \dots \equiv a_n \equiv 1 \pmod{2}). \end{cases}$$

定理より, n が 4 以上の偶数で, p が奇数であるとき, R_p の n -パレットは p の因数全体の集合から空でない部分集合を選ぶことで与えられる. ゆえに, 次のことが言える.

系 5.2 n を 4 以上の偶数, p を奇数とする. R_p の n -パレットの個数は $2^t - 1$ 個である. ただし, t は p の因数の数を表す.

特に, p が素数であるとき, ちょうど 3 個の n -パレットが存在する. 一つは universal n -パレット U_n , 二つ目は classical n -パレット C_n , 三つ目は universal n -パレットと classical n -パレットの差集合 $U_n \setminus C_n$ である.

参考文献

- [1] R. H. Crowell and R. H. Fox, *An introduction to knot theory*, Ginn and Co., 1963.
- [2] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, in: *Topology of 3-manifolds and related topics* (Georgia, 1961), Prentice-Hall (1962), 120–167.
- [3] R. H. Fox, *Metacyclic invariants of knots and links*, *Canadian J. Math.* **22** (1970), 193–201.
- [4] Y. Ishii and A. Yasuhara, *Color invariant for spatial graphs*, *J. Knot Theory Ramifications* **6** (1997), no. 3, 319–325.

- [5] D. Joyce, *A classifying invariants of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), 37–65.
- [6] S. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory* (Russian), Mat. Sb. (N.S.) **119** (1982), 78–88; English translation: Math. USSR-Sb. **47** (1984), 73–83.
- [7] K. Oshiro, *On pallets for Fox colorings of spatial graphs*, to appear in Topology Appl.

結び目, 絡み目及び空間グラフの準射影図 とその応用について

花木 良 (奈良教育大学教育学部)

1 はじめに

この章では, 基本的な定義, 射影像に関する研究, 準射影図の研究について紹介する.

1.1 定義

有限グラフを G とし, 自然に位相空間と考える. G から 3次元球面 S^3 への埋め込みを, G の空間埋め込み (spatial embedding) といい, その像を空間グラフ (spatial graph) という. 特に, G が一つの円周と同相のとき, その像を結び目, G がいくつかの円周と同相のとき, その像を絡み目という. 空間グラフ G と G' が同値 (equivalent) であるとは, $h(G) = G'$ となる S^3 上の向きを保存する自己同相写像 h が存在するときをいう. 空間グラフ G が自明 (trivial) であるとは, S^3 の部分空間 S^2 (2次元球面) 上にある G と同値な空間グラフ G' が存在するときをいう. グラフ G が平面的 (planar) であるとは, G から S^2 への埋め込みが存在するときをいう. したがって, グラフ G が自明な空間グラフをもつための必要十分条件は, G が平面的であることになる.

G から S^2 への連続写像 φ が G の射影 (projection) であるとは, φ の多重点が有限個の辺の横断的な二重点のみのときをいう. このとき, 射影の像を射影像 (projection) といい, $P = \varphi(G)$ で表す.

射影図 (diagram) D とは, 各二重点に上下の情報を与えた射影像 P をいう. このとき, D は P から得られたといい, 射影図は一意的に空間グラフ G を表現している. このとき, P は G の射影像であるという. 本稿では, 上下の情報が入った二重点を交点 (crossing) と呼び, 上下の情報が入っていない二重点を前交点 (pre-crossing) と呼ぶ. 射影図は交点をもつが, 前交点をもたない.

1.2 結び目, 絡み目の射影像の研究

この節では, 向きの付いていない結び目と絡み目を考える. μ 成分の絡み目の集合を \mathcal{L}^μ とする. 特に \mathcal{L}^1 は結び目の集合である. 絡み目 L の射影像の集合を $\text{PROJ}(L)$ と表す. $L_1, L_2 \in \mathcal{L}^\mu$ に対して, 谷山公規氏は, $\text{PROJ}(L_1) \supset \text{PROJ}(L_2)$ のとき, L_1 は L_2 より小さい ($L_1 \leq L_2$) と定義し, 考察した [14, 15].

命題 1 [14] 各 μ に対して, (\mathcal{L}^μ, \geq) は前順序である. つまり, 任意の $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}^\mu$ に対して, 次の (1) と (2) が成り立つ.

(1) $L_1 \geq L_1$ (反射律)

(2) $L_1 \geq L_2$ かつ $L_2 \geq L_3$ ならば, $L_1 \geq L_3$ (推移律)

そして, 谷山氏は結び目に関して図 1 のようなハッセ図を得た [14]. 同様にして, 谷山氏は絡み目について考察した [15]. このハッセ図は, どんな結び目のどんな射影図も交差交換 (交点の上下の情報を入れかえる) を行えば, 自明な結び目を表す射影図にできること, 非自明な結び目のどんな射影図も交差交換 (交点の上下の情報を入れかえる) を行えば, 3_1 を表す射影図にできることを意味している.

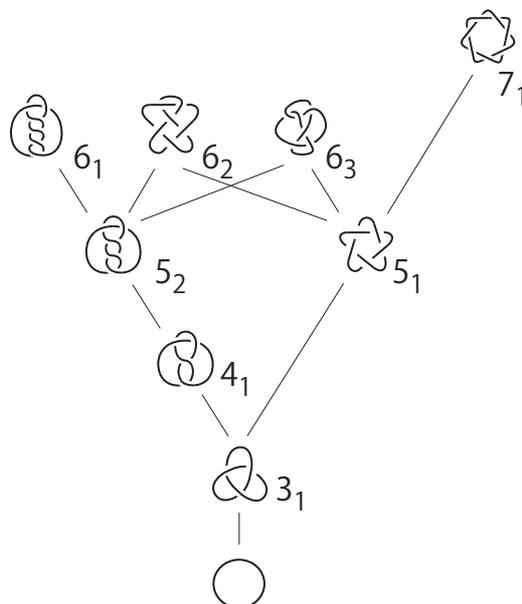


図 1:

結び目の不変量に関して, 次が成り立つ.

命題 2 [14] L_1, L_2 を μ 成分絡み目とする. $L_1 \leq L_2$ ならば,

$$c(L_1) \leq c(L_2), \quad br(L_1) \leq br(L_2), \quad b(L_1) \leq b(L_2)$$

が成り立つ. ここで, $c(L), br(L)$ と $b(L)$ は, 絡み目の最小交点数, 橋指数, 組紐指数である.

そして, この研究は, 正結び目の研究 [11] などに応用されている.

1.3 空間グラフの射影像の研究

空間グラフの射影像の研究に関しては盛んになされている。ここでは、準射影図の研究に大きな影響を与えた研究を紹介する。

射影像が自明 (**trivial**) であるとは、射影像から得られるどの射影図も自明な空間グラフを表しているときをいう。逆に、射影像が非自明 (**knotted**) である [16] とは、射影像から得られるどの射影図も非自明な空間グラフを表しているときをいう。任意の絡み目の射影図に対して、交差交換をすることで自明な絡み目を表す射影図が得られるので、いくつかの円周 (結び目, 絡み目) の射影像は非自明になることは決してない。しかし、グラフの射影像では非自明になることがあることを、谷山氏は示した [16]。例えば、正八面体グラフは非自明な射影像をもつ (図 2)。現在のところ、非自明な射影像をもつグラフの特徴づけは未解決である。

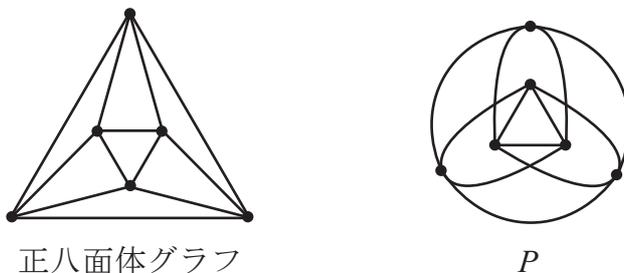


図 2: 正八面体グラフと非自明な射影像

さらに、次のような射影像の研究がなされている。Huh 氏と谷山氏は、ラベル付きのグラフとして射影像から得られるどの射影図も同値な空間グラフを表しているとき、射影像は特定可能 (**identifiable**) であると定義し、考察を行った [7]。[9] では、特定可能な射影像は自明な射影像であることが示されている。一方、新國亮氏は、ラベル付きのグラフとして射影像から得られるどの射影図も互いに同値でない空間グラフを表しているとき、その射影像を完全区別可能 (**completely distinguishable**) であると定義した [10]。例えば、図 2 の非自明な射影像は完全区別可能な射影像である。また、完全グラフなどは完全区別可能な射影像をもつことが示されているが、すべてのグラフが完全区別可能な射影像をもつかはわかっていない [10]。

1.4 準射影図の研究動機

はじめに、次の問題を考える。

問題 1 空間グラフ G とその射影像 P が与えられているとき、 P だけを見て、元の空間グラフが自明であるか非自明であるか判定できるか？

答えは、特別な場合（射影像が自明であるか非自明である場合）を除いて、できない。それは、各前交点に上下どちらの情報が入るかわからないためである（図3）。



図 3: 射影像とそれから得られる射影図

そこで、次の問題を考え、準射影図の概念を導入する。

問題 2 空間グラフ G とその射影像 P が与えられているとき、どこの前交点の、どのような上下の情報がかれば、その他の前交点の上下の情報に依らず、元の空間グラフが自明であるか非自明であるか判定できるか？

この研究を始める契機としては、DNA 結び目の研究もある。それは、DNA 結び目の実際の写真を見たとき、交点の上下がはっきりわかる部分とわからない部分が存在していたこと、交差交換の役割を果たす酵素（DNA トポイソメラーゼ）の存在が知られていることからである。

1.5 準射影図に関する定義

準射影図（pseudo diagram） Q とは、一部の前交点に上下の情報を入れた射影像 P である。このとき、 Q は P から得られるという。準射影図 Q は交点と前交点をもつ。ここで、準射影図は交点をもたないこと、前交点をもたないことも許す。すなわち、準射影図は射影像や射影図であることも許す。準射影図 Q のいくつかの前交点に上下を入れると、他の（同じも許す）準射影図 Q' が得られる。このとき、 Q' は Q から得られるという。

準射影図 Q が自明（trivial）であるとは、 Q から得られるすべての射影図が自明な空間グラフを表しているときをいう。逆に、準射影図 Q が非自明（knotted）であるとは、 Q から得られるすべての射影図が非自明な空間グラフを表しているときをいう。図4で、(a) は自明な準射影図で、(b) は非自明な準射影図で、(c) は自明でも非自明でもない準射影図である。

次に、射影像 P に対して、どれだけ自明に近い非自明に近いかというような概念を定義する。

$$\text{tr}(P) := \min\{c(Q) \mid Q : P \text{ から得られる自明な準射影図}\}$$

とし、このとき、 $\text{tr}(P)$ を P の自明化数（trivializing number）と呼ぶ。ここで、 $c(Q)$ は Q の交点の個数とする。逆に、

$$\text{kn}(P) := \min\{c(Q) \mid Q : P \text{ から得られる非自明な準射影図}\}$$

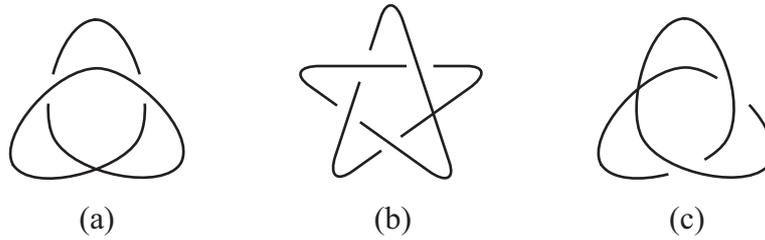


図 4: 準射影図

とし, $\text{kn}(P)$ を P の非自明化数 (knotting number) と呼ぶ. 例えば, 図 5 において, $\text{tr}(P_1) = 2, \text{tr}(P_2) = 2, \text{tr}(P_3) = 4$ で, $\text{kn}(P_1) = 3, \text{kn}(P_2) = 4, \text{kn}(P_3) = 4$ であることが確かめられる.

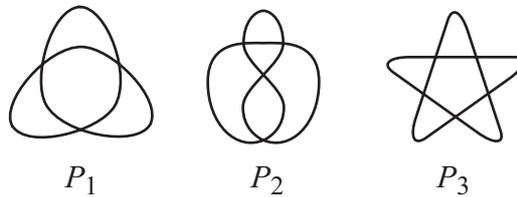


図 5: 自明化数と非自明化数

任意の平面的グラフ G に対して, $\text{kn}(P) = \infty$, すなわち, $\text{tr}(P) = 0$ となる G の射影像 P が存在する. 例えば, G から \mathbf{S}^2 への埋め込みの像となる射影像が挙げられる. いくつかの円周の任意の射影像 P は非自明になることはないので, $\text{tr}(P) < \infty$ である. しかし, ある平面的グラフは非自明な射影像 P をもつ [16] ので, $\text{tr}(P) = \infty$, すなわち, $\text{kn}(P) = 0$ となることがある.

1.6 仮想結び目の準射影図の研究

Henrich 氏らは, 準射影図の概念を仮想結び目 [virtual knot] に拡張し, 研究を行っている [5]. さらに, 彼女らは, 結び目の自明化数と結び目解消数, 種数の関係についても言及している.

1.7 準射影図を用いたゲーム

Henrich 氏らは, 準射影図を用いたゲームを考案している [6].

2 射影像に関する得られた結果

一つの円周（結び目）の射影像に関する結果を中心に，得られた結果を紹介する．

2.1 基本的性質

P を一つの円周の射影像とする． S^2 上の単純閉曲線 S が P の分解円周（decomposing circle）であるとは， P と S との交わりがちょうど2つの横断的な二重点のみの集合のときをいう（図6）．そして，次の命題が成り立つ．

命題 3 P を一つの円周の射影像とし， S を P の分解円周とする． $\{q_1, q_2\} = P \cap S$ とし， B_1 と B_2 を $B_1 \cup B_2 = S^2$ かつ $B_1 \cap B_2 = S$ となる円盤とする． l を q_1 と q_2 を結ぶ S 上の二つの弧の一つとする． $P_1 = (P \cap B_1) \cup l$ ， $P_2 = (P \cap B_2) \cup l$ とする．このとき， $\text{tr}(P) = \text{tr}(P_1) + \text{tr}(P_2)$ ， $\text{kn}(P) = \min\{\text{kn}(P_1), \text{kn}(P_2)\}$ が成り立つ．

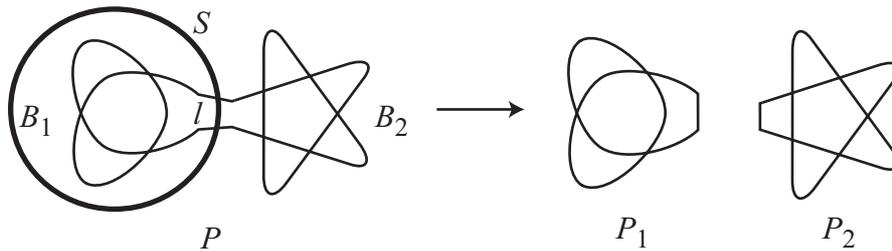


図 6: 分解円周

2.2 射影像の自明化数に関する結果

この節では，射影像の自明化数に関する結果を紹介する．

自明化数に関する定理や命題などと，結び目の射影像の自明化数を求めるコード図を使った方法を紹介する．次に，コード図とそれを用いて結び目の自明化数を求める方法を紹介する．

P を n 個の前交点をもった結び目の射影像とする．このとき， CD_P が P のコード図であるとは， CD_P が各前交点の原像をコードによって結んだ n 個のコードをもつ円周のときをいう．例えば，図7の (a) の射影像のコード図は (b) である．

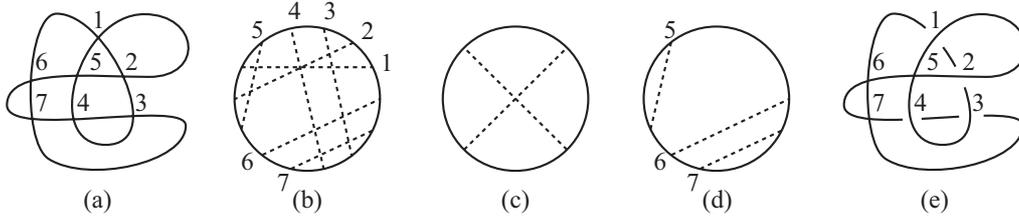


図 7: コード図から自明化数を求める, それを実現する自明な準射影図

定理 4 P を結び目の射影像とすると,

$$\text{tr}(P) = \min\{n \mid \text{ある } n \text{ 本のコードを } CD_P \text{ から削除すると, 部分コード図として図 7(c) のようなコード図を含まない}\}$$

さらに, $\text{tr}(P)$ は偶数である.

この定理から, 結び目の射影像に対して, コード図を用いて, 自明化数を求められることがわかる. 証明を考えると, それを実現する自明な準射影図を得る方法もわかる. 例えば, 図 7(a) の射影像を考えると, そのコード図は (b) である. このコード図からどのように 3 本以下のコードを除いても図 7(c) のようなコード図を含んでしまうが, 4 本のコードを除くと図 7(d) のようなコード図が得られる. したがって, $\text{tr}(P) = 4$ であることがわかり, 例えば, 図 7(e) はそれを実現する自明な準射影図である.

定理 5 P を結び目の射影像とする. このとき, $\text{tr}(P) = 2$ であるための必要十分条件は, P は図 8(a) の射影像から P の部分弧を図 8(b) のように置き換える操作を何回 (0 回も含む) かして得られることである.

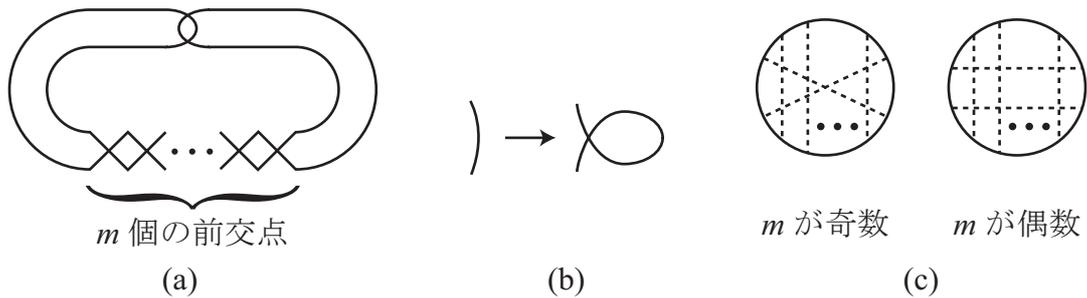


図 8: $\text{tr}(P) = 2$ となる結び目の射影像とそのコード図

定理 6 P を結び目の射影像とすると, $\text{tr}(P) \leq p(P) - 1$ が成り立つ. ここで, $p(P)$ は P の射影像の前交点の数である. また, 等号が成立するための必要十分条件は, P は図 9 のような射影像であることである.

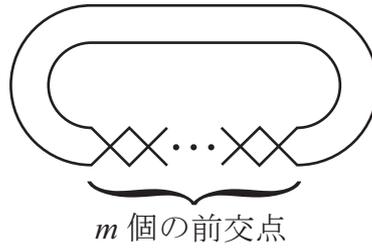


図 9:

定理 4 より, 次の系が得られる.

系 7 P をいくつかの円周の射影像とすると, $\text{tr}(P)$ は偶数である.

命題 8 G を平面的グラフ, P を G の射影像とすると, $\text{tr}(P) \neq 1$ である.

系は一般のグラフでは成り立たない. G を円周とシータ曲線との直和のグラフとすると, $\text{tr}(P) = 3$ となる G の射影像 P が存在する (図 10). さらに, このグラフでは任意の自然数 $n \geq 2$ に対して, $\text{tr}(P) = n$ となる G の射影像 P が存在する.

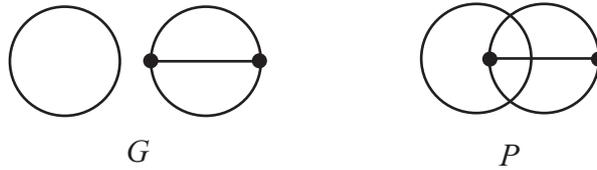


図 10:

3 結び目の自明化数とその応用

この章では, 結び目に対して自明化数を定義し, 得られた結果とその応用を紹介する.

3.1 結び目の自明化数の定義

D を射影図とし, P を D の交点の上下の情報をなくして得られる射影像とし, $\text{tr}(D) = \text{tr}(P)$ と定義する. 結び目 K に対しては,

$$\text{tr}(K) = \min\{\text{tr}(D) \mid \text{射影図 } D \text{ は } K \text{ を表す}\}$$

と定義する.

3.2 結び目の自明化数に関する結果

結び目の自明化数は、結び目の結び目解消数や種数と以下のような関係がある。

命題 9 [4, 5] K を結び目とすると、 $u(K) \leq \frac{\text{tr}(K)}{2}$ が成り立つ。ここで、 $u(K)$ は K の結び目解消数である。

定理 10 [5] K を結び目とすると、 $g(K) \leq \frac{\text{tr}(K)}{2}$ が成り立つ。ここで、 $g(K)$ は K の結び目の種数である。

ここで、定理 10 は、ザイフェルトのアルゴリズムから得られる正規な種数 [canonical genus] でも成り立つ。命題 9 と定理 10 を用いて下から評価を行い、最小交点数の射影図で自明化数を求めることで、10 交点以下の結び目の自明化数の表を作成した [4]。しかし、10 交点以下の結び目すべての自明化数は決定できていない。そして、次の命題を得た。

命題 11 [4] K を 10 交点以下の正結び目とすると、 $\text{tr}(K) = 2u(K)$ が成り立つ。さらに K のある正射影図は、 K の自明化数を実現する。

ここで、10 交点以下の正結び目は、42 個あることが知られている [8]。そして、次の予想をし、部分的な解答を得た。

予想 1 [4] K を正結び目とすると $\text{tr}(K) = 2u(K)$ が成り立ち、 K の任意の正射影図 D において $\text{tr}(D) = 2u(K)$ である。

定理 12 [4] K を正組紐結び目とすると、 $\text{tr}(K) = 2u(K)$ が成り立つ。さらに K の正組紐射影図は、 K の自明化数を実現する。

予想を解決することの難しさは、種数の低い正結び目に対しては、結び目解消数を評価できないことにある。定理 12 の証明ではラスムッセン不変量 [12] または中村拓司氏の定理 [8] を用いて結び目解消数を評価することができるが、種数の低い正結び目は、この定理ではうまくいかない。例えば、 7_4 は種数が 1 で結び目解消数が 2 であり、これらの結果では結び目解消数を決定することができない。

すべての結び目は、最小交点射影図で自明化数を実現するかという問題 [5] に対しては、否定的な解答を得た。

命題 13 [4] 11_{550} は最小交点射影図で自明化数を実現せず、12 交点の正射影図で自明化数を実現する。

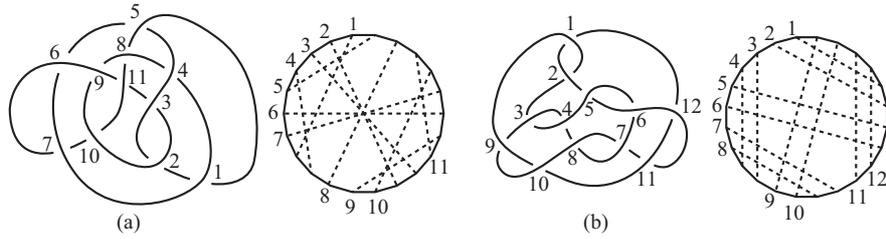


図 11: 11_{550} の最小交点射影図と自明化数を実現する正射影図

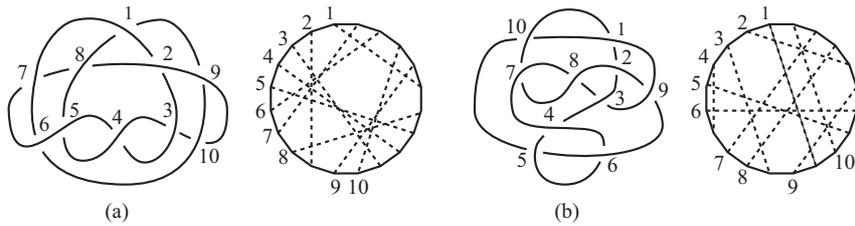


図 12: ペルコ対

この正結び目 11_{550} は最小交点射影図として図 11(a) しかもたず、最小交点数で正射影図をもたないこと、そして、12 交点で正射影図をもつことが [13] で知られている。

また、異なる自明化数の最小交点射影図をもつ結び目も存在する。例えば、 10_{161} を表すペルコ対 [Perko's pair] は正射影図でない図 12(a) は自明化数が 8 で、正射影図である 12(b) は自明化数が 6 でこの結び目の自明化数を実現している。

射影像の結果を用いることで、次の定理を得た。

定理 14 [4] K を非自明な結び目とすると、 $2 \leq \text{tr}(K) \leq c(K) - 1$ が成り立つ。ここで、 $c(K)$ は結び目 K の最小交点数である。等号が成立のための必要十分条件は、 K が $(2, p)$ トーラス結び目であることである。ここで、 p は奇整数である。

定理 15 [4] $\text{tr}(K) = 2$ であるための必要十分条件は、 K がツイスト結び目であることである。

3.3 結び目の半順序への応用

命題 2 と同様の命題が自明化数で成り立つ。

命題 16 [3, 4] K_1, K_2 を結び目とする。 $K_1 \leq K_2$ ならば、

$$\text{tr}(K_1) \leq \text{tr}(K_2)$$

が成り立つ。

3.4 結び目解消数の研究への応用

結び目理論において、次の命題が成り立つことがよく知られている。

命題 17 D を絡み目の射影図とすると、 $u(D) \leq \frac{c(D)}{2}$ が成り立ち、 D' を交点をもつ結び目の射影図とすると、 $u(D') \leq \frac{c(D') - 1}{2}$ が成り立つ。また、 L を絡み目とすると、 $u(L) \leq \frac{c(L)}{2}$ が成り立ち、 K を非自明な結び目とすると、 $u(K) \leq \frac{c(K) - 1}{2}$ が成り立つ。

谷山氏は、[17] で、上の等号が成立する場合の射影図と結び目、絡み目の特徴づけを行った。 $u(D') = \frac{c(D') - 1}{2}$ が成り立つための必要十分条件は、 D' が図 13 のような $(2, r)$ トーラス結び目の射影図の一つであることを示した。定理 6 と命題 9 を用いると、この十分条件の別証明を与えることができる [3]。

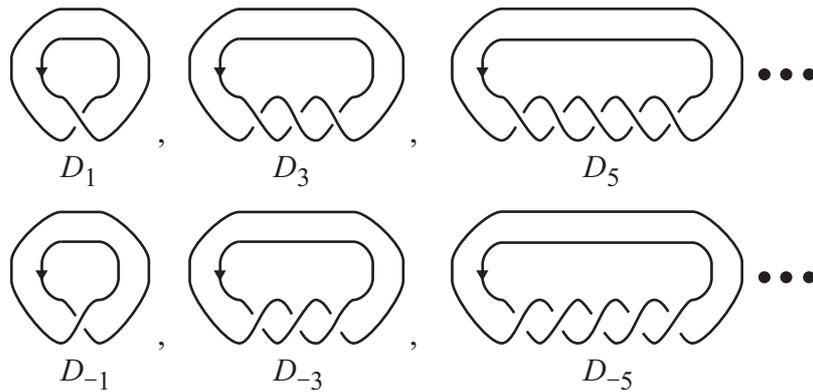


図 13: $u(D') = \frac{c(D') - 1}{2}$ である結び目の射影図 D'

次の補題と命題 9 を用いることで、 $u(D) = \frac{c(D) - 2}{2}$ を満たす射影図の特徴づけを行った。

補題 18 [1] P を一つの円周の射影像とすると、 $\text{tr}(P) = p(P) - 2$ であるための必要十分条件は、 P は 3 本の組紐射影図の射影像であるまたは $(2, r)$ トーラス結び目射影図と $(2, s)$ トーラス結び目射影図の連結和の射影像であることである。

定理 19 [1] D を既約な結び目の射影図とする。 $u(D) = \frac{c(D) - 2}{2}$ であるための必要十分条件は、 D は図 14 の (a) のような 8 の字結び目の射影図、(b) のような 3 本の正組紐射影図、それらの鏡映射影図、または $(2, r)$ トーラス結び目射影図と $(2, s)$ トーラス結び目射影図の連結和であるか、それらのことである。ここで r, s は奇数で $r, s \neq \pm 1$ である。

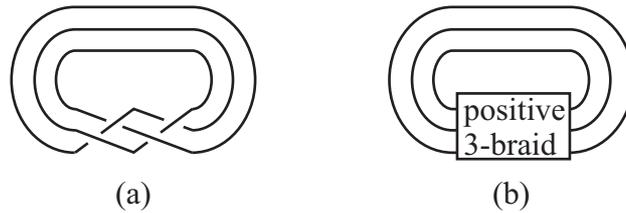


図 14:

参考文献

- [1] T. Abe, R. Hanaki, R. Higa, *The unknotting number and band-unknotting number of a knot*, Osaka J. Math, to appear.
- [2] R. Hanaki, *Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs*, Osaka J. Math **47** (2010), 863–883.
- [3] R. Hanaki, *Notes on regular projections of knots*, Bull. Nara Univ. Ed. Natur. Sci. **59** (2010), no.2, 7–13..
- [4] R. Hanaki, *Trivializing number of knots*, preprint.
- [5] A. Henrich, N. Macnaughton, S. Narayan, O. Pechenik and J. Townsend, *Classical and virtual pseudodiagram theory and new bounds on unknotting numbers and genus*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), 625–650.
- [6] A. Henrich, N. MacNaughton, S. Narayan, O. Pechenik, R. Silversmith and J. Townsend, *A Midsummer Knot’s Dream*, preprint, arXiv:math.GT/1003.4494.
- [7] Y. Huh, K. Taniyama: *Identifiable projections of spatial graphs*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), 991–998.
- [8] T. Nakamura, *Four-genus and unknotting number of positive knots and links*, Osaka J. Math. **37** (2000), 441–451.
- [9] R. Nikkuni: *A remark on the identifiable projections of planar graphs*, Kobe J. Math. **22** (2005), 65–70.
- [10] R. Nikkuni: *Completely distinguishable projections of spatial graphs*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), 11–19.
- [11] J.H. Przytycki and K. Taniyama, *Almost positive links have negative signature*, J. Knot Theory Ramifications, **19**, (2010) 187–289.
- [12] J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, to appear in Invent. Math.
- [13] A. Stoimenow, *On the crossing number of positive knots and braids and braid index criteria of Jones and Morton-Williams-Franks*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 3927–3954.
- [14] K. Taniyama: *A partial order of knots*, Tokyo J. Math. **12** (1989), 205–229.
- [15] K. Taniyama: *A partial order of links*, Tokyo J. Math. **12** (1989), 475–484.
- [16] K. Taniyama: *Knotted projections of planar graphs*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3357–3579.
- [17] K. Taniyama: *Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded*, J. Knot Theory Ramifications, **18** (2009), 1049–1063.

Bridge numbers of links and minimal numbers of meridian generators of link groups

張 娟姫 (広島大学)*

1. 序

1.1. Cappell と Shaneson の問題

1978 年に出版された低次元トポロジーに関する Kirby の問題集で, Cappell と Shaneson([8, pb. 1.11]) によって「3次元球面内の絡み目 L に対して, L の橋指数と呼ばれる不変量と L の補空間の基本群のメリディアン生成元の最小数は一致するか」という問題が挙げられた. この問題は, 「向きづけ可能な閉3次元多様体 M のヘガード種数と M の基本群の生成元の最小数が一致する」という Waldhausen 予想と深く関係している.

本稿では, Cappell と Shaneson の問題に関して知られている諸結果を紹介する. 特に, フランスのトゥールーズ大学の Michel Boileau 教授との共同研究で得られた結果等も紹介する.

1.2. 定義や記号

3次元球面 S^3 内の絡み目 L に対して, L と $2n$ 個の点で交わる2次元球面で, 対 (S^3, L) を二つの n 本自明タングルに分解するものを L の n 橋球面という. また, この (S^3, L) の二つの n 本自明タングルへの分解のことを L の n 橋分解とよぶ. ここで, n 本自明タングルとは, 3次元球体 B^3 とその中に適切に埋め込まれた n 本の弧 t の対で, t を一斉に B^3 の境界に押し付けることができるものである. つまり, (B^3, t) が n 本自明タングルであるとは, B^3 の境界上の n 本の弧 t' で $t \cup t'$ が B^3 内の n 個の互いに素な円盤の境界になるものが存在するときをいう.

3次元球面内の任意の絡み目はある自然数 n に対して n 橋分解を持つことは簡単に示すことができる. また, 絡み目 L が n 橋分解を持つとき, 「(絡み目の橋分解の)安定化」と呼ばれる操作を用いて n より大きい任意の自然数 m に対して L の m 橋分解を構成することも出来る. 絡み目 L が n 橋分解を持ち, $(n-1)$ -分解を持たないときに, L を n 橋絡み目という. また, この n を L の橋指数と呼び, $b(L)$ で表す.

絡み目 L が n 橋分解を持つとき, 絡み目群 $\pi_1(S^3 \setminus L)$ が n 個のメリディアンで生成されることは簡単に証明できる. よって, $\pi_1(S^3 \setminus L)$ のメリディアン生成元の最小数は L の橋指数以下であることがわかる. 以降, 絡み目群 $\pi_1(S^3 \setminus L)$ のメリディアン生成元の最小数を $w(L)$ で表す.

* 〒 739-8526 広島県東広島市鏡山1-3-1 広島大学 大学院理学研究科
e-mail: yeonheejang@hiroshima-u.ac.jp
web: <http://www.geocities.jp/yyyjang>

2. 先行研究

2.1. Waldhausen 予想に関して

Waldhausen 予想 (「the Rank Conjecture」又は「the Rank versus Genus Conjecture」とも呼ばれる) は, 「向きづけ可能な閉 3 次元多様体 M のヘガード種数と M の基本群の階数が一致する」というものである. これは特に, 「 M の基本群の階数が 0 ならば, M はヘガード種数 0 を持つ」, つまり 「 M の基本群が自明ならば, M は 3 次元球面に同相である」というポアンカレ予想の一般化とみなすことも出来る.

Waldhausen 予想に関しては, 幾つか反例が知られている. 最初の反例は Boileau と Zieschang ([4]) によって与えられたもので, それは次の定理の中のザイフェルト多様体である.

定理 1 M を 2 次元球面上上のザイフェルト多様体 $S(0; e_0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2\lambda+1})$ とする (記号は [4] を参照). 但し, β と λ は $\lambda > 0$, $\gcd(\beta, 2\lambda + 1) = 1$, $e_0 \neq \frac{1}{2(2\lambda+1)}$ をみたす整数である. すると, M の基本群は 2 つの元で生成されるが, M のヘガード種数は 3 である.

また, Weidmann ([12]) は Boileau と Zieschang の反例を一般化して, 次のようにグラフ多様体の中にも反例があることを示した.

定理 2 M を M_1 と M_2 を貼り合わせて得られる多様体とする. ここで, M_1 はメビウス帯上のザイフェルト多様体で指数 $\frac{q}{p}$ の特異ファイバーを一つ持つもので, M_2 は 2 次元円盤上のザイフェルト多様体で指数 $\frac{1}{2}$ と $\frac{\beta}{2\lambda+1}$ の特異ファイバーをそれぞれ一つずつ持つものである. 但し, p, q, β, λ は $p > 0$, $\lambda > 0$, $\gcd(p, q) = 1$, $\gcd(\beta, 2\lambda + 1) = 1$, $e_0 \neq \frac{1}{2(2\lambda+1)}$ をみたす整数である. すると, M の基本群は 2 つの元で生成されるが, M のヘガード種数は 3 である.

その後, Boileau と Weimann ([2]) によって基本群の階数が 2 の多様体の特徴づけが行われている. この結果によって, 基本群の階数が 2 でヘガード種数が 3 以上の多様体の満たすべき特徴は知られているが,

- (定理 1 と) 定理 2 の中の多様体,
- 円盤上のザイフェルト多様体とレンズ空間内の双曲 1 橋結び目の外部空間を貼り合わせて得られる多様体

以外にこの特徴をみたす多様体が存在するかどうかはわかっていない. (Boileau と Weimann は論文 [2] の中で, この特徴をみたす多様体は上で挙げたものに限ると予想している.)

また, 最近 Tao Li によって双曲多様体の反例も構成できたということがアナウンスされている.

2.2. Cappell と Shaneson の問題に関して

1950年に Papakyriakopoulos([9]) によって Dehn の補題が証明されたおかげで、結び目の解消定理 (Unknotting theorem) が証明された。この Dehn の補題 (又は結び目の解消定理) を使えば $b(L) = 1$ であることと $w(L) = 1$ であることが同値であることが証明できるので、Kirby の問題集に載っている Cappell と Shaneson の問題では最初に $w(L) = 2$ のときに $b(L) = 2$ が云えるかを聞いている。

この問題に関する最初の (部分的) 解決は 1985年に Boileau と Zieschang([5]) によって与えられた。二人は一般化されたモンテシーノス絡み目という絡み目の族に対して次の定理を証明している (記号については [5] 又は第 3.1 節を参照)。

定理 3 (1) モンテシーノス絡み目 $L = m(0|e; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ ($r \geq 3$) に対して、 $w(L) = b(L) = r$ が成立する。

(2) 一般化されたモンテシーノス絡み目 $L = m(-g|e; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ ($g \geq 1$) に対して、次が成立する。

- (i) $r \geq 2$ のとき、 $w(L) = b(L) = g + r$ が成立する。
- (ii) $r = 1$ のとき、 $\alpha_1 e - \beta_1 = \pm 1$ の場合は $w(L) = b(L) = g + 1$ が成立し、それ以外の場合は $w(L) = b(L) = g + 2$ が成立する。
- (iii) $r = 0$ のとき、 $e = \pm 1$ の場合は $w(L) = b(L) = g + 1$ が成立し、それ以外の場合は $w(L) = b(L) = g + 2$ が成立する。

この定理の中に登場する絡み目に関しては、常に $w(L) = b(L)$ が成り立つことがわかる。しかしこの定理には、 $g = 0$ で $r \leq 2$ の場合、つまり、 L が 2 橋絡み目の場合は含まれていない。しかし、その 4 年後の 1989年に Boileau と Zimmermann([6]) は、絡み目 L の「 π -軌道体群」が二面体群ならば L は 2 橋絡み目であることを示すことで次の定理を得ている。

定理 4 任意の絡み目 L に対して、 $b(L) = 2$ であることと $w(L) = 2$ であることは同値である

定理 3 と定理 4 を合わせると、任意の一般化されたモンテシーノス絡み目 L に対して $b(L) = w(L)$ が成立つことがわかる。

一方、その間の 1987年には Rost と Zieschang([10]) が次の定理を証明している。

定理 5 任意の (p, q) -型トーラス絡み目 $L = T(p, q)$ (p と q は互いに素) に対して、 $b(L) = w(L) = \min(|p|, |q|)$ が成立する。

実は、 $b(T(p, q)) = \min(|p|, |q|)$ であることは Schubert([11]) によって既に知られていた。

注 6 群 $\pi_1(S^3 \setminus T(p, q))$ は群表示 $\langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$ を持つことが知られている。つまり、 $\pi_1(S^3 \setminus T(p, q))$ の生成元の最小数は 2 である。従って、 $\pi_1(S^3 \setminus T(p, q))$ の生成元としてメリディアン以外の元も許すと、その最小数と $T(p, q)$ の橋指数の差は任意に大きくすることができる。

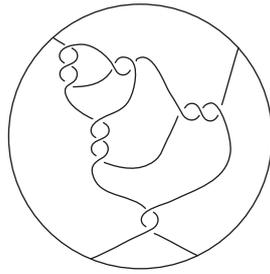


図 1:

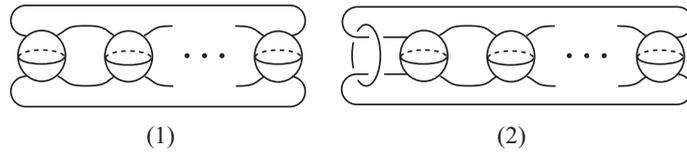


図 2:

3. 主結果

3.1. 代数絡み目

コンパクトで向きづけ可能な3次元多様体 M とその中に適切に埋め込まれた1次元部分多様体 L の対 (M, L) を **(3,1)-多様体対** と呼ぶ. **有理タングル** とは, 自明タングルに同相な (3,1)-多様体対のことで, 境界が固定されたものをいう. 有理タングルは有理数と対応することが知られていて, その有理数を有理タングルの**傾き**と呼ぶ. 例えば, Conway 表示と呼ばれる有理タングルの表示法はその傾きの連分数展開と対応する. 図1のタングルは傾き $31/50$ の有理タングルで, 連分数展開

$$\frac{31}{50} = \frac{1}{2 + \frac{1}{-3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{3}}}}}$$

に対応する表示である.

図2の(1)か(2)の(3,1)-多様体対に幾つかの有理タングルを貼り合せて得られる(3,1)-多様体対を**モンテシーノス対**と呼ぶ. 図2(1)のモンテシーノス対に境界がなくなるまで有理タングルを貼り合せて得られる3次元球面内の絡み目を**モンテシーノス絡み目**という. (図3のモンテシーノス絡み目を $m(0|b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ で表す.) 図4の絡み目のように, 幾つかのモンテシーノス対を貼り合せて得られる3次元球面内の絡み目を**代数絡み目**と呼ぶ.

3.2. 主定理

次の定理は, Michel Boileau 教授との共同研究で得られたものである.

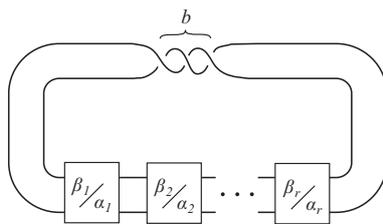
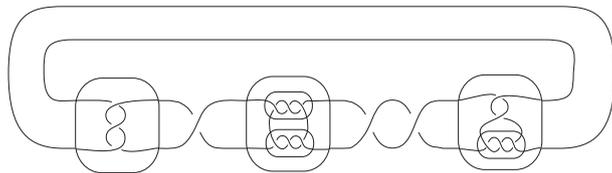
図 3: $b = 3$.

図 4:

定理 7 ([1]) 任意の代数絡み目 L に対して, $b(L) = 3$ であることと $w(L) = 3$ であることは同値である.

注 8 3 橋代数絡み目, つまり $b(L) = 3$ をみたす代数絡み目は [7] の中で完全に分類されている.

Waldhausen 予想に関しては様々な反例が得られていることに比べ, Cappell と Shaneson の問題に関してはまだ反例は得られていない. これは, 3 次元多様体のヘガード種数と基本群の階数の関係よりも, 絡み目の橋指数と絡み目群のメリディアン生成元の最少数の関係の方がより「密接」であることを意味しているとも思える. 実際, 絡み目 L に沿った 3 次元球面の二重分岐被覆を $M_2(L)$ とした時, $b(L) = 3$ であることと $M_2(L)$ のヘガード種数が 2 であることが同値であることに対し, $w(L) = 3$ であることと $\pi_1(M_2(L))$ の階数が 2 であることは同値でない. $w(L) = 3$ であるためには, 少なくとも $\pi_1(M_2(L))$ が二つの元で生成され, かつ, その二つの生成元をそれぞれの逆元に移す $\pi_1(M_2(L))$ の自己同型写像が存在することが必要である.

絡み目 L に対して「 $w(L) = 3$ が $b(L) = 3$ であるための必要十分条件であるか」というのは, 向きづけ可能な閉 3 次元多様体 M に対して, $\pi_1(M)$ が二つの元で生成され, かつ, その二つの生成元をそれぞれの逆元に移す $\pi_1(M)$ の自己同型写像が存在するとき, この自己同型写像が M の種数 2 のヘガード分解の「超橢円対合」で実現できるかという問題に関係している. 実は, ザイフェルト多様体に関してはこれが正しいことが証明されている ([3]). これによって, 定理 1 の中の多様体は Waldhausen 予想の反例にはなるが, これに対応する Cappell と Shaneson の問題への反例は存在しないことがわかる. また, グラフ多様体 (又はより一般的な多様体) に対しても同様なことが成り立つことが予想されている.

参考文献

- [1] M. Boileau and Y. Jang, *Arborescent links whose groups are generated by 3 meridians are 3-bridge links*, in preparation.
- [2] M. Boileau and R. Weidmann, *The structure of 3-manifolds with two-generated fundamental group*, *Topology* **44** (2005), no.2, 283–320.
- [3] M. Boileau and R. Weidmann, *On invertible generating pairs of fundamental groups of graph manifolds*, *Geom. Topol. Monogr.* **14** (2008), 105–128.
- [4] M. Boileau and H. Zieschang, *Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds*, *Invent. Math.* **76** (1984), 455–468.
- [5] M. Boileau and H. Zieschang, *Nombre de ponts et générateurs méridiens des entrelacs de Montesinos*, *Comment. Math. Helvetici* **60** (1985), 270–279.
- [6] M. Boileau and B. Zimmermann, *The π -orbifold group of a link*, *Math. Z.* **200** (1989), 187–208.
- [7] Y. Jang, *Classification of 3-bridge arborescent links*, *Hiroshima Math. J.* **41** (2011), 89–136.
- [8] R. Kirby, *Problems in low dimensional topology*, *Proc. Symposia in Pure Math.*, **32** (1978), 272–312.
- [9] C. D. Papakyriakopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, *Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.)* **43** (1957), 169–172. *Ann. of Math. (2)* **66** (1957), 1–26.
- [10] M. Rost and H. Zieschang, *Meridional generators and plat presentations of torus links*, *J. London Math. Soc. (2)* **35** (1987), no.3, 551–562.
- [11] H. Schubert, *Über eine numerische Knoteninvariante*, *Math. Z.* **61** (1954), 245–288.
- [12] R. Weidmann, *Some 3-manifolds with 2-generated fundamental group*, *Arch. Math. (Basel)* **81** (2003), no. 5, 589–595.

Lefschetz ファイバー空間の構成と改変について

遠藤 久顕 (大阪大学大学院理学研究科)

1 序

Lefschetz ファイバー空間は, S. Lefschetz が射影多様体のトポロジーを調べるために導入した, Lefschetz pencil に由来する概念である. 1970年代後半から1980年代にかけて, 種数1のLefschetz ファイバー空間は楕円曲面のトポロジーの研究において基本的な役割を果たした. 松本幸夫氏や上正明氏の論説 [Ma1],[Ma2],[Ue] に詳しい解説がある. 種数2以上のLefschetz ファイバー空間については, 1995年に松本幸夫氏による種数2の場合の先駆的な研究 [Ma3] が現れ, ほどなくして Donaldson [Do] と Gompf [GS] によりシンプレクティック構造との密接な関係が明らかにされた(1998年). それ以来, 現在まで様々な観点からの活発な研究が続いている.

Lefschetz ファイバー空間の魅力の一つは, 4次元多様体のトポロジーと曲面の写像類群の組合せ的な性質とがモノドロミーを介して結びつく点にある. これは Heegaard 分解や写像トーラスを通して3次元多様体と曲面の写像類群とが強く結びついていることに似ている. しかし, 写像類群の組合せ的な性質を前面に押し出したような研究は, 4次元においてはまだまだ多くないのかもしれない.

本稿では, Lefschetz ファイバー空間に関する諸研究を, 筆者自身の最近の研究を中心に紹介したい. 特に, モノドロミーの置き換えとファイバー和という二つの観点から, Lefschetz ファイバー空間の構成と改変について述べてみたい. 筆者の研究は暗中模索そのもので, 多くの方の目にはさまよっているようにしか映らないのではないかと思う. どうかご容赦いただきたい.

2 Lefschetz ファイバー空間とモノドロミー

まずはじめに, Lefschetz ファイバー空間と曲面の写像類群に関する基礎事項を復習しておこう. [Ka], [Ma3], [GS] などに詳しい解説がある.

定義 2.1 Σ, B をそれぞれコンパクトで向きづけられた曲面とし, M をコンパクトで向きづけられた4次元 C^∞ 多様体とする. C^∞ 写像 $f: M \rightarrow B$ が Σ をファイバーとする **Lefschetz ファイバー空間** (Lefschetz fibration) であるとは, f が次の条件 (i), (ii) をみたすことである:

(i) f は有限個の臨界値 $b_1, \dots, b_n \in \text{Int } B$ をもち, 各特異ファイバー $F_i := f^{-1}(b_i)$ には唯1つの臨界点 $p_i \in \text{Int } M$ が存在する. また, f の $f^{-1}(B - \{b_1, \dots, b_n\})$ への制限は Σ をファイバーとする C^∞ ファイバー束であり, ファイバーの境界の和集合への制限は $\partial\Sigma$ をファイバーとする自明な C^∞ ファイバー束であるとする;

(ii) 各 p_i の周りでは p_i, b_i を中心とする局所複素座標 $(z_1, z_2), w$ により, f は $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ と表示される. (このとき局所複素座標は M, B の向きと両立するものをとる). \diamond

境界 $\partial\Sigma$ 上で恒等写像であるような Σ の向きを保つ自己微分同相全体のなす群を $\text{Diff}_+\Sigma$ とし, $\partial\Sigma$ を点ごとに止めて恒等写像 id_Σ にアイソトピックな写像のなす $\text{Diff}_+\Sigma$ の部分群を $\text{Diff}_0\Sigma$ とするとき, $\text{Diff}_+\Sigma/\text{Diff}_0\Sigma$ を \mathcal{M}_Σ と書き, Σ の写像類群という. \mathcal{M}_Σ の積は通常のように写像の合成によって定義し, $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_\Sigma$ に対して $\psi\varphi$ はまず φ を施してから次に ψ を施すことを意味するものとする.

Σ 上の単純閉曲線のアイソトピー類全体 \mathcal{S} の生成する自由群を \mathcal{F} とする. $a \in \mathcal{S}$ に対し a に沿った右向き Dehn twist $t_a \in \mathcal{M}_\Sigma$ を対応させることにより, 準同型 $\varpi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}_\Sigma$ がえられる. $\mathcal{R} := \text{Ker } \varpi$ の元を, \mathcal{S} を生成元集合とする \mathcal{M}_Σ の関係子 (relator) という.

記号 2.2 $W \in \mathcal{F}$ の ϖ による像 $\varpi(W) \in \mathcal{M}_\Sigma$ をしばしば \overline{W} と書く. $c \in \mathcal{S}$ と $W = a_r^{\varepsilon_r} \cdots a_1^{\varepsilon_1} \in \mathcal{F}$ ($a_1, \dots, a_r \in \mathcal{S}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{\pm 1\}$) に対し, \mathcal{S} の元 ${}_W(c)$ を $w(c) := t_{a_r}^{\varepsilon_r} \cdots t_{a_1}^{\varepsilon_1}(c)$ によって定義する. \diamond

$f: M \rightarrow B$ を定義 2.1 の Lefschetz ファイバー空間とする. (i) より, $B - \{b_1, \dots, b_n\}$ 上の Σ をファイバーとするファイバー束の分類写像 $B - \{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow \text{BDiff}_+\Sigma$ を考えることができ, この写像から基本群の間に準同型

$$\chi: \pi_1(B - \{b_1, \dots, b_n\}) \rightarrow \pi_1(\text{BDiff}_+\Sigma) \cong \pi_0(\text{Diff}_+\Sigma) = \mathcal{M}_\Sigma$$

が誘導される. これを Σ 束 $f|_{f^{-1}(B - \{b_1, \dots, b_n\})}$ のホロノミー準同型というが, ここでは f の **モノドロミー表現** (monodromy representation) ともよぶことにする.

以下, $B = D^2, S^2$ とし, $b_0 \in B - \{b_1, \dots, b_n\}$ を基点とする. 各 $i = 1, \dots, n$ に対し, b_i の $B - \{b_1, \dots, b_n\}$ における互いに交わらない円板近傍 D_i をとり, b_0 から ∂D_i の 1 点への b_0 のみを共有する $B - \text{Int}(D_1 \cup \dots \cup D_n)$ 内の単純弧 l_i をとる. ∂D_i に時計回りに向きを入れ, b_0 を基点とするループ γ_i を $\gamma_i := l_i \cdot \partial D_i \cdot \overline{l_i}$ によって定める. このとき, $B = D^2$ ならば $B - \{b_1, \dots, b_n\}$ において $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ が ∂D^2 にホモトピックであるように, また $B = S^2$ ならば $B - \{b_1, \dots, b_n\}$ において $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ が 0 ホモトピックであるようにしておく.

χ による γ_i の像 $\chi(\gamma_i)$ は Σ のある単純閉曲線 c_i に沿う右向き Dehn twist t_{c_i} となる. この c_i を特異ファイバー F_i に対する **消滅サイクル** (vanishing cycle) という. ループの積 $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ は χ によって右向き Dehn twist の積 $t_{c_1} \cdots t_{c_n} \in \mathcal{M}_\Sigma$ にうつされる. また, \mathcal{F} の positive word $c_1 \cdots c_n$ は ϖ によって $t_{c_1} \cdots t_{c_n}$ にうつる. 特に $B = S^2$ のとき, $t_{c_1} \cdots t_{c_n} = 1 \in \mathcal{M}_\Sigma$, すなわち positive relator $c_1 \cdots c_n \in \mathcal{R}$ となる. 逆に, このような positive word $c_1 \cdots c_n \in \mathcal{F}$ に対し, $D^2 \times \Sigma$ に n 個の 2-handle を接着することによって, Σ をファイバーとする D^2 上の Lefschetz ファイバー空間を構成することができる. さらに positive relator $c_1 \cdots c_n \in \mathcal{R}$ に対しては, $D^2 \times \Sigma$ を接合することができ, S^2 上の Lefschetz ファイバー空間が構成される.

以上の議論において, positive word $c_1 \cdots c_n \in \mathcal{F}$ は, $F_0 := f^{-1}(b_0)$ と Σ との同一視を与える微分同相やループ系 $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ の取り方に依存している. これらの取

り方を換えることは、ある $W \in \mathcal{F}$ による同時共役 (simultaneous conjugation) や、初等変形 (elementary transformation) を $c_1 \cdots c_n$ に有限回施すことと対応する。

3 モノドロミーの置き換えと4次元多様体の改変

曲面の写像類群において、Dehn twist の積の間に成り立つ関係式には、両辺が positive word であるものが少なくない。このような関係式を用いることにより、一つの positive word を別の positive word に作り替えることができる。Smith が substitution と呼んだこの操作をきちんと定義しておく (cf. [Sm],[EN]).

定義 3.1 $W_1, W_2 \in \mathcal{F}$ とし、 $\varrho := W_1^{-1}W_2 \in \mathcal{R}$ であるとする。また、 $U, V \in \mathcal{F}$ とし、word $\sigma := UW_1V \in \mathcal{F}$ を考える。このとき、 σ と ϱ の共役の積 $\sigma' := \sigma V^{-1}\varrho V$ は、 UW_2V に等しい。このような操作 $\sigma \mapsto \sigma'$ を、 ϱ による置き換え (substitution)、あるいは関係式 $W_1 = W_2$ による置き換えという。 U, V, W_1, W_2 が positive word ならば、 σ, σ' も positive word であり、 $\sigma \in \mathcal{R}$ ならば $\sigma' \in \mathcal{R}$ である。

$\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{F}$ に対し、 σ_1 に ϱ, ϱ^{-1} による置き換えを有限回施して σ_2 がえられるとき、 $\sigma_1 \equiv \sigma_2 \pmod{\varrho}$ と書く。◇

Σ をファイバーとする Lefschetz ファイバー空間 $f: M \rightarrow B$ から、モノドロミー表現を用いて上のような positive word $\sigma = c_1 \cdots c_n \in \mathcal{F}$ を構成する。 $W_1, W_2 \in \mathcal{F}$ を positive word とし、 $\varrho := W_1^{-1}W_2 \in \mathcal{R}$ とする。もし σ が W_1 を subword として含むならば、 ϱ による置き換えを σ に施して新しい positive word $\sigma' \in \mathcal{F}$ がえられる。 σ' から新しい Lefschetz ファイバー空間 $f': M' \rightarrow B$ が構成される。

Fuller は、chain relation による置き換えを用いて既知の M から新しい M' を構成してみせた。彼の構成した M' はいかなる正則な Lefschetz ファイバー空間とも同型でないことが、Smith [Sm] によって証明された。また、永見誠二氏と筆者 [EN] は、 M と M' の符号数の差を、置き換えに用いた関係子 ϱ から代数的に求める方法を与えた。しかし、より素朴な次の問題は長らく手つかずであった。

問題 3.2 M' は M を 4次元多様体としてどのように改変したものであろうか。

Gurtas と筆者は、lantern relation による置き換えを用いて様々な Lefschetz ファイバー空間を構成していたが、ついでに問題 3.2 を lantern relation の場合にまじめに考えてみることにした。lantern relation による置き換えによって、符号数は必ず +1 だけ変化することが [EN] において示されていたから、当初は M' は M のブローダウン (すなわち、 M と $M' \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ は微分同相) であろう、などと安易に予想していた。しかし、それは間違いであった。

命題 3.3 (Gurtas-E. [EG])

$\sigma, \sigma' \in \mathcal{F}$ を positive word とし、 $f: M \rightarrow B, f': M' \rightarrow B$ を対応する Lefschetz ファイバー空間とする。lantern relation による置き換えによって σ から σ' がえられるとき、 M' は M の C_2 に沿う有理ブローダウンである。

この命題は, lantern relation の両辺に対応する D^2 上の $\Sigma_{0,4}$ をファイバーとする Lefschetz ファイバー空間の Kirby 図式を描くことによって証明される. ここで, 種数 g , 境界成分 n のコンパクトで向きづけられた曲面を $\Sigma_{g,n}$ と書いている. lantern relation については定義 3.5 を見ていただくことにして, ここでは Fintushel-Stern [FS1] による有理ブローダウンの定義を振り返っておく (cf. [GS]§8.5).

$p \geq 2$ とする. 頂点の数が $p-1$, 辺の数が $p-2$ の linear graph を考え, 各頂点は端から順に $-p-2, -2, \dots, -2$ という整数で重みづけられているとする. このとき, 各頂点に対し重みを Euler 数にもつような S^2 上の D^2 束を考え, 辺で結ばれている D^2 束どうしを plumbing することにより, 境界をもつコンパクトで向きづけられた 4次元多様体 C_p がえられる. C_p の逆向き $\overline{C_p}$ は $\mathbb{C}P^2$ の $p-1$ 個の連結和 $\#(p-1)\mathbb{C}P^2$ に自然に埋め込むことができ, $B_p := \#(p-1)\mathbb{C}P^2 - \text{Int } \overline{C_p}$ は有理ホモロジー球体となる.

4次元 C^∞ 多様体 M に C_p が埋め込まれているとき, $M_0 := M - \text{Int } C_p$ とおけば $M = C_p \cup_{\partial M_0} M_0$ である. このとき, ∂M_0 に沿って M_0 に B_p を接合してえられる多様体 $M_{(p)} := B_p \cup_{\partial M_0} M_0$ を, C_p に沿う M の有理ブローダウン (rational blowdown) という. 実は, $\partial C_p = \partial B_p \cong L(p^2, p-1)$ であり, $L(p^2, p-1)$ の任意の自己微分同相は B_p に拡張することが知られている. 従って, $M_{(p)}$ の微分同相類は多様体対 (M, C_p) のみで定まる.

命題 3.3 より, lantern relation によるモノドロミーの置き換えが C_2 に沿う有理ブローダウンという改変操作に対応することがわかった. つまり, lantern relation に関しては問題 3.2 の答えがわかったことになる. 一方, 有理ブローダウンには C_p ($p \geq 3$) に対するものが存在するので, この場合の有理ブローダウンを実現する写像類群の関係式が存在するかを問うことは極めて自然であろう. 安井弘一氏や Mark, Van Horn-Morris の協力のおかげで, 次のことがわかった.

命題 3.4 (Mark–Van Horn-Morris–E. [EMV])

$\sigma, \sigma' \in \mathcal{F}$ を positive word とし, $f : M \rightarrow B, f' : M' \rightarrow B$ を対応する Lefschetz ファイバー空間とする. $p \geq 2$ の daisy relation による置き換えによって σ から σ' がえられるとき, M' は M の C_p に沿う有理ブローダウンである.

この命題の証明は命題 3.3 の証明と同様である. 命題に現れる daisy relation の定義を述べておく.

定義 3.5 $p \geq 2$ とする. 曲面 $\Sigma = \Sigma_{0,p+2}$ 上に図 1 のように $a_0, a_1, \dots, a_{p+1}, x_1, \dots, x_{p+1} \in \mathcal{S}$ をとる (S^2 から $p+2$ 個の開円板を除いた図を描いている). このとき, Σ の写像類群 \mathcal{M}_Σ において関係式

$$t_{a_{p+1}} \cdots t_{a_1} t_{a_0}^{p-1} = t_{x_{p+1}} \cdots t_{x_1}$$

が成り立つ. これを **daisy relation** [EMV] という. 特に, $p=2$ のときの daisy relation を **lantern relation** という. \diamond

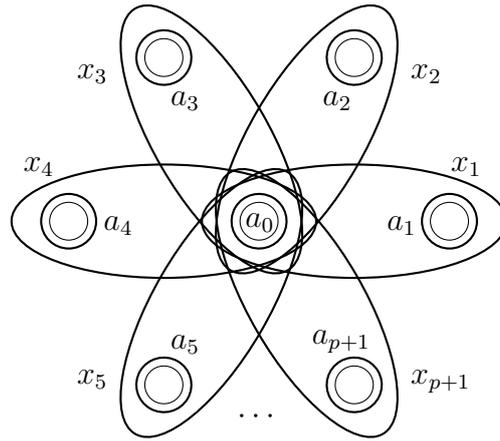


図 1: daisy relation に現れる $2p + 3$ 個の曲線

命題 3.4 は関係式が見つければ証明は自動的に従うタイプの結果である. 関係式を探しているとき, 安井弘一氏が「きっと見つかるはずですよ」と励まし, 助けて下さった. ともかく, これですべての有理ブローダウンを実現する関係式が見つかったわけである.

さて, Fintushel-Stern による 4 次元多様体の有理ブローダウンは, Park [Pa] によって一般化され, Stipsicz-Szabó-Wahl [SSW] によってさらに一般化された. 一般化された有理ブローダウンには様々な種類があるが, 負定値の plumbing tree から定まる 4 次元多様体 C を同じ境界をもつ有理ホモロジー球体 B に取り替える, という部分は共通している. ここでは, Park [Pa] による plumbing manifold $C_{p,q}$ の構成のみを簡単に述べておく.

$p > q \geq 1$ とし, p と q は互いに素であるとする. 連分数展開

$$-\frac{p^2}{pq-1} = [b_1, \dots, b_k] = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_k}}}$$

であって, $b_i \leq -2$ をみたすものを考える. 頂点の数が k , 辺の数が $k - 1$ の linear graph を考え, 各頂点は端から順に b_k, \dots, b_1 という整数で重みづけられているとする. このとき, 各頂点に対し重みを Euler 数にもつような S^2 上の D^2 束を考え, 辺で結ばれている D^2 束どうしを plumbing することにより, 境界をもつコンパクトで向きづけられた 4 次元多様体 $C_{p,q}$ がえられる. 特に, $C_{p,1}$ は Fintushel-Stern の plumbing manifold C_p に他ならない.

Stipsicz-Szabó-Wahl [SSW] の有理ブローダウンには, linear graph ではない, “T 字型”の plumbing tree も現れ, 4 つの family $\mathcal{G}, \mathcal{W}, \mathcal{N}, \mathcal{M}$ に分類される. このうち, family \mathcal{G} は上記の Park による $C_{p,q}$ たちのことである. Mark, Van Horn-Morris と筆者は, 一般化された有理ブローダウンを実現する関係式を探し, 次の結果を得た.

定理 3.6 (Mark–Van Horn-Morris–E. [EMV])

3つの family $\mathcal{G}, \mathcal{W}, \mathcal{N}$ のいずれかに属する plumbing tree に沿う有理ブローダウンを“実現する”ような, ある曲面 Σ の写像類群 \mathcal{M}_Σ の関係式が存在する.

定理 3.6 において除外した family \mathcal{M} については, 対応する関係式を見つけることができなかつた. 有理ホモロジー球体 B の Kirby 図式や, 定理 3.6 の関係式は具体的に書き下すことができる. 詳細は [EMV] を見ていただきたい.

注意 3.7 Dehn twist の積の間に成り立つ関係式のうち, 両辺が positive word であるものは他にもたくさん知られている. 下の表は, そのうちで特によく知られた関係式について, 左辺と右辺に対応する Lefschetz ファイバー空間の全空間をまとめたものである.

関係式	左辺の多様体	右辺の多様体	共通の境界
commutativity	$D^4 \amalg D^4$	$D^4 \amalg D^4$	$S^3 \amalg S^3$
braid	$X(S^2, -2)$	$X(S^2, -2)$	$\mathbb{R}P^3$
$2k$ -chain	$M_c(2, 2k+1, 4k+2)$	$X(\Sigma_k, -1)$	$\Sigma(2, 2k+1, 4k+2)$
$(2k+1)$ -chain	$M_c(2, 2k+2, 2k+2)$	$X(\Sigma_k, -2)$	$\Sigma(2, 2k+2, 2k+2)$
daisy	C_p	B_p	$L(p^2, p-1)$

但し, $X(B, e)$ は Euler 数が e であるような B 上の D^2 束の全空間であり, $M_c(p, q, r)$, $\Sigma(p, q, r)$ は $z_1^p + z_2^q + z_3^r$ に対応する Milnor ファイバー, Brieskorn 多様体である. \diamond

注意 3.8 全空間が閉多様体であるような Lefschetz ファイバー空間であつて, そのモノドロミーに daisy relation による置き換えを適用できるようなものが存在する. そのような具体例が [EG],[EMV] でいくつか構成されており, 興味深い微分構造をもつことがわかっている. モノドロミーの置き換えは broken Lefschetz fibration に対しても定義されるが, 全空間が閉多様体であるような broken Lefschetz fibration であつて, そのモノドロミーに定理 3.6 の関係式による置き換えを適用できるようなものが存在する. \diamond

注意 3.9 定理 3.6 のすべての関係式は, 複数の lantern relation を組み合わせることで構成される. また, モノドロミーにおける文字の生成・消去は, 4次元多様体における surgery と Gluck twist の合成に対応する. このことから, 定理 3.6 のすべての有理ブローダウンは, surgery, Gluck twist と (通常の) ブローダウンの有限回の合成であることがわかる. \diamond

4 ファイバー和をめぐる

Lefschetz ファイバー空間にはファイバー和と呼ばれる“足し算”が存在する. 以下では, ファイバー和に関するいくつかの結果を紹介する. $\Sigma_{g,0}$ をファイバーとする Lefschetz ファイバー空間を種数 g の Lefschetz ファイバー空間ともいう.

定義 4.1 種数 g の Lefschetz ファイバー空間 $f : M \rightarrow B, f' : M' \rightarrow B'$ を考え, $\partial B = \emptyset, \partial B' = \emptyset$ とする. f, f' の正則値のみを含む円板 $D \subset B, D' \subset B'$ をそれぞれ選ぶ. 基点 $b_0 \in \partial D, b'_0 \in \partial D'$ をとり, $F_0 := f^{-1}(b_0), F'_0 := f'^{-1}(b'_0)$ とおく. このとき, 向きを保つ微分同相 $\varphi : F_0 \rightarrow F'_0$ と向きを逆にする微分同相 $\partial D \rightarrow \partial D'$ によって, $M - f^{-1}(\text{Int } D)$ と $M' - f'^{-1}(\text{Int } D')$ を双方のファイバー構造を保つように接合することにより, 種数 g の Lefschetz ファイバー空間 $f \# f' : M \#_F M' \rightarrow B \# B'$ がえられる. これを f と f' の (φ による) **ファイバー和** (fiber sum) という. φ を強調するときには, $f \# f'$ を $f \#_\varphi f'$ と書く. \diamond

以下, $B = B' = S^2$ とし, $f : M \rightarrow B, f' : M' \rightarrow B'$ に対応する positive relator をそれぞれ $c_1 \cdots c_n, c'_1 \cdots c'_m \in \mathcal{R}$ とする. このとき, f と f' の φ によるファイバー和 $f \# f'$ に対応する positive relator は $\varphi(c_1) \cdots \varphi(c_n) \cdot c'_1 \cdots c'_m \in \mathcal{R}$ である.

単連結な 4 次元多様体の連結和に関する古典的な結果として, Wall の安定性定理がよく知られている (cf. [GS],[Sc]). すなわち, 任意の単連結な 4 次元多様体に $\mathbb{C}P^2$ と $\overline{\mathbb{C}P}^2$ を十分たくさん連結和すると, $\#k\mathbb{C}P^2 \#l\overline{\mathbb{C}P}^2$ という形の多様体に微分同相になる. 興味深いことに, 種数 2 の Lefschetz ファイバー空間のファイバー和に関しても, 同様の定理が知られている.

種数 2 の閉曲面 $\Sigma_{2,0}$ 上に超楕円的対合で不変な単純閉曲線からなる長さ 5 の chain c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 をとり, $c_1 \cup c_2$ の正則近傍の境界を d とする. このとき,

$$\sigma_0 := (c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_4 c_3 c_2 c_1)^2,$$

$$\sigma_1 := (c_1 c_2 c_3 c_4 c_5)^6,$$

$$\sigma_2 := d \cdot c_1^{-1} c_2^{-1} (c_3) \cdot c_2^{-1} c_3^{-1} (c_4) \cdot c_3^{-1} c_4^{-1} (c_5) \cdot (c_5 c_4 c_3 c_2 c_1)^3 \cdot c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_4 c_3 c_2 c_1$$

はすべて positive relator であり, σ_i に対応する種数 2 の Lefschetz ファイバー空間 $f_i : M_i \rightarrow S^2$ が定まる ($i = 0, 1, 2$).

定理 4.2 (Auroux [Au1], Kamada [Km])

任意の種数 2 の Lefschetz ファイバー空間 $f : M \rightarrow S^2$ に対し, ある $k_0 \geq 0$ が存在して, $k \geq k_0$ となる任意の整数 k に対し, $f \# k f_0$ は f_0, f_1, f_2 のコピーのファイバー和に同型である. さらに, $k_0 = 2n_+ + 1$ ととることができる. ここで, n_+ は f の分離型の消滅サイクルの個数である.

注意 4.3 上の σ_2 は [Au1],[Km] の W_2 とは異なるが, 初等変形で互いに移りあう. Auroux [Au2] は, 一般の種数 g の Lefschetz ファイバー空間についても, 切断の存在や消滅サイクルのタイプに関する条件を仮定して, 同様の定理を導いている. 長谷川功氏の報告 [Ha] によれば, [Au2] の結果は切断の存在を仮定しない形に改良できるようであるが, 筆者は証明の詳細を知らない. \diamond

4 次元多様体の連結和に関する安定化について, 次の例がよく知られている. 多重ファイバーをもたない Euler 標数 $12n$ の単連結な楕円曲面 $E(n)$ ($n : \text{odd}, n > 1$)

と $(2n-1)\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# (10n-1)\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ は互いに同相であるが微分同相ではない. しかし, $E(n)\#\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ と $2n\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# (10n-1)\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ は微分同相である. 面白いことに, 種数 2 の Lefschetz ファイバー空間のファイバー和に関する安定化についても, よく似た例が構成できる.

$\Sigma_{2,0}$ 上に先ほどの単純閉曲線 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, d$ を考える. このとき,

$$\sigma_3 := (c_1 c_2 c_3 c_4)^{10},$$

$$\sigma_4 := d \cdot (c_1 c_2)^{-3} (c_3) \cdot (c_1 c_2)^{-3} (c_2) \cdot (c_1 c_2)^{-3} (c_4) \cdot (c_1 c_2)^{-3} (c_3) \cdot c_3 c_2 c_4 c_3 \cdot (c_1 c_2 c_3 c_4)^5$$

はどちらも positive relator であり, σ_i に対応する種数 2 の Lefschetz ファイバー空間 $f_i : M_i \rightarrow S^2$ が定まる ($i = 3, 4$).

一つ目は非分離型の消滅サイクルのみをもつ例である.

定理 4.4 (Matsumoto [Ma3]) —

2つの Lefschetz ファイバー空間 M_3 と $\#_F 2M_0$ は互いに同相であるが同型ではない. しかし, $M_3 \#_F M_0$ と $\#_F 3M_0$ は同型である.

二つ目は分離型の消滅サイクルを含む例である.

定理 4.5 (E. [En2]) —

2つの Lefschetz ファイバー空間 M_4 と M_2 は互いに同相であるが同型ではない. しかし, $M_4 \#_F M_0$ と $M_2 \#_F M_0$ は同型である.

4次元多様体の改変操作として, ファイバー和は連結和とはかなり違うものである. (例えば, 2つの有理楕円曲面のファイバー和は K3 曲面であり, 交叉形式は全く違うものに変化する.) にもかかわらず, 上のような似た性質をもつ.

注意 4.6 定理 4.2 で与えられた k_0 の値 $2n_+ + 1$ は, 定理 4.4 の例 ($n_+ = 0$) ではシャープであり, 定理 4.5 の例 ($n_+ = 1$) ではシャープではない. \diamond

注意 4.7 上の M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 はすべて種数 g の超楕円的な Lefschetz ファイバー空間の具体例として一般化され, 同様の性質をもつことが証明される:

❶ $\#_F g M_0$ と M_3 は互いに同相であるが同型ではない. しかし, $\#_F (g+1) M_0$ と $M_3 \#_F M_0$ は同型である ([En1]). また, $\#_F g M_0$ と M_3 と $(2g^2 - 2g + 1)\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# (6g^2 + 2g + 1)\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ は互いに同相であるが, どの 2 つも微分同相ではない ([Fu], cf. [En2]).

❷ M_4 と $M_2 \#_F (g/2 - 1) M_0$ は互いに同相であるが同型ではない. しかし, $M_4 \#_F M_0$ と $M_2 \#_F (g/2) M_0$ は同型である ([En2]). また, M_4 と $M_2 \#_F (g/2 - 1) M_0$ と $(3g^2/2 - 2g + 1)\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# (9g^2/2 + 2)\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ は互いに同相であるが, どの 2 つも微分同相ではない ($g = 2$ のとき佐藤好久氏 [Sa], $g \geq 4$ のとき [En2]). \diamond

以上の例では, ファイバー和の定義 (定義 4.1) に現れる微分同相 φ の取り方には触れなかった (定理 4.4, 定理 4.5 の例では最も “素直な” φ をとっている). 次の例では, ファイバー和の性質が φ の取り方に実際に依存することを見ることにする.

$\Sigma_{2,0}$ 上に先ほどの単純閉曲線 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, d$ を考える. このとき,

$$\sigma_5 := (d \cdot c_1^{-1} c_2^{-1}(c_3) \cdot c_2^{-1} c_3^{-1}(c_4) \cdot c_3^{-1} c_4^{-1}(c_5))^2$$

は positive relator であり, σ_5 に対応する種数 2 の Lefschetz ファイバー空間 $f_5 : M_5 \rightarrow S^2$ が定まる. この f_5 は松本幸夫氏 [Ma3] によって初めて構成されたため, **松本ファイバー空間** (Matsumoto fibration) などと呼ばれる. [Ma3] における構成から, M_5 は $S^2 \times T^2 \# 4\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ に微分同相であることがわかっている. 松本ファイバー空間の 2 つのコピーのファイバー和には, 面白い性質をもつ多様体が現れる.

定理 4.8 (Ozbagci-Stipsicz [OS])

ある微分同相 φ_1 による 2 つの f_5 のファイバー和 $f_5 \#_{\varphi_1} f_5$ の全空間は, (向きを取り替えても) 複素構造を許容しない.

実際, $f_5 \#_{\varphi_1} f_5$ の全空間の基本群は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ に同型であり, Enriques-Kodaira の分類表と合わせると, 複素曲面ではありえないことがわかる.

定理 4.9 (Okamori [Ok])

ある微分同相 φ_2 による 2 つの f_5 のファイバー和 $f_5 \#_{\varphi_2} f_5$ の全空間は, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ に同相であるが微分同相ではない. さらに, この多様体は 1 ハンドルの現れないハンドル分解をもつ.

φ_2 の取り方から $f_5 \#_{\varphi_2} f_5$ の全空間は単連結となるが, 一方, Usher の定理より極小である. Kirby 図式を用いると 1 ハンドルを消去できることがわかる.

さて, 定義 4.1 で見たように, ファイバー和のモノドロミーは positive relator の共役と積で表される. つまり, positive relator の作り方は非常にわかりやすいものである. 一方, ファイバー和の全空間がどのような 4 次元多様体であるかは, 一般にはよくわからない. しかし, 特殊な状況においてはそれがわかる場合がある.

$n \geq 1, g \geq 1$ とし, $M(n, g) := \Sigma_{g,0} \times S^2 \# 4n\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ とおく. $M(n, g)$ を $\Sigma_{g,0} \times S^2$ の 2 重分岐被覆の非特異化と考えることにより, 種数 $2g+n-1$ の Lefschetz ファイバー空間 $f_{n,g} : M(n, g) \rightarrow S^2$ が自然に定まる. $K \subset S^3$ を種数 g のファイバー結び目とし, $\varphi_K : \Sigma_{g,1} \rightarrow \Sigma_{g,1}$ を K のモノドロミーを与える微分同相とする. $\Sigma_{g,1}$ をある方法で $\Sigma_{2g+n-1,0}$ に埋め込むことにより, φ_K は微分同相 $\Phi_K : \Sigma_{2g+n-1,0} \rightarrow \Sigma_{2g+n-1,0}$ に拡張される.

定理 4.10 (Fintushel-Stern [FS3])

2 つの $f_{n,g}$ の Φ_K によるファイバー和 $f_{n,g} \#_{\Phi_K} f_{n,g}$ の全空間は, 楕円曲面 $E(n)$ に K による knot surgery を施してえられる多様体 $E(n)_K$ に微分同相である.

Fintushel-Stern [FS2] による knot surgery の定義を簡単に復習しておく.

$K \subset S^3$ を結び目とし, m を K のメリディアンとする. K に沿って S^3 に係数 0 の Dehn surgery を施してえられる 3次元多様体を M_K とし, $m \subset M_K$ とも考えることにする. $T_m := m \times S^1$ は $M_K \times S^1$ 中の自己交叉数 0 のトーラスである. X を単連結な 4次元閉多様体とし, $T \subset X$ を自己交叉数 0 のトーラスとする. さらに, $X - T$ も単連結であるとする. このとき, T, T_m の管状近傍 $N(T), N(T_m)$ を適当な方法で $T^2 \times D^2$ と同一視することにより, 4次元閉多様体

$$X_K := (X - \text{Int } N(T)) \cup_{T^2 \times S^1} (M_K \times S^1 - \text{Int } N(T_m))$$

がえられる. これを K による **knot surgery** を X に施してえられる多様体とよぶ. 構成のしかたから X_K は単連結であり, しかも X と同じ交叉形式をもつので, Freedman の定理より X_K は X に同相である. X, T に関する適当な条件の下で, X_K の Seiberg-Witten 不変量は X のそれに K の (対称化された) Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ を “掛けた” ものになることが知られている. 特に, $\Delta_{K_1}(t) \neq \Delta_{K_2}(t)$ であるような 2つの結び目 K_1, K_2 に対し, X_{K_1} と X_{K_2} は微分同相ではない.

定理 4.10 は, positive relator の共役と積が, ある状況の下では knot surgery という改変操作に対応することを示している. これは §3 で観察した, 関係式による置き換えと有理ブローダウンとの関係を思い起こさせる. それと同時に, ファイバー和の定義に現れる微分同相 φ の取り方をいろいろと替えると, 非常にたくさんの 4次元多様体が現れうることを示している.

さて, Gurtas [Gu] は Lefschetz ファイバー空間 $f_{n,g}: M(n,g) \rightarrow S^2$ のモノドロミーに対応する positive relator を具体的に求めた. Park と Yun [Yu],[PY] はそれを用い, 定理 4.10 のファイバー和 $f_{n,g} \#_{\Phi_K} f_{n,g}$ のモノドロミーを詳細に研究した. 特に, 一つの K に対する φ_K (従って, Φ_K) の取り方に不定性があることに着目し, 次の結果をえた.

定理 4.11 (Park-Yun [PY])

n, g を正の偶数とし, K を種数 g のファイバー結び目であるような 2橋結び目とする. このとき, $E(n)_K$ は互いに同型でない種数 $2g + n - 1$ の Lefschetz ファイバー空間の構造を, 少なくとも 2つ以上もつ.

4次元閉多様体に定まる種数 2 以上の Lefschetz ファイバー空間については, ファイバーの種数と全空間の微分同相類が同型類を決めるであろう, という予想があった. 定理 4.11 の例は, この予想が単連結な多様体に対してさえ成り立たないことを示している. 2010 年 2 月に Yun に会ったとき, 彼は, 定理 4.11 の “少なくとも 2つ以上” という箇所を “無限個” に変えた定理が成り立つと予想している, と話していた. ファイバー構造と聞くと, 筆者などは剛性のような性質をつい期待してしまう (上の予想の背景にもそのような期待があったのかもしれない). しかし, Lefschetz ファイバー空間は, ファイバー束のようなものと考えるより, ハンドル分解のようなものと考えたほうがよいのかもしれない.

以上で見たように、ファイバー和という操作には、多様なものを生み出す側面と、多様性を消し去る側面とがある。しかもそこには微分構造に関する微妙な現象も含まれている。4次元トポロジーらしい面白さがいろいろと詰まっているように感じるのは、筆者だけであろうか。

謝辞 トポロジーシンポジウムにお招き下さった、主催者の皆様に心より感謝を申し上げます。尚、この研究は、科学研究費補助金・基盤研究(C)、課題番号21540079による援助を受けています。

参考文献

- [Au1] D. Auroux, Fiber sums of genus 2 Lefschetz fibrations, *Turkish J. Math.* **27** (2003), 1–10.
- [Au2] D. Auroux, A stable classification of Lefschetz fibrations, *Geometry & Topology* **9** (2005), 203–217.
- [En1] H. Endo, Meyer’s signature cocycle and hyperelliptic fibrations, with Appendix written by T. Terasoma, *Math. Ann.* **316** (2000), 237–257.
- [En2] H. Endo, A generalization of Chakiris’ fibrations, in *Groups of Diffeomorphisms, Advanced Studies in Pure Mathematics* **52**, the Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2008, pp. 251–282.
- [EG] H. Endo and Y. Z. Gurtas, Lantern relations and rational blowdowns, *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2010), 1131–1142.
- [EMV] H. Endo, T. E. Mark, and J. Van Horn-Morris, Monodromy substitutions and rational blowdowns, *Journal of Topology* **4** (2011), 227–253.
- [EN] H. Endo and S. Nagami, Signature of relations in mapping class groups and non-holomorphic Lefschetz fibrations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005), 3179–3199.
- [FS1] R. Fintushel and R. J. Stern, Rational blowdowns of smooth 4-manifolds, *J. Diff. Geom.* **46** (1997), 181–235.
- [FS2] R. Fintushel and R. J. Stern, Knots, links, and 4-manifolds, *Invent. Math.* **134** (1998), 363–400.
- [FS3] R. Fintushel and R. J. Stern, Families of simply connected 4-manifolds with the same Seiberg-Witten invariants, *Topology* **43** (2004), 1449–1467.
- [Fu] T. Fuller, Diffeomorphism types of genus 2 Lefschetz fibrations, *Math. Ann.* **311** (1998), 163–176.
- [GS] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society, 1999.
- [Gu] Y. Z. Gurtas, Positive Dehn twist expressions for some new involutions in mapping class group, arXiv:math/04044310.
- [Ha] 長谷川功, On C -moves of chart descriptions of Lefschetz fibrations, 研究集会「分裂族・モノドロミー・チャートのトポロジーと代数幾何」報告集, pp. 124–133, 2006年.
- [Ka] A. Kas, On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration, *Pacific J. Math.* **89** (1980), 89–104.
- [Km] S. Kamada, Chart description for genus-two Lefschetz fibrations and a theorem on their stabilization, arXiv:1106.0569.
- [Ma1] 松本幸夫, トーラス・ファイバー空間の位相幾何, *数学* **36** (1984), 289–301.
- [Ma2] 松本幸夫, 4次元多様体の今と昔, *数学* **47** (1994), 158–175.

[Ma3] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two – a topological approach, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on “Topology and Teichmüller Spaces”, editor: S. Kojima, World Scientific, Singapore, 1996, pp. 123–148.

[Ok] 岡森健一郎, Lefschetz fibration の構造を持つ exotic $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 9\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ の構成, 2010 年度大阪大学修士論文, 2011 年 2 月.

[OS] B. Ozbagci and A. I. Stipsicz, Noncomplex smooth 4-manifolds with genus-2 Lefschetz fibrations, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3125–3128.

[Pa] J. Park, Seiberg-Witten invariants of generalized rational blow-downs, Bull. Austral. Math. Soc. **56** (1997), 363–384.

[PY] J. Park and K.-H. Yun, Nonisomorphic Lefschetz fibrations on knot surgery 4-manifolds, Math. Ann. **345** (2009), 581–597.

[Sa] 佐藤好久, The canonical classes and the geography of non-minimal Lefschetz fibrations, 研究集会「4次元トポロジー」での講演, 2010 年 1 月 20 日.

[Sc] A. Scorpan, *The Wild World of 4-Manifolds*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.

[Sm] I. Smith, Lefschetz pencils and divisors in moduli spaces, Geometry & Topology **5** (2001), 579–608.

[SSW] A. I. Stipsicz, Z. Szabó, and J. Wahl, Rational blowdowns and smoothings of surface singularities, J. of Topol. **1** (2008), 477–517.

[Ue] 上正明, 楕円曲面のトポロジー, 数学 **44** (1991), 205–228.

[Yu] K.-H. Yun, Twisted fiber sums of Fintushel-Stern’s knot surgery 4-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 5853–5868.

単体複体, 帰納極限と無限次元多様体に関する話題

酒井 克郎 (筑波大学 数理物質科学研究科)

この講演では, 単体複体と無限次元多様体との関係を解説すると共に, フレッシュ空間 (完備距離付け可能な局所凸線形位相空間) の帰納極限である LF 空間をモデルとする多様体に関する最近の話題を紹介する.

1. 無限次元多様体

n 次元 (位相) 多様体とは, n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n に局所同相なパラコンパクト空間のことであるが, \mathbb{R}^n をその半空間 $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ あるいは n 次元立方体 \mathbf{I}^n で置き換えれば, 境界を持つ n 次元多様体が得られる. \mathbb{R}^n をヒルベルト空間 l_2 で置き換えれば, ヒルベルト多様体 that 得られ, ヒルベルト・キューブ $\mathbf{Q} = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$ で置き換えれば, ヒルベルト・キューブ多様体 that 得られる. 空間 E に局所同相なパラコンパクト空間を E をモデル空間とする多様体, あるいは, 単に E -多様体と呼ぶ. ヒルベルト多様体とヒルベルト・キューブ多様体は, l_2 -多様体と \mathbf{Q} -多様体に他ならない. 1966 年に, R.D. Anderson [1] が l_2 と \mathbf{Q} の擬内部 $\mathfrak{s} = (-1, 1)^{\mathbb{N}} (\approx \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ が同相であることの証明に成功してから, Anderson をはじめ D.W. Henderson, J.E. West, T.A. Chapman らを中心にこれらの多様体の研究がなされ, 無限次元多様体の理論が構築されてきた. ヒルベルト多様体の理論は, 非可算の稠密度 τ を持つヒルベルト空間 $l_2(\tau)$ をモデルとする $l_2(\tau)$ -多様体にも拡張されている. 1980, 81 年には, H. Toruńczyk [25], [26] により, \mathbf{Q} -多様体と $l_2(\tau)$ -多様体の位相的特徴付けが得られ, 両多様体論は一応の完成をみた.

可分ヒルベルト空間 l_2 における部分空間

$$l_2^f = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_2 \mid \text{有限個の } i \in \mathbb{N} \text{ を除き } x_i = 0\},$$

$$l_2^Q = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_2 \mid \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^i x_i < \infty\}.$$

の特徴付け, およびヒルベルト立方体 \mathbf{Q} における部分空間

$$\sigma = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (-1, 1)^{\mathbb{N}} \mid \text{有限個の } i \in \mathbb{N} \text{ を除き } x_i = 0\},$$

$$\Sigma = \prod_{i \in \mathbb{N}} [-1 + 2^{-i}, 1 - 2^{-i}]^{\mathbb{N}}$$

の位相的特徴付けも Anderson [2] により与えられ, (l_2, l_2^f) と (\mathfrak{s}, σ) , (l_2, l_2^Q) と (\mathfrak{s}, Σ) がそれぞれ同相であること, $B(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \setminus \mathfrak{s}$ と表わす

とき, (Q, Σ) と $(Q, B(Q))$ が同相であることが示された. その後, 1971年に Chapman [5] により, (l_2, l_2^f) , (l_2, l_2^Q) , (Q, σ) , (Q, Σ) と局所的に同相な多様体対の特徴付けに拡張され, l_2^f -多様体と l_2^Q -多様体の l_2 -多様体における部分空間としての特徴付け, および σ -多様体と Σ -多様体の Q -多様体における部分空間としての特徴付けに拡張された. また, 1970年に West [28] によって, 非可分ヒルベルト空間 $l_2(\tau)$ の標準正規直交基底で張られる部分空間 $l_2^f(\tau)$ および $l_2^f(\tau)$ -多様体への拡張がなされた.

Toruńczyk の Q -多様体と l_2 -多様体の特徴付けに対応する Σ -多様体と σ -多様体の特徴付けは, 1984年に J. Mogilski [15] によって得られたが, さらに 1986年に M. Bestvina との共同研究 [4] によって, Borel 集合の各階層に対する普遍集合をモデルとする多様体の位相的特徴付けも得られた.

距離付け可能ではないが, ユークリッド空間の増大列 $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots$ の帰納極限 \mathbb{R}^∞ をモデルとする \mathbb{R}^∞ 多様体も, 無限次元射影空間や無限次元球面など考えるなら, 研究すべき自然な無限次元多様体である. 1975年に, R.E. Heisey によって, 可分バナッハ空間に有界弱*位相を入れた空間は, ヒルベルト・キューブの増大列 $Q \subset Q^2 \subset Q^3 \subset \dots$ の帰納極限 Q^∞ と同相になることが示され, その後, \mathbb{R}^∞ 多様体と Q^∞ 多様体の研究が, Heisey をはじめ, Vo Thang Liem, K. Sakai らによって進められ, 1984年には, K. Sakai [16] によって, これらの多様体の位相的特徴付けが得られた.

完備距離付け可能な局所凸線形位相空間はフレッシュ空間と呼ばれるが, Toruńczyk のヒルベルト空間の特徴付けにより, どんなフレッシュ空間も稠密度が同じヒルベルト空間と同相となる. フレッシュ空間の増大列 $F \subset F_2 \subset F_3 \subset \dots$ (局所凸) 線形位相空間のカテゴリーにおける帰納極限を LF 空間と呼ぶ. ここでは, 狭義単調増加列の極限であるもの限定する. \mathbb{R}^∞ も LF 空間であるが, 位相空間のカテゴリーにおける帰納極限にもなっているという点では, 得意な例である. 1974年, P. Mankiewicz は可分 LF 空間は \mathbb{R}^∞ または, l_2 と \mathbb{R}^∞ との直積 $l_2 \times \mathbb{R}^\infty$ のどちらかに同相なることを示した. 当時は, まだ Toruńczyk のヒルベルト空間の特徴付けが得られておらず, どんなフレッシュ空間も同じ稠密度のヒルベルト空間と同相になることは証明されていなかったが, 彼は, この結果を仮定して, 非可分の稠密度を τ の LF 空間が, 直積 $\mathbb{R}^\infty \times l_2(\tau)$ または, ヒルベルト空間の狭義増大列 $l_2(\tau_1) \subset l_2(\tau_2) \subset l_2(\tau_3) \subset \dots$ で $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n = \tau$ となるものの極限のどちらかに同相なることを示した. 前者は $l_2(\tau)$ の可算小箱積 $\square^{\mathbb{N}} l_2(\tau)$ と同相であり, 後者は小箱積 $\square_{n \in \mathbb{N}} l_2(\tau_n)$ に同相である. しかしながら, 1999年の T. Banach [3] の論文までは, \mathbb{R}^∞ 以外の LF 空間をモデルとした多様体の研究はなされて来なかった. LF 空間は位相空間のカテゴリーにおける帰納極限ではないことと, 位相空間論的には箱位相と関係し, 取扱いが非常に厄介である. ここ数年, Banach, Sakai を中心に研究が行われてきたが, 未だに決定的な結果が得られていない.

この講演では, 単体複体との関連において, 無限次元多様体に関する諸結果と今後の課題についての解説を試みる.

2. 三角形分割

単体複体 K の弱位相を持つ多面体を $|K|$ と表わし, 距離位相を持つ多面体は $|K|_m$ と表わすことにする. K が局所有限であれば, 位相空間として $|K| = |K|_m$ となる. 無限次元多様体に関する三角形分割定理は以下のようなになる:

定理 1 (三角形分割定理). E が l_2 , Q , l_2^f あるいは \mathbb{R}^∞ のとき, M が E -多様体であれば, 局所有限単体複体 K が存在して, $|K| \times E$ と同相になる. E が $l_2(\tau)$ の場合には, 局所有限次元単体複体 K で各頂点 v における星状体 $\text{St}(v, K)$ の頂点の濃度が高々 τ のものが取れて, $|K|_m \times l_2(\tau)$ と同相になる.

問題 1. E が \mathbb{R}^∞ 以外の LF 空間の場合, 上の三角形分割定理が成立するか?

2008 年と 2011 年, K. Mine と Sakai の 2 つの共同研究 [12], [13] により, 以下が示された:

定理 2. $E = \square_{n \in \mathbb{N}} l_2(\tau_n)$ の場合, E -多様体 M が E の開集合と同相になるためには, 局所有限次元単体複体 K で $K^{(0)}$ の濃度が τ 以下で, 各頂点 v における星状体 $\text{St}(v, K)$ の頂点の濃度がある τ_n 以下となるものが取れて, M が $|K|_m \times E$ と同相になることが必要十分である.

つぎの開埋蔵定理は, Henderson [7] によって 1970 年に証明された.

定理 3 (開埋蔵定理). 連結な $l_2(\tau)$ -多様体は $l_2(\tau)$ に開集合として埋め込める.

LF 空間をモデルとする多様体に関して, 三角形分割定理が成立すれば, この開埋蔵定理も成立することになり, 逆に, 開埋蔵定理も成立すれば, 三角形分割定理も成立することになる.

問題 2. E が \mathbb{R}^∞ 以外の LF 空間の場合, 連結な E 多様体は E に開集合として埋め込めるか?

一般に, 単体複体 K の細分 K' は距離位相を保存しない. すなわち, 位相空間として $|K|_m = |K'|_m$ となるとは限らない. 位相空間として $|K|_m = |K'|_m$ となる K の細分 K' を許容細分と呼ぶ. 重心細分は許容細分である.

定理 4. 単体複体 K の細分 K' に関して, つぎは同値である:

- (1) K' は K の許容細分である.
- (2) 開星状体 $O(v, K')$ が $|K|_m$ において, 開集合である.
- (3) $K'^{(0)}$ が $|K|_m$ において疎である.

上の (1) と (2) の同値は Henderson [8] により 1975 年に得られたが、これらと (3) の同値は Mine-Sakai [14] による。

1975 年に Henderson [8] は、つぎの定理を K が局所有限次元の場合に示したが、最近, Sakai [23] により K が一般の場合でも成立することが示された。

定理 5. どんな単体複体 K においても, その距離多面体 $|K|_m$ の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して, \mathcal{U} より細かい K の許容細分 K' が存在する。

問題 3. 単体複体 K と L が互いに組み合わせ同値であれば, 互いに同型となる K と L の許容細分 K', L' が存在するか?

3. 無限次元組み合わせ多様体

充満単体複体とは, どんな有限個の頂点も単体を張っているような単体複体のことであるが, 頂点の濃度が τ の充満単体複体を $\Delta(\tau)$ で表す。Sakai による \mathbb{R}^∞ の特徴付けと Mogilski による ℓ_2^f の特徴付けにより, $|\Delta(\aleph_0)|$ と $|\Delta(\aleph_0)|_m$ はそれぞれ \mathbb{R}^∞ と ℓ_2^f に同相となることが分かる。このことから, 単体複体 K において各頂点 $v \in K^{(0)}$ での星状体 $\text{St}(v, K)$ が $\Delta(\aleph_0)$ と組み合わせ同値となれば, $|K|$ は \mathbb{R}^∞ -多様体となり $|K|_m$ は ℓ_2^f -多様体となる。このような単体複体を組み合わせ \aleph_0 -多様体と呼ぶ。¹ つぎの定理は, 1987 年に Sakai [17] により証明された:

定理 6. どんな \mathbb{R}^∞ -多様体 (*resp.* ℓ_2^f -多様体) M に対しても, 組み合わせ \aleph_0 -多様体 K が取れて, M は $|K|$ (*resp.* $|K|_m$) と同相になる。

また, 上の定理の逆, すなわち, つぎの定理も Sakai [22] によって示された。

定理 7. 単体複体 K の多面体 $|K|$ (*resp.* $|K|_m$) が \mathbb{R}^∞ -多様体 (*resp.* ℓ_2^f -多様体) となれば, K は組み合わせ \aleph_0 -多様体となる。

予想 1. 非可算濃度 τ に対しても, $|\Delta(\tau)|_m$ が $\ell_2^f(\tau)$ と同相になる。

単体複体 K において各頂点 $v \in K^{(0)}$ での星状体 $\text{St}(v, K)$ が $\Delta(\tau)$ と組み合わせ同値となるとき, K を組み合わせ τ -多様体と呼ぶことにする。

予想 2. どんな $\ell_2^f(\tau)$ -多様体 M に対しても, 組み合わせ τ -多様体 K が取れて, M は $|K|_m$ と同相になる。

問題 4. \mathbb{R}_f^τ が線形位相空間になり $|\Delta(\tau)|$ と同相となるような位相を入れることが出来るか?

この問題に関しては, \mathbb{R}^∞ の位相は箱位相と一致するので, 上の問題は箱位相で成立するかどうかはまず問題となる。

¹論文 [17] では, 組み合わせ ∞ -多様体として導入された。

2つの単体複体 K, L の多面体 $|K|$ と $|L|$ が互いに同相であれば, K と L は互いに組み合わせ同値になるというのが単体複体に関する基本予想であるが, 1970年に J. Milnor [10] によって誤りであることが示された. 3次元以下の組み合わせ多様体であるならば成立するが, 4次元以上であれば成立しないことは知られている. しかしながら, 無限次元の場合, 組み合わせ \aleph_0 -多様体に関しては成立する. すなわち, つぎの定理が 1987年に Sakai [17] により証明された:

定理 8. 2つの組み合わせ \aleph_0 -多様体 K, L の多面体 $|K|$ と $|L|$ (あるいは $|K|_m$ と $|L|_m$) が互いに同相 (ホモトピー同値) であれば, K と L は互いに組み合わせ同値になる.

予想 3. 上の定理は, 組み合わせ τ -多様体に関しても成立するか? ここで, τ は非可算濃度.

4. 完備化と局所コンパクト化

頂点集合の濃度が τ 以下の単体複体 K の距離位相を持つ多面体 $|K|_m$ は, バナッハ空間 $l_1(\tau)$ の部分空間として等距離に埋め込める. このとき, $|K|$ の $l_1(\tau)$ における閉包を $|K|^{l_1}$ とすれば, $|K|^{l_1}$ は $|K|_m$ の完備化となる. 組み合わせ \aleph_0 -多様体の完備化に関して, 1987年に Sakai [20] により示された:

定理 9. 組み合わせ \aleph_0 -多様体 K に対して, $|K|^{l_1}$ は l_2 -多様体である.

この定理の逆であるつぎの定理は Sakai [22] で示された:

定理 10. 単体複体 K に対して, $|K|^{l_1}$ が l_2 -多様体となるならば, K は組み合わせ \aleph_0 -多様体である.

予想 4. 上の2つの定理は, 組み合わせ τ -多様体に関しても成立するか? ここで, τ は非可算濃度.

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ の点で第 n 座標が 1 でその他の座標が 0 となる点を e_n と表わし, $Q^* = \mathbb{I}^{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$ と表わすことにする. 可算無限単体複体 K に対して, $K^{(0)} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と同一視して, $|K|_m$ は Q^* の部分空間と見なすことができる. このとき, $|K|$ の Q^* における閉包を $|K|^{Q^*}$ とすれば, $|K|^{Q^*}$ は $|K|_m$ の局所コンパクト化となる. (ここで, $0 \in \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ は $|K|$ の触点となることに注意せよ.) つぎの定理は 1987年に Sakai [21] により示された:

定理 11. 組み合わせ \aleph_0 -多様体 K に対して, $|K|^{Q^*}$ は Q -多様体であり, $|K|^{Q^*} \times [0, 1)$ は $|K|^{Q^*}$ と同相である.

予想 5. 上の定理の逆も成立する. すなわち, $|K|^{Q^*}$ が Q -多様体であり, $|K|^{Q^*} \times [0, 1)$ は $|K|^{Q^*}$ と同相であるならば, K は組み合わせ \aleph_0 -多様体となる.

REFERENCES

- [1] R.D. Anderson, *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 515–519.
- [2] R.D. Anderson, *On sigma-compact subsets of infinite-dimensional spaces*, unpublished.
- [3] T. Banach, *On hyperspaces and homeomorphism groups homeomorphic to products of absorbing sets and \mathbb{R}^∞* , Tsukuba J. Math. **23** (1999) 495–504.
- [4] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. **33** (1986), 291–313.
- [5] T.A. Chapman, *Dense sigma-compact subsets in infinite-dimensional manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 399–426.
- [6] R.E. Heisey, *Manifolds modelled on \mathbb{R}^∞ or bounded weak-* topologies*, Trans. Amer. Math. Soc. **206** (1975), 295–312.
- [7] D.W. Henderson, *Infinite-dimensional manifolds are open subsets of Hilbert space*, Topology **9** (1970), 25–33.
- [8] D.W. Henderson, *Z-sets in ANR's*, Trans. Amer. Math. Soc. **213** (1975), 205–216.
- [9] P. Mankiewicz, *On topological, Lipschitz, and uniform classification of LF-spaces*, Studia Math. **52** (1974) 109–142.
- [10] J. Milnor, *Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct*, Ann. of Math. **74** (1970), 575–590.
- [11] K. Mine, *Universal spaces of non-separable absolute Borel classes*, Tsukuba J. Math. .
- [12] K. Mine and K. Sakai *Open subsets of LF-spaces*, Bull. Polish Acad. Sci., Math. **56** (2008), 25–37.
- [13] K. Mine and K. Sakai *Simplicial complexes and open subsets of non-separable LF-spaces*, Canad. J. Math. **63** (2011), 436–459.
- [14] K. Mine and K. Sakai *Subdivision of simplicial complexes preserving the metric topology*, Canad. Math. Bull. (in press).
- [15] J. Mogilski, *Characterizing the topology of infinite-dimensional σ -compact manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **92** (1984), 111–118.
- [16] K. Sakai, *On \mathbb{R}^∞ -manifolds and Q^∞ -manifolds*, Topology Appl. **18** (1984), 69–79.
- [17] K. Sakai, *Combinatorial infinite-dimensional manifolds and \mathbb{R}^∞ -manifolds*, Topology Appl. **26** (1987), 43–64.
- [18] K. Sakai, *On topologies of triangulated infinite-dimensional manifolds*, J. Math. Soc. Japan **39** (1987), 287–300.
- [19] K. Sakai, *Completions of metric simplicial complexes by using ℓ_p -norms*, Topology Proc. 1986 **11** (1987), 177–208.
- [20] K. Sakai, *The ℓ_1 -completion of a metric combinatorial ∞ -manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 574–578.
- [21] K. Sakai, *A Q -manifold local-compactification of a metric combinatorial ∞ -manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 775–780.
- [22] K. Sakai, *Simplicial complexes triangulating infinite-dimensional manifolds*, Topology Appl. **29** (1988), 167–183.
- [23] K. Sakai, *Small subdivision of simplicial complexes with the metric topology*, J. Math. Soc. Japan **63** (2011), (in press).

- [24] K. Sakai and M. Yaguchi, *Characterizing manifolds modeled on certain dense subspaces of non-separable Hilbert spaces*, Tsukuba J. Math. **27** (2003), 143–159.
- [25] H. Toruńczyk, *On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds*, Fund. Math. **106** (1980), 31–40.
- [26] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. **111** (1981), 247–262.
- [27] H. Toruńczyk, *A correction of two papers concerning Hilbert manifolds*, Fund. Math. **125** (1985), 53–67.
- [28] J.E. West, *The ambient homeomorphy of an incomplete subspace of infinite-dimensional Hilbert spaces*, Pacific J. Math. **34** (1970), 257–267.
- [29] J.H.C. Whitehead, *Simplicial spaces, nuclei, and m -groups*, Proc. London Math. Soc. (2) **45** (1939), 243–327.

位相的ブローアップについて

吉野 太郎

位相空間に対し‘位相的ブローアップ’という操作を導入する。これは、(ある種の)非ハウスドルフ空間の位相を直感的に捕らえるのに有効な手法である。非ハウスドルフ空間に対し、そのハウスドルフ性を崩す要因となっている部分集合を定式化し、これを‘ハウスドルフ性の傷’と呼ぶ。このとき、位相的ブローアップは「 X から傷 S を取り除き、代わりに別の空間 \mathfrak{L} を貼り付け、ハウスドルフ空間を得る操作」と言うができる。このようにして得られる空間 \tilde{X} は、元の空間 X の位相情報を十分に多く持っており、 \tilde{X} での収束によって、 X での収束を仕方を表すことができる。

1 主結果

結果 1. 任意の位相空間に対し、位相的ブローアップという操作を定義できる。

以下、位相空間 X を位相的ブローアップして得られる位相空間を \tilde{X} と記す。

定理 2. X が局所コンパクトならば、 \tilde{X} は局所コンパクトなハウスドルフ空間となる。

定理 3. X が局所コンパクトであり、 S が X の傷ならば、 (\tilde{X}, S) から X の位相を復元することができる。

2 ハウスドルフ性の傷

まず、非ハウスドルフ空間に対し、そのハウスドルフ性を崩している部分集合を定式化しよう。 X を (非ハウスドルフな) 位相空間とする。

定義 4. 次を満たす X の閉集合 S を X のハウスドルフ性の傷 (あるいは単に傷) と言う：
任意の異なる二点 $x, y \in X$ に対し

$$\{x, y\} \not\subset S \implies x \text{ と } y \text{ は開集合で分離できる.}$$

感覚的には、傷 S が小さいほど空間 X はハウスドルフに‘近い’と言える。また、次は定義より明らかである。

性質 5. (1) 傷 S の補集合はハウスドルフ空間である。

(2) 傷の族 $\{S_\lambda\}$ の共通部分 $\bigcap_{\lambda} S_\lambda$ は、また傷となる。

(2) より特に最小の傷が存在する。以下、単に空間の傷といった場合、最小の傷を念頭におく。また、この話で扱う内容は任意のサイズの傷 S に対して正しいが、実用的には、位相的ブローアップは次の例で見るとような小さい傷を持つ空間に対し特に有効な手法である。

3 例

例 6. \mathbb{R} の \mathbb{R}^4 への線形な作用を次で定める.

$$\mathbb{R} \longrightarrow GL(4, \mathbb{R}), \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & t & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, 商空間 $X := \mathbb{R} \backslash \mathbb{R}^4$ は, 次の二つの部分に自然に分かれる.

$$R := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in X \mid (y, w) \neq (0, 0) \right\}, \quad S := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \in X \right\}.$$

ここで R (*regular part*) は 1 次元の軌道全体の集合であり, S (*singular part*) は 0 次元の軌道全体の集合となる. X からの相対位相により, それぞれ $R \simeq (\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R})$ 及び $S \simeq \mathbb{R}^2$ となる. 位相空間 X は, 直感的には R の持つ '1 次元の穴' の中に, 2 次元の S を詰めた空間であり, 従って非ハウスドルフである.

ここで, S は X の (最小の) 傷となっており, R は X の稠密な部分集合である. 「傷の補集合が稠密」という意味で, X の傷は '小さく', X はハウスドルフに '近い' 空間といえる.

4 素朴なアイデア

ブローアップの正確な定義を見る前に, 元となった素朴なアイデアを見ていこう. X を位相空間とし, S をその傷とする. S の補集合を R とすると, R はハウスドルフ空間であり,

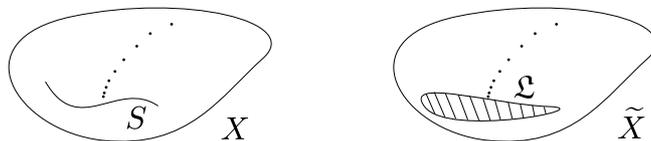
$$X = S \sqcup R$$

となる. 一方, X をブローアップした空間 \tilde{X} は, 集合としては次のような形をしている:

$$\tilde{X} = \mathfrak{L} \sqcup R.$$

ここで, \mathfrak{L} は S のベキ集合 2^S の部分集合である.

いま, R 内の点列 $\{x_n\}$ が S 内の点に収束している状況を考える. X はハウスドルフではないので, この点列の極限は一点とは限らない. そこで, (X の位相で) この点列の極限となり得る点全体の集合を考え, これを ℓ と記す. ここで, $R \subset \tilde{X}$ なので, $\{x_n\}$ は \tilde{X} の点列とみなすことも出来る.



このとき, ℓ は左の図では S の部分集合であるのに対し, 右の図では \mathfrak{L} の一点となる. そこで, 次のようなアイデアによって \tilde{X} に位相を与えたい:

\tilde{X} の位相において, 点列 $\{x_n\}$ は点 ℓ に収束して欲しい.

但し, このアイデアはこのままではうまく行かない. 以下, このアイデアを修正することで, \tilde{X} の正確な定義に至ろう.

5 フィルタ

‘点列の収束’は、位相の情報を完全には反映できない。そこで、点列の代わりにフィルタを用いる。点列と同様に、フィルタに対しても収束という概念が定まる。そこで、フィルタ \mathcal{F} の収束する点全体の集合を \mathcal{F} の極限集合と呼び、 $\lim \mathcal{F}$ と記すことにする。

$$\lim \mathcal{F} := \{x \in X \mid \mathcal{F} \rightarrow x \text{ in } X\}.$$

また、極限集合全体の集合を $\mathfrak{L}^{\text{all}}$ と記す。

$$\mathfrak{L}^{\text{all}} := \{\lim \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ は } X \text{ の収束フィルタ}\}.$$

但し、 \mathcal{F} が収束フィルタであるとは $\lim \mathcal{F} \neq \emptyset$ となることを言う。

いま、 S が X の傷であるとし、 R を S の補集合とすると、任意のフィルタ \mathcal{F} に対し、次が成り立つ。

$$\lim \mathcal{F} \subset S \quad \text{or} \quad \lim \mathcal{F} \subset R.$$

換言すれば、 $\lim \mathcal{F}$ は S と R の両方にまたがることはない。また R のハウスドルフ性から、 $\lim \mathcal{F} \subset R$ のとき、 $\lim \mathcal{F}$ は一点集合 $\{r\}$ である。簡単のために、以下 $\{r\}$ を r と同一視すると、 $\mathfrak{L}^{\text{all}}$ は集合として

$$\mathfrak{L}^{\text{all}} = \mathfrak{L}' \sqcup R.$$

と表せる。但し、 $\mathfrak{L}' := \mathfrak{L}^{\text{all}} \cap 2^S$ とおいた。

6 素フィルタ

素朴なアイデアに基づくと、‘貼り付ける空間’として、上記の \mathfrak{L}' を用いれば良いように思える。しかし、以下で見るように、 \mathfrak{L}' では大きすぎて $\mathfrak{L}' \sqcup R$ に上手く位相を定めることができない。

観察 7. $\mathfrak{L}' \sqcup R$ に「素朴なアイデア」で挙げたような位相が定められるとして、矛盾を導く。いま $l_1, l_2 \in \mathfrak{L}'$ を、 $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ となるようにとり、 R の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を、それぞれの極限集合が l_1, l_2 となるようにとる。ここで

$$z_n = \begin{cases} x_n & (n \text{ is even}) \\ y_n & (n \text{ is odd}) \end{cases}$$

とおく。このとき、 $\{z_n\}$ の極限集合は $l_3 := l_1 \cap l_2 \in \mathfrak{L}'$ となる。いま、 $\mathfrak{L}' \sqcup R$ の位相で、 $\{z_n\}$ の収束を考えると、その極限值は l_3 となるはずだが、その部分列 $\{z_{2n}\}$ の極限值は l_1 となってしまう矛盾である。

ここでの敗因は、 $\{z_n\}$ の部分列をとることで、極限集合が変化してしまったことにある。そこで、次のような概念を導入する。

定義 8. フィルタ \mathcal{F} が素フィルタであるとは、より細かい任意のフィルタ $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ に対し、 $\lim \mathcal{F}' = \lim \mathcal{F}$ となることを言う。

ここで、‘細かいフィルタ’は、点列の言葉では‘部分列’に相当する。簡単に言えば、素フィルタとは、細かくしても (部分列をとっても) 極限集合が変わらないフィルタと言える。

注 9. 一般に $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ ならば, $\lim \mathcal{F}' \supset \lim \mathcal{F}$ が成り立つ. 従って, 素フィルタであることを言うためには, フィルタを細かくしても極限集合が増えないことを確かめれば十分である.

素フィルタの極限集合全体を

$$\mathfrak{L}^{\text{prime}} := \{ \lim \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ は取束する素フィルタ} \}$$

とおく. 次の補題は, 素フィルタが十分に多く存在する事を保証する.

補題 10. 任意のフィルタ \mathcal{F} に対し, それより細かい素フィルタ \mathcal{F}' が存在する.

7 代数幾何との類似

次の節で, 素フィルタの極限集合全体の集合 $\mathfrak{L}^{\text{prime}}$ に位相を与え, これを位相的ブローアップと呼ぶ. その前に, この節では代数幾何との類似を見ておこう. $\mathfrak{L}^{\text{all}}$ は集合族であるから, 包含関係により半順序を定めることができる. この順序による極大元を極大極限と呼び, その全体の集合を $\mathfrak{L}^{\text{max}}$ と記す.

$$\mathfrak{L}^{\text{max}} := \{ \ell \in \mathfrak{L}^{\text{all}} \mid \ell \text{ は極大極限} \}.$$

ここで, $\mathfrak{L}^{\text{prime}}$ の元を素極限と呼ぶことにすれば, 注 9 と補題 10 により次が成り立つ.

命題 11. 任意の極限集合 ℓ に対し, それを含む素極限 ℓ' が存在する.

従って特に

命題 12. 極大極限は素極限である.

これにより, 次のような類似を見て取れる.

位相的ブローアップ		代数幾何
極限集合	\leftrightarrow	イデアル
素極限	\leftrightarrow	素イデアル
極大極限	\leftrightarrow	極大イデアル

代数幾何においては, 素イデアル全体の集合に位相を与えた空間が重要な考察対象であった. 位相的ブローアップにおいてもこれと同様に素極限全体の集合 $\mathfrak{L}^{\text{prime}}$ に位相を与える.

8 位相的ブローアップの定義

$\mathfrak{L}^{\text{prime}}$ には「素朴なアイデア」に基づいた自然な位相を定めることができる. \tilde{X} は $\mathfrak{L}^{\text{prime}}$ にこの位相を与えた空間として定義する. 以下, $\mathfrak{L}^{\text{prime}}$ に位相を定義しよう.

まず, $\ell \in \mathfrak{L}^{\text{prime}}$ に対し,

$$\Omega_\ell := \{ \mathcal{F}: X \text{ の素フィルタ} \mid \lim \mathcal{F} = \ell \}$$

とおく. そして, 開集合 $U \subset X$ に対し,

$$U^\# := \{ \ell \in \mathfrak{L}^{\text{prime}} \mid \text{任意の } \mathcal{F} \in \Omega_\ell \text{ に対し, } U \in \mathcal{F} \}.$$

とする. さらに

$$\beta := \{U^\# \subset \mathfrak{L}^{\text{prime}} \mid U \text{ は } X \text{ の開集合}\}$$

とする. このとき,

補題 13. β は $\mathfrak{L}^{\text{prime}}$ の開基の公理を満たす.

そこで, $\mathfrak{L}^{\text{prime}}$ に β を開基とする位相を与え, これを \tilde{X} と定める.

定義 14. 上記の手続きによって得られる位相空間 \tilde{X} を, X を位相的ブローアップした空間と言う.

このとき, 次が成り立つ.

定理 15. X が局所コンパクトならば, \tilde{X} は局所コンパクトなハウスドルフ空間である.

9 位相的ブローアップの直観的意味

位相的ブローアップは, 定義上は元の空間の傷に依存せずに定まる. しかし, 元の空間の傷を考えることで, ブローアップした空間を理解し易くなる. 今, 位相空間 X の傷を S とし, その補集合を R と記す. 第5節で見たことと同様の議論により,

$$\tilde{X} = \mathfrak{L} \sqcup R$$

とみなすことができる. ただし, $\mathfrak{L} \subset 2^S$ である. このとき, 次が成り立つ.

補題 16. R は \tilde{X} の開集合であり, \tilde{X} から R への相対位相は X から R への相対位相に等しい.

補題 17. R が X で稠密ならば, R は \tilde{X} でも稠密である.

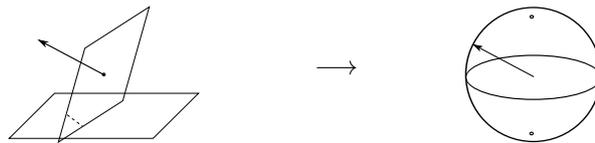
このことから, ブローアップは, 元の空間 $X = S \sqcup R$ から, S を取り除き, 別の空間 \mathfrak{L} を貼り付ける操作とみなすことができる.

10 ブローアップの例

第3節で挙げた例に対し, \tilde{X} がどのような空間となるかを具体的に見てみよう. この例では, 貼り付ける空間 \mathfrak{L} は次で与えられる.

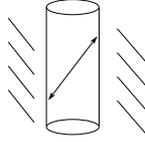
$$\mathfrak{L} := \{l \subset S \mid l \text{ は } S (\simeq \mathbb{R}^2) \text{ 内の直線}\}$$

このとき, \mathfrak{L} は次のような意味で, メビウスの帯と同相な位相を持つ.



\mathbb{R}^2 内の直線は, ${}^t(0, 0, 1)$ を通る \mathbb{R}^3 内の平面と自然な対応がある (但し, 水平な平面は除く). この平面の法線ベクトルを考えることで $\mathbb{R}P^2 \setminus \{\text{一点}\}$ への対応が定まる. ここで, $\mathbb{R}P^2 \setminus \{\text{一点}\}$ はメビウスの帯である. このメビウスの帯 \mathfrak{L} が $R (\simeq \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R})$ にどのように張り付くかを見ていこう. R

は \mathbb{R}^3 から円柱 $D^2 \times \mathbb{R}$ を取り除いたものとみなすことができる. 円柱を取り除いた部分に, 自然に円環 $S^1 \times \mathbb{R}$ を貼り付けることができる. 円環を原点对称な点で同一視することで, メビウスの帯を得る.



ブローアップした空間 \tilde{X} は, このようにして R に \mathfrak{L} が張り付いた空間となる. このとき, 確かに \tilde{X} は局所コンパクトなハウスドルフ空間となっている.

11 一点コンパクト化

この節以降, X は常に局所コンパクトであると仮定する. 従って特に, ブローアップした空間 \tilde{X} は局所コンパクトなハウスドルフ空間である. ここで, \tilde{X} を一点コンパクト化した空間について考えてみたい. まず, 次が成り立つ.

命題 18. 次の 3 条件は同値である.

- (a) X が非コンパクト,
- (b) \tilde{X} が非コンパクト,
- (c) $\lim \mathcal{F} = \emptyset$ となる X の素フィルタ \mathcal{F} が存在する.

そこで, $\mathfrak{L}^{*\text{prime}}$ を次で定める.

$$\mathfrak{L}^{*\text{prime}} := \{ \lim \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ は } X \text{ の素フィルタ} \}.$$

$\mathfrak{L}^{\text{prime}}$ の定義では, $\lim \mathcal{F} = \emptyset$ となるフィルタ \mathcal{F} は排除していたが, この定義では, そのようなフィルタも含めていることに注意. 従って, 命題 18 より次がわかる.

$$\mathfrak{L}^{*\text{prime}} = \begin{cases} \mathfrak{L}^{\text{prime}} & (X \text{ がコンパクト}) \\ \mathfrak{L}^{\text{prime}} \cup \{\emptyset\} & (X \text{ が非コンパクト}) \end{cases}$$

ここで, $\mathfrak{L}^{*\text{prime}}$ に $\mathfrak{L}^{\text{prime}}$ と同様の方法により位相を定めた空間を \tilde{X}^* と記すと, 次が成り立つ.

命題 19. X が非コンパクトであるとき, \tilde{X} を一点コンパクト化した空間は \tilde{X}^* と同相である. 特に, \tilde{X}^* はコンパクトハウスドルフ空間である.

ここで, $\emptyset \in \tilde{X}^*$ が, 新しく付け加えた点に対応する. 一点コンパクト化は, 感覚的には「収束しない点列 (フィルタ) に極限值を与えたもの」であるから, この対応は確かに感覚に即したものである.

12 元の空間の復元

この節では, ブローアップした空間が, 元の空間の位相の理解にどのように役に立つのかを見て行きたい.

ハウスドルフ空間 \tilde{X} が非ハウスドルフ空間 X の位相を表していることを直観的に見るために、「部分集合への収束」という概念を導入しよう. T を位相空間とし, A をその部分集合とする.

定義 20. T の点列 $\{a_n\}$ が部分集合 A に収束するとは, $A \subset U$ となる任意の開集合 U に対し, 十分大きな n が $x_n \in U$ を満たすことを言う.

定義 21. T のフィルタ \mathcal{F} が部分集合 A に収束するとは, $A \subset U$ となる任意の開集合 U に対し, $U \in \mathcal{F}$ となることを言う.

A が一点集合 $\{a\}$ のとき, A への収束は普通の意味で a に収束することと同値である. 一方, 一般の場合は部分集合 A への収束は一点への収束より弱い条件である. 例えば「 A 内の異なる 2 点に交互に近づく」ような点列はどの点にも収束しないが, A には収束する. 今, $x \in X$ に対し

$$\tau(x) := \left\{ \ell \in \tilde{X} \mid x \in \ell \right\}$$

と定める. このとき, 次が成り立つ.

命題 22. $\tau(x)$ は \tilde{X} のコンパクト閉集合である.

また, S を X の傷としその補集合を R としたとき:

命題 23. R の点列 (またはフィルタ) に対し, 次は同値である.

$$X \text{ の位相で点 } x \text{ に収束する} \iff \tilde{X} \text{ の位相で集合 } \tau(x) \text{ に収束する}$$

ここで, \tilde{X} はハウスドルフであるが, 二つの異なる部分集合 A, B が交わりを持たず, A, B に同時に収束する点列 (またはフィルタ) が存在することに注意. このことにより, ハウスドルフ空間によって, 非ハウスドルフ空間の収束の様子を表すことができる.

13 貼り合わせ写像

次に, 元の空間の復元を厳密に定式化したい. そのために, 貼り合わせ写像を導入する. いま, 集合 X が $X = A \sqcup B$ と非交和で書けているとする. X に位相が定まれば, 相対位相により A, B に位相が定まる. しかし, 逆に A, B に位相が定まっても X の位相は一意には定まらない. すなわち, X の位相を定めるには“ A と B のつながり方”を指定する必要がある. 標語的には

$$(X \text{ の位相}) = (A \text{ の位相}) + (B \text{ の位相}) + (A \text{ と } B \text{ のつながり方})$$

となる. この“ A と B のつながり方”は, 貼り合わせ写像 (定義 25) によって表すことができる. すなわち, 標語的には

$$\{A \text{ と } B \text{ のつながり方全体}\} \xrightarrow{1:1} \{\text{貼り合わせ写像全体}\}$$

となる.

以下 A, B の位相を固定し, $X := A \sqcup B$ とおく.

設定 24. X の位相として, 次の条件を満たすものを考える.

(i) X の位相の A への制限は A の元の位相と等しい.

- (ii) X の位相の B への制限は B の元の位相と等しい.
- (iii) A は X の開集合である.

$\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B$ をそれぞれ A, B の開集合全体からなる集合とする.

定義 25. 次の 3 条件を満たす写像 $\mu: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_B$ を貼り合わせ写像 (**patching map**) と言う.

- (i) $\mu(A) = B$,
- (ii) $\mu(U \cap V) = \mu(U) \cap \mu(V)$,
- (iii) $U \subset V \Rightarrow \mu(U) \subset \mu(V)$.

定理 26. 次の自然な一対一対応が存在する.

$$\{ \text{設定 24 を満たす } X \text{ の位相} \} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{貼り合わせ写像 } \mu: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_B \}$$

この定理は、以下の補題から分かる.

補題 27 (定理の \rightarrow の対応). X に設定 24 を満たす位相が定まっているとし、この開核作用子を Int_X と記す. このとき、

$$\mu(U) := B \cap \text{Int}_X(B \sqcup U) \quad (U \in \mathcal{O}_A)$$

で定まる写像 $\mu: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_B$ は貼り合わせ写像である.

補題 28 (定理の \leftarrow の対応). μ を貼り合わせ写像とする. このとき次で定まる X の位相は設定 24 の条件を満たす.

$U \subset X$ に対し、 $U_A := U \cap A$, $U_B := U \cap B$ とおいたとき:

$$U \text{ が } X \text{ の開集合} \stackrel{\text{def}}{\iff} U_A \in \mathcal{O}_A \text{ かつ } U_B \in \mathcal{O}_B \text{ かつ } U_B \subset \mu(U_A).$$

ここで、上記 2 つの補題により定まる対応は互いに逆対応である.

注 29. 任意の $U \in \mathcal{O}_A$ に対し、 $\mu(U) := B$ と定めると、これは貼り合わせ写像となる. これを自明な貼り合わせ写像と言う. このとき、次が成り立つ.

$$X \text{ において } B \text{ が開集合} \iff \text{貼り合わせ写像が自明.}$$

すなわち、このとき A と B は非連結となる.

14 空間の復元の厳密な定式化

貼り合わせ写像を用いて、 (\tilde{X}, S) から X が復元できる様子を見ていこう. いま、 $X = S \sqcup R$ であり、 S, R の位相は既に分かっているので、貼り合わせ写像 $\mu: \mathcal{O}_R \rightarrow \mathcal{O}_S$ を与えれば、 X の位相が復元できる. 一方 $\tilde{X} = \mathcal{L} \sqcup R$ であるので、貼り合わせ写像 $\tilde{\mu}: \mathcal{O}_R \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ を考えることができる. このとき、次が成り立つ.

定理 30. 次で定める写像 μ は、 X の貼り合わせ写像となる.

$$\mu(U) := \bigcup_{\ell \in \tilde{\mu}(U)} \ell \quad (U \in \mathcal{O}_R)$$

15 動機

等質空間 G/H と、それに作用する不連続群 Γ が与えられると、商多様体 $\Gamma \backslash G/H$ が定まり、これは Clifford-Klein 形と呼ばれる。このとき、 Γ の作用を ‘変形’ を考えることで、自然に Clifford-Klein 形の変形空間 $\mathcal{T}(\Gamma, G, H)$ が定義される。一般にこの変形空間は非ハウスドルフ空間となってしまうが、その非ハウスドルフ性はそれほど酷いものではない [K93, KN06, BKY08]。著者は、こういった非ハウスドルフな変形空間を理解するために、位相的ブローアップを定式化した。

16 Appendix

第 13 節において、 $X = A \sqcup B$ と書いたとき A は X の開集合であると仮定していた。このため、 A と B は非対称である。この節では、 A が開集合であるという仮定を外し、 A と B を対等に取り扱うことを考える。これは、位相的ブローアップの議論と直接は無関係だが、貼り合せ写像をより一般的な設定で定式化するために、このようなことを考えてみたい。以下、 A, B を位相空間とし、次の設定を考える。

設定 31. X の位相として、次の条件を満たすものを考える。

- (i) X の位相の A への制限は A の元の位相と等しい。
- (ii) X の位相の B への制限は B の元の位相と等しい。

このとき、“ A と B のつながり方” を表すには双方向の貼り合せ写像

$$\mu_{B,A} : \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_B, \quad \mu_{A,B} : \mathcal{O}_B \rightarrow \mathcal{O}_A$$

を用いて、次の互換性を仮定する必要がある。

定義 32. 双方向の貼り合せ写像 $(\mu_{B,A}, \mu_{A,B})$ が互換であるとは、次の 2 条件を満たすことを言う。

- (a) $U \subset \mu_{A,B}(\mu_{B,A}(U)) \quad (U \in \mathcal{O}_A)$,
- (b) $U \subset \mu_{B,A}(\mu_{A,B}(U)) \quad (U \in \mathcal{O}_B)$.

注 33. 写像 $\mu : \mathcal{O}_A \sqcup \mathcal{O}_B \rightarrow \mathcal{O}_A \sqcup \mathcal{O}_B$ を

$$\mu(U) := \begin{cases} \mu_{B,A}(U) & (U \in \mathcal{O}_A) \\ \mu_{A,B}(U) & (U \in \mathcal{O}_B) \end{cases}$$

によって定めると、互換性の条件は次のように書ける。

$$U \subset \mu^2(U) \quad (U \in \mathcal{O}_A \sqcup \mathcal{O}_B)$$

定理 34. 次の自然な一対一対応がある。

$$\{ \text{設定 31 を満たす } X \text{ の位相} \} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{互換な貼り合せ写像} \}$$

補題 35. X に設定 31 を満たす位相が定まっているとし、この開核作用子を Int_X と記す。このとき

$$\begin{aligned} \mu_{B,A}(U) &:= B \cap \text{Int}_X(B \sqcup U) & (U \in \mathcal{O}_A) \\ \mu_{A,B}(U) &:= A \cap \text{Int}_X(A \sqcup U) & (U \in \mathcal{O}_B) \end{aligned}$$

で定まる写像は互換な貼り合せ写像となる.

補題 36. $(\mu_{B,A}, \mu_{A,B})$ を張り合わせ写像とする. このとき次で定まる X の位相は設定 31 の条件を満たす.

$U \subset X$ に対し, $U_A := U \cap A$, $U_B := U \cap B$ とおいたとき:

$$U \text{ が } X \text{ の開集合} \stackrel{\text{def}}{\iff} U_A \in \mathcal{O}_A \text{ かつ } U_B \in \mathcal{O}_B \text{ かつ } U_B \subset \mu_{B,A}(U_A) \text{ かつ } U_A \subset \mu_{A,B}(U_B)$$

ここで, 上記 2 つの補題により定まる対応は互いに逆対応である. また, $(\mu_{B,A}, \mu_{A,B})$ の片方が自明ならば, このペアは常に互換である. 例えば $\mu_{A,B}$ が自明ならば, A が X の開集合, これはちょうど第 13 節の場合に相当する.

参考文献

- [BKY08] A. BAKLOUTI, I. KÉDIM, T. YOSHINO, *On the deformation space of Clifford-Klein forms of Heisenberg groups*, Int. Math. Res. Not. **16** (2008), 35pp.
- [K93] T. KOBAYASHI, *On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups*, J. Geometry and Physics **12** (1993), 133–144.
- [KN06] T. KOBAYASHI, S. NASRIN, *Deformation of properly discontinuous actions of \mathbb{Z}^k on \mathbb{R}^{k+1}* , Internat. J. Math. **17** (2006), 1175–1193.

ゲージ群の A_n -型の有限性

蔦谷 充伸

京都大学大学院理学研究科

1 はじめに

本稿では、主束のゲージ群を「 A_n -同値」という「位相群の同型」よりも弱い同値関係で分類するときに起こる現象を紹介する。

まず、この問題の歴史を概観しておく。[Mas90]によりゲージ群の「ループ空間」（一般に言う「ループ空間」の一般化にあたる代数的位相幾何学における空間の概念である）としての同値（ A_∞ -同値）に関する研究がなされたのが著者の知る限りで最も古いものである。続いて、ホモトピー同値（ A_1 -同値）で分類が研究がなされたのは [Kon91] である。そこで初めて本稿の中心テーマである「有限性」が示唆された。その後、[CS00]において H -同値（ A_2 -同値）に関して一般的な条件下での有限性を主張する定理が証明された（本稿の主結果はこの結果の直接の一般化である）。それ以降、種々の主束のゲージ群についてホモトピー型やループ空間としての分類を与える研究がいくつかなされている。

本節では本稿の主結果の大まかな様子を説明する。以下で現れる用語は後で詳しく述べる。

1.1 ゲージ群

位相群 G と位相空間 B を固定する。このとき、 B 上の主 G -束 P に対し、 P のゲージ群と呼ばれる位相群 $\mathcal{G}(P)$ が決まる。我々が調べたいのは、 P を動かしたときに $\mathcal{G}(P)$ としてどのような位相群が現れるのか、ということである。

1.2 A_n -同値

「 A_n -同値」（ $n = 1, 2, \dots, \infty$ ）という位相群の間の同値関係がある。位相群 G と H が位相群として同型ならば A_n -同値となる、という弱い同値関係になっている。さらに、 $n > m$ のとき、 G と H が A_n -同値ならば A_m -同値となり、 A_1 -同値とは（演算を考えずにただの位相空間として）ホモトピー同値ということに他ならない。ちなみに、 A_n -同値の「 A 」は“associativity”（結合性）の頭文字から来ている。

1.3 主結果

これらの用語を用いれば、主結果は次のように書かれる。

定理 ([T-1]) 連結コンパクト Lie 群 G と有限 CW 複体 B を固定する。すると、 $n < \infty$ のとき、 A_n -同値という同値関係で割って得られる商集合

$$\{\mathcal{G}(P) \mid P : B \text{ 上の主 } G\text{-束}\} / A_n\text{-同値}$$

は有限集合である。

主束として同型ならばゲージ群は同型となる。したがって B 上の主 G -束の同型類そのものが有限個しかないような G と B に対してはこの定理の主張は自明である。しかし、主束の同型類はしばしば無限個あるので、その点で非自明な主張となっている。

また、この定理は $n = 1, 2$ の場合は [CS00] の結果であり、証明の方針も基本的には同様になっている。ただし、 A_n -同値はホモトピー同値や H -同値に比べると複雑な概念であり、証明を拡張する際にはその取り扱いに注意を払う必要がある。

2 ゲージ群の定義

G を位相群、 B を位相空間とし、 B 上の主 G -束 P を考える。主束の定義等は割愛する。 P の自己束写像 $P \rightarrow P$ (ここでは連続なものを考える) であって、底空間に恒等写像 $B \rightarrow B$ を誘導するものを P のゲージ変換という。ゲージ変換全体のなす集合を $\mathcal{G}(P)$ と書くと、 $\mathcal{G}(P)$ は合成に関して群になる。さらにこの群 $\mathcal{G}(P)$ にコンパクト開位相を入れると、位相群となる。この位相群 $\mathcal{G}(P)$ を P のゲージ群 (あるいはゲージ変換群) という。

注意 1 ここではゲージ変換として連続なものを考えたが、 G や B がなめらかな多様体で P がなめらかな主束のときはゲージ変換もそれに応じてなめらかなものを考えることができる。このとき、なめらかなゲージ変換のなすゲージ群から連続なゲージ変換のなすゲージ群への包含写像があるが、これは準同型写像でかつ弱ホモトピー同値写像になっている。このことから、本稿の内容については本質的にはどちらで考えても差は無いと思つてよいと言える。

3 位相群の間の A_n -写像と A_n -同値

3.1 A_n -写像

G と H を位相群とする。記号の簡略化のため $I = [0, 1]$ (単位閉区間) と書く。また、この節では $n = 1, 2, \dots$ あるいは $n = \infty$ とする。

定義 3.1 ([Sta63b]) 連続写像 $f : G \rightarrow H$ が A_n -写像であるとは、次を満たす連続写像の族 $\{f_i : I^{i-1} \times G^i \rightarrow H\}_{i=1}^n$ が存在することである。

$$(i) f_1 = f$$

$$(ii) f_i(t_1, \dots, t_{i-1}; g_1, \dots, g_i) = \begin{cases} f_{i-1}(t_1, \dots, \hat{t}_k, \dots, t_{i-1}; g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_i) & (t_k = 0) \\ f_k(t_1, \dots, t_{k-1}; g_1, \dots, g_k) f_{i-k}(t_{k+1}, \dots, t_{i-1}; g_{k+1}, \dots, g_i) & (t_k = 1) \end{cases}$$

ここで \hat{t}_k は t_k を除くことを意味する。また、この $\{f_i\}_{i=1}^n$ を f の A_n -形式という。

$n > m$ のとき、 f が A_n -写像ならば、その A_n -形式 $\{f_i\}_{i=1}^n$ から A_m -形式 $\{f_i\}_{i=1}^m$ が得られるので、 f は A_m -写像でもある。

連続写像 $f : G \rightarrow H$ が A_n -写像であるとはどういうことか、 n が小さいときの場合を考えてみる。まず、 $n = 1$ のときは何も条件はない、ただの連続写像である。 $n = 2$ のときは f に対し次の条件を満たすホモトピー $f_2 : I \times G^2 \rightarrow H$ があるということである。

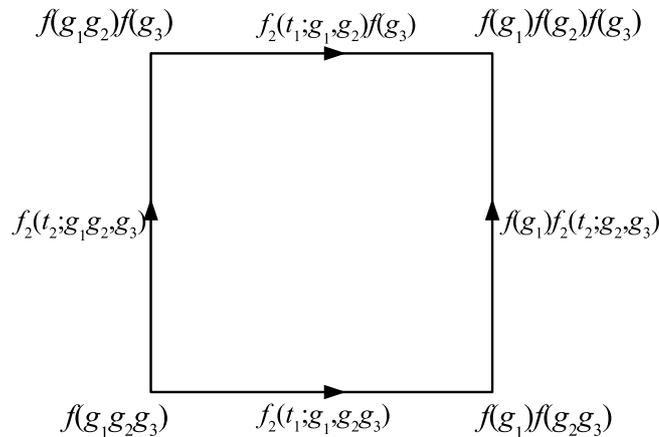
$$f_2(t_1; g_1, g_2) = \begin{cases} f(g_1 g_2) & (t_1 = 0) \\ f(g_1) f(g_2) & (t_1 = 1) \end{cases}$$

すなわち、「かけてから f で写す写像」と「 f で写してからかける写像」がホモトープであるということに他ならない。これは群準同型写像の条件を up to homotopy にした概念であると言える。ちなみにこのような写像 f は古典的には H -写像と呼ばれている。

つづいて $n = 3$ の場合を考えてみる。 f が A_3 -写像であるとする。すると上のようなホモトピー $f_2 : I \times G^2 \rightarrow H$ が存在する。さらに連続写像 $f_3 : I^2 \times G^3 \rightarrow H$ が存在して、次の条件を満たす。

$$f_3(t_1, t_2; g_1, g_2, g_3) = \begin{cases} f_2(t_2; g_1 g_2, g_2) & (t_1 = 0) \\ f(g_1) f_2(t_2; g_2, g_3) & (t_1 = 1) \\ f_2(t_1; g_1, g_2 g_3) & (t_2 = 0) \\ f_2(t_1; g_1, g_2) f(g_3) & (t_2 = 1) \end{cases}$$

これを $G^3 \rightarrow H$ なる写像のなす空間の中で絵を描くと次のようになる。



ただし各点は $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$ の写る先によって写像を表し、 $t_1, t_2 \in I$ はこの写像空間内に描かれた曲線のパラメータを表す。上のように、 f_3 は正方形 I^2 の周 ∂I^2 上ではどのような写像 $G^3 \rightarrow H$ を与えるかが決まっているが、その内部においては特に条件を課していない。したがって、上の条件を満たす $\partial I^2 \times G^3 \rightarrow H$ が $I^2 \times G^3 \rightarrow H$ に拡張できるとき、 f は A_3 -写像であるというのである。ここで、一般にこのような f_3 が存在するかどうかは、 f_2 のとり方に依存することを注意しておく。

n がより大きい場合も $n = 3$ の場合と同様である。つまり、 A_{n-1} -形式 $\{f_i\}_{i=1}^{n-1}$ に対し $\{f_i\}_{i=1}^n$ が A_n -形式となる $f_n : I^{n-1} \times G^n \rightarrow H$ が存在することは、 $\{f_i\}_{i=1}^{n-1}$ によって決まる $\partial I^{n-1} \times G^n \rightarrow H$ が $I^{n-1} \times G^n \rightarrow H$ に連続写像として拡張できることと同じである。もちろんこの問題の答えは A_{n-1} -形式 $\{f_i\}_{i=1}^{n-1}$ のとり方に依存する。

これらは「up to homotopy でどのくらい結合性を保っているか」ということを表していると思われべき条件である。このような条件によって A_n -写像は定義される。

例 1 連続写像 $f : G \rightarrow H$ が群準同型写像であるとき、 f は A_∞ -写像である。実際、 $f_i : I^{i-1} \times G^i \rightarrow H$ を $f_i(t_1, \dots, t_{i-1}; g_1, \dots, g_i) = f(g_1 \cdots g_i)$ のように I^{i-1} の成分には依存しないように定義しておけば、 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が f の A_∞ -形式になっていることは容易に確認することができる。

K もまた位相群のとき、 $f : G \rightarrow H$ と $f' : H \rightarrow K$ がともに A_n -写像ならば、その合成 $f' \circ f$ もまた A_n -写像となることが具体的に A_n -形式を作ることにより確認できる。

3.2 A_n -同値写像

再び G と H を位相群とする。

定義 3.2 連続写像 $f : G \rightarrow H$ が A_n -写像でかつホモトピー同値写像であるとき、 f は A_n -同値写像であるという。 G と H の間に A_n -同値写像が存在するとき、 G と H は A_n -同値であるという。

$f : G \rightarrow H$ が A_n -同値写像であるとき、実はそのホモトピー逆写像 $f' : H \rightarrow G$ もまた A_n -写像となることが知られている。したがって f' も A_n -同値写像である。このことと A_n -写像の合成が再び A_n -写像になることから、 A_n -同値が位相群の間の同値関係になっていることがわかる。位相群の同型写像は A_∞ -写像でかつ同相写像であるから、 G と H が同型ならば A_∞ -同値である。また、 $n > m$ のとき、 G と H が A_n -同値ならば A_m -同値であることも明らかである。特に A_1 -同値はただのホモトピー同値である。

例 2 足し算により Lie 群と思つたユークリッド空間 \mathbf{R}^n は単位群と A_∞ -同値。

例 3 直交群 $O(n)$ と実一般線形群 $GL(n, \mathbf{R})$ は A_∞ -同値。

4 主結果

用語をすべて用意したところで、もう一度主結果を思い出す。

定理 ([T-1]) 連結コンパクト Lie 群 G と有限 CW 複体 B を固定する。すると、 $n < \infty$ のとき、 A_n -同値という同値関係で割って得られる商集合

$$\{\mathcal{G}(P) \mid P : B \text{ 上の主 } G\text{-束}\} / A_n\text{-同値}$$

は有限集合である。

ここで、 $n = \infty$ が除外されているが、反例が実際に存在する。最初に述べたように、もちろん主束の同型類が有限個ならゲージ群の同型類も有限個、したがって A_∞ -同値類も有限個となる。ところが、 $G = SU(2)$ 、 $B = S^4$ の場合には主束のゲージ群には無限個の相異なる A_∞ -型が存在することが [Mas90] によって示されている。

また、 G が可換 Lie 群の場合は、後で述べるように、主束によらずすべてのゲージ群が同型になる。

5 $G = SU(2)$, $B = S^4$ の場合

ここでは具体例として G が 2 次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ 、 B が 4 次元球面 S^4 の場合を考える。 $SU(2)$ は非可換単連結コンパクト Lie 群としては最も簡単なものであり、 S^4 はその上の主 $SU(2)$ -束で非自明なものを持つ最も簡単な空間である。 $\pi_4(BSU(2)) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \mathbf{Z}$ であるから、 S^4 上の主 $SU(2)$ -束 P は $\langle c_2(P), [S^4] \rangle \in \mathbf{Z}$ で分類される。そこで、 S^4 上の主 $SU(2)$ -束 P_k を $\langle c_2(P_k), [S^4] \rangle = k$ なるものとして定義する。ここで k は任意の整数を取りうる。

この設定の下では著者の研究よりも前に、 A_1 -型、 A_2 -型、 A_∞ -型の分類が完成していた。その結果をまずここに挙げておく。整数 a, b に対し、 $\text{GCD}(a, b)$ は a と b を割り切る最大の正の整数とする。ただし $\text{GCD}(0, 0) = \infty$ とする。

定理 5.1 ([Kon91]) ゲージ群 $\mathcal{G}(P_k)$ と $\mathcal{G}(P_{k'})$ がホモトピー同値となるための必要十分条件は

$$\text{GCD}(12, k) = \text{GCD}(12, k')$$

である。したがって S^4 上の主 $SU(2)$ -束のゲージ群のホモトピー型は全部で 6 個存在する。

定理 5.2 ([CS00]) ゲージ群 $\mathcal{G}(P_k)$ と $\mathcal{G}(P_{k'})$ が A_2 -同値となるための必要十分条件は

$$\text{GCD}(180, k) = \text{GCD}(180, k')$$

である。したがって S^4 上の主 $SU(2)$ -束のゲージ群の A_2 -型は全部で 18 個存在する。

定理 5.3 ([Tsu01]) ゲージ群 $\mathcal{G}(P_k)$ と $\mathcal{G}(P_{k'})$ が A_∞ -同値となるための必要十分条件は $|k| = |k'|$, すなわち

$$\text{GCD}(0, k) = \text{GCD}(0, k')$$

である。したがって S^4 上の主 $SU(2)$ -束のゲージ群の A_∞ -型は全部で加算無限個存在する。

このように、すべて GCD に関する条件で書くことができる。 A_3 以上についても、著者は部分的に同様の結果を得ている。

定理 5.4 ([T-2]) $3 \leq n < \infty$ のとき、次を満たす正の奇数 a_n^{odd} が存在する。 k と k' が奇数のとき、ゲージ群 $\mathcal{G}(P_k)$ と $\mathcal{G}(P_{k'})$ が A_n -同値となるための必要十分条件は

$$\text{GCD}(a_n^{\text{odd}}, k) = \text{GCD}(a_n^{\text{odd}}, k')$$

である。

注意 2 k と k' の偶奇が異なるときは定理 5.1 によりホモトピー同値ですらない。上記の定理で扱いきれないのは k と k' がともに偶数のときである。

A_{n+1} -同値ならば A_n -同値であるから、 a_n^{odd} は a_{n+1}^{odd} を割り切ることがわかる。したがって、 a_n^{odd} の素因数分解を考えると、各指数は n に関して単調非減少である。さらに、 a_n^{odd} の素因数分解の p の指数は $[2n/(p-1)]$ 以上であることがわかっている ($[]$ はガウス記号)。特に $p=3$ の指数は n であることがわかっている。また、 n が小さいときの a_n^{odd} は次のような値がわかっている。

$$\begin{array}{ll} a_1^{\text{odd}} = 3 & a_6^{\text{odd}} = 3^6 5^3 7^2 11^1 13^1 = 638512875 \\ a_2^{\text{odd}} = 3^2 5^1 = 45 & a_7^{\text{odd}} = 3^7 5^3 7^2 11^1 13^1 = 1915538625 \\ a_3^{\text{odd}} = 3^3 5^1 7^1 = 945 & a_8^{\text{odd}} = 3^8 5^4 7^2 11^1 13^1 17^1 = 488462349375 \\ a_4^{\text{odd}} = 3^4 5^2 7^1 = 14175 & a_9^{\text{odd}} = 3^9 5^4 7^3 11^1 13^1 17^1 19^1 = 194896477400625 \\ a_5^{\text{odd}} = 3^5 5^2 7^1 11^1 = 467775 & a_{10}^{\text{odd}} = 3^{10} 5^5 7^3 11^2 13^1 17^1 19^1 = 32157918771103125 \end{array}$$

k として偶数も考える場合には、単位元成分について次のような結果が得られている。

定理 5.5 ([T-2]) $3 \leq n < \infty$ のとき、ゲージ群の単位元成分 $\mathcal{G}^{\text{id}}(P_k)$ と $\mathcal{G}^{\text{id}}(P_{k'})$ が A_n -同値となるための十分条件は

$$\text{GCD}(4^n a_n^{\text{odd}}, k) = \text{GCD}(4^n a_n^{\text{odd}}, k')$$

である。また、

$$\text{GCD}(a_n^{\text{odd}}, k) = \text{GCD}(a_n^{\text{odd}}, k')$$

は必要条件である。

最後に、自然に思いつくであろう予想を述べておく。

予想 5.6 $3 \leq n < \infty$ のとき、次を満たす正の整数 a_n が存在する。ゲージ群 $\mathcal{G}(P_k)$ と $\mathcal{G}(P_{k'})$ が A_n -同値となるための必要十分条件は

$$\text{GCD}(a_n, k) = \text{GCD}(a_n, k')$$

である。

6 証明の方針

この節は代数的位相幾何学の概念を多用する、多少専門家向きの内容となっている。以下で G は連結コンパクト Lie 群とする。

6.1 fibrewise topological group の間の fibrewise A_n -写像

連続写像 $\pi: E \rightarrow B$ とその切断 $\sigma: B \rightarrow E$ を考える。連続写像 $\mu: E \times_B E \rightarrow E$ と $\nu: E \rightarrow E$ は $\pi \circ \mu = \pi'$ および $\pi \circ \nu = \pi$ を満たすとする。ただし $\pi': E \times_B E \rightarrow B$ は E の B 上のファイバー積とする。このとき、 E が B 上の **fibrewise topological group** であるとは、 μ を各 $b \in B$ 上のファイバーに制限した $E_b \times E_b \rightarrow E_b$ で与えられる積によって、 E_b が $\sigma(b)$ を単位元とし、 ν によって逆元を与えるような群となることである。これは、 B 上の位相空間の圏の中の group object と言っても同じことである。

定義 6.1 $\pi_1: E_1 \rightarrow B$ と $\pi_2: E_2 \rightarrow B$ を B 上の fibrewise topological group とし、連続写像 $f: E_1 \rightarrow E_2$ は $\pi_2 \circ f = \pi_1$ を満たすとする。このとき連続写像の族 $\{f_i: I^{i-1} \times E_1^{\times_{B^i}} \rightarrow E_2\}_{i=1}^n$ が **fibrewise A_n -写像** であるとは、これらを各ファイバーに制限した $\{f_i: I^{i-1} \times (E_1)_b^i \rightarrow (E_2)_b\}_{i=1}^n$ が $f: (E_1)_b \rightarrow (E_2)_b$ の A_n -形式となることである。

特に E_1 と E_2 が Hurewicz fibration のとき、各ファイバーのホモトピー同値を与える fibrewise A_n -写像 $E_1 \rightarrow E_2$ を **fibrewise A_n -同値写像** という。このような写像が存在するとき、 E_1 と E_2 は **fibrewise A_n -同値** であるという。fibrewise A_n -同値は fibrewise topological group の間の同値関係であることが知られている。

fibrewise topological group E の切断のなす空間 $\Gamma(E)$ は、各点での値を掛け合わせるにより演算を定義すると位相群となる。このとき、fibrewise topological group E_1 と E_2 が同型（各ファイバーの準同型を誘導する B 上の同相写像 $E_1 \rightarrow E_2$ が存在する）ならば $\Gamma(E_1)$ と $\Gamma(E_2)$ は同型であることがわかる。同様に E_1 と E_2 が fibrewise A_n -同値ならば $\Gamma(E_1)$ と $\Gamma(E_2)$ も A_n -同値。

6.2 automorphism bundle (adjoint group bundle)

P を B 上の主 G -束とすると、 G を内部自己同型による作用で左 G -空間と思つて得られる同伴束 $\text{aut } P$ は B 上の fibrewise topological group となる。つまり、 $\text{aut } P = (P \times G)/G$ (G の $P \times G$ への作用は $(g, (u, x)) \mapsto (ug^{-1}, gxg^{-1})$) は B の恒等写像を被覆する連続写像 $\text{aut } P \times_B \text{aut } P \rightarrow \text{aut } P$ をもち、この積により fibrewise topological group となる。特に、 G が可換なときは内部自己同型による作用は自明となるので、 $\text{aut } P$ は fibrewise topological group として $B \times G$ に同型。

このようなファイバー束を考える理由は、次のよく知られた命題である。

命題 6.2 P が B 上の主 G -束のとき、 P のゲージ群 $\mathcal{G}(P)$ は $\Gamma(\text{aut } P)$ に位相群として自然に同型。

このことから、 $\mathcal{G}(P)$ の A_n -型を分類するには $\Gamma(\text{aut } P)$ の A_n -型を分類すればよいことがわかる。そして、 $\Gamma(\text{aut } P)$ の A_n -型が有限個しか存在しないこと（主結果）を証明するには、 $\text{aut } P$ の fibrewise A_n -型が有限個しかないことを示せば十分である。

また、特に G が可換なときは任意の P に対しゲージ群 $\mathcal{G}(P)$ は B から G への連続写像の全体 $\text{Map}(B; G)$ に位相群として同型であることもわかる。

6.3 fibrewise A_n -空間の分類定理

詳細は略すが, fibrewise topological group やその間の fibrewise A_n -写像と同様にして, A_n -空間 [Sta63a] やその間の A_n -写像 [IM89] の fibrewise 版を考えることができる. それらはここまで議論してきた fibrewise topological group の場合の一般化になっている.

fibrewise A_n -空間には次のような分類定理がある.

定理 6.3 ([T-1]) Hurewicz fibration である fibrewise A_n -空間 $E_n(G) \rightarrow M_n(G)$ が存在して, 次を満たす.

任意の Hurewicz fibration である fibrewise A_n -空間 $E \rightarrow B$ に対し, E の各ファイバーが G に A_n -同値ならば, ホモトープなものを除いてただひとつの連続写像 $f: B \rightarrow M_n(G)$ が存在して, f による引き戻し $f^*E_n(G)$ は E と fibrewise A_n -同値.

この f を E の分類写像と呼ぶ.

6.4 fibrewise A_n -空間の fibrewise rationalization

$E \rightarrow B$ を fibrewise A_n -空間とすると, E の fibrewise rationalization $\bar{E} \rightarrow B$ は再び A_n -空間となる. また, fibrewise rationalization は分類定理に対して次の性質を持つ.

命題 6.4 ([T-1]) G の rationalization を $G_{(0)}$ と書く. このとき, 連続写像 $\ell: M_n(G) \rightarrow M_n(G_{(0)})$ が存在して, $\Omega\ell: \Omega M_n(G) \rightarrow \Omega M_n(G_{(0)})$ は単位元成分の rationalization を与え, 次の性質を満たす.

任意の Hurewicz fibration である fibrewise A_n -空間 $E \rightarrow B$ に対し, E の各ファイバーは G に A_n -同値とする. このとき E の分類写像を $f: B \rightarrow M_n(G)$ とすると, fibrewise rationalization \bar{E} の分類写像は $\ell \circ f$ である.

P を空間 B 上の主 G -束とする. $\text{aut } P$ の fibrewise rationalization については次が知られている.

命題 6.5 (本質的に [CS00]) $\text{aut } P$ の fibrewise rationalization は fibrewise A_∞ -空間として自明, つまり $B \times G_{(0)}$ と fibrewise A_∞ -同値.

したがってその分類写像は定値写像にホモトープである.

6.5 コファイバー列を使った議論

上の結果から, B が連結 (のときに示せば十分) 有限 CW 複体のとき, ホモトピー集合の間に誘導される写像

$$\ell_*: [B; M_n(G)] \rightarrow [B; M_n(G_{(0)})]$$

の定値写像が代表するホモトピー類の逆像が有限集合であることを示せば, 主結果が証明されたことになる. ここで基点を考えないホモトピー集合で書いたが, 基点を考えたホモトピー集合で考えてもよい. なぜなら, 弧状連結な空間への連続写像が定値写像にホモトープであるかどうかは, 基点を考えても考えなくても同じだからである.

まず $B = S^r$ (r 次元球面) の場合を考える. $r \geq 2$ のときは, $\Omega\ell: \Omega M_n(G) \rightarrow \Omega M_n(G_{(0)})$ が単位元成分の rationalization であることからすぐに示される. $r = 1$ のときも少し議論すれば示される.

$\dim B \leq 1$ のときは 1 点か有限個の S^1 の wedge であるのでよい. B と B' を連結有限 CW 複体, $B' \rightarrow B \rightarrow S^r$ をコファイバー列とし,

$$\ell_*: [B'; M_n(G)]_0 \rightarrow [B'; M_n(G_{(0)})]_0$$

の定値写像が代表するホモトピー類の逆像は有限集合であると仮定する. ここで $[X; Y]_0$ は X から Y への基点を保つ連続写像のホモトピー類全体を表すとする. このとき, 次の図式が成立する.

$$\begin{array}{ccccccc}
 [\Sigma B'; M_n(G)]_0 & \longrightarrow & \pi_r(M_n(G)) & \longrightarrow & [B; M_n(G)]_0 & \longrightarrow & [B'; M_n(G)]_0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 [\Sigma B'; M_n(G_{(0)})]_0 & \longrightarrow & \pi_r(M_n(G_{(0)})) & \longrightarrow & [B; M_n(G_{(0)})]_0 & \longrightarrow & [B'; M_n(G_{(0)})]_0
 \end{array}$$

この図式において, 3列目以外の列は定値写像が代表するホモトピー類の逆像は有限集合である (1列目は rationalization の性質から). このことを用いて 5-lemma の証明に似た議論を行うことにより, 3列目についても定値写像が代表するホモトピー類の逆像は有限集合であることがわかる. ゆえに, この議論から帰納的に, 任意の有限 CW 複体 B に対して求める結果を得る.

参考文献

- [CS00] M. C. Crabb and W. A. Sutherland, *Counting homotopy types of gauge groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **81** (2000), 747-768.
- [IM89] N. Iwase and M. Mimura, *Higher homotopy associativity*, Lecture Notes in Mathematics 1370, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 193-220.
- [Kon91] A. Kono, *A note on the homotopy type of certain gauge groups*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh: Sect. A **117** (1991), 295-297.
- [KT00] A. Kono and S. Tsukuda, *4-manifolds X over $BSU(2)$ and the corresponding homotopy types $\text{Map}(X, BSU(2))$* , J. Pure and Appl. Algebra **151** (2000), 227-237.
- [Mas90] G. Masbaum, *Sur la cohomologie du classifiant du groupe de jauge sur certains 4-complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **310** (1990), 115-118.
- [Sta63a] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H -spaces. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275-292.
- [Sta63b] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H -spaces. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 293-312.
- [Tsu01] S. Tsukuda, *Comparing the homotopy types of the components of $\text{Map}(S^4, BSU(2))$* , J. Pure and Appl. Algebra **161** (2001), 235-247.
- [T-1] M. Tsutaya, *Finiteness of A_n -equivalence types of gauge groups*, preprint.
- [T-2] M. Tsutaya, *Homotopy pullback of A_n -spaces and its applications to A_n -types of gauge groups*, in preparation.

Mitsunobu Tsutaya
 Department of Mathematics, Kyoto University
 E-mail address: tsutaya@math.kyoto-u.ac.jp

Turaev's theory of phrases and its application to curves and links.

福永 知則

北海道大学理学研究院数学部門 学術研究員

1 序文

本講演では, V.Turaev により導入された語のホモトピー理論に関する講演者の結果について述べる. V.Turaev は 2005 年頃, 論文 [15] において語のトポロジー理論を導入した. さらに, Turaev は論文 [16] において, 語やフレーズのホモトピー理論の特殊化を考えると, 仮想結び目の理論や仮想系の理論などの, 既存の理論と同値なものになるということを示した. また, 語のホモトピーの理論は free knot の理論とも関わりがあることが A.Gibson や V.O.Mantrov によって述べられている ([10], [14]). したがって, Turaev の語のホモトピー理論の研究の進展は, これらの結び目理論からの幾何学的対象の研究の進展につながり, さらに語の理論によりこれらの幾何学的な対象を統一的に理解することにも役に立つと思われる. 結び目理論における諸概念の語の理論による研究, 語の理論への拡張などについては, 例えば, 講演者は伊藤昇氏との共同研究により, 語の理論を用いた Khovanov homology 理論の研究などを行った [5]. また, 講演者は結び目図式におけるひずみ度と交点数に関する不等式の語の理論への一般化なども行った [7]. より多くの幾何学的な対象と語の理論を結びつけるための枠組みとして, Turaev の語の homotopy 理論の一般化などについても研究をしている [6].

このように, Turaev の語の理論の応用については, 様々な可能性があり研究を行っているが, 今回の講演では, 語のホモトピー理論の研究の一例として, 語およびフレーズのホモトピーによる分類に関する結果と, その曲面上の順序, 基点, 向き付き多成分曲線の安定同値による分類への応用について紹介したいと思う.

2 nanoword, nanophrase とその homotopy

この section では, 論文 [15], [16] において, Turaev によって導入された nanoword 及び nanophrase について述べる. 詳しいことは, [15], [16] 及び [17] を参照してほしい.

本論文では, *alphabet* とは有限集合のこととし, その元を letter と呼ぶことにする. *alphabet* \mathcal{A} 上の長さが k の *word* とは, 写像 $w: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \mathcal{A}$ の事とする (これを $w(1)w(2)\dots w(k)$ と記す).

以下では α を involution $\tau: \alpha \rightarrow \alpha$ 付きの *alphabet* とする. *alphabet* α に対して α -*alphabet* とは, *alphabet* \mathcal{A} と $\text{map } |\cdot|: \mathcal{A} \rightarrow \alpha$ の組 $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ のことである. さて, ここでこのレポートの主役である, étale word, étale phrase, nanoword そして nanophrase を定義する. まずは, étale word と étale phrase を定義する.

定義 2.1. α 上の長さ n の *étale word* とは α -alphabet \mathcal{A} と, \mathcal{A} 上の word の組 (\mathcal{A}, w) のことである. また α 上の長さ k の *étale phrase* とは, α -alphabet \mathcal{A} と k 個の word $(w_1|w_2|\dots|w_k)$ の組のことである.

α が \mathcal{A} と等しく, τ が恒等写像のときは, これは通常の word 及び phrase とみなせることから, *étale word* 及び *étale phrase* は, 通常の word 及び phrase の一般化とすることができる. *étale phrase* の中で, 特に1つの文字からなる *étale phrase* を *monoliteral phrase* とよぶ.

さて, 語の理論を曲面上の曲線に応用するためには, 次に定義する *nanoword* 及び *nanophrase* というものを考えると都合が良い.

定義 2.2. α 上の長さ n の *nanoword* とは α -alphabet \mathcal{A} と, \mathcal{A} 上の word $w: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{A}$ で \mathcal{A} の letter がもれなく2回現れるものの組 (\mathcal{A}, w) のことである. また α 上の長さ k の *nanophrase* とは, α -alphabet \mathcal{A} と k 個の word $(w_1|w_2|\dots|w_k)$ の組で, $(\mathcal{A}, w_1w_2\cdots w_k)$ が *nanoword* となるものことである.

なお, word 及び phrase ですべての letter がもれなく2回現れるものは, それぞれ *Gauss word* 及び *Gauss phrase* と呼ばれている. C.F.Gauss は, 今日では Gauss word と呼ばれている word を用いて, 平面曲線のトポロジーを研究していた ([8] を参照). Turaev は, 論文 [15], [16] において, 結び目理論における Reidemeister move のアナロジーで, *nanoword* 及び *nanophrase* に対して, *S-homotopy* と呼ばれる同値関係を導入した. *homotopy* を定義する為に, まずは *isomorphic* と, *S-homotopy move* を定義する.

定義 2.3. 2つの α 上の *nanophrase* $(\mathcal{A}_1, (w_1|w_2|\dots|w_k))$ と $(\mathcal{A}_2, (v_1|v_2|\dots|v_k))$ が *isomorphic* であるとは, 全単射 $f: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ で, $|A| = |f(A)|$ for all $A \in \mathcal{A}_1$ かつ $f \circ w_j = v_j$ for all $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ をみたすものが存在することである. また, この全単射 f を, *isomorphism* と呼ぶ.

定義 2.4. S を $\alpha \times \alpha \times \alpha$ の任意の部分集合とする. α 上の *nanophrase* の *S-homotopy move* (1) - (3) とは, 次のような *nanophrase* の変形のことである: (1) $(\mathcal{A}, (xAy))$ を $(\mathcal{A} \setminus \{A\}, (xy))$ に置き換える. (2) $|A| = \tau(|B|)$ をみたすとき $(\mathcal{A}, (xAByBAz))$ を $(\mathcal{A} \setminus \{A, B\}, (xyz))$ に置き換える. (3) $(|A|, |B|, |C|) \in S$ をみたすとき $(\mathcal{A}, (xAByACzBCt))$ を $(\mathcal{A}, (xBAyCAzCBt))$ に置き換える. ここで, x, y, z, t はそれぞれ \mathcal{A} 上の word で, 記号 $|$ が含まれていてもよいものとする.

以上の準備のもと, *S-homotopic* という同値関係の定義をする.

定義 2.5. 2つの α 上の *nanophrase* $(\mathcal{A}_1, (w_1|w_2|\dots|w_k))$ と $(\mathcal{A}_2, (v_1|v_2|\dots|v_k))$ が *S-homotopic* であるとは, 有限回の *isomorphism* と *S-homotopy move* 及びその逆 move によって, 互いに移りあえるときのことをいう.

特に S が $\alpha \times \alpha \times \alpha$ の対角線集合のとき, *S-homotopy* を単に *homotopy* と呼ぶことにする. Turaev は 論文 [15] において, 文字数が6以下の *nanoword* の *homotopy* による分類を行った. ここでは, この本論文の内容と関係する文字数が4以下の *nanoword* の分類のみ紹介する.

定理 2.6 (Turaev [15]). w を α 上の文字数が4以下の *nanoword* とする. このとき w は \emptyset と *homotopic* であるか, または $w_{a,b} := (\mathcal{A} = \{A, B\}, ABAB)$ で $|A| = a, |B| = b \in \alpha$ かつ $a \neq \tau(b)$ の形の *nanoword* と *isomorphic* である. さらに $a \neq \tau(b)$ のとき *nanoword* $w_{a,b}$ は \emptyset と *homotopic* でなく, かつ *nanoword* $w_{a,b}$ と $w_{a',b'}$ が *homotopic* であるための必要十分条件は, $a = a'$ かつ $b = b'$ が成り立つことである.

このレポートでは、著者の定義した nanophrase の不変量を用いて、文字数が 4 以下の nanophrase を長さの制限を付けずに homotopy により分類した結果を紹介する。更に、étale phrase に関して、長さが 4 以下の monoliteral phrase の homotopy による分類結果を紹介する。

3 nanophrase の homotopy 不変量

このセクションでは、nanophase の homotopy 不変量について紹介する。本論文の主結果である、letter の数が 4 以下の nanophrase 分類と、letter の数が 4 以下の monoliteral phrase の分類には、いくつかの nanophrase の homotopy 不変量を用いるが、本論文では (monoliteral phrase を分類するために) 新しく定義した homotopy 不変量である、 R_o 不変量のみ紹介する。また、この不変量は、任意の α に対して定義できるが、今回は簡単のため、 α が 1 点集合の場合の定義のみ紹介する (分類を完成させるためには、 α が 1 点集合のときの R_o 不変量の定義を知っていれば、十分である)。その他の nanophase の homotopy 不変量については、[1], [2], [3], [4], [5], [6], [9], [10], [11], [12], [15], [16] 及び [17]などを参照してほしい。

3.1 R_o 不変量

nanophrase over the one-element set (\mathcal{A}, P) を考える。記号 \mathcal{A}_l で、 \mathcal{A} の letter のうち、 l 番目の component に 2 回現れる letter からなる集合をあらわすとする。このとき、letter $X \in \mathcal{A}_{l_1}$ 及び $Y \in \mathcal{A}_{l_2}$ に対して、 $dl_P(X, Y) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を

$$dl_P(X, Y) = \text{Card}\{Z \in \mathcal{A}_{l_1 l_2} \mid n(X, Z) = 1, n(Y, Z) = -1\} \bmod 2$$

で定義し、さらにに整数 l_1 と l_2 に対して、 $de_P(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を

$$de_P(l_1, l_2) = \text{Card}\{(X, Y) \in \mathcal{A}_{l_1} \times \mathcal{A}_{l_2} \mid dl(X, Y) = 1\} \bmod 2$$

と定義する。そして $R_o(P)$ を次のように定義する

$$R_o(P) = (de(l_1, l_2))_{l_1 < l_2}.$$

このとき、次のことが成立する。

命題 3.1. R_o は、nanophrase over the one-element set の homotopy 不変量である。

計算例は、以下の通りである。

例 3.2. nanophrase

$$(P_a^{2,2;l_1,l_2})^d = (\emptyset \cdots |\emptyset| A_{12} A_{13} A_{14} A_{12} A_{23} A_{24} |\emptyset| \cdots |\emptyset| A_{13} A_{23} A_{34} A_{14} A_{24} A_{34} |\emptyset| \cdots |\emptyset)$$

に対して、 R_o 不変量を計算する。以下この例では、 $P_a^{2,2;l_1,l_2}$ の desingularization $(P_a^{2,2;l_1,l_2})^d$ を P と記すことにする。まず、

$$dl_P(A_{12}, A_{34}) = \text{Card}\{A_{14}\} = 1$$

であることがわかり、更に

$$de_P(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{if } (i, j) = (l_1, l_2), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる. 故に

$$R_o(P) = \mathbf{e}_{(l_1, l_2)}.$$

であることがわかる. なお, *empty phrase* に対しては, $R_o((\emptyset)_k)$ は $\mathbf{0}$ と等しいことがわかる. 従って, この計算例から, $P_a^{2,2;l_1, l_2}$ は *empty phrase* と *homotopic* ではないことがわかる.

4 文字数が4以下の nanophrase の homotopy による分類

最初に, 文字数が2以下の nanophrase の分類結果を述べる. $P_a^{1,1;l_1, l_2} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset|)$ with $|A| = a$ for $1 \leq l_1 < l_2 \leq k$ とおく.

定理 4.1 ([3]). P を長さ k で文字数が2以下の *nanophrase* とする. このとき P は $(\emptyset \cdots |\emptyset|)$ に *homotopic* かまたは $P_a^{1,1;l_1, l_2}$ for some $l_1, l_2 \in \{1, \dots, k\}$, $a \in \alpha$ に *isomorphic* のいずれかである. さらに, $P_a^{1,1;l_1, l_2}$ と $P_{a'}^{1,1;l'_1, l'_2}$ が *homotopic* であるための必要十分条件は $l_1 = l'_1$, $l_2 = l'_2$ かつ $a = a'$ が成り立つことである.

次に文字数が4以下の nanophrase 分類定理を述べるために, いくつかの記号を準備する.

$$P_{a,b}^{4;l} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l}{ABAB} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{3,1;l_1, l_2} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{ABA} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{2,2;l_1, l_2} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{AB} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{AB} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{2,2II;l_1, l_2} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{AB} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{BA} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{1,3;l_1, l_2} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{BAB} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{2,1,1I;l_1, l_2, l_3} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{AB} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_3}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{2,1,1II;l_1, l_2, l_3} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{BA} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_3}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{1,2,1I;l_1, l_2, l_3} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{AB} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_3}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{1,2,1II;l_1, l_2, l_3} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{BA} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_3}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{1,1,2I;l_1, l_2, l_3} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_3}{AB} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{1,1,2II;l_1, l_2, l_3} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_3}{BA} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{1,1,1,1I;l_1, l_2, l_3, l_4} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_3}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_4}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{1,1,1,1II;l_1, l_2, l_3, l_4} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_3}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_4}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

$$P_{a,b}^{1,1,1,1III;l_1, l_2, l_3, l_4} := (\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_1}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_2}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_3}{B} |\emptyset \cdots |\emptyset| \overset{l_4}{A} |\emptyset \cdots |\emptyset|),$$

with $|A| = a$, $|B| = b$. ただし, もし $a = \tau(b)$ ならば, $P_{a,b}^{4;l}$, $P_{a,b}^{2,2I;l_1, l_2}$ 及び $P_{a,b}^{2,2II;l_1, l_2}$ は $(\emptyset \cdots |\emptyset|)$ と *homotopic* になることが容易にわかる. そこで, $P_{a,b}^{4;l}$, $P_{a,b}^{2,2I;l_1, l_2}$, $P_{a,b}^{2,2II;l_1, l_2}$ と書いたときは, 常に $a \neq \tau(b)$ を仮定することにする.

以上の準備のもと, 文字数が4以下の nanophrase の分類結果について述べる.

定理 4.2 ([3]). P を長さ k で文字数が 4 以下の *nanophrase* とする. このとき P は文字数が 2 以下の *nanophrase* に *homotopic* かまたは $P_{a,b}^{X;Y}$ for some $X \in \{4, (3,1), \dots, (1,1,1,1III)\}$, $Y \in \{1, \dots, k, (1,2), \dots, (k-3, k-2, k-1, k)\}$ に *isomorphic* のいずれかである. さらに $P_{a,b}^{X;Y}$ と $P_{a',b'}^{X';Y'}$ が *homotopic* であるための必要十分条件は $X = X', Y = Y', a = a'$ かつ $b = b'$ が成り立つことである.

5 letter の数が 4 以下の monoliteral phrase の分類

この letter の数が 4 以下の monoliteral phrase の分類について紹介する

Turaev は論文 [15] において, étale word の desingularization という操作を通して, étale word にも homotopy という同値関係を定義した. この定義は, étale phrase に対しても自然に拡張できる.

定義 5.1. étale phrase (\mathcal{A}, P) に対して \mathcal{A}^d を α -alphabet $\{A_{i,j} := (A, i, j) | A \in \mathcal{A}, 1 \leq i < j \leq m_P(A)\}$ with the projection $|A_{i,j}| := |A|$ for all $A_{i,j}$ とし, phrase P^d を P から次のようにして得られる phrase とする: まず重複度が 1 以下の letter を全て消去する. そして, 各 $A \in \mathcal{A}$ で重複度 $m_P(A)$ が 2 以上のものに対して, i 番目に出てくる A を次で置き換える:

$$A_{1,i}A_{2,i} \dots A_{i-1,i}A_{i,i+1}A_{i,i+2} \dots A_{i,m_P(A)}.$$

得られた nanophrase (\mathcal{A}^d, P^d) を *desingularization of (\mathcal{A}, P)* と呼ぶ.

定義 5.2. 2 つの étale phrase が互いに S -homotopic であるとは, それらの desingularization が nanophrase として互いに S -homotopic であることと定義する.

Turaev は, 論文 [15] において, 文字数が 5 以下の word に対して, (word を自然な方法で étale word とみなして) homotopy による分類を行った. ここでは, 文字数が 4 以下の monoliteral phrase の homotopy

による分類結果を述べる. そのために, 次の記号を用意する: $P_a^{4;l} := (\emptyset \dots \emptyset | a^4 | \emptyset \dots \emptyset)$,

$$P_a^{3,1;l_1,l_2} := (\emptyset \dots \emptyset | a^3 | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{2,2;l_1,l_2} := (\emptyset \dots \emptyset | a^2 | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{1,3;l_1,l_2} := (\emptyset \dots \emptyset | a^{l_1} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{2,1,1;l_1,l_2,l_3} := (\emptyset \dots \emptyset | a^2 | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_3} | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{1,2,1;l_1,l_2,l_3} := (\emptyset \dots \emptyset | a^{l_1} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_3} | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{1,1,2;l_1,l_2,l_3} := (\emptyset \dots \emptyset | a^{l_1} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_3} | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{1,1,1,1;l_1,l_2,l_3,l_4} := (\emptyset \dots \emptyset | a^{l_1} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_3} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_4} | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{1,1;l_1,l_2} := (\emptyset \dots \emptyset | a^{l_1} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{3;l} := (\emptyset \dots \emptyset | a^3 | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{2,1;l_1,l_2} := (\emptyset \dots \emptyset | a^2 | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{1,2;l_1,l_2} := (\emptyset \dots \emptyset | a^{l_1} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset),$$

$$P_a^{1,1,1;l_1,l_2,l_3} := (\emptyset \dots \emptyset | a^{l_1} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_2} | \emptyset \dots \emptyset | a^{l_3} | \emptyset \dots \emptyset),$$

但し $a \in \alpha$ であり, $l, l_1, l_2, l_3, l_4 \in \{1, \dots, k\}$ は $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$ をみたすとする. ここで, $a = \tau(a)$ のときは $P_a^{4;l}$ 及び $P_a^{3;l}$ は $(\emptyset \cdots \emptyset)$ と homotopic であることが容易に示せるので, $P_a^{4;l}, P_a^{3;l}$ という記号を用いたときは, 常に $a \neq \tau(a)$ を仮定することにする.

また, $a = \tau(a)$ のとき, $P_a^{3,1;l_1,l_2}$ と $P_a^{1,3;l_1,l_2}$ は $P_a^{1,1;l_1,l_2}$ に homotopic であることもわかる. 実際

$$\begin{aligned}
(P_a^{3,1;l_1,l_2})^d &= (\emptyset \cdots \emptyset | A_{12} A_{13} A_{14} A_{12} A_{23} A_{24} A_{13} A_{23} A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset | A_{14} A_{24} A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset) \\
&\simeq (\emptyset \cdots \emptyset | A_{13} A_{12} A_{14} A_{23} A_{12} A_{24} A_{23} A_{13} A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset | A_{14} A_{24} A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset) \\
&\simeq (\emptyset \cdots \emptyset | A_{13} A_{12} A_{23} A_{14} A_{12} A_{23} A_{24} A_{13} A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset | A_{24} A_{14} A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset) \\
&\simeq (\emptyset \cdots \emptyset | A_{13} A_{14} A_{24} A_{13} A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset | A_{24} A_{14} A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset) \\
&\simeq (\emptyset \cdots \emptyset | A_{13} A_{13} A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset | A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset) \\
&\simeq (\emptyset \cdots \emptyset | A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset | A_{34} | \emptyset \cdots \emptyset) \\
&\simeq (P_a^{1,1;l_1,l_2})^d.
\end{aligned}$$

そこで, $P_a^{3,1;l_1,l_2}, P_a^{1,3;l_1,l_2}$ と書いたときも, $a \neq \tau(a)$ を仮定することにする.

以上の準備の下, 次の定理が成立する.

定理 5.3. P を重複度 1 の文字を含まない *monoliteral phrase over α* で, 文字数が 4 以下のものとする. このとき, P は $(\emptyset \cdots \emptyset)$ と *isomorphic* であるか以下の *étale phrase* のいずれかと *homotopic* である: $P_a^{1,1;l_1,l_2}, P_a^{3;l}, P_a^{2,1;l_1,l_2}, P_a^{1,2;l_1,l_2}, P_a^{1,1,1;l_1,l_2,l_3}, P_a^{4;l}, P_a^{3,1;l_1,l_2}, P_a^{1,3;l_1,l_2}, P_a^{2,2;l_1,l_2}, P_a^{2,1,1;l_1,l_2,l_3}, P_a^{1,2,1;l_1,l_2,l_3}, P_a^{1,1,2;l_1,l_2,l_3}, P_a^{1,1,1,1;l_1,l_2,l_3,l_4}$ for some $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \{1, \dots, k\}$ and $a \in \alpha$. さらに, *étale phrase* これらの *monoliteral phrase* たちが *homotopic* であるための必要十分条件は, それらが互いに等しいことである.

6 曲面上の曲線のトポロジーへの応用

この section では, nanophrase の homotopy による分類結果を, 曲面上の曲線論へ応用した結果の一例を述べる. 曲線の安定同値に関する基本的な用語などは [3] や [16] などを参照してほしい.

V. Turaev は論文 [16] において, $\alpha_0 = \{a, b\}$ と involution $\tau : a \mapsto b$ 上の長さ k の nanophrase の homotopy 類は, 曲面上の k 成分の基点, 順序, 向き付き曲線の安定同値類と one-to-one かつ onto に対応することを示した. したがって, 上記の nanophrase の分類結果を α が α_0 の場合に適用し同値類の個数を数え上げると, 次の結果を得る.

系 6.1 ([1]). 最小交点数が 2 以下の曲面上の 2 成分の基点, 順序, 向き付き曲線の安定同値類は 19 個ある.

より一般に, 次を示すことができる.

系 6.2 ([2]). k を正の整数とする. このとき最小交点数が 2 以下の曲面上の k 成分の基点, 順序, 向き付き曲線の *stable equivalence* 類は $1 + \frac{1}{2}k^2 + k^3 + \frac{1}{2}k^4$ 個

次に, *étale phrase* の homotopy による分類結果を述べるために, 曲面上の曲線に関する次の 2 つの概念を導入する. 曲面上の多成分曲線が *irreducible* であるとは, その曲線のすべての安定同値類の元が自明な成分を持たないときをいう. また, 曲面上の多成分曲線が *monoliteral type* であるとは, その曲線の安定同値類が *monoliteral phrase* の desingularization に対応するときを言う. 以上の準備の元, 以下の主定理の系が成立する.

系 6.3. k を正の整数とする. このとき最小交点数が 6 以下の曲面上の *irreducible* かつ *monoliteral* な k 成分の基点, 順序, 向き付き曲線の *stable equivalence* 類は 26 個.

注意 6.4. *Turaev* は, 曲線と *nanophrase* の対応を具体的に与えている. したがって, *nanophrase* が与えられれば, そこから対応する曲線を求めることも可能である.

7 おわりに

Turaev の語のトポロジーの理論はまだ比較的若い分野であり, 取り組むべき問題もたくさんあると思われる. 2009 年に東京工業大学で行われた研究集会「nanowords と virtual knots」では, 今後取り組むべき問題や, 理論の発展の方向としてどのようなものが考えられるかを話し合う場が準備され, たくさんの方々から貴重な意見が寄せられた. そこで議論された問題などは, [13] にまとめてあるので, 興味のある方は参考にして頂ければ幸いである.

参考文献

- [1] T. Fukunaga, *Homotopy classification of nanophrases in Turaev's theory of words*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications **18**(2009), 901-915.
- [2] T. Fukunaga, *On homotopy classification of phrases and its application*, Demonstratio Mathematica **43**(2010), 419-432.
- [3] T. Fukunaga, *Homotopy classification of nanophrases with less than or equal to four letters*, to appear in Fundamenta Mathematicae.
- [4] T. Fukunaga, *Homotopy classification of generalized phrases in Turaev's theory of words*, arXiv:0904.4204.
- [5] T. Fukunaga, N.Ito, *Khovanov homology and words*, arXiv:0901.3956.
- [6] T.Fukunaga, *On generalization of homotopy of words and its applications*, arXiv:0908.2899.
- [7] T.Fukunaga, *The warping degree of a nanowords*, available in Hokkaido university preprint series in mathematics No.975.
- [8] C.F. Gauss, *Weake*, Vol.8, Teubner, Leipzig, 1900.
- [9] A. Gibson, *Homotopy invariants of Gauss phrases*, Indiana University Mathematics Journal **59**(2010), 207-229.
- [10] A. Gibson, *Homotopy invariants of Gauss words*, arXiv:0902.0062.
- [11] A. Gibson, *Factorization of homotopies of nanophrases*, arXiv:0910.5281.
- [12] A. Gibson, N. Ito, *Finite type invariants for nanowords and nanophrases*, arXiv:1007.1693.
- [13] 伊藤 昇, A. Gibson, 福永 知則, 「討論会による問題集 -題: おもしろい問題, 存在意義-」, <http://www.math.titech.ac.jp/hitoshi/workshop/nvk-discussion.pdf>.

- [14] V.O.Mantrov, *On free knots and links*, arXiv:0902.0127.
- [15] V. Turaev, *Topology of words*, Proceedings of the London Mathematical Society **95** (2007), no.2 360-417.
- [16] V. Turaev, *Knots and words*, International Mathematics Research Notices (2006), Art. ID 84098, 23 pp.
- [17] V. Turaev, *Lectures on topology of words*, Japanese Journal of Mathematics **2** (2007), 1-39.

Topology of invariant group orderings

伊藤 哲也 *

1 はじめに

今回の講演では、群 G の不変順序のなす空間 $LO(G)$ のトポロジーについて述べる。空間 $LO(G)$ のトポロジーは最近に研究が始まった新しい分野であり、今後急速に発展していくことが期待されている。また群の順序や順序を持つ群の構造を調べる際に有効な道具となるものと思われる。ここでは、群の順序のなす空間 $LO(G)$ の基本事項の解説と講演者の結果の紹介を行う。

2 群の不変順序：定義と基本的な性質

この講演では高々可算な群のみを扱う。群 G 上の全順序 $<_G$ がすべての $g, a, b \in G$ について $a <_G b \Rightarrow ga <_G gb$ が成り立つとき（順序関係 $<_G$ が G 自身の左作用で不変であるとき） $<_G$ を G の**左順序**と呼ぶ。群 G が左順序を持つとき、 G は多くの特別な性質を持つ。

例 1. G が順序付け可能ならば、 G は単位元 1 以外の位数有限の元を持たない。 g を単位元ではない G の元とし、 G の左順序 $<_G$ をとる。 $1 <_G g$ であれば、この不等式に左から g をかけて $g <_G g^2$ が得られる。同様にして、不等式の列

$$1 <_G g <_G g^2 <_G \cdots <_G g^i <_G g^{i+1} <_G \cdots$$

が得られるので、すべての $N > 0$ について $g^N > 1$ 、特に $g^N \neq 1$ 。 $1 >_G g$ のときも同様にしてすべての $N > 0$ について $g^N \neq 1$ が分かる。（逆は成り立たない：単位元以外の位数有限の元を持たないが、左順序を持たないような群が存在する。）これより、有限群は左順序を持たないことが分かる。

群の順序は、代数的に定義されたものだが、幾何学的には一次元力学系と深い関係にある。

*東京大学大学院数理科学研究科博士課程 3 年（特別研究員 DC 1）
e-mail: tetitoh@ms.u-tokyo.ac.jp

定理 1 (Folklore). G が高々可算の群であるとき、 G が左順序をもつことと G が実直線 \mathbb{R} に向きを保つ同相写像として忠実に作用することは同値である。

Proof. \mathbb{R} には向きから定まる自然な順序 $<_{\mathbb{R}}$ があることに注意する。 G の左順序 $<_G$ が与えられたとき、順序集合 $(G, <_G)$ を順序集合 $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ の部分順序集合として (部分群ではないことに注意) 埋め込むことができる。すると、 G の G 自身への (忠実な) 左作用は G の \mathbb{R} への左作用へ拡張することができる。逆に、 G が \mathbb{R} に作用しているとする。有理数の番号付け $\mathbb{Q} = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ をひとつとり、 G の順序 $<$ を各 q_i の g での像の大小を比較することで定める。つまり、ある j が存在し $i < j$ では $g(q_i) = g'(q_i)$, $g(q_j) <_{\mathbb{R}} g'(q_j)$ となる時に $g < g'$ であると定める。するとこれは G の左順序となる。□

この定理より、 $\text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ の部分群 (例えば自由群など) はすべて左順序を持つ事が分かる。また、群の順序を調べる際に力学系の手法や考え方が有効であることもわかる。実際に、Navas [8] により、力学系の手法を用いる事で群の後述する順序のなす空間 $LO(G)$ の基本的な性質が調べられている。

注 1. 上の対応関係において、順序から作用を構成する際には $(G, <_G)$ の $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ への埋め込みの任意性が、作用から順序を構成する際には有理数の番号付け $\mathbb{Q} = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の任意性がある。従って G の左順序と G の \mathbb{R} への作用は一対一に対応しているわけではない。

3 群の順序のなす空間

ここでは、群の順序全体のなす集合 $LO(G)$ 上の位相について述べる。空間 $LO(G)$ は、リーマン面・写像類群の理論におけるタイヒミュラー空間の類似として捉えると理論の目的や発展の方向を理解しやすいのではないかと思う。

まず、 $LO(G)$ に位相をどのように定義すればよいかを考える。感覚的には、二つの順序 $<, <'$ が「近い」とは、大小関係が一致するような G の元の組 (a, b) のなす $G \times G$ の部分集合が「大きい」として捉えられる。実際、もしこのような集合が全体 $G \times G$ であれば、二つの順序 $<, <'$ は同じである。この考えを定式化しよう。

左順序 $<_G$ について、その *Positive cone* $P(<_G)$ を順序 $<_G$ について単位元 1 よりも真に大きくなる G の元全体

$$P(<_G) = \{g \in G \mid g >_G 1\}$$

として定義する。 $<_G$ が左順序であることから、 $P(<_G)$ は次の二つの性質を持つことが分かる。

LO1 : $P(<_G)$ は積について閉じている : $g, g' \in P(<_G)$ とすると $gg' \in P(<_G)$ 。

LO2 : $P(\langle_G)^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in P(\langle_G)\}$ と定義すると G は 3つの互いに共通部分を持たない集合として $G = P(\langle_G) \amalg \{1\} \amalg P(\langle_G)^{-1}$ と分解される。

逆に、性質 **LO1, LO2** を満たすような G の部分集合 P について、 G の順序 \langle_P を $g \langle_P g' \iff g^{-1}g' \in P$ により定義するとこれは Positive cone が P となるような G の左順序を定める。よって $LO(G)$ は G の部分集合のなす集合 2^G の部分集合と捉えることができる。この事から、 $LO(G)$ の位相は次のように定義すると良い事が分かる。

定義 1 (Sikora [10]). ベキ集合 2^G の自然な位相 (二点からなる離散集合の可算個の直積位相) を考え、 2^G を位相空間と考える。 $LO(G)$ の位相を 2^G の部分位相として定義する。

実際に空間 $LO(G)$ の位相を扱うときには、 $LO(G)$ の位相を次のように記述すると良い。 $g \in G$ について $U_g = \{\langle_G \in LO(G) \mid 1 \langle_G g\}$ と定義する。 $LO(G)$ の位相は $\{U_g\}_{g \in G}$ を open-subbasis して定義される位相と一致する。

このように記述すると、 $LO(G)$ が普通の幾何学的トポロジーの対象である多様体と幾分変わった性質を持つ事が簡単に観察できる。開集合 U_g の補集合 U_g^c を考えよう。定義より $U_g^c = \{\langle_G \in LO(G) \mid 1 \not\langle_G g\}$ と書ける。今、 $g \neq 1$ のとき $1 \not\langle_G g$ は $1 \succ_G g$ と同値である。さらに、左不変性よりこれは $1 \langle_G g^{-1}$ と同値である。従って、

$$U_g^c = \{\langle_G \in LO(G) \mid 1 \langle_G g^{-1}\} = U_{g^{-1}}$$

となることが分かる。これは、集合 U_g が開かつ閉集合である事を意味している。

より詳細に位相の定義を調べることで、(例えば、位相空間 2^G の性質を利用することで) $LO(G)$ は次のような性質を持つことが分かる。

定理 2. G を高々可算の群とする。

1. (Sikora [10]) $LO(G)$ はコンパクト距離空間である。
2. (Sikora [10]) $LO(G)$ は完全不連結である。
3. (Linnell [6]) $LO(G)$ は有限集合か、非加算集合である。

これは順序のなす空間 $LO(G)$ が、(もし無限集合であるならば) カントール集合に近いものであることを表している。実際に、カントール集合の特徴づけから $LO(G)$ が完全集合、つまり孤立点を持たないときには $LO(G)$ は位相空間としてカントール集合と同相になることが分かる。

タイヒミュラー空間に写像類群が自然に作用するように、空間 $LO(G)$ には群 G 自身が連続的に作用する。

定義 2. 左順序 \langle_G および $g \in G$ に対して新たな左順序 $\langle_G \cdot g$ を $a(\langle_G \cdot g)b \iff ag \langle_G bg$ により定義する。群 G の $LO(G)$ への右作用を $g : \langle_G \mapsto \langle_G \cdot g$ により定義する。これは G の $LO(G)$ への連続な右作用を定める。

この G の $LO(G)$ への作用は順序付け可能な群の性質を調べるのに有用である。例えば、Morris [7] は、順序付け可能かつ amenable な群は locally indicable である (特に、アーベル化が無限巡回群を含む) ことを G の $LO(G)$ への作用を用いて証明している。

空間 $LO(G)$ 、商空間 $LO(G)/G$ のトポロジーや、 G の $LO(G)$ への作用を調べることが今後の目標である。

例 2. 孤立点に対応する順序を持たない場合や、順序の数自体が有限となるようないくつかの群については $LO(G)$ の位相型が決定されている。

1. $LO(\mathbb{Z}) = \{\langle_+, \langle_-\}$ (2点からなる離散集合)。ただし、 \langle_+ は $\dots \langle_+ -1 \langle_+ 0 \langle_+ 1 \langle_+ 2 \dots$ 、 \langle_- は $\dots \langle_- 1 \langle_- 0 \langle_- -1 \langle_- -2 \dots$ となる順序。
2. (Navas [8]) 階数 $n (> 1)$ の自由群 F_n に対して、 $LO(F_n)$ はカントール集合と同相。

4 群の順序の特性類

一般に群 G の全ての順序を具体的に記述することは難しい。自由群 F_n の順序のなす空間 $LO(F_n)$ は位相空間としてカントール集合と同相であることが分かっているが、 $LO(F_n)$ とカントール集合の間に具体的な同相写像が構成された訳ではない。特に、 F_n の左順序すべての記述は知られていない。そのため、たとえ $LO(G)$ の位相型が分かったとしても $LO(G)$ を真に理解したとは言えない。

ここでは、空間 $LO(G)$ を調べるために $LO(G)$ を比較的簡単な空間に“表現”することを考える。簡単な空間 X への連続写像 $\phi : LO(G) \rightarrow X$ を構成し、 $x \in X$ について $\phi^{-1}(x)$ がどのような性質を持つ順序であるかを記述する。これは $LO(G)$ を完全に記述するわけではないが、 $LO(G)$ の様子を理解するのに役立つ。

よりアイデアを明確にするために、次の例を挙げる。

例 3 (Sikora, Clay). \mathbb{Z}^2 を x, y で生成される階数 2 の自由アーベル群とし、 \mathbb{Z}^2 を (x, y) -平面 \mathbb{R}^2 の格子と考える。写像 $\Phi : LO(\mathbb{Z}^2) \rightarrow S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\}$ を次のようにして構成する。 $\langle \in LO(G)$ について、次の二つの場合に分けて考える。

Case 1 : $x > 1$ の場合

$x^n \langle y$ がすべての n について成り立つとき、 $\Phi(\langle) = (0, 1)$ 、 $x^{-n} \langle y$ がすべての

n について成り立つとき、 $\Phi(<) = (0, -1)$ と定義する。それ以外の場合、 $r \in \mathbb{R}$ を $\inf\{\frac{q}{p} \mid x^q < y^p\}$ ととり、 $\Phi(<) = (\frac{1}{1+r^2}, \frac{r}{1+r^2})$ と定義する。

Case 2: $x < 1$ の場合

$x^n > y$ がすべての n について成り立つとき、 $\Phi(<) = (0, 1)$ 、 $x^{-n} < y$ がすべての n について成り立つとき、 $\Phi(<) = (0, -1)$ と定義する。それ以外の場合、 $r \in \mathbb{R}$ を $\inf\{\frac{q}{p} \mid x^q < y^p\}$ ととり、 $\Phi(<) = (\frac{-1}{1+r^2}, \frac{r}{1+r^2})$ と定義する。

すると $\Phi : LO(\mathbb{Z}^2) \rightarrow S^1$ は全射連続写像を定めることが分かる。この写像は、「 y が x に比べてどのくらい (順序 $<$ について) 大きいのか？」を記述したものであり、空間 $LO(G)$ を良く知られている空間 S^1 で表現したものとなっている。特に、二つの順序 $<$ と $<'$ の “位置関係” は $\phi(<)$ と $\phi(<')$ の S^1 での点の位置関係を見る事で比較的容易に (少なくとも感覚的には) 理解できる。

この例を一般化し、 $LO(G)$ と n -次元トーラス $(S^1)^n$ との間に「良い」連続写像を構成し、群の不変順序と群 G の有界コホモロジー群とを関係づける。

まず、いくつかの定義をする。 $<_G$ を G の左順序とする。 $C \in G$ が任意の $g \in G$ についてある N が存在し、 $C^{-N} <_G g <_G C^N$ となるとき C を $<_G$ -cofinal であると呼ぶ。 C が co-final となる左順序全体を $Cof_C(G)$ で表す。

また、一般に $<_G$ は右からの掛け算では不変ではなかったことに注意しよう。つまり、左順序 $<_G$ に対し $a <_G b \implies ag <_G bg$ は一般には成り立たない。 $C \in G$ の右からの掛け算に対して不変な左順序を $<_G$ 全体の集合を $InvLO_C(G)$ とする。 $InvLO_C(G)$ は $LO(G)$ の閉部分集合、 $InvLO_C(G) \cap Cof_C(G)$ は $InvLO_C(G)$ の開部分集合となる。

$C \in G$ を固定する。 $<_G \in InvLO_C(G) \cap Cof_C(G)$ について $\rho_{C, <_G}(g) \in \mathbb{Z}$ を

$$\begin{aligned} C >_G 1 \text{ の時: } C^N \leq_G g < C^{N+1} \text{ となる } N \\ C <_G 1 \text{ の時: } C^{-N-1} \leq_G g < C^{-N} \text{ となる } N \end{aligned}$$

として定義する。写像 $\rho_{C, <_G} : G \rightarrow \mathbb{Z}$ は準同型ではないが、不等式

$$|\rho_{C, <_G}(gh) - \rho_{C, <_G}(g) - \rho_{C, <_G}(h)| \leq 1$$

を満たし、 G の defect 1 の quasi-morphism と呼ばれるものになる。 $\rho_{C, <_G}$ を G の \mathbb{Z} -係数 1-チェーンと見ると、そのコバウンダリー $d\rho_{C, <_G}$ は G の \mathbb{Z} -係数有界 2-コチェーンと見る事ができる。以上を元に、写像

$$\phi_C : InvLO_C(G) \cap Cof_C(G) \rightarrow H_b^2(G; \mathbb{Z})$$

を $\phi_C(<_G) = [d\rho_{C, <_G}]$ により定義する。有界コホモロジー $H_b^2(G; \mathbb{Z})$ は一般には非常に大きな (非可算濃度の基底をもつベクトル空間など) 空間になりうるが、amenable

な群 H については $H_b^2(H; \mathbb{Z}) = H^1(H; \mathbb{R})/H^1(H; \mathbb{Z}) = (S^1)^n = S^1 \times \dots \times S^1$ である事が知られている。 $\iota: H \subset G$ を amenable な G の部分群の H の G への包含写像とする。 ι による引き戻しと写像 ϕ_C との合成を考える事で、 $LO(G)$ からよく知られている空間 $(S^1)^n$ への写像

$$\phi_C^H = \iota^* \circ \phi_C : InvLO_C(G) \cap Cof_C(G) \rightarrow H_b^2(H; \mathbb{Z}) = (S^1)^n$$

が得られる。この写像 ϕ_C^H は H の各元と元 C との順序 $<_G$ についての大小関係を有界コホモロジーで表現したものである。この写像 ϕ_C^H は次のような良い性質を持つ。

定理 3. 1. ϕ_C^H は連続写像である。

2. C が G の中心の元であるとき、 $\phi_C^H(<_G) = \phi_C^H(<'_G)$ であれば順序 $<_G$ と $<'_G$ の定める \mathbb{R} への作用は半共役を除き一致する。

$\phi_C^H(<_G)$ と $\phi_C^H(<'_G)$ が $(S^1)^n$ の点として「近い」とき、二つの順序 $<_G$ と $<'_G$ について、 H の元と $C^i (i \in \mathbb{Z})$ の形の元との間の大小関係は比較的「似ている」と理解する事ができる。この写像 ϕ_C^H は他にも良い性質を持ち、群順序の性質を反映させた良い座標系 (のようなもの) を与えていると見る事ができる。さらには、有界コホモロジーをとる前の quasi-morphism の段階で (コチェインの段階で) 考える事により、写像 ϕ_C^H を $LO(G)$ 全体で定義された連続写像として精密化することもできる。ここでは詳細は省略するので、興味を持たれた方は論文 [3] を参照の事。

また、写像 ϕ_C^H はある種の自然性を持ち、各順序に対応した有界コホモロジー類 $\phi_C(H)(<_G)$ は群の S^1 への作用の有界 euler 類と呼ばれる特性類の拡張になっている。特に、有界コホモロジー類 $\phi_C(H)(<_G)$ は群の順序の特性類と見なす事ができる。

5 孤立順序

すでに述べたように、 $LO(G)$ は位相空間としてはカントール集合に近いものであった。ここでは、 $LO(G)$ とカントール集合の違いである孤立点について述べる。一般に、ある順序が $LO(G)$ の孤立点であるかどうかを調べるのは容易ではない。一番有効な議論は、次の命題を用いることである。

命題 1. *Positive cone* $P(<_G)$ が半群として有限生成であれば、 G の左順序 $<_G$ が $LO(G)$ の孤立点である。

孤立順序 \langle_G の Positive cone が半群として g_1, \dots, g_k で生成されるとする。今、 $g \in G$ について $g \rangle_G 1$ であれば、 g は g_1, \dots, g_k たちの積で (g_i^{-1} を一切使わずに) 書けることとなる。同様に、 $1 \rangle_G g$ であれば、 g は $g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1}$ たちの積で (g_i を一切使わずに) 書ける。つまり、任意の非自明な $g \in G$ は g_1, \dots, g_k たちの積または $g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1}$ の積でかけることを意味する。これは群の表示の観点から見ると「めったに起こりそうもない」現象である。

例 4. x, y で生成される階数 2 の自由群 F_2 において、 $x^{-1}y$ は x, y だけの積でも x^{-1}, y^{-1} だけの積でも表せない。では、 $z = x^{-1}y$ とおいて、生成元 x, y, z で考えたらどうだろうか？ これでも、 $x^{-1}z = x^{-2}y$ は x, y, z だけの積でも x^{-1}, y^{-1}, z^{-1} だけの積でも表せない！ このように、有限個の生成元 $\{x_1, \dots, x_m\}$ を考えていく限り、 F_2 の任意の元を x_1, \dots, x_m だけの積あるいは $x_1^{-1}, \dots, x_m^{-1}$ だけの積で書くことはできない。

孤立順序の存在を示すこと、また具体的に構成することは非常に難しい。そのため、群が孤立順序を持つとき、その孤立順序は群の特徴を強く反映していると考えられている。これまでに知られている孤立順序の例は非常に少なく、下に挙げるものが 2011 年 4 月時点でのすべてである。

1. $LO(G)$ が有限集合となる場合： $G = \mathbb{Z}$, $\pi_1(\text{Klein bottle})$ など。
2. (Navas [9], Ito [4]) $G_{m,n} = \langle x, y \mid x^m = y^n \rangle$ の形で定義される群。
3. (Dubrovina-Dubrovin [2]) Braid 群

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & |i - j| = 1 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i - j| > 1 \end{array} \right\rangle$$

このうち、 $LO(G)$ が有限集合となる場合は $LO(G)$ のトポロジーの研究においては本質的ではなく、古典的に分類が知られている。孤立順序を構成法を確立することや、孤立順序の具体例を見つける事は $LO(G)$ の研究において非常に重要な問題である。

孤立順序の (理論的な) 構成には、講演者による Dehornoy-like 順序と呼ばれる順序から構成する方法がある [4]。Dehornoy-like 順序とは、Braid 群の標準的な左順序である Dehornoy 順序 ([1] 参照の事) の組み合わせ的性質を抽象化して定義される特別な性質を持つ左順序である。ここでは、Dehornoy-like 順序の定義は述べない。Dehornoy-like 順序そのものは孤立順序ではないが、Dehornoy-like 順序を変形することで、孤立順序を構成することができる。上の例の 2,3 で挙げた孤立順序はすべてこの方法で構成できる。しかし、Dehornoy-like ordering を構成することは孤立順序の構成よりもさらに難しく、この手法から新たに孤立順序を作っていくことは難しいと思われる。

最近になり、講演者は孤立順序を一般的に構成する新しい方法を発見した。ここではその主結果について述べる。

定理 4 (Partially central cyclic amalgamation construction [5]). 群 G, H について、 z_H を H の非自明な元、 z_G を G の中心 $Z(G)$ の非自明な元とする。 G と H の z_G, z_H で生成される無限巡回群による融合積 $X = G *_{z_G=z_H} H$ を考える。

\langle_G を Positive cone が $\{g_1, \dots, g_m\}$ で生成される半群となるような G の孤立順序とする。同様に、 \langle_H を H の Positive cone が $\{h_1, \dots, h_n\}$ で生成される半群となるような H の孤立順序とする。ここで、 $h_1 \langle_H h_2 \langle_H \dots \langle_H h_n$ とする。もし、 $g_i \langle_G z_G$ 及び $h_i \langle_H z_H$ がすべての i について成り立ち、かつ \langle_H が z_H の右からの積に対し不変であれば ($h \langle_H h' \implies h z_H \langle_H h' z_H$ であれば)、次が成り立つ。

1. X は孤立順序 \langle_X を持つ。
2. $i = 1, \dots, m$ について $x_i = g_i z_H^{-1} h_1 \in X$ と定義する。すると 1. の孤立順序 \langle_X の Positive cone は $\{x_1, \dots, x_m, h_1, \dots, h_n\}$ で生成される半群となる。また、 \langle_X は \langle_G, \langle_H の Positive cone の生成元 $\{g_1, \dots, g_m\}, \{h_1, \dots, h_n\}$ の取り方によらずに、 $\langle_G, \langle_H, z_G, z_H$ のみにより定まる。
3. 自然な埋め込み $G \hookrightarrow X, H \hookrightarrow X$ は順序を保つ。つまり、 $g \langle_G g'$ ならば $g \langle_X g', h \langle_H h'$ ならば $h \langle_X h'$ が成り立つ。

これは二つの孤立順序をうまく混合させ新しい孤立順序を構成する方法であると考えられる。この定理を用いることで、孤立順序の新しい例が多数構成される。

例 5. 無限巡回群 \mathbb{Z} の n 個の融合積として得られる群

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_1^{a_1} = x_2^{a_2} = \dots = x_n^{a_n} \rangle$$

を考える。すると、定理より群 G は孤立順序を持つことが分かる。

G は $LO(G)$ に右から作用していたことを思いだそう。この G 作用は孤立順序を孤立順序に移すことが分かるので、孤立順序全体の集合 $IsoLO(G)$ ($LO(G)$ の部分位相として離散位相が入っている空間とみなす) に連続的に右から作用する。 $IsoLO(G)/G$ について次のような重要な未解決問題がある。

問題 1. $IsoLO(G)/G$ は有限集合であるか？

上の例では、各 \mathbb{Z} 成分について、孤立順序のとり方が 2 通りあることから、 $IsoLO(G)/G$ は少なくとも 2^n 個の異なる点を持つことが分かる。群 G のランク (生成元の最小個数) は n であることから、この群 G は $IsoLO(G)/G$ の濃度が $rank(G)$ について指数的に振る舞うような ($IsoLO(G)/G$ の濃度が $2^{rank(G)}$ 以上であるような) 最初の例を与えている。とくに、群 G はこれまでに知られている中で最も多くの孤立順序を持つ。

例 6. 上の定理において、 z_H は H の中心の元でなくても良い事に注意する。これより、中心が自明となるような孤立順序を持つ群の最初の例を構成する事ができる。 $H = \mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z} = \langle x, y \mid x^m = y^n \rangle$ とする。定理より H は Positive cone が $\{xy^{1-n}, y\}$ で生成される半群となるような孤立順序 $<_H$ を持つ。 $z_H = xy^{1-n} \cdot y^n = xy$ 、 $G = \mathbb{Z} = \langle z \rangle, <_G$ を $G = \mathbb{Z}$ の標準的な順序、 $z_G = z^p$ とするとこれらは定理の仮定を満たす。よって群

$$X = G *_\mathbb{Z} H = \mathbb{Z} *_\mathbb{Z} (\mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}) = \langle x, y \mid x^m = y^n, xy = z^p \rangle$$

は孤立順序を持つ。これは中心が自明となり、かつ孤立順序を持つような群の初めての例を与える。

参考文献

- [1] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen and B. Wiest, *Ordering Braids*, Mathematical Surveys and Monographs **148**, Amer. Math. Soc. 2008.
- [2] T. Dubrovia and T. Dubrovin, *On braid groups*, Sb. Math, **192** (2001), 693–703.
- [3] T. Ito, *Space of group orderings, quasi morphisms and bounded cohomology*, arXiv:1006.5491
- [4] T. Ito, *Dehornoy-like left orderings and isolated left orderings*, arXiv:1102.4669
- [5] T. Ito, *A construction of isolated left orderings via partially central cyclic amalgamations*, In preparation.
- [6] P. Linnell, *The space of left orders of a group is either finite or uncountable*, Bull. London Math. Soc. **43** (2011), 200–202.
- [7] D. Morris, *Amenable groups that act on the line*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 2509–2518.
- [8] A. Navas, *On the dynamics of (left) orderable groups*, Ann. Inst. Fourier, **60** (2010), 1685–1740.
- [9] A. Navas, *A remarkable family of left-ordered groups: Central extensions of Hecke groups*, J. Algebra, **328** (2011), 31–42.
- [10] A. Sikora, *Topology on the spaces of orderings of groups*, Bull. London Math. Soc. **36**, (2004), 519–526.

安定な可微分写像の特異点と特異値集合

山本 卓宏 (九州産業大学)*

1. 導入

これまで、可微分写像の特異点論の中でも特に、写像の特異点を用いて定義域多様体のトポロジーを調べることに興味を持ち研究してきた。その中でも定義域多様体の次元が値域多様体の次元よりも大きい状況がおもしろい。本講演では、これまで考えてきたこと、得られた結果を紹介したい。

以下、多様体や写像は全て C^∞ 級に滑らかなものとし、特に断らない限り多様体は連結であり境界を持たないものとする。

まず、言葉を準備する。滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ を考える。点 $p \in M$ が f の特異点とは $\text{rank } df_p < \min\{\dim M, \dim N\}$ となるときである。写像 f の特異点を全て集めた集合を**特異点集合**と呼び、 $S(f)$ と書く。さらに、特異点集合の像 $f(S(f))$ を f の**特異値集合**と呼ぶ。

多様体 M, N を固定した時、Whitney C^∞ 位相に関して、 $f \in C^\infty(M, N)$ の十分近くにあるものが全て f と右左同値¹ になるとき f を**安定写像**と呼ぶ。 M, N の次元が Mather の nice range [11] (結構領域 [4]) に入ってるなら、安定写像の全体は、 $C^\infty(M, N)$ の中で開集合かつ稠密な部分集合をなす。(詳しくは、[11] または [4] を参照)。すなわち、nice range に入っているような次元対に対しては、どんな写像であっても安定写像で近似できるということである。

安定写像 $M \rightarrow N$ の許容する特異点や多重特異点の種類がよくわかるのでとても扱いやすい。また、モース理論が示すように安定写像の特異点や特異値集合の形は定義域多様体のトポロジーをととてもよく反映する。

この講演では、曲面間の写像について最近調べたことを紹介した後、4次元閉多様体から3次元多様体への安定写像についての研究結果を紹介し、今後の課題を紹介する。

2. 曲面間の写像

多様体 M, N を固定したとき、滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ とホモトピックになるような安定写像で特異値集合の形が“もっとも”単純なものは、レーブの定理が示すように多様体 M のトポロジーをよてもよく反映している。ここでは、曲面間の写像の“もっとも”簡単な形について考える。

2.1. 閉曲面から曲面への写像

閉曲面 M 上の C^∞ 級に滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ を考える。写像 f の特異値集合 $f(S(f))$ を f を**輪郭**と呼び $\gamma(f)$ と書く。さらに、特異点集合が1つの成分か

本研究は科研費(課題番号:21740056)の助成を受けて行っています。

* 〒 813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1 九州産業大学工学部 住居・インテリア設計学科

e-mail: yama.t@ip.kyusan-u.ac.jp

web: <http://www.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/th/yamamoto/index.html>

¹2つの写像 $f, g \in C^\infty(M, N)$ が右左同値であるとは、微分同相写像 $\Phi: M \rightarrow M$ と $\phi: N \rightarrow N$ で $\phi \circ f = g \circ \Phi$ となるものが存在するときである。

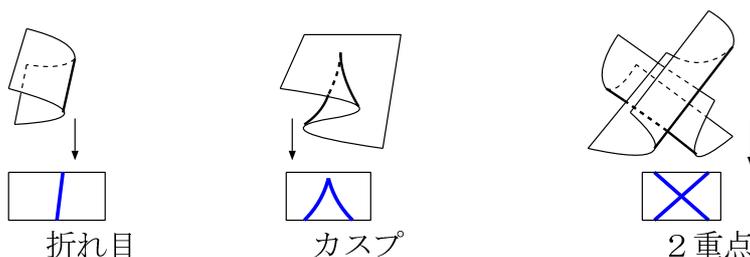


図 1: 左から折れ目, カスプ, 2重点

らなるとき, $\gamma(f)$ は**既約**であると呼ぶ.

このとき, $f: M \rightarrow N$ が**安定写像**であるとは, 次を満たすときである [18]:

(1) 写像芽 (f, p) ($p \in S(f)$) は次のどちらかと右左同値:

$$(a, x) \mapsto \begin{cases} (a, x^2) & : p \text{ は折れ目特異点,} \\ (a, x^3 + ax) & : p \text{ はカスプ特異点.} \end{cases}$$

(2) 多重写像芽 $(f|_{S(f)}, f^{-1}(q))$ ($q \in \gamma(f)$) は図 1 のどれかと右左同値:

次元対 $(2, 2)$ は Mather の nice range に入るので, 曲面間の滑らかな写像 $M \rightarrow N$ は安定写像とホモトピックである.

M を閉曲面とし $f: M \rightarrow \Sigma_h$ ($h \geq 0$) を安定写像とする. このとき, $\gamma(f) = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_l$ とおく (各 γ_i は既約なものとする). γ_i に沿って進んだときくさびでない点では折られている方向が左手にあるように γ_i を向き付ける (γ_i 上のカスプでない点は, 折り目特異点に対応していることに注意). この向きを γ_i の**標準的な (または, 自然な) 向き**と呼ぶことにする. γ_i 上のカスプでない点に対して, 法方向で左手の方向を向いたものを**正の向き**と呼び, v と書く.

このとき, γ_i 上のカスプでない点 x に対して γ_i の向きから定まる接ベクトル τ と v との順序対 (τ, v) の定める Σ_h の x における向きが Σ_h の向きと一致すると約束する.

f の正則値の逆像の最小値を $m(f)$ と書く. $\infty \in \Sigma_h$ を f の正則値で, その逆像の成分数がちょうど $m(f)$ であるものとする. 各 γ_i に対して, $S^2 \setminus \gamma_i$ の成分で ∞ を含むものを U_i と書く. 輪郭の既約成分 γ_i 上の点 $p \in \gamma_i$ が**正**であるとは, p における法方向 v が U_i の方向を向いているときとし, そうでないとき, **負**と呼ぶ. γ_i 上の点が全て, 正であるとき γ_i を**正の成分**と呼び, そうでないとき**負の成分**と呼び, 正の成分数を i^+ , 負の成分数を i^- と書く. このとき, 点 ∞ の最も近くにある γ_i は負である: $i^- \geq 1$.

いま, 各 γ_i は標準的に向き付けられているとする. 点 $y \in \partial U_i$ を一つ固定し, $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Sigma_h$ を y を始点とする γ_i のパラメータ表示でカスプ以外の点では正則であり $\varphi^{-1}(y) = \{0, 1\}$ なるものをもって来る. 各 2重点 Q に対して, $0 < t_1 < t_2 < 1$ で $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = Q$ なるものがあることに注意. このとき, Q

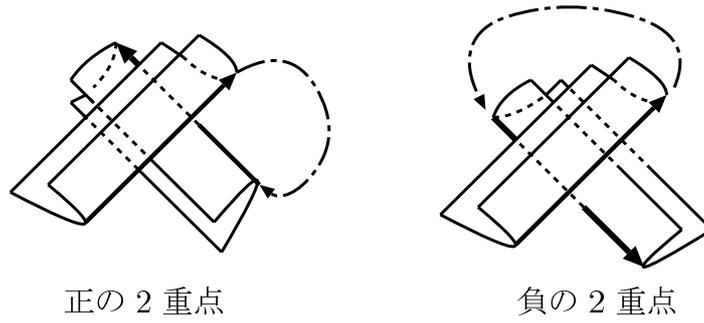


図 2: 正の 2 重点と負の 2 重点

が **正の 2 重点** であるとは、順序対 $(d\varphi/dt(t_1), d\varphi/dt(t_2))$ が定める Σ_h の Q における向きが Σ_h の向きと一致するときであり、そうでないとき **負の 2 重点** と呼ぶ（詳しくは、図 2 を参照）。このように γ_i 上の各 2 重点に対して正と負とを定義したが、この定義は γ_i の始点 $y \in \partial U_i$ のとり方に依っていることに注意。しかし、 γ_i 上の正の 2 重点の個数 N_i^+ と負の 2 重点の個数 N_i^- の差 $N_i^+ - N_i^-$ は $y \in \partial U_i$ のとり方に依らずに定まることがわかる（詳しくは、[17] を参照）。2 重点の符号について次が成立する：

補題 1. 既約な輪郭を持つ安定写像 $M \rightarrow \Sigma_h$ が 2 重点を持てば、 $N^- \geq 1$ である。

以上の記号の元、次の 2 つの命題が成立する：

命題 1 (亀之園-Y [7]). M を閉曲面、 $f: M \rightarrow S^2$ を安定写像とする。このとき、次が成立する：

$$g = \varepsilon \left[(N^+ - N^-) + \frac{c}{2} + (1 + i^+ - i^-) - m(f) \right]$$

ここで、 g は M の種数とし、 M が向き付け可能であれば $\varepsilon = 1$ 、そうでなければ² $\varepsilon = 2$ 。

命題 2 (Y [23]). M を閉曲面、 $f: M \rightarrow \Sigma_h$ を $\gamma(f)$ が既約な安定写像とする。このとき、次が成立する：

$$g = \varepsilon \left[(N^+ - N^-) + \frac{c}{2} - m(f) + \sum_{\eta \geq m(f)} \eta \lambda_\eta \right]$$

ここで、 g は M の種数とし、 M が向き付け可能であれば $\varepsilon = 1$ 、そうでなければ $\varepsilon = 2$ 。 λ_η は逆像の数が η となる $\Sigma_h \setminus \gamma(f)$ の成分の種数の総和。

命題 1, 命題 2 の証明については、[7], [23] を参照。

²向き付け不可能な閉曲面 F の種数とは、 F を $\mathbb{R}P^2$ の連結和に分解したときの $\mathbb{R}P^2$ の個数のこととする。

Q 1. 滑らかな写像 $\Sigma_g \rightarrow \Sigma_h$ ($g \geq 0, h \geq 0$) が与えられたとき, その写像をホモトピーで動かして, 特異値集合の形をどこまで簡単にできるか?

Pignoni [13]: 曲面間の安定写像 $f: M \rightarrow N$ に対して, カスプの数, 2重点の数をそれぞれ $c(f), n(f)$ とかく. $f_0: M \rightarrow N$ を滑らかな写像, f を f_0 とホモトピックな安定写像で輪郭が既約なものとする. $c(f) + n(f)$ が f_0 とホモトピックな安定写像 $M \rightarrow N$ で輪郭が既約なものの中で最小となると, $\gamma(f)$ を f_0 の**最小輪郭**と呼ぶ³.

定理 1 ([7]). $f: \Sigma_g \rightarrow S^2$ を写像度 $d \geq 0$ の C^∞ 級写像とし, その輪郭は既約であるとする. f の最小輪郭の (c, n) は次のいずれかである:

$$(c, n) = \begin{cases} (2(d-1), 4) \text{ or } (2d+2, 0) & \text{if } d \neq 0 \text{ and } g = 1, \\ (2, 4) \text{ or } (6, 0) & \text{if } (d, g) = (1, 2), \\ (2(d-g), 2g+2) & \text{if } d \geq g > 1, \\ (0, d+g+2) & \text{if } d \leq g \text{ and } d \equiv g \pmod{2} \text{ except } (d, g) = (1, 1), \\ (2, d+g+1) & \text{if } d \leq g \text{ and } d \not\equiv g \pmod{2} \text{ except } (d, g) = (1, 2), \end{cases}$$

系 1. $f: \Sigma_g \rightarrow S^2$ の輪郭 $\gamma(f)$ が最小輪郭であれば, $\gamma(f)$ 上の 2 重点の数は偶数個である⁴.

定理 1 の略証明. 命題 1 より, 既約な輪郭を持つ写像度 d の安定写像 $\Sigma_g \rightarrow S^2$ の輪郭 $\gamma(f)$ に対して, 次の不等式を得る:

$$|d| + g \leq (N^+ - N^-) + \frac{c}{2}.$$

いま, 写像度 1 の写像 $\Sigma_1 \rightarrow S^2$ を考える. 上記不等式により, もし $\gamma(f)$ が 2 重点を持たなければ $c \geq 4$ がわかる. 一方, $\gamma(f)$ が 2 重点を持てば, 上記不等式と補題 1 により

$$c + n = c + (N^+ + N^-) \geq 2 + 2N^- + \frac{c}{2} \geq 4$$

がわかる. また, 安定写像 $\Sigma_1 \rightarrow S^2$ で輪郭が図 3 になるものが作れる. よって, 図 3 が写像度 1 の $\Sigma_1 \rightarrow S^2$ の最小輪郭であることがわかる. \square

[7] では, 向き付け不可能な閉曲面から球面への写像の最小輪郭に対しても, 最小輪郭の特徴付けが得られている.

$f: M \rightarrow N$ を次数 d の安定写像とする. $c(f) + n(f)$ が次数 d の安定写像 $M \rightarrow N$ で輪郭が既約なものの中で最小となると, $\gamma(f)$ を**写像度 d の最小輪郭**と呼ぶ.

滑らかな写像 $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_h$ の存在は次の様に特徴付けられていた:

³ 曲面間の滑らかな写像 $f, g: M \rightarrow N$ がホモトピックであれば, f, g の写像度は一致する. $N = S^2$ であれば, この条件は必要十分である (Hopf). 例えば, [12] を参照.

⁴ これまでの曲面間の安定写像の研究では, くさび (カスプ特異点) の個数についての研究は多くなされてきた (例えば, [3] や [16]). しかし, ここで得られたような 2 重点の個数に関する結果は, 筆者の知る限りこれまで得られていないようである.

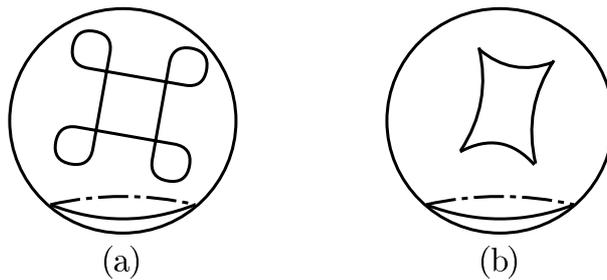


図 3:

命題 3 ([19]). 非負整数 g, h に対して, $r(g, h)$ を次で定義する

$$r(g, h) = \begin{cases} 0 & \text{if } g = 0, h \geq 1, \\ \infty & \text{if } g \geq 1, h = 1, \\ \lfloor (g-1)/|h-1| \rfloor & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ここで, $\lfloor (g-1)/|h-1| \rfloor$ は $(g-1)/|h-1|$ を超えない最大の整数を表す.

このとき, $h \geq 1$ かつ $|d| > r(g, h)$ であれば写像度 d の滑らかな写像 $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_h$ は存在しない.

定理 2 ([23]). $|d| \leq r(g, h)$ とし, $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_h$ を輪郭が既約な写像度 $d \geq 0$ の安定写像とする. このとき, $\gamma(f)$ が写像度 d の最小輪郭であるための必要十分条件は (c, n) が次のいずれかになることである:

$h = 1$

$$(c, n) = \begin{cases} (0, 0) & \text{if } d = 0 \text{ and } g = 0, \\ (2, 2) & \text{if } d = 0 \text{ and } g = 1, \\ (2, 0) & \text{if } g = 1 \text{ and for any } d \neq 0, \\ (0, g-2) & \text{if } g \text{ is an even number and for any } d, \\ (2, g-3) & \text{if } g \geq 3 \text{ is an odd number and for any } d, \end{cases}$$

$h \geq 2$

$$(c, n) = \begin{cases} (2, 2) & \text{if } d = 0 \text{ and } g \text{ is an odd number satisfying } 0 \leq g \leq 2h-1, \\ (2, 0) & \text{if } d = 0 \text{ and } g \text{ is an odd number satisfying } g \geq 2h+1 \text{ or,} \\ & \text{if } g > d(h-1) \text{ and } g \not\equiv d(h-1) \pmod{2}, \\ (0, 0) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

系 2. $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_h$ の輪郭 $\gamma(f)$ が写像度 d の最小輪郭であれば, $\gamma(f)$ 上の 2 重点の数は偶数個である.

定理 2 も定理 1 の証明と同様に命題 2 から $c+n$ を評価する不等式を作り, それを最小にするような写像を実際に作成することで証明される.

曲面の曲面像についての研究はここで紹介したものの他に、既約な輪郭だけでなく l 成分の輪郭についての研究が [2] や [22] にある. また, 境界を持つ曲面から平面への滑らかな写像で境界の十分近くでははめ込みになっているようなものの最小輪郭については [24] 等がある. このとき, 命題 1 に対応する公式は, [5] や [10] がある.

3. 4 次元多様体

ここでは, 4 次元多様体のトポロジーを調べる方法として, 3 次元多様体への安定写像のファイバーを用いるものを紹介する.

滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ と点 $q \in N$ を考える. 写像芽 $f: (M, f^{-1}(q)) \rightarrow (N, q)$ を $q \in N$ 上のファイバーと呼ぶ. 点 $q \in N$ が f の正則値であるとき, q 上のファイバーを正則ファイバー, そうでないとき, 特異ファイバーと呼ぶ.

滑らかな写像 $f_i: M_i \rightarrow N_i$ と点 $q_i \in N, (i = 0, 1)$ を考える. このとき, q_i 上のファイバーが C^∞ 同値 であるとは, $q_i \in N_i$ の近傍 U_i と微分同相 $\Phi: ((f_0)^{-1}(U_0), (f_0)^{-1}(q_0)) \rightarrow ((f_1)^{-1}(U_1), (f_1)^{-1}(q_1)), \varphi: (U_0, q_0) \rightarrow (U_1, q_1)$ で以下を可換にするものが存在するときである:

$$\begin{array}{ccc} ((f_0)^{-1}(U_0), (f_0)^{-1}(q_0)) & \xrightarrow{\Phi} & ((f_1)^{-1}(U_1), (f_1)^{-1}(q_1)) \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ (U_0, q_0) & \xrightarrow{\varphi} & (U_1, q_1). \end{array}$$

4 次元閉多様体から 3 次元多様体への安定写像 $f: M \rightarrow N$ を考える. このとき, f が安定写像であるとは次を満たす時である:

(1) $p \in S(f)$ に対して, (f, p) は次のどちらかと右左同値:

$$(a, b, x, y) \mapsto \begin{cases} (a, b, x^2 \pm y^2) & : p \text{ は折れ目特異点,} \\ (a, b, x^3 + ax - y^2) & : p \text{ はカスプ特異点,} \\ (a, b, x^4 + ax^2 + bx \pm y^2) & : p \text{ はツバメの尾特異点.} \end{cases}$$

(2) $q \in f(S(f))$ に対して, $(f|_{S(f)}, f^{-1}(q))$ は図 4 のどれかと右左同値:

4 次元閉多様体から 3 次元多様体への安定写像の特異ファイバーが [21] において分類されていて, さらに次の定理が得られていた:

定理 3. [21] 4 次元閉多様体から 3 次元多様体への安定写像 $f: M \rightarrow N$ に対して $H_1(N; \mathbb{Z}_2) = 0$ または $f_*[S(f)] = 0 \in H_2(N; \mathbb{Z}_2)$ であれば, f が持つ $\widetilde{\text{III}}^{2,2,2}$, $\widetilde{\text{III}}^{2,7}$, $\widetilde{\text{III}}^{12}$, $\widetilde{\text{III}}_e^{13}$, $\widetilde{\text{III}}_B^{13}$, $\widetilde{\text{III}}^{25}$, $\widetilde{\text{III}}^{26}$ 型の特異ファイバーの総和と M のオイラー数とは偶奇を等しくする. ファイバーの形は図 5 を参照.

定理 3 で数える特異ファイバーは安定写像に対して離散的に存在する.

定理 4. [15] 4 次元閉多様体 M が向き付けられているとき安定写像 $f: M \rightarrow N$ の III^8 型ファイバーに符号をつけることができ, その符号和は M の符号数に一致する. ここで, III^8 型ファイバーとは図 5 の $\widetilde{\text{III}}^{12}$ である.

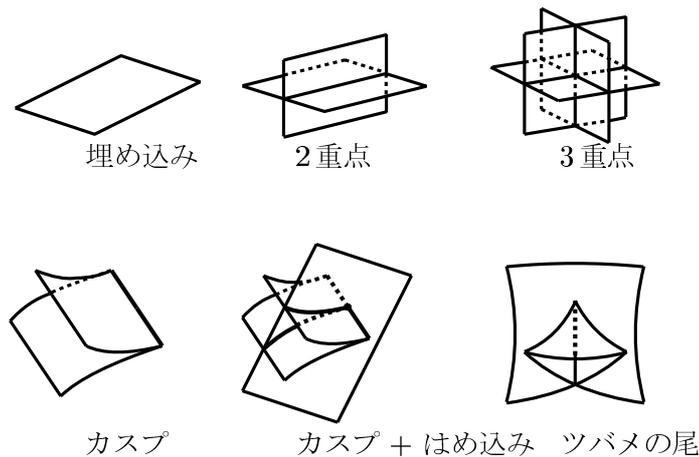


図 4:

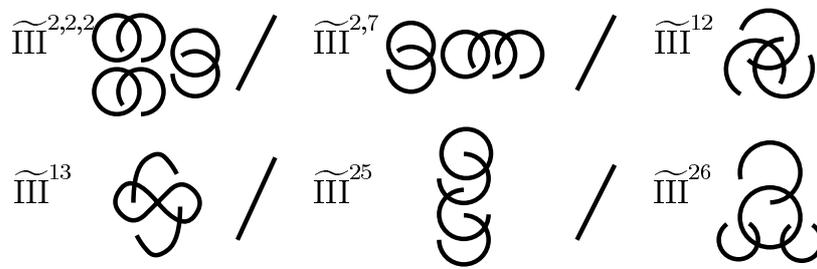


図 5:

4. 今後の課題

4次元閉多様体 M を固定した時の安定写像 $M \rightarrow \mathbb{R}^3$ をホモトピーで動かした時の § 3 で紹介したような, 2 を法とするオイラー数公式や符号数公式に現れる特異ファイバーの数の最小値を求めることを問題としたい. しかし, 現状ではよく知られている写像の例がとても少ない. 例えば [9], [14] がある. 最近, 北澤氏 [8] が写像に Operation を導入し, 与えられた写像から新たな写像を構成する方法を研究をしている.

さらに, 与えられた写像 $f: M \rightarrow N$ の特異値集合 $f(S(f))$ の一部を変形させたとき, 定義域多様体 M のトポロジーがどう変化するか調べることはとても重要である.

また, 曲面間や 4 次元多様体から \mathbb{R}^3 だけでなく, \mathbb{R}^2 への写像やそれ以外の曲面への写像についても今後研究していきたい.

参考文献

[1] S. Demoto, *Stable maps between 2-spheres with a connected fold curve*. Hiroshima Math. J. 35 (2005), no. 1, 93–113.

- [2] T. Fukuda, T. Yamamoto, *Apparent contours of stable maps into the sphere*, to appear in *Journal of Singularities*.
- [3] T. Fukuda, G. Ishikawa, *On the number of cusps of stable perturbations of a plane-to-plane singularity*, *Tokyo J. Math.* 10 (1987), no. 2, 375–384.
- [4] 西村尚史：特異点とマザー理論，特異点の数理，第2巻『特異点と分岐』，共立出版(2002).
- [5] N. Imai, *Discriminant set of a stable map and the Euler characteristic of a surface with boundary* (in Japanese), Master Thesis, Hiroshima Univ., March 1999.
- [6] 泉屋周一，石川剛郎，応用特異点論，共立出版(1998).
- [7] A. Kamenosono and T. Yamamoto, *The minimal numbers of singularities of stable maps between surfaces*, *Topology Appl.* **156** (2009), pp. 2390-2405
- [8] N. Kitazawa, *Construction of good smooth maps by pasting and cutting*, preprint
- [9] M. Kobayashi, *Two nice stable maps of $\mathbb{C}^2 P$ into \mathbb{R}^3* , *College Ed. Akita Univ. Natur. Sci.* 51 (1997), 5–12.
- [10] H. Levine, *Computing the Euler characteristic of a manifold with boundary*. *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (1995), no. 8, 2563–2567.
- [11] J. N. Mather, *Stability of \mathbb{C}^∞ mapping: VI, the nice dimension*, *Lect. Notes in Math.* 192, Springer, 1971, pp.207–253.
- [12] J. Milnor, J Stasheff, *Characteristic Classes*, *Annals of Mathematics Studies*, No. 76. Princeton University Press, Princeton
- [13] R. Pignoni, *Projections of surfaces with a connected fold curve*, *Topology Appl.* **49** (1993), no. 1, 55–74.
- [14] O. Saeki, *Topology of Singular Fibres of Differentiable Maps*, Springer, *Lect. Notes in Math.* 1854
- [15] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds*, *Geometry and Topology*, Vol. 10(2006), 359–399
- [16] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, *Comment. Math. Helv.* 28 (1954), 17–86.
- [17] H. Whitney, *On regular families of curves*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 47, (1941). 145–147.
- [18] H. Whitney, *On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane*. *Ann. of Math. (2)* **62** (1955), 374–410.
- [19] M. Yamamoto, *The number of singular set components of fold maps between oriented surfaces*, *Houston J. Math.* 35 (2009), no. 4, 1051–1069.
- [20] M. Yamamoto, *Pseudo-immersions of oriented surfaces with one boundary component into the plane*. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 139 (2009), no. 6, 1327–1335.
- [21] T. Yamamoto, *Classification of singular fibres of stable maps of 4-manifolds into 3-manifolds and its applications*, *J. Math. Soc.* Vol. 58, No. 3 (2006), 721–742
- [22] T. Yamamoto, *Apparent contours with minimal number of singularities*, *Kyushu J. Math.* **64**(2010), no. 1, 1–16.
- [23] T. Yamamoto, *Apparent contours of stable maps between closed surfaces with a connected fold curve*, in preparing.
- [24] T. Yamamoto, 境界成分を一つ持つ曲面の平面像, 2011 日本数学会年会, トポロジー分科会アブストラクト.

Displacement energy of unit cotangent bundles

入江 慶 (京都大学)*

1. 序

Displacement energy はシンプレクティック幾何において頻繁に考察される量であり, さまざまなシンプレクティック容量の上からの評価を与える (いわゆる energy-capacity 不等式). 本講演では, リーマン多様体の単位余接束の displacement energy の上からの評価を与えた講演者の結果 ([7]) について紹介したい.

2節では displacement energy の定義を述べ, それが周期ハミルトン系の研究において重要な意味を持つことを説明する. 3節では主結果を述べ, 周期ビリヤード軌道の研究への応用を与える. 4節では主結果の証明の概略を述べる.

以降, 単に「多様体」という場合は, 境界を持たない多様体を指す.

2. Displacement energy

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする. $H \in C^\infty(M)$ について, $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ を $i_{X_H}\omega = -dH$ で定義し, H の定めるハミルトンベクトル場という.

$\mathcal{H}(M) := C_0^\infty([0, 1] \times M)$ とおく. $H \in \mathcal{H}(M)$ と $0 \leq t \leq 1$ について, $H_t \in C^\infty(M)$ を $H_t(x) := H(t, x)$ で定義し, H のホーフアーノルム $\|H\|$ を

$$\|H\| := \int_0^1 \sup H_t - \inf H_t dt$$

で定義する.

$H \in \mathcal{H}(M)$ に対して M 上のフロー $(\varphi_t^H)_{0 \leq t \leq 1}$ を

$$\varphi_0^H = \text{id}_M, \quad \partial_t \varphi_t^H = X_{H_t} \circ \varphi_t^H$$

で定める (supp H はコンパクトなので, フローは $0 \leq t \leq 1$ に対して定義されることに注意せよ). $H \in \mathcal{H}(M)$ が $A \subset M$ を displace するとは, $\varphi_1^H(A) \cap A = \emptyset$ が成り立つことをいう.

定義 2.1. コンパクト集合 $K \subset M$ について, その displacement energy $d_M(K)$ を

$$d_M(K) := \inf\{\|H\| \mid H \text{ は } A \text{ を displace する } \mathcal{H}(M) \text{ の元}\}$$

で定める. 一般の $A \subset M$ については,

$$d_M(A) := \sup\{d_M(K) \mid K \subset A, K \text{ はコンパクト}\}$$

で定める.

キーワード: displacement energy, energy-capacity inequality, unit cotangent bundle, periodic billiard trajectory

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学大学院理学研究科数学教室

e-mail: iriek@math.kyoto-u.ac.jp

次に, displacement energy が周期ハミルトン系の研究にどのように使えるかを説明する. まず, 言葉を準備する.

リュービル領域とは, コンパクト境界付き $2n$ 次元多様体 M と $\lambda \in \Omega^1(M)$ の組 (M, λ) であって次の二つを満たすものである:

- (1): $(M, d\lambda)$ はシンプレクティック多様体.
- (2): $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}|_{\partial M} \in \Omega^{2n-1}(\partial M)$ はいたるところ正 (M は $(d\lambda)^n$ からきまる自然な向きを持つので, ∂M も自然な向きを持つことに注意せよ).

リュービル領域 (M, λ) に対して, リュービルベクトル場 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ を $i_Z(d\lambda) = \lambda$ で定める. 条件 (2) は, Z が ∂M において至るところ外向きであることと同値である. ここで埋め込み $i: \partial M \times (-\infty, 0] \rightarrow M$ を

$$i(x, 0) = x, \quad \partial_t i(x, t) = Z(i(x, t))$$

で定め, 多様体 \hat{M} と $\hat{\lambda} \in \Omega^1(\hat{M})$ を

$$\hat{M} := M \cup_i \partial M \times \mathbb{R},$$

$$\hat{\lambda} := \begin{cases} \lambda & (\text{on } M) \\ e^t \lambda|_{\partial M} & (\text{on } \partial M \times \mathbb{R}) \end{cases}$$

で定める (ただし t は \mathbb{R} 成分の座標). $(\hat{M}, \hat{\lambda})$ を (M, λ) の完備化という. $(\hat{M}, d\hat{\lambda})$ はシンプレクティック多様体になる.

一方, 条件 (2) より, $(\partial M, \lambda)$ は接触多様体になり, ∂M 上のレーブベクトル場 R が $i_R(d\lambda) \equiv 0, \lambda(R) \equiv 1$ で定まる. R の周期軌道全体の集合を $\mathcal{P}(M, \lambda)$ で表し, そのうち M において可縮なもの全体の集合を $\mathcal{P}_0(M, \lambda)$ で表す. $\gamma \in \mathcal{P}(M, \lambda)$ に対して, その作用 $\mathcal{A}(\gamma)$ を $\mathcal{A}(\gamma) := \int_{\gamma} \lambda$ で定める. さらに, (M, λ) が次の条件 (3) を満たすとき, Conley-Zehnder 指数 $\text{ind}_{\text{CZ}}: \mathcal{P}_0(M, \lambda) \rightarrow \mathbb{Z}$ が定義される.

- (3): $d\lambda$ と整合的な M 上の概複素構造 J について, $c^1(TM, J)|_{\pi_2(M)} = 0$.

以上の状況で, 次が成り立つ:

定理 2.2. (M, λ) を $2n$ 次元リュービル領域とし, $d_{(\hat{M}, d\hat{\lambda})}(M) < \infty$ とする. このとき, $\gamma \in \mathcal{P}_0(M, \lambda)$ で $\mathcal{A}(\gamma) \leq d_{\hat{M}}(M)$ を満たすものが存在する. さらに (M, λ) が (3) を満たすときは, $\text{ind}_{\text{CZ}}(\gamma) \leq n + 1$ をも満たすものが存在する.

定理 2.2 の証明には, フレア・ホーファー容量というシンプレクティック容量の一種 (C_{FH} と書く) を用いる. (フレア・ホーファー容量の定義については [4] を見られたい). 定理 2.2 は, フレア・ホーファー容量が満たす次の二つの性質から直ちに導かれる:

- リュービル領域 (M, λ) について $C_{\text{FH}}(M, \lambda) \leq d_{\hat{M}}(M)$ が成り立つ.

- リュービル領域 (M, λ) が $C_{\text{FH}}(M, \lambda) < \infty$ を満たすとき, $\gamma \in \mathcal{P}_0(M, \lambda)$ で $\mathcal{A}(\gamma) = C_{\text{FH}}(M, \lambda)$ を満たすものが存在する. さらに (M, λ) が (3) を満たすときは, $\text{ind}_{\text{CZ}}(\gamma) \leq n + 1$ をも満たすものが存在する.

前半の主張はいわゆる energy-capacity 不等式であり, この形の主張は Hermann により [4] で証明されているが, 基本的には Hofer ([5]) によるものである. 後半はフレア・ホーファー容量の定義から容易に導くことができるものであるが, 詳細な証明については [6] の 3 節を見られたい.

3. 主結果と応用

3.1. 余接束上のシンプレクティック形式

まず, 任意の多様体 M について, その余接束の全空間 T^*M の上に標準的なシンプレクティック形式 ω_M が定まることを説明する. 後で計算をするので, 座標を用いた定義を与えておく.

(q_1, \dots, q_n) を M の局所座標とし, T^*M の局所標構 dq_1, \dots, dq_n に伴うファイバー上の座標を p_1, \dots, p_n とする. このとき,

$$\omega_M := dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$$

と定義する. 定義が局所座標の取り方によらないことは容易に確認できる. $H \in C^\infty(T^*M)$ のハミルトンベクトル場 X_H は

$$X_H = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

で与えられる.

3.2. 主結果

M を n 次元リーマン多様体とする. その単位余接束 $DT^*M := \{(q, p) \in T^*M \mid |p| < 1\}$ を考え, $d_{T^*M}(DT^*M)$ を $d(M)$ と略記する. M が閉多様体の場合は, T^*M の 0-切断は $\mathcal{H}(T^*M)$ のどの元によっても displace されないという古典的な結果 ([9]) から, 明らかに $d(M) = \infty$ である. 一方,

$$r(M) := \sup_{\substack{x \in M \\ K \subset M: \text{コンパクト}}} \text{dist}_M(x, M \setminus K)$$

とおくと, 次の定理が成り立つ. これが [7] の主結果である:

定理 3.1. n にのみ依存するある定数 C_n が存在して, 任意の n 次元リーマン多様体 M について $d(M) \leq C_n r(M)$ が成立する.

注意 3.2. 以降, 上の主張を「任意の n 次元リーマン多様体 M について $d(M) \leq \text{const}_n r(M)$ が成立する」と略して書く.

注意 3.3. M が閉多様体の場合は $r(M) = \infty$ となるので, 上の定理は自明である.

定理 3.1 の証明の概略は 4 節で説明するが, その前に, この定理が周期ビリヤード軌道の研究に応用できることを次の小節で説明したい.

3.3. 応用：短い周期ビリヤード軌道

まず，周期ビリヤード軌道の定義を説明する．

定義 3.4. M を境界つきリーマン多様体とする．連続写像 $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ が M 上の周期ビリヤード軌道であるとは，有限集合 $B_\gamma \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が存在して次を満たすことをいう：

- $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus B_\gamma$ において γ は C^∞ 級で， $\ddot{\gamma} \equiv 0$ を満たす．
- 任意の $t \in B_\gamma$ について $\gamma(t) \in \partial M$ が成り立ち， $\dot{\gamma}_\pm(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \dot{\gamma}(t \pm h)$ は

$$\dot{\gamma}_+(t) + \dot{\gamma}_-(t) \in T_{\gamma(t)}(\partial M), \quad \dot{\gamma}_-(t) - \dot{\gamma}_+(t) \in (T_{\gamma(t)}(\partial M))^\perp \setminus \{0\}$$

を満たす．

注意 3.5. 上の定義によれば， M 上の閉測地線 γ も M 上の周期ビリヤード軌道である．その場合， B_γ は空集合となる．

このとき，次が成り立つ．

定理 3.6. M をコンパクトかつ連結で，空でない境界を持つ n 次元リーマン多様体とする．このとき， $d(\text{int } M) < \infty$ である．また， M 上の周期ビリヤード軌道 γ であって，長さが $d(\text{int } M)$ 以下であり， $|B_\gamma| \leq n + 1$ を満たすものが存在する．

前半の主張は定理 3.1 からただちに従う．後半の主張の証明の概略を述べる．

第一段: $\text{int } M$ 上で定義された正値 C^∞ 級関数 U で， ∂M の近傍において $U(q) = (\text{dist}_M(q, \partial M))^{-2}$ を満たすものをとる． $h > 0$ について， $D_h \subset T^*M$ を

$$D_h := \{(q, p) \in T^*M \mid hU(q) + |p|^2/2 \leq 1/2\}$$

で定める． $h > 0$ が十分小さいときは， D_h は T^*M の部分多様体になる．また， U が正値関数なので $D_h \subset DT^*(\text{int } M)$ だから， $d_{T^*(\text{int } M)}(D_h) \leq d(\text{int } M)$ が成り立つ．

第二段: さて， $\lambda_h \in \Omega^1(T^*M)$ であって次を満たすものが存在することが証明できる：

- $d\lambda_h = \omega_M$.
- (D_h, λ) はリュービル領域．
- 埋め込み $i : T^*M \rightarrow \hat{D}_h$ であって， $i^*(\hat{\lambda}) = \lambda$ かつ $i|_{D_h}$ が包含写像 $D_h \rightarrow \hat{D}_h$ と一致するものが存在する．

すると第一段の議論より， $d_{\hat{D}_h}(D_h) \leq d_{T^*(\text{int } M)}(D_h) \leq d(\text{int } M)$ が成り立つ．ゆえに定理 2.2 より， $\mathcal{P}_0(D_h, \lambda_h)$ の元 $\gamma_h : \mathbb{R}/T_h\mathbb{Z} \rightarrow \partial D_h$ であって $\mathcal{A}(\gamma_h) \leq d(\text{int } M)$ ， $\text{ind}_{\text{CZ}}(\gamma_h) \leq n + 1$ を満たすものが存在する．

第三段: γ_h に対応する方程式 $\ddot{x} + \nabla hU(x) = 0$ の周期解を $x_h : \mathbb{R}/T_h\mathbb{Z} \rightarrow M$ とおくと,

$$hU(x_h) + \frac{|\dot{x}_h|^2}{2} \equiv \frac{1}{2}, \quad \int_{\mathbb{R}/T_h\mathbb{Z}} |\dot{x}_h(t)|^2 dt \leq d(\text{int } M)$$

が成り立つことが確かめられる. また, ルジャンドル変換において Conley-Zehnder 指数と Morse 指数が対応することから ([3], [8] 参照), $\text{ind}_{\text{Morse}}(x_h) = \text{ind}_{\text{CZ}}(x_h) \leq n+1$ が分かる. ここで $h \rightarrow 0$ とすると, $(x_h)_{h>0}$ のある部分列が, 条件を満たすピリヤード軌道に $L^{1,2}$ -収束する.

定理 3.6 の証明で最も難しいのは, 第三段の議論を厳密にすることであり, それは [1], [2] で行われている. なお, energy-capacity 不等式を用いて周期ピリヤード軌道の存在証明を行うのは C.Viterbo の [11] に始まると思われる.

定理 3.6 と定理 3.1 から, 次が従う:

系 3.7. M をコンパクトで連結な境界つき n 次元リーマン多様体とする. このとき, M 上の周期ピリヤード軌道 γ であって, 長さが $\text{const}_n r(\text{int } M)$ 以下であり, さらに $|B_\gamma| \leq n+1$ を満たすものが存在する.

この系 3.7 から, C.Viterbo が [11] で証明した次の結果はただちに導かれる.

命題 3.8 (C.Viterbo). Ω を \mathbb{R}^n 内の滑らかな境界を持つ有界領域とする. このとき, $\text{const}_n \text{vol}(\Omega)^{1/n}$ 以下の長さを持つ, $\bar{\Omega}$ 上の周期ピリヤード軌道が存在する.

証明. 容易に分かるように, $r(\Omega)$ は Ω に含まれる円盤の半径の上限に等しく, したがって $\omega_n := \text{vol}(B^n(1))$ とおけば $r(\Omega) \leq (\omega_n^{-1} \text{vol}(\Omega))^{1/n}$ である. これと系 3.7 からただちに証明が終わる. \square

4. 主結果の証明

定理 3.1 の証明を, いくつかのステップに分けて説明したい.

4.1. リーマン多様体の幅

まず, リーマン多様体に対して, 「幅」という概念を定義する. M をリーマン多様体とする. $h \in C_0^\infty(M)$ について, $\|h\| := \sup h - \inf h$ と定め, コンパクト集合 $K \subset M$ について

$$w_M(K) := \inf \{ \|h\| \mid K \text{ 上で } |dh| \geq 1 \}$$

とおく. そして, M の幅 $w(M)$ を

$$w(M) := \sup_{K \subset M: \text{コンパクト}} w_M(K)$$

で定義する. M が閉多様体ならば $w(M) = \infty$ である. また, M が开区間 (a, b) に標準的な計量を入れたものならば, $w(M) = |b - a|$ となる. 簡単に分かる w の性質を, 補題としてまとめておこう:

補題 4.1. (1): M をリーマン多様体, U を M の開集合とすると, $w(U) \leq w(M)$.

(2): M, M' をリーマン多様体とし, $f: M \rightarrow M'$ を微分同相写像とする. M 上の任意の接ベクトル ξ について $|df(\xi)|_{M'} \leq c|\xi|_M$ が成り立つとき, $w(M') \leq cw(M)$ が成り立つ.

次の命題が, 定理3.1の証明の最初の鍵となる:

命題 4.2. 任意のリーマン多様体 M について, $d(M) \leq 2w(M)$ が成り立つ.

証明. $w(M) < \infty$ としてよい. 任意のコンパクト集合 $K \subset DT^*M$ について, $d_{T^*M}(K) \leq 2w(M)$ が成り立つことを示せばよい. 自然な射影 $T^*M \rightarrow M$ を π_M と書く. $w(M)$ の定義より, 任意の $\delta > 0$ について, $h \in C_0^\infty(M)$ であって $\pi_M(K)$ 上で $|dh| \geq 1$ を満たし, $\|h\| \leq w(M) + \delta$ なるものが存在する. そこで $\bar{h} \in C^\infty(T^*M)$ を $\bar{h} := h \circ \pi_M$ で定め, $X_{\bar{h}}$ を計算する. (q_1, \dots, q_n) を M 上の局所座標, (p_1, \dots, p_n) を dq_1, \dots, dq_n ともなうファイバー上の座標とすると

$$X_{\bar{h}} = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial \bar{h}}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

となる. $\pi_M(K)$ 上で $|dh| \geq 1$ であり, $K \subset DT^*M$ であるから, $\varphi_2^{\bar{h}}(K) \cap K = \emptyset$ が成り立つ. ここで \bar{h} の台はコンパクトではないが, $\bigcup_{0 \leq t \leq 2} \varphi_t^{\bar{h}}(K)$ はコンパクトであるから, $\rho \in C_0^\infty(T^*M)$ であって $0 \leq \rho \leq 1$ を満たすものをうまくとり, $H \in \mathcal{H}(T^*M)$ を $H_t = 2\rho\bar{h}$ ($0 \leq t \leq 1$) で定めれば, $\|H\| \leq 2\|h\|$ かつ H が K を displace するようにできる.

以上から $d_{T^*M}(K) \leq 2\|h\| \leq 2(w(M) + \delta)$ であることが分かる. ここで δ は任意の正数であるから, $d_{T^*M}(K) \leq 2w(M)$ が示された. \square

命題4.2より, 定理3.1の証明は次に帰着される:

命題 4.3. 任意の n 次元リーマン多様体 M について, $w(M) \leq \text{const}_n r(M)$ が成り立つ.

簡単な考察により, 命題4.3の証明は次の定理に帰着される:

定理 4.4. 任意の連結な n 次元閉リーマン多様体 N と $x \in N$ について, $w(N \setminus \{x\}) \leq \text{const}_n \text{diam}(N)$ が成り立つ.

以降の小節で, 定理4.4の証明を簡単に説明したい.

4.2. リーマン多様体の単体分割

まず, 記号の導入をかねて用語の復習をする. 単体複体 X とは, 集合 $V(X)$ と $\Sigma(X) \subset \{V(X) \text{ の有限部分集合} \} \setminus \{\emptyset\}$ の組 $(V(X), \Sigma(X))$ であって

- 任意の $v \in V(X)$ について $\{v\} \in \Sigma(X)$,
- $\sigma \in \Sigma(X), \tau \subset \sigma, \tau \neq \emptyset \implies \tau \in \Sigma(X)$

を満たすものである. $\Sigma_k(X) := \{\sigma \in \Sigma \mid \#\sigma = k + 1\}$ とおく. $V(X), \Sigma(X)$ はしばしば V, Σ と略記される.

各 $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\} \in \Sigma$ に対して, $|\sigma| \subset \bigoplus_{v \in V} \mathbb{R}[v]$ を

$$|\sigma| := \left\{ \sum_i t_i v_i \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum_i t_i = 1 \right\}$$

で定め, $|X| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} |\sigma|$ とおく. 各 $v \in V$ と $1 \cdot v \in |X|$ を同一視して $V \subset |X|$ とみなす. 以上の用語の準備のもとで, 単体分割の定義を与えよう:

定義 4.5. 多様体 N の C^l 級単体分割とは, 単体複体 X と同相写像 $F: |X| \rightarrow N$ の組であって, 任意の $\sigma \in \Sigma$ について $F|_{|\sigma|}: |\sigma| \rightarrow N$ が C^l 級のはめ込みになっているものをいう.

注意 4.6. この定義は [10] に従った. [10] の定義 (Definition 8.3) は上の定義より少し強いが, 上の定義との同値性が Theorem 8.4 で示されている.

定理 4.4 の証明の最初のステップは, 任意の閉リーマン多様体が「良い」単体分割を持つことを主張する, 次の命題である:

命題 4.7. N を n 次元の閉リーマン多様体, $x \in N$ とする. 十分小さい $\varepsilon > 0$ について, N の C^∞ 級単体分割 (X, F) であって, 次の満たすものが存在する:

(1): 任意の $\sigma \in \Sigma_k$ ($k \geq 1$) について

$$c_0 \varepsilon \leq \frac{|dF|_{|\sigma|}(\xi)|_N}{|\xi|} \leq c_1 \varepsilon \quad (\forall \xi \in T|\sigma|, \xi \neq 0)$$

が成り立つ. ここで, c_0, c_1 は n のみに依存する定数であり, $|\xi|$ は $\bigoplus_{v \in V} \mathbb{R}[v]$ の標準的な計量により定義されている.

(2): 任意の $\sigma \in \Sigma_1$ について, $F|_{|\sigma|}: |\sigma| \rightarrow N$ は測地線.

(3): $x \in F(V)$.

命題 4.7 は, 「閉 C^∞ 級多様体は C^∞ 級単体分割を持つ」という古典的な結果 ([10] 参照) を, 定量的な条件を付加して拡張したものといえる. [7] では, この命題をドロネー単体分割という手法を用いて証明している.

さて, ε, X, F を命題 4.7 を満たすようにとると, 次の成り立つ:

命題 4.8. $w(N \setminus F(V)) \leq \text{const}_n \varepsilon$.

命題 4.9. $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき, $N \setminus F(V)$ の開部分集合 U および微分同相写像 $\varphi: U \rightarrow N \setminus \{x\}$ であって

$$|d\varphi(\xi)|/|\xi| \leq \text{const}_n \text{diam}(N)\varepsilon^{-1} \quad (\forall \xi \in TU, \xi \neq 0)$$

を満たすものが存在する.

これら二つの命題の証明は続く二つの小節で簡単に説明するが、まず定理4.4がこれらの命題から得られることを説明する。\$U\$と\$\varphi\$を命題4.9のようにとると、補題4.1(2)より

$$w(N \setminus \{x\}) \leq \text{const}_n \text{diam}(N) \varepsilon^{-1} w(U)$$

が分かる。次に、補題4.1(1)と命題4.8より

$$w(U) \leq w(N \setminus F(V)) \leq \text{const}_n \varepsilon$$

が分かる。したがって

$$w(N \setminus \{x\}) \leq \text{const}_n \text{diam}(N)$$

を得る。

4.3. 命題4.8の証明

命題4.8を示すには、任意のコンパクト集合\$K \subset N \setminus F(V)\$について、\$h \in C^\infty(N)\$であって

$$\|h\| \leq \text{const}_n \varepsilon, \quad |dh(x)| \geq \text{const}_n \quad (\forall x \in K) \quad (\star)$$

を満たすものが存在することを示せばよい。

各\$v \in V\$について、\$N(v) := \{w \in V \mid \{v, w\} \in \Sigma_1\}\$とおく。ここで、命題4.7の条件(1)から、\$X\$が次の性質を満たすことが比較的容易に分かる：

任意の\$v \in V\$について、\$|N(v)| \leq c_2\$。ここで、\$c_2\$は\$n\$だけで決まる正整数である。

これより、写像\$f : V \to \{0, 1, \dots, c_2\}\$であって、\$X\$の任意の単体\$\sigma := \{v_0, \dots, v_k\}\$について\$f(v_0), \dots, f(v_k)\$が全て異なるようなものが存在すると分かる。つぎに、\$X\$の各単体\$\sigma := \{v_0, \dots, v_k\}\$に対して

$$\bar{f}|_{|\sigma|}(t_0 v_0 + \dots + t_k v_k) := t_0 h(v_0) + \dots + t_k h(v_k)$$

とおくことで、\$f\$を\$|X|\$上の連続関数\$\bar{f}\$に拡張する。任意の\$\sigma \in \Sigma_k\$ (\$k \geq 1\$)について\$|\sigma|\$の直径は高々\$\sqrt{2}\$なので、\$|d\bar{f}(x)| \geq 1/\sqrt{2}\$ (\$\forall x \in |\sigma|\$)が成り立つ。

次に、\$N\$上の連続関数\$\bar{f} \circ F^{-1}\$を平滑化する。コンパクトな台を持つ\$C^\infty\$級関数\$\rho : [0, \infty) \to [0, \infty)\$で

- 0の近傍で\$\rho\$は定数関数,
- \$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x|) dx_1 \cdots dx_n = 1\$

を満たすものを取り、十分小さい\$\delta > 0\$に対して\$f_\delta \in C^\infty(N)\$を

$$f_\delta(x) := \int_{T_x N} \bar{f} \circ F^{-1}(\exp_x(\xi)) \cdot \frac{\rho(|\xi|/\delta)}{\delta^n} d\text{vol}_x(\xi)$$

で定義する (\$d\text{vol}_x\$はリーマン計量から決まる\$T_x N\$上の体積形式)。すると、次の二つが成り立つことが分かる：

- $0 \leq f_\delta \leq c_2$.
- 任意のコンパクト集合 $K \subset N \setminus F(V)$ について, $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \inf_{x \in K} |df_\delta(x)| \geq \text{const}_n \varepsilon^{-1}$.

したがって, $h := \varepsilon f_\delta$ とおけば, 十分小さい δ について h は (\star) を満たす.

4.4. 命題 4.9 の証明

まず, 次の補題は初等的な考察により簡単に示すことができる.

補題 4.10. (X, F) を命題 4.7 の条件を満たす単体分割とし, N は連結とする. このとき, X の部分複体 T であって, 次を満たすものが存在する:

- T は単連結な 1 次元単体複体 (すなわち, T は木).
- $V(T) = V(X)$.
- N のリーマン計量を g_N と書くとき, $\text{diam}(|T|, F^*g_N) \leq \text{const}_n \text{diam}(N)$.

T を, 補題 4.10 の条件を満たすようにとる. 次に, N における $F(|T|)$ のコンパクト近傍 \tilde{T} をうまくとり, $U := N \setminus \tilde{T}$ とおく. さらに $\varphi: U \rightarrow N \setminus \{x\}$ を条件を満たすように構成するのだが, この構成は煩雑であり, ここで述べることはできない. 詳しくは [7] の 5 節を参照されたい.

参考文献

- [1] P. Albers, M. Mazzucchelli, Periodic bounce orbits of prescribed energy, *Int. Math. Res. Notices*, doi: 10.1093/imrn/rnq193 (2010).
- [2] V. Benci, F. Giannoni, Periodic bounce trajectories with a low number of bounce points, *Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire.* **6**, no.1, 73–93 (1989).
- [3] J. Duistermaat, On the Morse index in variational calculus, *Adv. in Math.* **21**, 173–195 (1976).
- [4] D. Hermann, Holomorphic curves and Hamiltonian systems in an open set with restricted contact-type boundary, *Duke Math.* **103**, no.2, 335–374 (2000).
- [5] H. Hofer, On the topological properties of symplectic maps, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **115**, 25–38 (1990).
- [6] K. Irie, Symplectic capacity and short periodic billiard trajectory, arxiv:1010.3170.
- [7] K. Irie, Displacement energy of unit cotangent bundles, arxiv:1106.2199.
- [8] Y. Long, Index theory for symplectic paths with applications, *Progr. Math.* **207**, Birkhäuser (2002).
- [9] F. Laudenbach, J. C. Sikorav, Persistence d’intersection avec la section nulle dans une fibré cotangent, *Invent. Math.* **82**, 349–357 (1985).
- [10] J. Munkres, Elementary differential topology, *Annals of Mathematical Studies.* **54**, Princeton University Press (1966).
- [11] C. Viterbo, Metric and isoperimetric problems in symplectic geometry, *J. Amer. Math. Soc.* **13**, no.2, 411–431 (2000).

Topological toric manifolds

石田 裕昭 (大阪市立大学 D2, 日本学術振興会特別研究員 DC)

1. はじめに

本講演は, 福川由貴子氏, 柘田幹也氏 (ともに阪市大) との共同研究 ([7]) に基づく. Toric manifold と呼ばれる群作用付きの代数多様体をトポロジーの観点から一般化したもの (topological toric manifold) を定義し, その族を考察する.

トーリック幾何は, 1970 年頃に Demazure, Miyake-Oda, Mumford らによって始められた. トーリック幾何によって, 具体的な代数多様体 (toric variety) を数多く構成することができ, また, 組合せ論, 特に凸多面体の幾何とのたくさんの関係が発見された. このことの背景として, toric variety と fan と呼ばれる組合せ論の対象が一一に対応するという “トーリック幾何の基本定理” がよく知られている.

$$\boxed{\text{toric varieties}} \xleftrightarrow{1-1} \boxed{\text{fans}}$$

Toric variety のうち, 非特異かつコンパクトなもの (toric manifold と呼ぶ) は特に興味深く, よく研究されている. Toric manifold に対応する fan は, nonsingular かつ complete という性質で特徴付けられ, トーリック幾何の基本定理から, toric manifold のすべての幾何的性質やトポロジーは, 対応する nonsingular complete fan から読み取ることができるはずである. 実際, toric manifold のコホモロジー環, 全チャーン類, 符号などの種数などを, 対応する nonsingular complete fan の言葉で記述することができる.

本講演では, topological toric manifolds という toric manifolds の族を真に含む可微分多様体の族を導入する (定義 3.1). また, それに伴って, nonsingular complete fan の代わりに nonsingular complete topological fan も導入する (定義 5.4). 本講演の主定理の一つとして, (omnioriented) topological toric manifolds の族と, nonsingular complete topological fans が一一に対応するということを解説する (定理 5.5).

$$\boxed{\text{omniori. top. toric mfd}} \xleftrightarrow{1-1} \boxed{\text{nonsing. comp. top. fans}}$$

また, この分野の先行研究との関連についても触れる. これまでに, toric manifold の概念から派生した概念として, quasitoric manifold, torus manifold が研究されている. 本講演の主定理の二つ目として, これらとの関係を明らかにする (定理 6.4).

2. Toric variety と toric manifold

定義 2.1 ([4],[11] など). 複素 n 次元 *toric variety* X とは, 正規代数多様体 X であって, 代数トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ のザリスキ開集合としての X への埋め込みが存在して, かつ $(\mathbb{C}^*)^n$ の群演算が X への作用に拡張するものをいう.

Toric variety のうち, 非特異かつ完備, すなわちコンパクトな複素多様体になるようなものを *toric manifold* と呼ぶことにする. 複素 n 次元の toric manifold X には, 代数トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用があるが, Sumihiro の定理 ([12, Corollary 2]) によってこれは次のように理解される.

命題 2.2. 複素 n 次元の toric manifold X に対して, 次のような正則座標近傍系 $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n\}_\alpha$ が存在する: 各 α に対して,

- U_α は $(\mathbb{C}^*)^n$ -stable である. つまり, $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用で閉じている.
- φ_α を通して, $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用は $(\mathbb{C}^*)^n$ の複素 n 次元の代数的な忠実表現である.

ここで, $(\mathbb{C}^*)^n$ の k 次元表現 $\rho : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ が代数的であるとは, ρ が (複素多様体の間の写像として) 正則, あるいは同値なことであるが, ρ の各成分が多項式関数になっていることを言う. $\rho : (\mathbb{C}^*)^n$ の代数的な表現は完全可約であり, 任意の既約表現の指標はローラン単項式で与えられる.

例 2.3. 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$. $\mathbb{C}P^n$ への $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用を次で定める: $\mathbb{C}P^n$ の点を斉次座標を用いて表すことにし, $[z] = [z_0, z_1, \dots, z_n] \in \mathbb{C}P^n$ と $g = (g_1, \dots, g_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ に対して,

$$(g_1, \dots, g_n) \cdot [z_0, z_1, \dots, z_n] := [z_0, g_1 z_1, \dots, g_n z_n].$$

このとき, スタンダードな座標近傍系 $\{\varphi_i : \{[z] \mid z_i \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}^n\}_{i=0, \dots, n}$ は, 命題 2.2 を満足している. 実際,

$$\varphi_i([z_0, z_1, \dots, z_n]) := \left(\frac{z_0}{z_i}, \frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

であるから,

$$\varphi_i(g \cdot [z]) := \left(g_i^{-1} \frac{z_0}{z_i}, g_1 g_i^{-1} \frac{z_1}{z_i}, \dots, g_{i-1} g_i^{-1} \frac{z_{i-1}}{z_i}, g_{i+1} g_i^{-1} \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, g_n g_i^{-1} \frac{z_n}{z_i} \right)$$

となつて, $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用は局所的には代数的な表現のように見える.

例 2.4. 一点 blow-up $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$. 代数多様体

$$\widetilde{\mathbb{C}^2} := \{((u_1, u_2), [v_1, v_2]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 \mid u_1 v_2 = u_2 v_1\}$$

から \mathbb{C}^2 への射影は, 原点および原点のファイバーを除いて双正則写像である. 例 2.3 を $n = 2$ に特殊化して, 点 $[1, 0, 0]$ を除いたもの $\mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\}$ を考える. 局所座標 $\varphi_0 : \{[z] \mid z_0 \neq 0, (z_1, z_2) \neq (0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ と $\psi(u_1, u_2) := ((u_1, u_2), [u_1, u_2])$

で定義される中への双正則写像 $\psi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \widetilde{\mathbb{C}^2}$ の合成 $\psi \circ \varphi_0$ によって貼り合わせて得られる代数多様体

$$X := \mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\} \cup_{\psi \circ \varphi_0} \widetilde{\mathbb{C}^2}$$

は、連結和 $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ と微分同相である。今、 $[1, 0, 0] \in \mathbb{C}P^2$ は $(\mathbb{C}^*)^2$ -作用の不動点であったから、 $\mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\}$ は $(\mathbb{C}^*)^2$ -作用を持ち、この作用は X 全体に局所的に代数的な忠実表現となるように拡張することが確かめられる。具体的に、 $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ の局所座標系

$$\varphi'_1 : \{((u_1, u_1), [v_1, v_2]) \in \widetilde{\mathbb{C}^2} \mid v_1 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad ((u_1, u_2), [v_1, v_2]) \mapsto \left(u_1, \frac{v_2}{v_1}\right)$$

および

$$\varphi'_2 : \{((u_1, u_1), [v_1, v_2]) \in \widetilde{\mathbb{C}^2} \mid v_2 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad ((u_1, u_2), [v_1, v_2]) \mapsto \left(u_2, \frac{v_1}{v_2}\right)$$

を介して、 $g = (g_1, g_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$ に対し

$$\varphi'_1 \circ g \circ \varphi'^{-1}_1 \left(u_1, \frac{v_2}{v_1}\right) = \left(g_1 u_1, g_1^{-1} g_2 \frac{v_2}{v_1}\right),$$

$$\varphi'_2 \circ g \circ \varphi'^{-1}_2 \left(u_2, \frac{v_1}{v_2}\right) = \left(g_2 u_2, g_1 g_2^{-1} \frac{v_1}{v_2}\right)$$

となる。

一般に、toric manifold の $(\mathbb{C}^*)^n$ -stable な部分多様体に沿って blow-up したものはまた toric manifold になる。

命題 2.2 は逆も正しい事を注意しておく。つまり、連結な $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用付き実 $2n$ 次元閉多様体 M であって、命題 2.2 を満たすような座標近傍系 $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n\}_\alpha$ が存在するならば、自然に代数多様体の構造を持ち、toric manifold となる。実際、すべての変換関数がローラン単項式になる。

3. Topological toric manifold

Toric manifold は、命題 2.2 から局所的に代数的な表現空間となる閉多様体として特徴付けられる。このことに着目して、topological toric manifold を次のように定義する：

定義 3.1. $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用付き実 $2n$ 次元連結閉多様体 X が *topological toric manifold* であるとは、ある座標近傍系 $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n\}_\alpha$ であって、

- U_α は $(\mathbb{C}^*)^n$ -stable である。つまり、 $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用で閉じている。
- φ_α を通して、 $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用は $(\mathbb{C}^*)^n$ の複素 n 次元（あるいは、実 $2n$ 次元）の滑らかな忠実表現である。

を満たすものが存在するときを言う。

定義から直ちに topological toric manifold のなす族は toric manifold のなす族を含むことがわかる。次の例は, toric manifold の構造を持たない topological toric manifold である。

例 3.2. 連結和 $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$. まず, $X := \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ は概複素構造をもたないことを注意しておく。もし概複素構造を持つならば, X のチャーン数 c_1^2 はオイラー標数 χ , 符号 σ を用いて

$$c_1^2 = 2\chi + 3\sigma = 14$$

となるが, このような2次の整係数コホモロジー類は存在しない。特に, M は toric manifold の構造を持たない。しかしながら, topological toric manifold の構造を持つ。例 2.4 において, $\mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\}$ と $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ を $\psi \circ \varphi_0$ で貼り合わせることによって $\mathbb{C}P^2 \# \widetilde{\mathbb{C}P^2}$ を構成した。 $f: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ を $f(u_1, u_2) := (u_1, \overline{u_2})$ と定めると, f は向きを裏返す微分同相写像であり。従って $\mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\}$ と $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ を $\psi \circ f \circ \varphi_0$ によって貼り合わせるによって得られる多様体

$$\mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\} \cup_{\psi \circ f \circ \varphi_0} \widetilde{\mathbb{C}^2}$$

は, $X = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ に他ならない。例 2.4 と同様にして, $\mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\}$ への $(\mathbb{C}^*)^2$ -作用が X への作用に局所的に $(\mathbb{C}^*)^2$ の滑らかな忠実表現となるように拡張することが確かめられる。貼り合わせ写像 $\psi \circ f \circ \varphi_0$ に注意して, $g = (g_1, g_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi'_1 \circ g \circ \varphi_1'^{-1} \left(u_1, \frac{v_2}{v_1} \right) &= \left(g_1 u_1, g_1^{-1} \overline{g_2} \frac{v_2}{v_1} \right), \\ \varphi'_2 \circ g \circ \varphi_2'^{-1} \left(u_2, \frac{v_1}{v_2} \right) &= \left(\overline{g_2} u_2, g_1 \overline{g_2}^{-1} \frac{v_1}{v_2} \right) \end{aligned}$$

となる。

一般に, topological toric manifold に対して, $(\mathbb{C}^*)^n$ -stable な部分多様体に沿ってある種の手術 ($\mathbb{C}P^n$ を連結和など) を施したのも topological toric manifold の構造を持つ。このことから, topological toric manifold のトポロジーは, toric manifold よりも多様性に富んでいることがわかる。

4. $(\mathbb{C}^*)^n$ の表現

$(\mathbb{C}^*)^n$ の任意の代数的な表現は完全可約である。残念ながら, 滑らかな表現はしばしば完全可約でない。しかし, 適当な仮定の下では良い性質を持つ。

命題 4.1. $\rho: (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ を滑らかな実 $2n$ 次元忠実表現とする。このとき,

- \mathbb{R}^{2n} の適当な複素構造によって, ρ は複素 n 次元表現とみなせる。
- ρ は完全可約である。特に $(\mathbb{C}^*)^n$ は可換群であるから複素 1 次元表現の直和とみなせる。

従って, $(\mathbb{C}^*)^n$ の滑らかな実 $2n$ 次元忠実表現を考察するには, \mathbb{C}^* の滑らかな複素 1 次元表現を調べるのが重要になる. 任意の滑らかな複素 1 次元表現 $\rho: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ は, $p \in \mathbb{C}, q \in \mathbb{Z}$ を用いて次のように一意的に書ける:

$$\rho(g) = |g|^p \left(\frac{g}{|g|} \right)^q = e^{p \log |g|} \left(\frac{g}{|g|} \right)^q.$$

この複素 1 次元表現 ρ が代数的である必要十分条件は, $p = q$ となることである. 代数的, 滑らかな複素 1 次元表現全体 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg.}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*), \mathrm{Hom}_{\mathrm{smooth}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ はそれぞれ群として $\mathbb{Z}, \mathbb{C} \times \mathbb{Z}$ と同型であるが, この同型の下で $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg.}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ は対角線集合として $\mathrm{Hom}_{\mathrm{smooth}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ に含まれている.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg.}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{smooth}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \\ \cong & & \cong \\ \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{Z} \\ \cup & & \cup \\ q & \mapsto & (q, q) \end{array}$$

5. Topological fan

複素 n 次元の toric variety は, n 次元の fan と呼ばれる組み合わせ論の対象と一対一に対応することがよく知られている. 特に toric manifold と対応するような fan は, nonsingular, complete という fan の性質で特徴付けられる. Toric manifold の場合と同様に, topological toric manifold に対しても, ある組み合わせ論の対象と対応付けることができる.

実 $2n$ 次元 topological toric manifold X はコンパクトかつ作用が局所的に忠実表現であるので, X の $(\mathbb{C}^*)^n$ -orbit の個数は有限個で, 各 orbit の次元は偶数次元である. 特に $(\mathbb{C}^*)^n$ -stable な余次元 2 の連結な部分多様体 X_1, \dots, X_m は有限個で, これらを *characteristic submanifolds* と呼ぶことにする. Topological toric manifold を調べるにあたって, characteristic submanifolds が重要な役割を果たす.

まず, characteristic submanifolds がどのように交わっているかを見る. そのために, 次の abstract simplicial complex Σ を考える:

$$\Sigma := \{I \in [m] \mid \bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset\}.$$

次に, 各 characteristic submanifold X_i が, X の中で $(\mathbb{C}^*)^n$ によってどのように固定されているかを見る.

補題 5.1. G_i を X_i の各点を固定する $(\mathbb{C}^*)^n$ の部分群で, 最大のものとする. このとき, X_i の法束 ν_i の向きに対して, G_i が ν_i の各ファイバーに \mathbb{C} -線形に作用するような ν_i の複素構造が一意的に存在する.

注意 5.2. Toric manifold は複素多様体であり, その characteristic submanifold (toric divisor と呼ばれる) は正則部分多様体になる. とくに法束には自然な複素構造が入る.

滑らかな複素1次元表現全体 $\text{Hom}_{\text{smooth}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ は群として $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}$ と同型であった。従って $\text{Hom}_{\text{smooth}}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n)$ は $(\mathbb{C} \times \mathbb{Z})^n$ と同型になる。 X_i の法束 ν_i の向きに対して、 $\beta(i) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{Z})^n$ を、

$$(\lambda_{\beta(i)}(g))_*(\xi) = g\xi, \quad \forall g \in \mathbb{C}^*, \forall \xi \in \nu_i$$

で定める。ここで、 $\lambda_{\beta(i)} : \mathbb{C}^* \rightarrow G_i \subset (\mathbb{C}^*)^n$ は $\beta(i)$ に対応する準同型、左辺は微分、右辺は補題5.1の複素構造で定義される。この $\beta(i)$ は ν_i の向きに対して一意的に定まる。 Topological toric manifold X に対して、その characteristic submanifolds の法束の向きを *omniorientation* と呼ぶ。 Omnioriented topological toric manifold X に対して、今構成した組 $\Delta(X) = (\Sigma, \beta)$ を対応させる写像を、 Δ と書くことにする。

例 5.3. 例 3.2 の $X = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2 = \mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\} \cup_{\psi \circ f \circ \varphi_0} \widetilde{\mathbb{C}^2}$ は次の4つの characteristic submanifolds を持つ:

$$\begin{aligned} X_1 &:= \overline{\{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\} \mid z_0 = 0\}}, \\ X_2 &:= \overline{\{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\} \mid z_1 = 0\}}, \\ X_3 &:= \overline{\{((u_1, u_2), [v_1, v_2]) \in \widetilde{\mathbb{C}^2} \mid u_1 = u_2 = 0\}}, \\ X_4 &:= \overline{\{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^2 \setminus \{[1, 0, 0]\} \mid z_2 = 0\}}. \end{aligned}$$

ここで、閉包は X の中でとる。このとき Σ は4点からなる simplicial complex

$$\Sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$$

となり、 $\beta : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{Z}^2 \cong (\mathbb{C} \times \mathbb{Z})^2$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned} \beta(1) &= (-e_1 - e_2, \pm(e_1 + e_2)), & \beta(2) &= (e_1, \pm e_1), \\ \beta(3) &= (e_1 + e_2, \pm(e_1 - e_2)), & \beta(4) &= (e_2, \pm e_2). \end{aligned}$$

ただし、“ \pm ”は、各 X_i の法束 ν_i の向きに依存して決まる。下の図1は、各 i に対して $\beta(i) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{Z}^2$ の複素数部分の実部への射影を b_i 、整数部分への射影を v_i として、 Σ に含まれるような単体に関して錐を考えたものである。ここで、 v_i の符号は適当に選んだ。

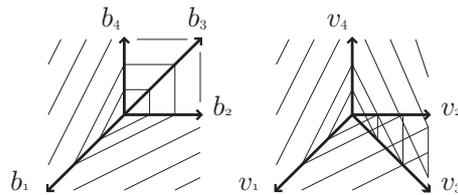


図 1: vectors b_i and v_i

定義 5.4. Σ を $[m] := \{1, \dots, m\}$ 上の abstract simplicial complex とする. $\beta : [m] \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{Z})^n$ が,

1. $\beta(i) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{Z})^n$ の複素数部分の実部への射影を $b_i \in \mathbb{R}^n$ と書くことにする. 各 $I \in \Sigma$ に対し, $\angle b_I$ で $b_i, i \in I$ の正結合全体を表すことにする.
 - $\{b_i\}_{i \in I}$ は \mathbb{R} 上一時独立である. つまり, $\angle b_I$ は \mathbb{R}^n の $|I|$ 次元の錐である.
 - 任意の $I, J \in \Sigma$ に対して, $\angle b_I \cap \angle b_J = \angle b_{I \cap J}$ が成り立つ (つまり, fan をなす).
 - $\bigcup_{I \in \Sigma} \angle b_I = \mathbb{R}^n$ (fan の意味で complete).
2. $\beta(i)$ の整数部分を, $v_i \in \mathbb{Z}^n$ と書くことにする. 各 $I \in \Sigma$ に対し, $\{v_i\}_{i \in I}$ は \mathbb{Z}^n の \mathbb{Z} -基底の一部である (fan の意味で nonsingular).

これらを満たすとき, 組 $\Delta = (\Sigma, \beta)$ を *nonsingular complete topological fan* と呼ぶ.

定義から直ちに, Σ の幾何学的実現 $|\Sigma|$ は $(n-1)$ 次元球面と同相になる. また, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{Z}, q \mapsto (q, q)$ を通して, トーリック幾何における nonsingular complete fan は nonsingular complete topological fan の特別な場合と見なせる.

定理 5.5. Omnioriented topological toric manifold X に対して, $\Delta(X) = (\Sigma, \beta)$ は nonsingular complete topological fan になる. さらにこの対応 Δ は (同型類を除いて) 一対一で, 次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{toric mfd.}\} & \xrightarrow{\Delta} & \{\text{nonsing. comp. fans}\} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \{\text{top. toric mfd.}\} & \xrightarrow{\Delta} & \{\text{nonsing. comp. top. fans}\}. \end{array}$$

任意の nonsingular complete topological fan (Σ, β) に対して, $\Delta(X) = (\Sigma, \beta)$ を満たすような omnioriented topological toric manifold X を具体的に構成することができる. $J \subset [m]$ に対して, coordinate subspace $L_J \subset \mathbb{C}^m$ を,

$$L_J := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_j = 0, j \in J\}$$

で定義する. すべての $J \notin \Sigma$ となる L_J の合併の補空間

$$U(\Sigma) := \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{J \notin \Sigma} L_J$$

を, $\prod_{j=1}^m \lambda_{\beta(j)} : (\mathbb{C}^*)^m \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ の kernel で割ったもの

$$U(\Sigma) / \ker \prod_{j=1}^m \lambda_{\beta(j)}$$

が, $\Delta(X) = (\Sigma, \beta)$ を満たす topological toric manifold X になる.

6. Torus manifold としての位置付け

$(S^1)^n$ の効果的な作用付きの向き付け可能な $2n$ 次元閉多様体であって、不動点を持つものは、*torus manifold* と呼ばれる ([5], [9]). $2n$ 次元 topological toric manifold X の $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用を $(S^1)^n$ -作用に制限したものは、torus manifold になる. また、torus manifold のなす族は topological toric manifold のなす族と比べて非常に大きい. Torus manifold に対しても、*multi-fan* と呼ばれる組み合わせ論の対象が対応付けられるが、残念ながらその対応は一対一にならない.

$(S^1)^n$ の $2n$ 次元閉多様体 M への作用が局所的に忠実表現であるとき、その作用は *locally standard* と呼ばれ、軌道空間 $M/(S^1)^n$ は角付き多様体になる. 複素 n 次元 toric manifold X への $(S^1)^n$ -作用は locally standard で、従って $X/(S^1)^n$ は角付き多様体になるが、特に X が射影的である場合、 $X/(S^1)^n$ が単純凸多面体になることが知られている. この観点から、Davis-Januskiewicz は次を定義した:

定義 6.1 ([3]). $(S^1)^n$ -作用付き $2n$ 次元閉多様体 M が

- $(S^1)^n$ -作用が locally standard である,
- 軌道空間 $M/(S^1)^n$ が単純凸多面体である

とき、 M を *quasitoric manifold* という.

Topological toric manifold への制限された $(S^1)^n$ -作用は locally standard であるが、必ずしも軌道空間は単純凸多面体とは限らない. しかしながら、単純凸多面体と似た性質を持っている.

命題 6.2. $2n$ 次元 Topological toric manifold X の軌道空間 $X/(S^1)^n$ について、

- 各 face および $X/(S^1)^n$ 自身は可縮になる.
- $\partial(X/(S^1)^n)$ は、 Σ の逆 poset と同型になる. 特に、任意の 2 つの faces の交わりは連結である. ここで、 Σ は X に対応する topological fan $\Delta(X) = (\Sigma, \beta)$ で定義される simplicial complex Σ .

命題 6.2 と、Masuda-Panov の結果 ([10]) を用いると、topological toric manifold のコホモロジー環を、対応する topological fan から計算することができる.

定理 6.3. $\Delta(X) = (\Sigma, \beta)$ を topological toric manifold X に対応する topological fan, $v_i \in \mathbb{Z}^n, i = 1, \dots, m$ を $\beta(i) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{Z})^n$ の整数部分とする. そのとき、整係数コホモロジー環 $H^*(X; \mathbb{Z})$ は次で与えられる:

$$H^*(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m] / \mathcal{I} + \mathcal{J},$$

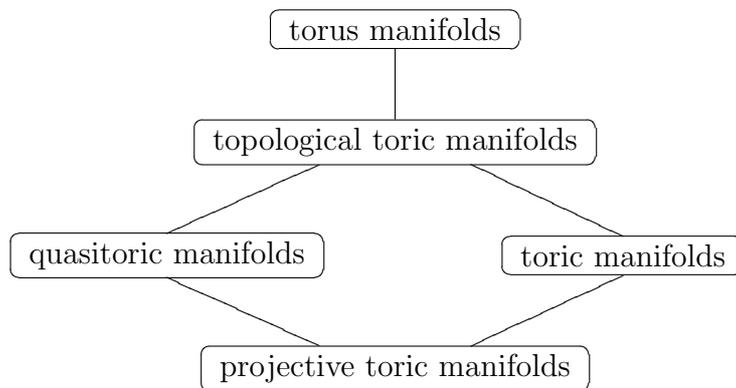
ここで、各変数 x_i の次数は 2 で、 \mathcal{I}, \mathcal{J} はそれぞれ

- すべての $I \notin \Sigma$ に対し、 $\prod_{i \in I} x_i$ で生成されるイデアル \mathcal{I} ,
- すべての $u \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ に対し、 $\sum_{i=1}^m \langle u, v_i \rangle x_i$ で生成されるイデアル \mathcal{J} .

定理 6.3 において, $\beta : [m] \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{Z})^n$ の複素数部分は表示に表れない. 実際, $2n$ 次元 topological toric manifold の $(S^1)^n$ -同変同相類は, simplicial complex Σ と β の整数部分だけで完全に決まる.

Topological toric manifold と quasitoric manifold の概念は toric manifold を元に, それぞれ別の方向性から定義されたものであるが, 次のような関係がある:

定理 6.4. Topological toric manifold のなす族は, quasitoric manifold のなす族を真に含む. ここで, $(S^1)^n$ -同変同相なものは同じものとみなす. つまり, 任意の quasitoric manifold の $(S^1)^n$ -作用は, $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用に局所的に忠実な表現となるように拡張する.



7. Real topological toric manifolds

$(\mathbb{C}^*)^n$ の代わりに, $(\mathbb{R}^*)^n$ の作用が局所的に忠実表現となるような実 n 次元 $(\mathbb{R}^*)^n$ -manifold も考えることができる.

定義 7.1. $(\mathbb{R}^*)^n$ -作用付き実 n 次元連結閉多様体 X が *real topological toric manifold* であるとは, ある座標近傍系 $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\}_\alpha$ であって,

- U_α は $(\mathbb{R}^*)^n$ -stable である. つまり, $(\mathbb{R}^*)^n$ -作用で閉じている.
- φ_α を通して, $(\mathbb{R}^*)^n$ -作用は $(\mathbb{R}^*)^n$ の実 n 次元の滑らかな忠実表現である.

を満たすものが存在することを言う.

Real topological toric manifolds のトポロジーは, topological toric manifolds のトポロジーよりもある意味で複雑である. Topological toric manifolds の基本群は自明であるのに対し, real topological toric manifolds の基本群は非自明であり, 向き付け不可能なものもある. また, しばしば aspherical manifold になる.

例 7.2. 種数が 0 でない任意の閉曲面 M は, 局所的に忠実表現になるような $(\mathbb{R}^*)^2$ の作用を持つ. 特に, M は real topological toric manifold の構造を持つ.

Topological toric manifolds と同様に, real topological toric manifold にも組合せ的对象, *real topological fan* を少しの修正の後に対応付けることができる.

n 次元 Real topological toric manifold X に対しては, 余次元 1 の $(\mathbb{R}^*)^n$ -stable な部分多様体を characteristic submanifold とよび, それらの交わりの情報である simplicial complex Σ , 各 characteristic submanifold を固定する部分群の情報 $\bar{\beta}: [m] \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の組 $(\Sigma, \bar{\beta})$ を対応させる.

定義 7.3. Σ を $[m] := \{1, \dots, m\}$ 上の abstract simplicial complex とする. $\bar{\beta}: [m] \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ が,

1. $\bar{\beta}(i) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})^n$ の実部への射影を $b_i \in \mathbb{R}^n$ と書くことにする. 各 $I \in \Sigma$ に対し, $\angle b_I$ で $b_i, i \in I$ の正結合全体を表すことにする.
 - $\{b_i\}_{i \in I}$ は \mathbb{R} 上一時独立である. つまり, $\angle b_I$ は \mathbb{R}^n の $|I|$ 次元の錐である.
 - 任意の $I, J \in \Sigma$ に対して, $\angle b_I \cap \angle b_J = \angle b_{I \cap J}$ が成り立つ (つまり, fan をなす).
 - $\bigcup_{I \in \Sigma} \angle b_I = \mathbb{R}^n$ (fan の意味で complete).
2. $\bar{\beta}(i)$ の $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ -部分を, $v_i \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と書くことにする. 各 $I \in \Sigma$ に対し, $\{v_i\}_{i \in I}$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上一時独立である.

これらを満たすとき, 組 $\Delta = (\Sigma, \bar{\beta})$ を *nonsingular complete real topological fan* と呼ぶ.

Topological toric manifolds の場合と同様に, real topological toric manifolds の同変微分同相類と, nonsingular complete real topological fan の同型類との間に一対一対応が付く.

Quasitoric manifold の定義において, $(S^1)^n$ の代わりに $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の作用を考えた n 次元多様体を *small cover* と呼ぶ ([3]). 定理 6.4 と同様に, n 次元 small covers のなす $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ -manifolds の族は, n 次元 real topological toric manifolds のなす族に真に含まれる事が言える.

8. 今後の問題と課題

$2n$ 次元 topological toric manifolds の $(S^1)^n$ -同変同相類, あるいは $(\mathbb{C}^*)^n$ -同変微分同相類の分類は, 対応する topological fan から直ちに読み取れる. しかしながら, 2つの topological toric manifolds がいつ (微分) 同相であるかを判定することは難しい. 不思議なことに, 整係数コホモロジー環が同型であって, 微分同相でないような topological toric manifolds はいまだ知られていない. 従って, コホモロジー環が topological toric manifold の完全不変量になるかどうかの問題である. この問題については, 4次元の場合およびいくつかの特別な toric manifolds については正しいことがわかっている ([2, Section 2]) が, 一般の場合についてはほとんど何もわかっていない.

Topological toric manifolds の中で, toric manifolds は次のように特徴付けられる:

定理 8.1 (Theorem 1.2, [6]). $2n$ 次元 topological toric manifold X 上に $(\mathbb{C}^*)^n$ -不変な概複素構造 J が存在するならば, J は可積分で, X はある toric manifold と同型になる.

定理 8.1 は $(S^1)^n$ -不変な概複素構造については成り立たない. Kustarev は $2n$ 次元 quasitoric manifold に対して $(S^1)^n$ -不変な概複素構造が存在する必要十分条件を与えており ([8]), この結果は容易に topological toric manifold にも拡張できる. しかし, 任意の topological toric manifold は具体的な局所座標近傍系を容易に取ることができるが, $(S^1)^n$ -不変な概複素構造をその局所座標系を使って具体的に記述することは易しくない.

これは講演者の希望であるが, topological toric manifold 上の具体的な $(S^1)^n$ -不変な微分幾何構造で, 興味深い幾何ができることを期待している.

参考文献

- [1] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture series, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.
- [2] S. Choi, D. Y. Suh and M. Masuda, *Rigidity problems in toric topology, a survey*, preprint, arXiv:mathAT/11021356.
- [3] M. W. Davis and T. Januskiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 62 (1991), 417–451.
- [4] W. Fulton, *An Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. 113, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.
- [5] A. Hattori and M. Masuda, *Theory of multi-fans*, Osaka J. Math. 40 (2003), 1–68.
- [6] H. Ishida, *Invariant stably complex structures on topological toric manifolds*, preprint, mathDG:11024673.
- [7] H. Ishida, Y. Fukukawa and M. Masuda, *Topological toric manifolds*, preprint, arXiv:math.AT/10121786.
- [8] A. Kustarev, *Equivariant almost complex structures on quasitoric manifolds*, Russian Math. Surveys 64 (2009), no. 1, 156–158.
- [9] M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*, Tohoku Math. J. 51 (1999), 237–265.
- [10] M. Masuda and T. Panov, *On the cohomology of torus manifolds*, Osaka J. Math. 43 (2006), 711–746.
- [11] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [12] H. Sumihiro, *Equivariant completion*, J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 1–28.

レンズ空間におけるデーン手術実現問題について

丹下基生 (京都大学 数理解析研究所)

概要

デーン手術によってレンズ空間を得る結び目の Alexander 多項式の詳細を求める方法を解説し、最終的に、レンズ空間手術実現問題の解決のための方針について解説する。

1 デーン手術

1.1 デーン手術実現問題

Σ を任意の 3 次元多様体とし、 Σ 内の結び目 $K \subset \Sigma$ に対するデーン手術とは、 K の管状近傍 $\nu(K)$ の補空間 $E(K) = \Sigma - \nu(K)$ にソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ を写像 $\phi: \partial(D^2 \times S^1) \rightarrow \partial E(K)$ によって境界同士貼り合わせる操作をいう。このような状況を $\Sigma \xrightarrow{(K, \phi)} M$ と書き、 Σ から M への道と捉える。また、できた多様体 (Σ 上の K に沿った ϕ -手術) を $\Sigma(K, \phi)$ と書く。 $\Sigma(K, \phi)$ の同相類は $\phi(\partial D^2 \times \text{pt})$ の isotopy 類によってのみ決まる。従って Σ をホモロジー球面とすると、 $\partial E(K)$ 上に K の meridian と longitude が一意に決められるので $\partial E(K)$ 上の単純閉曲線の一意的な表示 $p[\text{meridian}] + q[\text{longitude}]$ が得られる。この場合 ϕ を $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ と考える。この有理数のことを **slope** ともいう。レンズ空間の定義は自明結び目 U の有理数手術として $L(p, q) = S^3(U, p/q)$ と書かれる。古典的に次の定理が知られている。

定理 1.1 (Lickorish[14], Wallace[28]). 任意の有向閉 3 次元多様体 M には、下のようなデーン手術の列が存在する。

$$S^3 \xrightarrow{(K_1, \phi_1)} \Sigma_1 \xrightarrow{(K_2, \phi_2)} \Sigma_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{(K_n, \phi_n)} M$$

つまり、この定理は任意の 3 次元多様体全体はこのような道に沿って連結であることを主張している。従って、次のような問題が自然に生まれる。

問題 1.1. (1) $S^3 \xrightarrow{(K, \phi)} M$ を満たす M はどのような集合か？

(2) 一般に、 $\Sigma \xrightarrow{(K, \phi)} M$ となる M の集合は何か？

(3) 道 $\Sigma \xrightarrow{(K, \phi)} M$ が存在するための M と Σ の条件は何か？

(4) (3) が成立したときに $\Sigma \xrightarrow{(K, \phi)} M$ を満たす (K, ϕ) を全て求めよ。

この講演の題名のデーン手術実現問題とは (3) のことをいう。またはそのような条件を M と Σ の間のデーン手術判定条件といえる。(4) は (3) より困難であることを注意しておく。この講演では M を任意のレンズ空間、 Σ をホモロジー球面としたときのデーン手術判定条件を考察することである。(4) に関してよく知られている解答は次である。

定理 1.2 (Gordon-Luecke[9], Kronheimer-Mrowka-Ozsváth-Szabó[12], Gabai[7], Ghiggini[8], Baker[1]). $T_{2,n}$ を $(2, n)$ -torus 結び目とする。このとき、 $r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}$ として次が成り立つ。

(1) $S^3 \xrightarrow{(K, r)} S^3$ を満たす K は U のみである。

(2) $S^3 \xrightarrow{(K, r)} L(p, 1)$ を満たす K は U のみである。

(3) $S^3 \xrightarrow{(K, r)} S^2 \times S^1$ を満たす K は U のみである。

(4) $S^3 \xrightarrow{(K, r)} \Sigma(2, 3, 5)$ を満たす K は $T_{2,3}$ のみである。

(5) $S^3 \xrightarrow{(K, 4n+3)} L(4n+3, 4)$ を満たす K は $T_{2,n}$ のみである。

1.2 レンズ空間手術

S^3 上のレンズ空間手術に関するこれまでの結果をサーストンによる結び目の分類（トーラス結び目、サテライト結び目、双曲結び目）に沿ってまとめておく。

定理 1.3 (Moser[16]). $T_{r,s}$ の $\frac{p}{q}$ -手術で得られるレンズ空間は $L(p, qr^2)$ であり、 $\frac{p}{q} = rs \pm \frac{1}{q}$ である。その他の有理数手術はレンズ空間の連結和か *small Seifert* 多様体である。

定理 1.4 (Bleiler-Litherland[4], Wu[29]). サテライト結び目に沿って得られるレンズ空間は、 $T_{r,s}$ の 2 -cable 結び目だけであり、そのレンズ空間は $L(4rs \pm 1, 4r^2)$ である。

S^3 上の結び目のデーモン手術の分類は双曲結び目が問題であり次が示すように整数手術のみを考えればよい。

定理 1.5 (Culler-Gordon-Luecke-Shalen[5]). 双曲結び目に沿って得られるレンズ空間は整数手術のみである。さらにそのような手術は高々 2 個だけであり、 2 個ある場合はその *slope* は連続する。

一般にホモロジー球面 Σ に対して $\Sigma(K, p) = L(p, q)$ であるとき、 \tilde{K} を $\Sigma(K, p)$ の dual 結び目 (手術のコア circle) として、 c を $L(p, q)$ の種数 1 の Heegaard 分解のコアの 1 つとすると

$$[\tilde{K}] = k[c] \in H_1(L(p, q), \mathbb{Z})$$

となる $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が存在する。また、レンズ空間の linking form を計算することによって、 $k^2 = q (p)$ がわかる。この対 (p, k) をレンズ空間手術のパラメータと呼ぶことにする。ただ、Heegaard 分解のコアの取り方と向きづけによって $k \leftrightarrow k^{-1}(p)$ と $k \leftrightarrow -k(p)$ なる曖昧さがある。また、 (p, k) は互いに素であることもわかる。

Berge は任意のパラメータ (p, k) に対してある手術 $\Sigma^{(K,p)} L(p, q)$ を構成した。

定義 1.1 (Doubly primitive[2]). Σ を Heegaard 種数が 2 のホモロジー球面とする。このとき、 $\Sigma = U_0 \cup_{\Sigma_2} U_1$ を種数 2 の Heegaard 分解とする。このとき、 K が *doubly primitive* であるとは、(i) $K \subset \Sigma_2$ であること、(ii) $[K] \in \pi_1(U_i)$ $i = 0, 1$ が *primitive* であることとして定義する。ただし $[K]$ が *primitive* とは、ある rank が 2 の自由群への群同型 $\pi_1 U_i \cong F_2 = \langle x, y \rangle$ を通して、 $[K]$ が x, y のどちらかであることをいう。

定理 1.6 ([2]). 任意の互いに素な整数の組み (p, k) に対してそれをレンズ空間手術パラメータにもつ *doubly primitive* 結び目 (Σ, K) がただひとつ存在する。逆に、任意の *doubly primitive* 結び目 (Σ, K) に対してある整数 p が存在して、 $\Sigma(K, p) = L(p, q)$ ($k^2 = q (p)$) が満たされる。

Berge はさらに次の予想を立てた。それを一般に **Berge** 予想と呼ぶ。

予想 1.1 ([2]). S^3 の $\Sigma^{(K,p)} L(p, q)$ ならば K はある *doubly primitive* 結び目である。

さらに Berge は S^3 上の *doubly primitive* 結び目を以下のリストとして書きだした。

リスト 1.1 ([2]). 以下の (p, k) は S^3 上の *doubly primitive* 結び目のパラメータである。

type	condition	type	condition
(I,II)	$p = ik \pm 1 (k^2); \gcd(i, k) = 1$ or 2	(VII)	$k^2 \pm k \pm 1 = 0 (p)$
(III)	$p = \begin{cases} \pm(2k-1)d (k^2); \frac{k+1}{d} \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ \pm(2k+1)d (k^2); \frac{k-1}{d} \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$	(VIII)	$k^2 \pm k \pm 1 = 0 (p)$
(IV)	$p = \begin{cases} \pm(k-1)d (k^2); \frac{2k+1}{d} \in \mathbb{Z} \\ \pm(k+1)d (k^2); \frac{2k-1}{d} \in \mathbb{Z} \end{cases}$	(IX)	$\begin{cases} p = 22j^2 + 9j + 1 \\ k = 11j + 2 \end{cases} (j \in \mathbb{Z})$
(V)	$p = \begin{cases} \pm(k+1)d (k^2); \frac{k+1}{d} \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ \pm(k-1)d (k^2); \frac{k-1}{d} \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$	(X)	$\begin{cases} p = 22j^2 + 13j + 2 \\ k = 11j + 3 \end{cases} (j \in \mathbb{Z})$

Berge の論文にはこのリストが S^3 上の全ての *doubly primitive* 結び目のパラメータどうかの証明はなく、次のような予想が立てられた。

予想 1.2 (Berge[2]). このリストは S^3 上の *doubly primitive* 結び目の完全なリストである。

この予想は次と同値である。

予想 1.3. S^3 と $L(p, q)$ が整数手術の道で結べるための必要十分条件はそのパラメータがリスト 1.1 に属することである。

これらの予想は $\Sigma = S^3$, $M = L(p, q)$ に対するデーモン手術実現問題 (3) (問題 1.1) であるが、この問題は最近解決された。

定理 1.7 (Berge[3], Greene[10]). このリスト 1.1 は S^3 上の *doubly primitive* 結び目の完全なリストである。従って、予想 1.3 は正しい。

ここでは予想 1.3 に対して Greene、Berge らの証明とは全く別の証明を与えたい。しかし予想 1.1 は未だ解決されていない。

1.3 ホモロジー球面上のレンズ空間手術

ホモロジー球面上のレンズ空間手術において問題 1.1 の (3) に対する判定条件がある。

定理 1.8 (Fintushel-Stern[6]). レンズ空間 $L(p, q)$ があるホモロジー球面 Σ からの道 $\Sigma \xrightarrow{(K,p)} L(p, q)$ として得られるための必要十分条件は $q = x^2(p)$ となる整数 x が存在することである。

また、非存在に関しては

定理 1.9 (T.[24]). $\Sigma = \overline{\Sigma(2, 3, 5)}$ とすると、任意の $L(p, q)$ ($p > 0$) に対して $\Sigma \xrightarrow{(K,p)} L(p, q)$ となる道 (K, p) は存在しない。 $\Sigma = \Sigma(2, 3, 5) \# \Sigma(2, 3, 5)$ とすると、任意の整数 p に対して、 $\Sigma \xrightarrow{(K,p)} L(p, q)$ となる道 (K, p) は存在しない。

具体的なホモロジー球面に対する存在定理は次である。

定理 1.10 (T.[21],[23]). Σ をある条件を満たす *Brieskorn* ホモロジー球面、もしくはそれらの *splicing*、*Mazur* 多様体の境界とすれば、*doubly primitive* 結び目による道 $\Sigma \xrightarrow{(K,p)} L(p, q)$ が存在する。

さらに、ポアンカレホモロジー球面 $\Sigma(2, 3, 5)$ に関して次のリストがある。

リスト 1.2 ([21]). 以下の (p, k) は $\Sigma(2, 3, 5)$ 上の *doubly primitive* 結び目のパラメータである。

	p	k	$2g - p - 1$	the eq. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
A ₁	$14J^2 + 7J + 1$	$7J + 2$	$- J $	$2k^2 - k + 1$
A ₂	$20J^2 + 15J + 3$	$5J + 2$	$- J $	$4k^2 - k + 1$
B	$30J^2 + 9J + 1$	$6J + 1$	$- J $	$5k^2 - k + 2$
C ₁	$42J^2 + 23J + 3$	$7J + 2$	$- J $	$6k^2 - k - 1$
C ₂	$42J^2 + 47J + 13$	$7J + 4$	$- J $	$6k^2 - k - 1$
D ₁	$52J^2 + 15J + 1$	$13J + 2$	$- J $	$4k^2 - k - 1$
D ₂	$52J^2 + 63J + 19$	$13J + 8$	$- J $	$4k^2 - k - 1$
E ₁	$54J^2 + 15J + 1$	$27J + 4$	$- J $	$2k^2 - k - 1$
E ₂	$54J^2 + 39J + 7$	$27J + 10$	$- J $	$2k^2 - k - 1$
F ₁	$69J^2 + 17J + 1$	$23J + 3$	$-2 J $	$3k^2 - k - 1$
F ₂	$69J^2 + 29J + 3$	$23J + 5$	$-2 J $	$3k^2 - k - 1$
G ₁	$85J^2 + 19J + 1$	$17J + 2$	$-2 J $	$5k^2 - k - 1$
G ₂	$85J^2 + 49J + 7$	$17J + 5$	$-2 J $	$5k^2 - k - 1$
H ₁	$99J^2 + 35J + 3$	$11J + 2$	$-2 J $	$9k^2 - k - 1$
H ₂	$99J^2 + 53J + 7$	$11J + 3$	$-2 J $	$9k^2 - k - 1$
I ₁	$120J^2 + 16J + 1$	$12J + 1$	$-2 J $	$5k^2 - 2k + 3$
I ₂	$120J^2 + 20J + 1$	$20J + 2$	$-2 J $	$3k^2 - 2k + 2$
I ₃	$120J^2 + 36J + 3$	$12J + 2$	$-2 J $	$5k^2 - 2k + 2$
J	$120J^2 + 104J + 22$	$12J + 5$	$- 2J + 1 $	$5k^2 + 2k - 3$
K	191	15	-2	

他のホモロジー球面上の *doubly primitive* 結び目のリストも同じような 2 次関数的な族と K のような例外的な族で構成されている。

予想 1.4. このリストは $\Sigma(2, 3, 5)$ 上の *doubly primitive* 結び目の完全なリストであり、予想 1.3 と同じ主張が成り立つ。

主結果はこの予想と上記の Berge と Greene の結果を含んだ下の主張であり、現在進行中の部分も含む。

定理 1.11 (主結果 [20] および予想). リスト 1.1(もしくはリスト 1.2) は S^3 (もしくは $\Sigma(2, 3, 5)$) 内の *doubly primitive* 結び目の完全なリストである。つまり、 $L(p, q)$ が S^3 (もしくは $\Sigma(2, 3, 5)$) と整数手術の道で結べるための必要十分条件はそのパラメータがこのリストに属することである。

レンズ空間手術をもつ結び目の Alexander 多項式の係数について詳述することでこの定理を証明する。その章の前に Alexander 多項式についてまとめる。

2 Alexander 多項式とその係数

Alexander 多項式とは結び目のある多項式不変量でありデーモン手術と密接にかかわる。

2.1 Alexander 多項式

$L(p, q)$ がホモロジー球面 (および S^3) からのデーモン手術の道 (K, p) で結べるためのよく知られている必要条件を 2 つ述べる。

定理 2.1 (門上-山田 [11]). Y をホモロジー球面とする。 $Y \xrightarrow{(K, p/q)}$ (*lens type*) が成り立つとすると、 $rsq = \pm 1(p)$ を満たす互いに素な正整数 r, s が存在して

$$\Delta_K(t) \doteq \frac{(t^{rs} - 1)(t - 1)}{(t^r - 1)(t^s - 1)} \pmod{t^p - 1}$$

となる。 *lens type* とはホモロジーレンズ空間であって Reidemeister torsion があるレンズ空間と同じ 3 次元多様体をいう。

定理 2.2 (Ozsváth-Szabó[17]). $S^3 \xrightarrow{(K, p)}$ $L(p, r)$ が成り立つとすると、

$$2g(K) \leq p + 1$$

が成り立ち、ある正整数 m と増加整数列 $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m$ が存在して

$$\Delta_K(t) = (-1)^m + \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} (t^{n_j} + t^{-n_j})$$

が成り立つ。 $g(K)$ は K の Seifert 種数である。

定理 2.1 の右辺は (r, s) トーラス結び目 $T_{r,s}$ の Alexander 多項式であることに注意する。レンズ空間を構成する非自明結び目の最初の例は Moser による torus 結び目であった。この定理から、不変量の立場においてその他の例も torus 結び目に近いことが観察できる。例えば、山田裕一氏は全ての doubly primitive 結び目は L 型の divide 結び目 (直線型が torus 結び目である) であることも証明している ([30] など)。またレンズ空間を作ることができる交代結び目は $T_{2,2n+1}$ のみであることも知られている [17]。

定理 2.2 は S^3 と同型な Heegaard Floer homology をもつ $\Sigma(2, 3, 5)$ に替えても構わない。また、最初の不等式と定理 2.1 を合わせると、 S^3 もしくは $\Sigma(2, 3, 5)$ からレンズ空間を作った場合、ある torus 結び目の Alexander 多項式を $t^p - 1$ で割って得られる余りが (ほぼ) $\Delta_K(t)$ そのものである。そのような余りを最小 **reduction** と呼ぶことにする。また、後半の条件は多項式の係数が $\{0, 1, -1\}$ に含まれ、その non-zero 係数が代数的に振る舞うことを意味するが、その 2 つの条件をそれぞれ、**flat**、**alternate** と言うことにする。

これらの条件は不変量の数値的な条件であるが、次の節で示すようにレンズ空間手術の分類にとっても重要な factor である。ではそれらはどのようなトポロジーの性質の反映なのだろうか？後半でこの制限がもつ Alexander 多項式の non-zero 係数同士のあるつながりについて触れたい。

2.2 係数について

少し道は逸れるが数論で登場する円分多項式との比較を考える。 d 次の円分多項式 $\Phi_d(t)$ とは原始 d 乗根の最小 (既約) 多項式として定義される。 $T_{r,s}$ の Alexander 多項式は円分多項式の積として

$$\Delta_{T_{r,s}}(t) \doteq \Phi_{r_1}(t) \cdots \Phi_{r_n}(t) \tag{1}$$

と書ける。ただし、集合 $\{r_1, \dots, r_n\}$ は rs の 2 以上の約数のうち r と s を除くもの全ての集合である。円分多項式の研究でよく知られていることは次のことである。

定理 2.3 (Migotti[15]), r, s を相異なる奇素数とすると, $\Phi_{rs}(t) = \frac{(t^{rs}-1)(t-1)}{(t^r-1)(t^s-1)}$ は flat かつ alternate な多項式である。 r, s を互いに素な整数として, 多項式 (1) でも同じ性質をもつ。

この定理はレンズ空間手術を用いてトポロジカルに証明できる。しかし円分多項式はいつでも flat とは限らない。

定理 2.4 (誰が最初か不詳.Lehmer[13] など見よ.), $\Phi_{105}(t)$ は non-flat な最初の円分多項式である。 $\Phi_{105}(t)$ の係数に -2 が現われる。さらに $\Phi_{385}(t)$ は係数に -3 が現れる最初の円分多項式である。

105 は $3 \cdot 5 \cdot 7$ と 3 つ以上の奇素数の初めての積であり flat 性を崩す ($385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$)。3 つ奇素数の積 $d = rsu$ がいつでも non-flat とも限らない ($d = 3 \cdot 7 \cdot 31$ がある)。今では任意の整数に対してそれを係数にもつ円分多項式の存在も知られている。

話をトポロジーに戻すと, 任意のパラメータ (p, k) から, ある torus 結び目 $T_{r,s}$ が作られた。 $\Delta_{T_{r,s}}(t)$ の flat 性と alternate 性は定理 2.3 から保証される。その多項式の最小 reduction を $\Delta_{p,k}(t)$ とすると, (p, k) が S^3 (または $\Sigma(2, 3, 5)$) 上のレンズ空間手術のパラメータであったとすれば, $\Delta_{p,k}(t)$ も flat 性と alternate 性を満たさなければならない。当然 最小 reduction と $\Delta_{T_{r,s}}(t)$ が一致する場合 (Moser の場合) はこれは無条件で成立する。しかしそうではない場合でもこの条件をかいくぐって満たす例が存在する。それが例外的レンズ空間手術 (双曲結び目がレンズ空間を作る場合) である。ここで予想を 1 つ挙げておく。

予想 2.1. ある互いに素なパラメータ (p, k) に対して, $\Delta_{p,k}(t)$ が flat かつ alternate であれば (p, k) はある S^3 (もしくは $\Sigma(2, 3, 5)$) のレンズ空間手術のパラメータである。

この予想は多項式の flat 性と alternate 性が S^3 (or $\Sigma(2, 3, 5)$) $\xrightarrow{(K,p)}$ $L(p, q)$ がパラメータ (p, k) をもつ道として存在するための必要十分条件を主張している。この予想は S^3 の場合に Greene 氏によって証明された [10]。筆者は $\Sigma(2, 3, 5)$ 上の手術を込めた別証明を現在進行中である。この講演が成立するまでに完成していることを筆者は深く望んでいる。

3 完全な判定条件に向けて

この章では S^3 もしくは $\Sigma(2, 3, 5)$ 上のレンズ空間手術の実現問題に向けて行われる重要なステップを説明し, 判定条件 (予想 2.1) のためのアウトラインとしたい。大まかに言うと, flat 性と alternate 性で制限されたパラメータ (p, k) がリスト 1.1 もしくは 1.2 に含まれることを証明する。これは Greene 氏の手法と同様である。ここで使われる公式をいくつか導入しておく。

3.1 Alexander 多項式の係数公式

ここで用いられる公式を準備する。パラメータ (p, k) を簡約化して (必要があれば k を $-k$ に入れ替えることで) $0 < k < p/2$ としておく。そのような k を k_1 とおく。次に p で割った余りを負の数も許して絶対値が最小になるようにする 絶対的最小剰余 を採用してその剰余関数を $[\cdot]_p$ とする。このとき, $[k_1^{-1}]_p$ を k_2 とおく。この逆元は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ での乗法の逆元である。ここで, $\text{sgn}(k_2) = e$ とおく。また, $q_i = [-k_i^2]_p$ として定義する。今, 最小 reduction の係数を

$$\Delta_{p,k_1}(t) = \sum_{|i| \leq \frac{p}{2}} a_i t^i$$

と置く。ただし p が偶数のとき $a_{\frac{p}{2}} = a_{-\frac{p}{2}}$ としておく。このとき, \tilde{a}_i を

$$\tilde{a}_i = -m + e \cdot \#\{j \in I_{k_1} \mid [-q_2(j + k_1 i + c)]_p \in I_{k_2}\} \quad (2)$$

と定義しておく。 $|i| \leq \frac{p}{2}$ において a_i は \tilde{a}_i と一致する ([22])。 ($i = \pm \frac{p}{2}$ の場合は $a_i = \frac{1}{2} \tilde{a}_i$ である。) ここで, 記号の定義は

$$I_K = \begin{cases} \{1, 2, \dots, K\} & K > 0 \\ \{0, -1, -2, \dots, K+1\} & K < 0 \end{cases}$$

$m = \frac{k_1 k_2 - 1}{p}$ $c = \frac{(k_1 + 1 + p)(k_1 - 1)}{p}$ である。実はこの係数公式は前述の門上-山田の結果で得られた公式を展開したものである。ここで, $A(i, j) = A(i + j k_1) = \tilde{a}_{-j - k_2(i+c)}$ と定義する。

$$dA(i + j k_1) := A(i + j k_1) - A(i + 1 + j k_1) = A(i, j) - A(i + 1, j)$$

とおく。 $A(x)$ は計算するのは多少困難だが, その差分 $dA(x)$ は以下のようになる。

補題 3.1. 上記のような (p, k_2, q_2) に対して次の等式が成り立つ。

$$dA(x) = E_{k_2}(xq_2 + k_2) - E_{k_2}(xq_2) \quad (3)$$

$E_{k_2}(X)$ の定義は $\begin{cases} e & [X]_p \in I_{k_2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ である。ゆえに $dA(x)$ は (p, k) が (S^3) 上の手術のパラメータでなくても $\{0, 1, -1\}$ -値の関数になる。

ゆえに、絶対的的最小剰余列 $\{[nq_2]_p\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は Alexander 多項式の係数 \tilde{a}_i を決める。 $dA(0) = 1$ であるから、係数の flat 性から $A(0) = \tilde{a}_{-k_2c} = 1$ or 0 が分かる。一方 $\tilde{a}_{-k_2c} = -m + e \cdot \#\{j \in I_{k_2} | [-q_2j]_p \in I_{k_2}\}$ であるからこの式に ep を掛けることで次の系を得る。

系 3.1 ([22]). 係数 \tilde{a}_i が flat であるとき次のどちらかが成り立つ。

$$p \cdot \#\{j \in I_{k_2} | [-q_2j]_p \in I_{k_2}\} - ek_1k_2 = \begin{cases} -e & \text{or} \\ -e(1-p). \end{cases}$$

このような剰余列を考えることはレンズ空間手術の文脈ではよくある。例えば、斎藤氏は [19] で doubly primitive 結び目の dual 結び目の手術でできる S^3 の Heegaard 分解の様子にこの列が登場し、wave 理論を使うことで上の系と同様の式を得た。

これらの条件式はレンズ空間手術における 1 つの制限であるが Alexander 多項式の 1 つの term しか用いておらず制限としては大分弱い。全ての term に flat-alternate 性を用いるとどのような制限になるかという問いがこの研究の動機でもある。最後に次の補題を証明しておく。

補題 3.2. $dA(x) = -1 \Leftrightarrow dA(x + ek_1) = 1$

Proof. $dA(x) = -1 \Leftrightarrow [xq_2 + \frac{1-e}{2}k_2]_p \in I_{k_2} \Leftrightarrow [(x + ek_1)q_2 + k_2 - \frac{1-e}{2}k_2]_p \in I_{k_2} \Leftrightarrow dA(x + ek_1) = 1$ \square

3.2 絶対的的最小剰余列 $\{[nq_2]_p\}$

この節では数列 $\{[nq_2]_p\}$ について考察する。このような剰余列は Gauss が平方剰余の相互法則を証明するための予備として用いた。比較のために書いておく。

定理 3.1 (ガウスの予備定理 [25]). p を奇素数とし、 $(p, a) = 1$ ならば、

$$r = \#\{[na]_p | [na]_p < 0, n = 1, \dots, \lfloor p/2 \rfloor\}$$

とすると Legendre symbol $(\frac{a}{p})$ は $(-1)^r$ に等しい。

まず Hirzebruch-Jung による連分数展開をする。

$$k_2^2 = \tau_0 p - q_2, \quad p = \tau_1 q_2 - q_3, \quad q_i = \tau_i q_{i+1} - q_{i+2} \quad (i \geq 2)$$

ただし、余りは絶対的的最小剰余をとるので $|q_i|/|q_{i+1}| \geq 2$ となる。 $\text{sgn}(q_i) = \epsilon_i, q_{n+1} = \epsilon_{n+1}$ であるとする。対角成分が (τ_1, \dots, τ_j) で副対角成分が全て 1 の行列 (例えば $\begin{pmatrix} \tau_1 & 1 & 0 \\ 1 & \tau_2 & 1 \\ 0 & 1 & \tau_3 \end{pmatrix}$)

のような) の行列式として $n_{i,j}$ を定義する。 $n_{1,i} = n_i$ とおけば

$$n_{i-2}q_2 = q_i(p), \quad \epsilon_{n+1}q_i = n_{i,n}$$

となり、 $|j| < \frac{p}{2}$ を満たす整数 j は次のように一意的に表すことができる。

$$j = j_1 q_2 + \dots + j_n q_{n+1} =: \langle j_1, \dots, j_n \rangle^L$$

ただし $|j_i| \leq \frac{|\tau_i|}{2}$ である。さらに、

$$\langle j_1, \dots, j_n \rangle^R := j_1 + j_2 n_1 + \dots + j_n n_{n-1}$$

とおく。

補題 3.3. $|j_i| < \frac{|\tau_i|}{2}$ とすると、ただちに

$$\langle j_1, \dots, j_n \rangle^R \cdot q_2]_p = j_1 q_2 + \dots + j_n q_{n+1}$$

がわかる。

この補題から連分数を用いることで絶対的的最小剰余を具体的に求めることができた。また、 $\langle \cdot \rangle^L$ を増やすと左の桁から増え、 $\langle \cdot \rangle^R$ を増やすと右の桁から増える。

3.3 flat 性からくる第 2 の alternate 性

次に補題を用意する。前半は明らかだが後半は係数 \tilde{a}_i が flat であるということを実質的に用いている。

補題 3.4. \tilde{a}_i が flat であるとする。上の連分数展開において整数 $2 \leq u < v \leq n + 1$ が存在して次のどちらかが成り立つ。

$$p > |q_2| > \dots > |q_{u-1}| \geq 2|k_2| > |k_2| \geq |q_u| > \dots > |q_v| > \dots > |q_{n+1}|$$

もしくは

$$p > |q_2| > \dots > |q_{u-1}| \geq 2|k_2| > |q_u| \geq |k_2| > |q_{u+1}| > \dots > |q_v| > \dots > |q_{n+1}|$$

ただし、 $|q_v| = ||q_u| - |k_2||$ もしくは $|q_v| = ||q_{u+1}| - |k_2||$ が成り立つ。

この定理は \tilde{a}_i の flat 性から直ちに得られるが、 $A(x)$ におけるある別の "alternate 性" についての主張である。

ここでは連分数展開のデータを使って dA の値から A の値を求める。例として、 $q_u n_{u-2} > 0, |q_u| < |k_2|$ であるとする。このとき、 $dA(x)$ が $x > 0$ で初めて 0 以外の数を取るのは、 $x = |q_u|$ のときであり、 $dA(|q_u|) = -1$ となる。係数の対称性と $dA(0) = 1$ を合わせると $(-|q_u|, 0, |q_u|)$ の $dA(x)$ の値は $(1, 1, -1)$ である。 $A(x)$ の $|x| < |q_u|$ での係数は、差分 dA の値から次のように求まる。

$$(-|q_u|, -|q_u| + 1, \dots, 0, 1, 2 \dots, |q_u|, |q_u| + 1) \xrightarrow{A} (1, 0, \dots, 0, -1, -1, \dots, -1, 0)$$

この値を基準にして、係数全体を全て計算することができる。

3.4 $A(i, j)$ の局所的な振る舞いからその全体像へ

この節では Alexander 多項式の係数の 2 次元的な振る舞いについて観察する。まず、補題 3.2 と flat 性を考えることで $dA(i, j)$ が non-zero の周りでの $A(i, j)$ の値について考察する。

例として $e = 1$ とする。このとき、 $dA(i, j)$ の non-zero 係数の周りが図 1 の上段であるとする。flat 性から $A(i, j)$ の可能性は図 1 の下段の 4 パターンある。そうでなければ $A(i, j)$ の値の振る舞いは隣同士の値を保存する。この数値のパターンから 1 のある部分に正の矢印 \rightarrow を

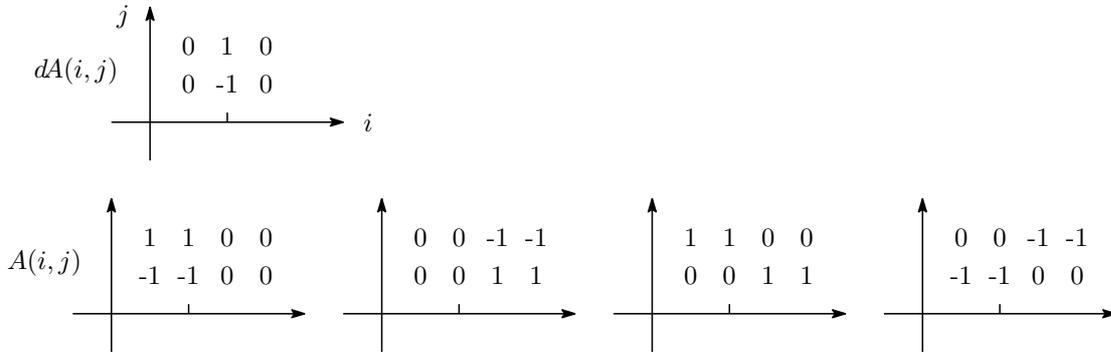


図 1: 4つの可能性

書き入れ、 -1 のある部分には負の矢印 \leftarrow を書き、それらを全体として滑らかにつなぐ。そうすると、図 3 のように (i, j) 平面 \mathbb{R}^2 に境界のない向きづけられた 1 次元部分多様体 (流れ, flow) が得られる。この flow は $A(i, j)$ 上の全ての non-zero 係数の上を通っており、 dA が non-zero の部分で下に落ちながら j が $-\infty$ の方向に向かう (図 3)。また、flow は \mathbb{R}^2 において無限個の連結成分をもっている。 $e = -1$ とすると flow は下から上に流れることになる。

次に $i = i_0$ を固定して考える。このとき、 $A(i_0, j)$ の値は Alexander 多項式 \tilde{a}_{s+j} と一致することに注意する。よって flat 性とは flow 同士が交わらないことを意味しており、alternate 性とは flow が上下で重ならないことを意味している。よって隣同士の flow がうまく重ならないように配置する議論をすることでそのパラメータがこれまで得られているリストに含まれる

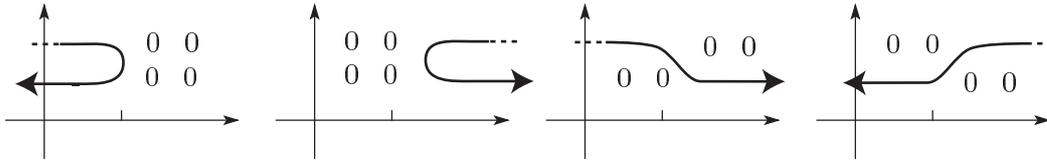


図 2: non-zero 係数の流れ

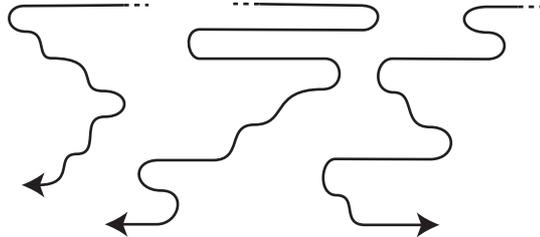


図 3: Alexander 多項式の non-zero 係数のなす flow

例として実現することができるようになり、分類が完成する。[20] は丁度 $u = 2$ の場合を証明したものである。Alexander 多項式の次数 $d = 2g(K)$ はこの flow の 1 つの成分の縦幅に対応するので次がすぐ成り立つ。

系 3.2. $K \subset S^3$ の整数手術がレンズ空間を作るとすると、対称化された $\Delta_K(t)$ の展開は $t^{-g} - t^{-g+1} + \dots$ であり、 $\Delta_K(t)$ の non-zero 係数の数は $|k_2|$ 個以上ある。

4 一般化や今後の発展について

このような枠組みで考えられる次のような一般化および発展がある。

- 任意のホモロジー球面に対して得られるレンズ空間手術を分類する。
- Seifert 手術を分類する。
- Greene 氏や Berge 氏の方法との融合を図る。

ホモロジー球面上のレンズ空間手術

ホモロジー球面から得られるレンズ空間を分類し、開発することや doubly primitive 結び目を許容する種数が 2 のホモロジー球面を特徴づけることも面白いかもしれない。そのようなホモロジー球面を固定することでリスト 1.2 のような表が作成できる。その表はホモロジー球面のどのような特徴を捉えるか？

現在の枠組みと合わせるなら、一般のホモロジー球面上から作った $A(i, j)$ の値は $\{0, 1, -1\}$ だけとは限らない。つまり、flow がお互い交わったり何重にも重なったりしているからである。それらの交わりや重なりは Heegaard Floer のオイラー数 $\chi(HF_{red}(Y))$ で制御できるはずであるが、 $HF_{red}(Y)$ の同型類を固定することで同じように分類ができないだろうか？

また、計算により、正整数手術によってレンズ空間が得られるとすると、キャッソン不変量 λ は非正値しか取りえないことや、 $\lambda(Y) = 0, -1$ をもち、doubly primitive 結び目を許容するホモロジー球面は $S^3, \Sigma(2, 3, 5), \Sigma(2, 3, 7)$ のみであることが予想できる。そもそも種数 2 となるホモロジー球面全体がどのような集合になるか筆者はよく知らない。

Seifert 多様体手術

レンズ空間を Seifert 空間手術にすると気が遠くなるほど難しくなる。例えば寺垣内氏は [26] で無限個結び目が整数手術で同じ Seifert 多様体になるものの存在を指摘しており予想 1.1 のような一意性は成り立たない。また、茂手木氏や宮崎氏らによる Seifert の理論をみるとさらに複雑である。

しかし、門上-山田のような Alexander 多項式の公式を証明することはできるであろう。Heegaard Floer homology による条件も [18] で得られてはいるが Seifert ホモロジー球面が得られる場合に留まっており、今ならもっと一般化できるかもしれない。

おそらく Reidemeister torsion と Alexander 多項式だけでは分類は厳しいであろう。Heegaard Floer homology が本質的に必要なのかもしれない。

しかし基本群が有限群であるような Seifert 多様体を作る手術なら同じ手法を用いて判定できるであろう。

Greene 氏の手法との関係

レンズ空間の正整数手術から作られる $b_2 = 1$ となる 4 次元多様体と chain type plumbing から得られる負定値な多様体をレンズ空間を境に繋げることで負定値な閉 4 次元多様体を得られる。よって chain type lattice の標準内積をもつ lattice へ埋め込みの存在と Alexander 多項式の条件からくる changemaker vector (両替ベクトル) とが Greene 氏の分類の鍵となった。ここで負定値な閉 4 次元多様体の交差形式は標準内積をもつという Donaldson の対角化定理を用いている。

changemaker vector は plumbing からくる lattice の直交補空間に位置する vector であり、flat 性と alternate 性をうまく言い表している (はずである)。次がその定義である。

定義 4.1. $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ が changemaker であるとは $1 = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_n$ を満たし、任意の $0 \leq k \leq \sigma_0 + \dots + \sigma_n$ に対してある部分集合 $A \subset \{0, \dots, n\}$ が存在して、 $\sum_{i \in A} \sigma_i = k$ となることである。これは任意の i に対して $\sigma_i \leq \sigma_0 + \dots + \sigma_{i-1} + 1$ が成り立つことと同値である。

n は plumbing される球面の数である。make change できなさ具合をうまく定義できればこの概念はホモロジー球面手術に応用できるかもしれない。

謝辞

この度は講演する機会を与えていただき上正明先生を始め主催者の方々には誠に感謝しております。この予稿を作成する上で寺垣内先生の [27] を大変参考にさせていただきました。

参考文献

- [1] K. L. Baker, *Small genus knots in lens spaces have small bridge number*, Algebraic & Geometric Topology 6 (2006) 1519-1621
- [2] J. Berge, *Some knots with surgeries yielding lens spaces*, unpublished manuscript 1990
- [3] J. Berge, *The simple closed curves in genus two Heegaard surfaces of S^3 which are double-primitives*, unpublished manuscript 2010
- [4] S. Bleiler and R. Litherland, *Lens spaces and Dehn surgery*, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), 1127-1131.
- [5] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke and P. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. 125 (1987), 237-300.
- [6] R. Fintushel, and R. Stern, *Constructing lens spaces by surgery on knots*, Math. Z. Volume 175, no 1, 33-51
- [7] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds. III*, J. Differential Geom. 26 (1987), 479-536
- [8] P. Ghiggini, *Knot Floer homology detects genus-one fibered links*, Amer. J. Math. 130 no 5, (2008) pp. 1151-1169
- [9] C. McA. Gordon, and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 371-415.
- [10] J. Greene, *The lens space realization problem* arXiv:1010.6257
- [11] T. Kadokami, and Y. Yamada, *A deformation of the Alexander polynomials of knots yielding lens spaces*. Bull. Austral. Math. Soc. 75 (2007), no. 1, 75-89
- [12] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth and Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*. Ann. of Math. (2) 165 (2007), no. 2, 457-546.
- [13] E. Lehmer, *On the magnitude of the coefficients of the cyclotomic polynomial*, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), no. 6, 389-392.

- [14] W.B.R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. 76 (1962), 531-540.
- [15] A. Migotti *Zur Theorie der Kreisteilungsgleichung*, Sitzber. Math.-Naturwiss. Classe der Kaiser. Akad. der Wiss., Wien 87, 7-14, 1883.
- [16] L. Moser, *Elementary surgery along a torus knot*, Pacific J. Math. 38 1971, 737-745.
- [17] P. Ozsváth and Z. Szabó, *On knot Floer homology and lens space surgeries*. Topology 44 (2005), no. 6, 1281-1300
- [18] P. Ozsváth and Z. Szabó, *On Heegaard Floer homology and Seifert fibered surgeries*, Proceedings of the Casson Fest, 181-203 (electronic), Geom. Topol. Monogr., 7, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2004
- [19] T. Saito, *Dehn surgery and (1,1)-knots in lens spaces*, Topology and its applications 154(2007)1502-1515
- [20] M. Tange, *A complete list of lens spaces constructed by Dehn surgery I*, arXiv1005.3512
- [21] M. Tange, *Lens spaces given from L-space homology spheres*, Experimental Mathematics Vol.18 no 3 (2009) 285-301
- [22] M. Tange, *Ozsváth-Szabó's orrection term and lens surgery*, Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society volume 146, pp. 119-134
- [23] M. Tange, ホモロジー球面から得られるレンズ空間たちについて II,III, 研究集会「結び目のトポロジー X」(2007) および「結び目の数学」(2008)の報告集
- [24] M. Tange, *On the non-existence of L-space surgery structure*, Osaka Journal of Mathematics 48 no.2 (2011) 541-547
- [25] 高木貞治, 初等整数論講義, 共立出版株式会社
- [26] M. Teragaito, *A seifert fibered manifold with infinitely many knot-surgery descriptions*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2007, no. 9, Art. ID rnm 028, 16 pp
- [27] 寺垣内政一, 2006年度日本数学会秋季総合分科会特別講演アブストラクト (加筆修正版)
- [28] A. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. 12 (1960), 503-528.
- [29] Y. Q. Wu, *Cyclic surgery and satellite knots*, Topology Appl. 36 (1990), 205-208.
- [30] Y. Yamada, *Lens space surgeries as A'Campo's divide knots*, Algebraic & Geometric Topology (2009) no.9 1. 397-428

Khovanov homology for an unnormalized Witten-Reshetikhin-Turaev invariant

伊藤 昇 (早稲田大学理工学術院)

1 背景

Khovanov homology は Khovanov が次のような 2 種類の次数をもったコホモロジー $H^{i,j}$ を考えたのが最初である.

$$\hat{J}(L) = \sum_j q^j \sum_i (-1)^i \text{rank } H^{i,j}(L) \quad (1)$$

ここで $\hat{J}(L)$ は絡み目 L に対するジョーンズ多項式である. 但し, $\hat{J}(L)$ は通常ジョーンズ多項式を $q+q^{-1}$ 倍したものとなっており, “unnormalized Jones polynomial” という言い方もなされる.

Khovanov は次の問題を「難問」として提出した.

問題 1. 3次元多様体の Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量をカテゴリー化せよ. (ICM2006 報告集 [9])

尚, 問題 1 は ICM2010 報告集では Stroppel [13] により “basic problem” として挙げられている. 問題 1 は後述するように問題 3 の特別な場合とも見なせて, その意味で Khovanov 理論が始まって以来の, およそ 10 年来の問題である. 問題 1 や問題 3 に対して, 世界各地で当分野の数学者たちは様々なアプローチをしている.

2 上の背景と講演者の研究のつながり

シンポジウムは出版されている論文か, またはそれに準ずるものの結果について報告する場であると考えるので講演者は 3次元多様体についての何かしらの考えを述べたりはしない. あくまで Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量は絡み目の不変量と思って講演する. 但し, Khovanov homology に関する講演者の研究は概ねこの問題 1

を念頭においてなされたものであるので、縦糸としてこれが背景にあったことを申し上げておきたい。

背景から結果へ至る文脈は以下の通りである。“unnormalized Jones polynomial”のアナロジーで多項式部分のみを扱うため“unnormalized Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量 (unnormalized WRT)”を考える。これは colored Jones 多項式の一次結合であり、もっと細かく項を分解すると Kauffman 括弧式と呼ばれる多項式の一次結合で書かれる。Kauffman 括弧式を補正したものは Jones 多項式であるから、unnormalized WRT は Khovanov homology のオイラー数と見なされる。講演者は (1) Jones 多項式 (あるいは Kauffman 括弧式) が絡み目の不変量であることの証明を簡単にする、明示的な鎖ホモトピーを求めること、(2) colored Jones 多項式の Khovanov homology の双対境界作用素を整理しておくことから手をつけた。そして、(1) の副産物として (1) Reidemeister II の不変性に使う鎖ホモトピーと Reidemeister III の鎖ホモトピーと可換な鎖写像があること、(2) (1) の鎖ホモトピーは Khovanov homology を含むより一般的なコホモロジーに対しても延長されることなどを得た。(2) は元々スペクトル系列の観点から期待されていた bicomplex の存在性を保証するものである (しかし、具体的に構成してあるものの、このスペクトル系列が簡単に計算できるようになったとは言えていないと感じており、課題を残している)。

3 結果について

1. Khovanov homology が絡み目不変量であることの証明の簡略化：Khovanov homology の Reidemeister moves における不変性を与える鎖ホモトピーは Khovanov 複体の生成元によって書き表される (鎖ホモトピーの明示的表示)。その鎖ホモトピーの明示表示は、Viro が Reidemeister move I について、講演者が Reidemeister II と III について求めた。

注意 1. 簡単な背景説明を付記しておく。Khovanov homology

が絡み目不変量であることは、Khovanov が Khovanov homology を導入した論文 [7] で証明している。またその後 Bar-Natan が解説的な証明をいくつかつけている ([2], [3])。これらの証明のポイントはいずれも acyclic な複体を探すというものである。証明としてはこれで十分であるが、鎖ホモトピーが具体的にどのような写像であるかは、知りたい人もいるであろうと、Viro は Reidemeister move I について、Khovanov 複体の生成元を用いて具体的にレトラクションと鎖ホモトピーを与えた（よく聞かれることであるのだが、II と III については「できる」とか「できるだろう」とかいうコメントは論文にはない。Viroらしいと講演者はおもう）[15]。そこで講演者は残る II と III についてレトラクションと鎖ホモトピーを求めた。但し、このレトラクションは Jacobsson の論文 [6] から比較的容易に求められるので「鎖ホモトピーを求めた」とだけ上記でコメントした。

2. colored Jones 多項式による Khovanov homology は (1) による境界作用素の他に絡み目の cabling によってもう一つの双対境界作用素を持つ。その2つの双対境界作用素による2重複体が存在するか？という問題 (Beliakova と Wehrli の問題) があった。講演者は cabling の双対境界作用素を作り直して (1) の双対境界作用素と可換になるようにし、2重複体を構成した。

4 副産物について

1. Reidemeister move II は2つの交点 (紐の上下は明示された絡み目図式の紐の横断的な交差) が関係する絡み目図式の局所変形 (絡み目としては isotopy 同値な変形) であり、Reidemeister move III は3つの点の関係する局所変形である。Khovanov homology を構成している複体間の鎖写像で (1) の鎖ホモトピーと可換となるものが存在する。これは、Redemeister move III が関係する3交点の局所図式を含む複体から、Reidemeister move II が関係する2交点の局所図式を含む複体への鎖写像である。II

と I に対しても同様な鎖写像が存在する。意味するところは、Reidemeister move III を行うということが、II を行うことを Khovanov 複体上で「本質的に含んでいる」ということである。面白いことに II と I の関係にも同様な関係が見られる。

2. 双対境界作用素は (1) でいう次数 j がずれることを許せば, (1) を含むより広い双対境界作用素が定義される ([8], [11])。また, 曲面と区間の直積内の絡み目 (: 仮想結び目とは異なる) に対して不変量となるように双対境界作用素への一般化もなされている [1]。結果 (1) で得られた鎖ホモトピーはこれらの双対境界作用素にも自然に延長される。但し, 曲面と区間の直積内の絡み目に対しての Khovanov homology の場合, レトラクションを工夫する必要がある [5]。

5 何故 “unnormalized” なのか? というところと WRT 不変量についての説明

Witten-Reshetikin-Turaev 不変量 (以下では “WRT” という略記を許す) とは枠付き絡み目の (量子) 不変量である。ここで枠付き絡み目の定義を述べておく。絡み目と云ったら, 円周の直和を考えたとき, その S^3 への埋め込みの像を指すが (埋め込みそのものも絡み目と呼んだりもする), 枠付き絡み目は円環の直和を考えたとき, その S^3 への埋め込みの像のことである。円環の中心線だけに埋め込みを制限した写像の像から枠付き絡み目を復元できることから, ここでは, この制限の像を枠付き絡み目と呼ぶことにする ([12] に詳しい定義がある)。WRT において, Reidemeister move I は WRT の変数 (変数変換し, 変数を $\exp(\frac{2\pi}{4r})$ としたとき) の指数部分を例えば $j^2 - 1$ (j : 整数) 増やしたりしてしまう [10]。つまり一般的には多項式の指数を次数とするには工夫を要するはずである。冒頭で述べたような Jones 多項式の Khovanov homology のように, 係数のオイラー数は考えられない。このことから, とりあえず多項式の指数の扱いやすい部分を問題にするため, unnormalized Witten-

Reshetikhin-Turaev 不変量を考える. unnormalized な WRT 定義を述べる.

定義 1. L は l 成分の枠付き絡み目, $\sharp L$ は L の成分数, $J_{L, \mathbf{n}+1}$ を量子群 $U_q(sl_2)$ の既約表現に付随する, L についての colored Jones 多項式とする. unnormalized Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量を以下の式 (2) で定義をする.

$$\hat{\tau}_L = \sum_{\mathbf{0} < \mathbf{k} < \mathbf{r}} [\mathbf{k}] J_{L, \mathbf{k}} \quad (2)$$

ここで, $[\mathbf{k}] = \prod_{i=1}^{\sharp L} [k_i]$, $[k] = \frac{q^{\frac{k}{2}} - q^{-\frac{k}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$ とし, $\mathbf{0} < \mathbf{k} < \mathbf{r}$ は任意の i について $0 < k_i < r$ により定義する (multi-index による記法).

$J_{L, \mathbf{k}}$ をより細かく分解しておく. この colored Jones 多項式についてよく知られている事実があり, Jones 多項式の一つの形とも呼べる J_L により, \mathbf{n} , \mathbf{k} を l ($=L$ の成分数) 個の非負整数の組とすると

$$J_{L, \mathbf{n}+1} = \sum_{\mathbf{k}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\mathbf{n} - \mathbf{k}}{\mathbf{k}} J_{L^{\mathbf{n}-2\mathbf{k}}} \quad (3)$$

とかける. 但し, $|\mathbf{k}| = \sum_i k_i$, $L^{\mathbf{n}-2\mathbf{k}}$ は枠付き絡み目の $\mathbf{n}-2\mathbf{k}$ cabling である.

$\langle \cdot \rangle$ は L の不変量となる 1 変数多項式である Kauffman 括弧式 (変数は A で WRT との変数変換は $A = -q^{\frac{1}{4}}$ により与える), J_L は $J_L = (-1)^{\sharp L} \langle L \rangle$ である.

注意 2. 本来は Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量は $\hat{\tau}_L$ に次で定義される α_L をかけたものである. この α_L は $b = \sqrt{\frac{2}{r}} \sin \frac{\pi}{r}$, $c = e(-\frac{3(r-2)}{8r})$, σ_L は linking matrix の符号数として, $\alpha_L = b^{\sharp L} c^{\sigma_L}$ により定義される.

6 求められている「カテゴリー化」の意味

「カテゴリー化」という言葉は数学的には無定義語であるが, Khovanov homology はカテゴリー化の一例である. 例えば, 問題 1 は次の問題を解けばよいとも受け取れる.

問題 2. 3次元多様体の Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量に対応する Khovanov homology をつくれ.

注意 3. 尚, Khovanov は Khovanov homology を導入した論文において, 次のようにも指摘している (意訳).

問題 3. 3次元多様体についてのあるホモロジー論のオイラー数として結び目や3次元多様体の量子不変量を解釈できないだろうか?

広義の「カテゴリー化」は玉木の明解な説明 [14] があるので, そちらに譲りたい. ここでは Khovanov homology に焦点を絞る. 式 (1) を振り返ると, 絡み目 L のジョーンズ多項式 $\hat{J}(L)$ の係数は Khovanov homology 群の組 $H^{i,j}(L)$ のオイラー数より決定されていた. このとき「オイラー数をとる」ということが Khovanov homology における脱カテゴリー化 (decategorification) である. また, ジョーンズ多項式に対して式 (1) のような Khovanov homology $H^{i,j}(L)$ (アーベル群のなすカテゴリーの対象) を考えることが「カテゴリー化する」ことの一例である. 但しトポロジーにおいては, この「カテゴリー化」がトポジストとして嬉しい「何か」が出てきてほしいと期待しているのでその期待を込めて「カテゴリー化」を考える. 例えば, この $H^{i,j}(L)$ が分類としてより強い位相不変量を与えるか? あるいは, H は何かしらの functor となっているのか? 他にもそのホモロジーはホモロジー論として何かよい性質を持つか? などといったことが求められてくる. Khovanov homology の理論が一見して混沌としたように見受けられるが, 「よいカテゴリー化とは何か」という方向性が様々であること, その哲学の与え方に各研究者の個性が表れていることが影響しているようにおもわれる.

7 技術的な詳細 (Khovanov homology の定義)

ここでは簡単の為, 式 (4) で与えられる \mathbb{Z}_2 係数の Khovanov homology の定義を行う (Viro の構成に従う [15]). 式 (1) における

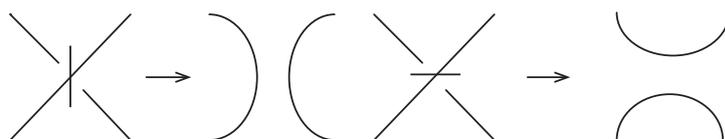


図 1: 交点の平滑化, 左図が正マーカ, 右図が負マーカによるもの.

構成もほとんど同じである.

$$\langle L \rangle = \sum_{p,q} (-1)^p A^q \text{rank} H_{p,q}(L). \quad (4)$$

まず, 与えられた枠付き絡み目 L の図式 D の全ての交点に対してマーカと呼ばれる十分小さい線分を交点上に置く. その置き方は 2通りとし, それは交点の平滑化の仕方 (smoothing の仕方) を指定するものとする (図 1). 図 1 で与えられるマーカの正負により, それぞれ 1, -1 を対応させ, その図式についての総和を $\sigma(S)$ とおく. 例えば図 2 の左図が与えられた枠付き絡み目図式 D (枠付き絡み目というときは円環の埋め込みであるから, 厚みを書くこともあるが, ここでは図に円環の中心線のみを書く記法を用いている) とする. 中央の図が全ての交点にマーカをおいたもの, 右図がマーカに沿って全ての交点を平滑化したものである. 平滑化した後, 有限個の円周が得られるが, それぞれの円周に 1 または x を任意に付し (図 2, 右図), それを S とする. 付す可能性は全て考え, それらがなす集合を考える.

次に次数付けを考える. 各円周に付された x の次数を $-1, 1$ の次数を 1 とする. この円周の次数を図式について全て足し上げ, それを $\tau(S)$ とおく. $p(S) = \tau(S)$, $q(S) = \sigma(S) - 2\tau(S)$ により, p, q を定める. このとき, $C_{p,q}(D)$ を $\{S \mid p(S) = p, q(S) = q\}$ が生成する自由アーベル群とする.

さらに図 3 により, 境界作用素 ∂ を定める. $H_{p,q}(D) := H_p(C_{*,q}(D), \partial)$ は Reidemeister move II, III によらない量であることから, これが枠

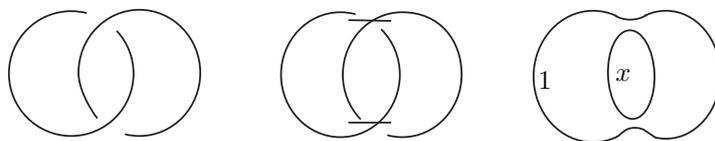


図 2: Khovanov homology の生成元の作り方. 与えられた図式 (左図), 全ての交点にマーカーをおいた図式 (中図), 全てのマーカーに沿って平滑化し, 全ての円周に 1 または x をおいたもの (右図).

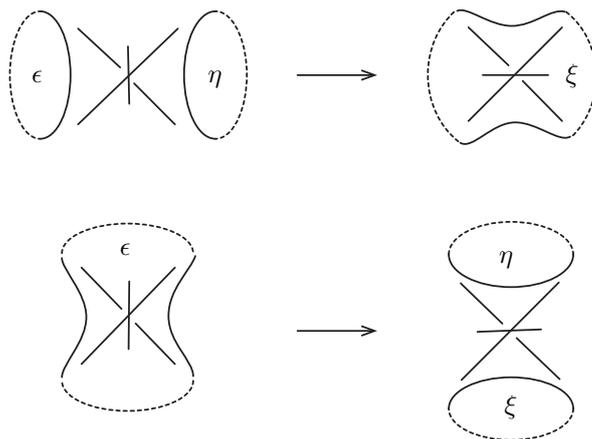


図 3: 上図の $(\epsilon, \eta) = (1, x), (x, 1)$ に対して $\xi = x$, 下図の $\epsilon = x$ に対して $(\eta, \xi) = (x, x)$, $\epsilon = 1$ に対して $(\eta, \xi) = (1, x) + (x, 1)$ とする.

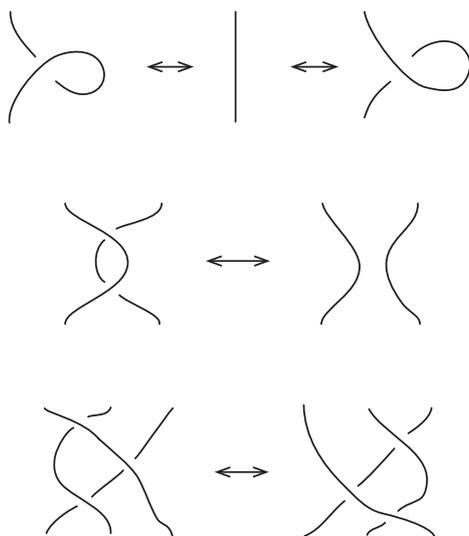


図 4: 上から Reidemeister move I, II, III.

付き絡み目の不変量となり, $H_{p,q}(L)$ と書ける. ここで Reidemeister move は図 4 で与えられる絡み目図式の局所変形である.

参考文献

- [1] M. M. Asaeda, J. H. Przytycki and A. S. Sikora, Categorification of the Kauffman bracket skein module of I -bundles over surfaces. *Algebr. Geom. Topol.* 4 (2004), 1177–1210 (electronic).
- [2] D. Bar-Natan, On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial. *Algebr. Geom. Topol.* 2 (2002), 337–370 (electronic).
- [3] D. Bar-Natan, Khovanov homology for tangles and cobordisms. *Geom. Topol.* 9 (2005), 1443–1499.
- [4] A. Beliakova and S. Wehrli, Categorification of the colored Jones polynomial and Rasmussen invariant of links. *Canad. J. Math.* 60 (2008), no.6, 1240–1266.
- [5] N. Ito, Chain homotopy maps for Khovanov homology. *J. Knot Theory Ramifications* 20 (2011), no. 1, 127–139.
- [6] M. Jacobsson, An invariant of link cobordisms from Khovanov homology. *Algebr. Geom. Topol.* 4 (2004), 1211–1251 (electronic).

- [7] M. Khovanov, A categorification of the Jones polynomial. *Duke Math. J.* **101** (2000), no. 3, 359–426.
- [8] M. Khovanov, Link homology and Frobenius extensions. *Fund. Math.* 190 (2006), 179–190.
- [9] M. Khovanov, Link homology and categorification. *International Congress of Mathematics. Vol. II*, 989–999, *Eur. Math. Soc., Zürich*, 2006.
- [10] R. Kirby and P. Melvin, The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. *Invent. Math.* **105** (1991), no. 3, 473–545.
- [11] M. Mackaay, P. Turner and P. Vaz, A remark on Rasmussen’s invariant of knots. *J. Knot Theory Ramifications* **16** (2007), no. 3, 333–344.
- [12] T. Ohtsuki, Quantum invariants. A study of knots, 3-manifolds, and their sets. Series on Knots and Everything, 29. *World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ*, 2002.
- [13] C. Stroppel, Schur-Weyl dualities and link homologies. *International Congress of Mathematics*. Hyderabad, India, to appear.
- [14] D. Tamaki, Algebraic Topology. A guide to literature. Web pages.
<http://pantodon.shinshu-u.ac.jp/topology/literature/>
- [15] O. Viro, Khovanov homology, its definitions and ramifications. *Fund. Math.* 184 (2004), 317–342.

〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 早稲田大学理工学術院

E-mail: noboru@aoni.waseda.jp