

## はしがき

この講演集は 2012 年 (平成 24 年) 8 月 11 日から 8 月 14 日までの間, 平成 24 年度科学研究費補助金 基盤研究(A)「3次元多様体論の深化」(研究代表者:小島定吉 課題番号:22244004) および 基盤研究(A)「写像の特異点論の新展開」(研究代表者:佐伯修 課題番号:23244008)の助成により佐賀大学において開催される第59回トポロジーシンポジウムに際し, あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである.

その目的は, シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し, 研究討論を活発に行うための一助とするとともに, 記録として残すことにより後々の資料として役立てることにある.

なおこの講演集は,

平成 24 年度科学研究費補助金

研究種目 基盤研究 (A)

研究代表者 小島定吉

研究課題名 3次元多様体論の深化

課題番号 22244004

により作成されたものである.

世話人: 岩切雅英 (佐賀大学)

佐伯修 (九州大学)

金信泰造 (大阪市立大学)

石川剛郎 (北海道大学)

主催: 日本数学会トポロジー分科会

共催: 佐賀大学

# 第59回トポロジージンポジウム プログラム

## 8月11日(土)

14:00-15:00

金信 泰造 (大阪市立大学)

結び目の局所変形をめぐって .....1

15:30-16:30

家本 宣幸 (大分大学)

Monotonic normal 空間と種々の位相空間との積の位相的性質について 13

## 8月12日(日)

9:30-10:30

三好 重明 (中央大学)

3次元開多様体上の絡み目と平面への沈めこみ .....25

11:00-12:00

井上 歩 (東京工業大学 PD)

結び目カンドルの表現からわかる絡み目の幾何について .....37

13:30-14:30

西村 尚史 (横浜国立大学)

ホイットニーの傘とスワローテイル .....49

15:00-16:00

野坂 武史 (京都大学/学振特別研究員 PD)

カンドルの分類空間と低次元トポロジー ..... 61

16:30-17:30

平岡 裕章 (九州大学)

パーシステントホモロジー群のタンパク質構造解析への応用 ..... 73

## 8月13日 (月)

9:30-10:30

佐伯 修 (九州大学)

Broken Lefschetz fibrations and their moves .....85

11:00-12:00

中西 克典 (京都大学 D1)

Ozsváth-Szabó 不変量とトーラスツイストについて .....

13:30-14:30

嘉田 勝 (大阪府立大学)

バビロンまでは何マイル? — コンパクト化の近似と集合論 .....97

15:00-16:00

森谷 駿二 (京都大学 PD)

A-infinity structure in string topology .....107

16:30-17:30

加世堂 公希 (北海道大学 PD)

特異点論を用いたドシッター空間内の空間的部分多様体の幾何学 ...119

## 8月14日 (火)

9:30-10:30

糟谷 久矢 (東京大学 D3)

Minimal models, formality and hard Lefschetz property of solvmanifolds with local systems ..... 129

11:00-12:00

小野 薫 (京都大学)

Lagrange 部分多様体の displaceability 及び displacement energy について ..... 137

# 結び目の局所変形をめぐって

金信 泰造 (大阪市立大学)\*

2012年7月2日提出

## 概要

結び目や絡み目にはさまざまな局所変形が考えられており、各々の局所変形に対して結び目、絡み目の間に、いわゆるゴルディアン距離が定義される。本講演ではとくに、絡み目の一部分にバンドを貼付けて、そのバンドを使って新たに別の絡み目に変形する『バンド手術』に焦点をあてる。(1) バンド手術による不変量の変化について紹介する。(2) バンド手術によって実現されるいくつかの局所変形に対して(1)の結果を利用してゴルディアン距離が評価される例を紹介する。

## 1. はじめに

結び目の図式において、適当に交差点の上下を逆にすると結び目をほどくことができる。すなわち、**交差交換**という局所変形は**結び目解消操作**である。したがって、2つの結び目  $K, K'$  に対して一方の適当な図式を何回か交差交換すると他方に変形することができる。このときの交差交換の最小回数を  $K$  と  $K'$  のゴルディアン距離とよび  $d(K, K')$  であらわす。とくに、 $K$  と自明な結び目のゴルディアン距離を  $K$  の結び目解消数とよび  $u(K)$  であらわす。



図 1: 交差交換

交差交換以外にも結び目や絡み目にはさまざまな局所変形が考えられている。まず、その変形が結び目解消操作かどうかということが問題となる。また、2つの結び目、絡み目がある変形操作で移り合うときその最小回数である『ゴルディアン距離』や、また自明な結び目とのゴルディアン距離である『結び目解消数』を求めることが問題となる。とくに、与えられた2つの結び目、絡み目が1回の変形操作で移り合うかという問題もある。局所変形の全般的な解説は [21, Chapter 11] を参照。

本講演では、局所変形の一つであるバンド手術を中心に考えていく。向きを保つバンド手術 (整合的バンド手術とよぶ) はDNAに働く組み換え酵素の作用としてあらわれるために、最近、活発に研究がすすめられている ([7], [12], [13], [27])。講演者はたまたま、 $H(2)$  移動とよばれる向きを保たないバンド手術の研究 [19] を宮澤康行氏とおこなっていたが、下川航也氏の講演において整合的バンド手術の問題を知り、 $H(2)$  移動のときと似た手法をつかって研究をはじめることとなった。具体的には、 $\mathbb{F}(2, 2n)$  型

本研究は科研費 (課題番号:24540089) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M25

キーワード: knot, link, band surgery.

\* 〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学大学院理学研究科・数学教室  
e-mail: kanenobu@sci.osaka-cu.ac.jp

トーラス絡み目が、与えられた  $(2n + 1)$  交点の 2 本橋結び目に整合的バンド手術で変形できるか？」さらに、「変形されるときはそのバンドの特徴付けは？」という問題が提示された。これは、DNA に作用する Xer 酵素の部位特異的組み換えの解析から生じた問題である。詳しくは、下川氏、石原海氏等の論文 [6], [39], [43] を参照。

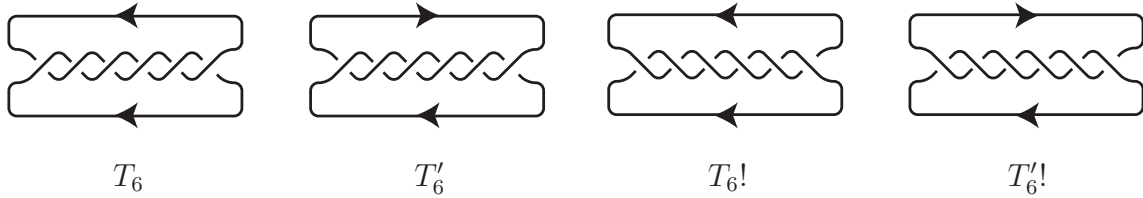


図 2: 向きの付いた  $(2,6)$  型トーラス絡み目

本稿では、まず第 2 節で、バンド手術と、結び目の連続する 2 回の整合的バンド手術と同値な変形である  $SH(3)$  移動の定義を述べる。次に第 3 節で、整合的バンド手術で移り合う絡み目に関する不変量について述べる。最後に第 4 節で、 $SH(3)$  移動の他のいくつかの変形操作への応用を述べる。本稿は主に [16], [18] の概要である。

## 2. バンド手術と $SH(3)$ 移動

### 2.1. バンド手術

図 3 のように絡み目の一部分にバンドを貼付けこのバンドを利用して新たに別の絡み目に変形する操作を**バンド手術**(band surgery) とよぶ。正確には、 $L$  を絡み目、 $b: I \times I \rightarrow S^3$  を  $L \cap b(I \times I) = b(I \times \partial I)$  をみたす埋め込みとしたとき、あらたな絡み目  $M = (L \setminus b(I \times \partial I)) \cup b(\partial I \times I)$  をバンド  $B = b(I \times I)$  に沿ったバンド手術によって得られた絡み目という。ただし、 $I$  は閉区間  $[0, 1]$ 。

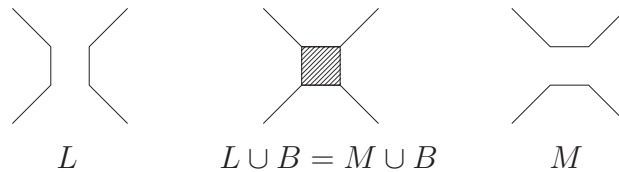


図 3: 絡み目  $L$  にバンド  $B$  に沿ったバンド手術をおこなうと絡み目  $M$  が得られる

バンド手術は、絡み目  $L$ ,  $M$  の向き、成分数によって、さまざまな場合が考えられる。とくに、図 4 のように、絡み目の向きがきちんと合う  $L$  から  $M$ 、または、 $M$  から  $L$  へのバンド手術を**整合的バンド手術** (coherent band surgery) とよぶ。このとき、絡み目の成分数には 1 の増減が生じる。

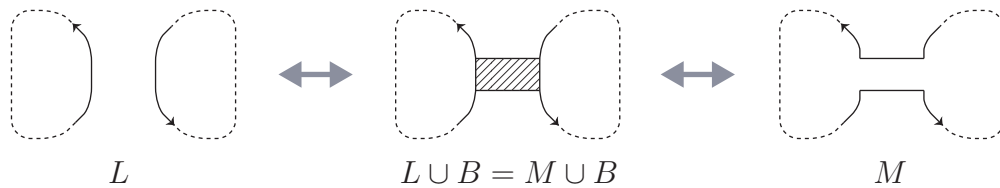


図 4: 整合的バンド手術

また、向きの付いていない絡み目において、 $L$ と $M$ の成分数が変化しないバンド手術を **$H(2)$ 移動** ( $H(2)$ -move) とよぶ。 $H(2)$ ゴルディアン距離については [16]，また、向きを無視したバンド手術については [1] を参照。

## 2.2. $SH(3)$ 移動

図 5 のような向きの付いた絡み目に対する局所変形を **$SH(3)$ 移動** ( $SH(3)$ -move) とよぶ。ただし、絡み目の成分数は変化しないという条件を付ける。



図 5:  $SH(3)$  移動

1 回の  $SH(3)$  移動は 2 回の整合的バンド手術で実現される (図 6)。逆に、結び目の 2 回の整合的バンド手術は常に 1 回の  $SH(3)$  移動で実現されることがわかる [18, Proposition 2.3].



図 6: 1 回の  $SH(3)$  移動は 2 回の整合的バンド手術で実現される。

**注意 2.1**  $H(2)$  移動と  $SH(3)$  移動は、Hoste, Nakanishi, Taniyama [11] が定義した  $H(n)$  移動,  $SH(n)$  移動の特別な場合である。 $H(n)$  移動,  $SH(n)$  移動は、 $n$  本のひもからなる自明なタングルに対する局所変形である。図 7(a) のような向きの付いていない絡み目に対する局所変形を **$H(n)$ 移動** ( $H(n)$ -move), 図 7(b) のような向きの付いた絡み目に対する局所変形を **$SH(n)$ 移動** ( $SH(n)$ -move) とよぶ。ただし、これらの変形では、絡み目の成分数は変化しないという条件が付く。また、 $SH(n)$  移動では、必然的に  $n$  は奇数でなければならない。また、 $H(n)$  移動,  $SH(n)$  移動はともに結び目解消操作である。

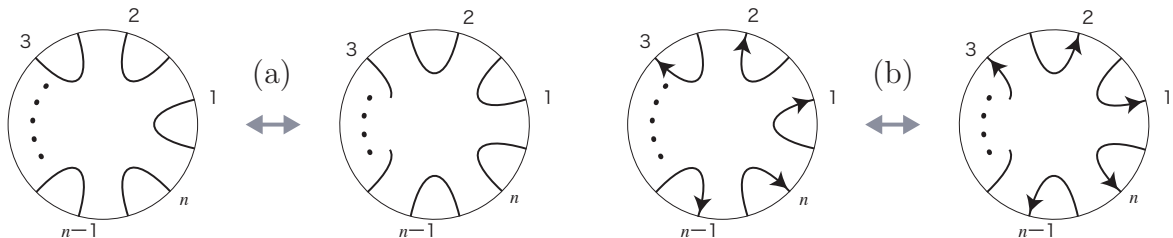


図 7: (a)  $H(n)$  移動 (b)  $SH(n)$  移動

1 回の  $H(n)$  移動, あるいは,  $SH(n)$  移動は, それぞれ,  $(n-1)$  回のバンド手術, あるいは, 整合的バンド手術で実現される。さらに,  $SH(3)$  移動,  $H(3)$  移動については, Taniyama, Yasuhara [41] がいくつかの意味付けをおこなっている。

### 3. バンド手術に関する不変量

#### 3.1. スkein三つ組から定義される多項式不変量

skein三つ組  $(L_+, L_-, L_0)$  とは, ある1点の近くが図8のように違っている以外はまったく同じ向きの付いた3つの向き付けられた絡み目の組のことである. このとき,  $L_+$  と  $L_0$ , あるいは,  $L_-$  と  $L_0$  は整合的バンド手術で移り合う. また, 逆に, 整合的バンド手術で移り合う2つの絡み目  $L, L'$  については,  $(L, M, L')$ ,  $(M', L, L')$  がskein三つ組となるような絡み目  $M, M'$  が存在する.

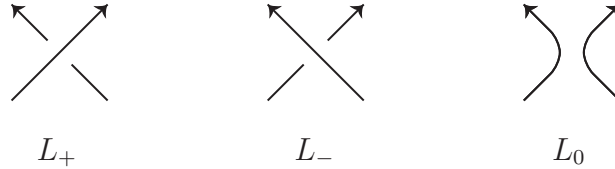


図 8: skein三つ組

向きの付いた結び目, 絡み目の位相不変量である **Conway 多項式**  $\nabla(L; z) \in \mathbf{Z}[z]$  [5], **Jones 多項式**  $V(L; t) \in \mathbf{Z}[t^{\pm 1/2}]$  [14], **HOMFLYPT 多項式**  $P(L; v, z) \in \mathbf{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$  [8, 35] をそれぞれ以下の関係式で定義する. ここで,  $U$  は自明な結び目,

$$\nabla(U; z) = 1; \quad (1)$$

$$\nabla(L_+; z) - \nabla(L_-; z) = z\nabla(L_0; z); \quad (2)$$

$$V(U; t) = 1; \quad (3)$$

$$t^{-1}V(L_+; t) - tV(L_-; t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0; t); \quad (4)$$

$$P(U; v, z) = 1; \quad (5)$$

$$v^{-1}P(L_+; v, z) - vP(L_-; v, z) = zP(L_0; v, z), \quad (6)$$

#### 3.2. 符号数

向きの付いた絡み目の符号数について次が成り立つ ([31, Lemma 7.1], [32, Theorem 1], [33]).

**命題 3.1** skein三つ組  $(L_+, L_-, L_0)$  に対して,

$$|\sigma(L_+) - \sigma(L_0)| \leq 1. \quad (7)$$

さらに, 結び目の符号数については, 次が成り立つ ([9]).

**命題 3.2** 結び目の符号数は次の3つの条件から決定できる.

(i) 自明な結び目  $U$  について,

$$\sigma(U) = 0. \quad (8)$$

(ii) skein三つ組  $(L_+, L_-, L_0)$  において,  $L_{\pm}$  が結び目のとき,

$$\sigma(L_-) - 2 \leq \sigma(L_+) \leq \sigma(L_-). \quad (9)$$

(iii)  $\epsilon(K) = V(K; -1)/|V(K; -1)| = \nabla(K; 2i)/|\nabla(K; 2i)|$  とすると,

$$(-1)^{\sigma(K)/2} = \epsilon(K). \quad (10)$$

### 3.3. Arf不変量

$L$ が結び目, または, 各成分  $L_i$  について,  $L_i$  と残りの成分それぞれとの絡み数の和が偶数という条件ををみたす絡み目 (proper link とよばれている) のとき, **Arf不変量**  $\text{Arf}(L) \in \mathbf{Z}_2$  [36] が定義される. Arf不変量は次のようにして Jones 多項式, Conway 多項式から求まる ([29], [23, Chapter 10]).

**命題 3.3** (i)  $K$ が結び目のとき,

$$\text{Arf}(K) = a_2(K) \pmod{2}. \quad (11)$$

ただし,  $a_2(K)$  は  $K$  の Conway 多項式  $\nabla(K; z)$  の  $z^2$  の係数.

(ii)  $L$ が2成分の絡み目のとき,

$$V(L; i) = \begin{cases} (-\sqrt{2})(-1)^{\text{Arf}(L)} & L \text{ の絡み数が偶数のとき} \\ 0 & L \text{ の絡み数が奇数のとき} \end{cases} \quad (12)$$

ただし,  $V(L; i)$  は Jones 多項式  $V(L; t)$  において  $t^{1/2} = e^{i\pi/4}$  を代入した値.

ここでは Arf不変量の次の性質を利用する. 2成分の絡み目  $L$  から整合的バンド手術で結び目  $K$  が得られたとき,  $L$  の絡み数が偶数ならば, Arf不変量は一致する.

$$\text{Arf}(L) = \text{Arf}(K). \quad (13)$$

### 3.4. Jones 多項式の特特殊値

$\omega = e^{i\pi/3}$  とおく.  $L$  を  $c$  成分からなる絡み目,  $\Sigma(L)$  を  $S^3$  の  $L$  上での 2 重分岐被覆空間とする. また,  $\delta(L) = \dim H_1(\Sigma(L); \mathbf{Z}_3)$  とおく. このとき, Lickorish, Millett [22, Theorem 3] は  $t^{1/2} = e^{i\pi/6}$  における Jones 多項式の特特殊値  $V(L; \omega)$  に関して次の式を与えた.

$$V(L; \omega) = \pm i^{c-1} (i\sqrt{3})^{\delta(L)}. \quad (14)$$

$(L_+, L_-, L_0)$  をスケイン三つ組とする.  $L_+$ ,  $L_-$  が結び目,  $L_0$  が 2 成分絡み目のとき, さらに, 図 9 のような結び目  $L_\infty$  を考える.  $\lambda$  を  $L_0$  の絡み数とすると, 次の式が成り立つ [2].

$$V(L_+; t) - tV(L_-; t) + t^{3\lambda}(t-1)V(L_\infty; t) = 0. \quad (15)$$

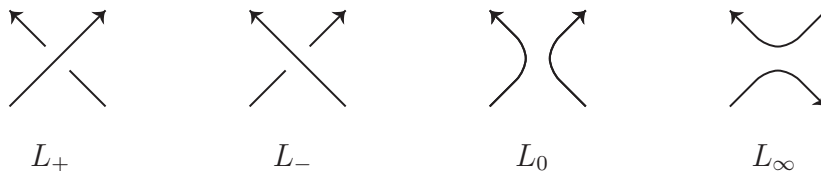


図 9: スケイン四つ組

(4), (14), (15) 式を用いると, 4 つの結び目, 絡み目  $(L_+, L_-, L_0, L_\infty)$  の Jones 多項式の特特殊値の比の値は表 1 の (a)–(d) の 4 通りの場合しかないことがわかる.

表 1 から, すぐに次のことがわかる.



表 1: Jones 多項式の特特殊値の比

Cases	$\frac{V(L_+; \omega)}{V(L_-; \omega)}$	$\frac{V(L_\infty; \omega)}{V(L_-; \omega)}$	$\frac{V(L_0; \omega)}{V(L_-; \omega)}$	$\frac{V(L_0; \omega)}{V(L_+; \omega)}$
(a)	1	$(-1)^\lambda$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
(b)	-1	$(-1)^{\lambda+1}i\sqrt{3}$	$i$	$-i$
(c)	$i\sqrt{3}$	$(-1)^{\lambda+1}$	$-i$	$-\sqrt{3}^{-1}$
(d)	$i\sqrt{3}^{-1}$	$(-1)^{\lambda+1}i\sqrt{3}^{-1}$	$-\sqrt{3}^{-1}$	$i$

**定理 3.4** 2つの絡み目  $L$ ,  $L'$  が整合的バンド手術で移り合うとき,

$$V(L; \omega)/V(L'; \omega) \in \left\{ \pm i, -\sqrt{3}^{\pm 1} \right\}. \quad (16)$$

**例 3.5** Traczyk [42, Example 4.3] は表1を利用して,  $7_4$  結び目の結び目解消数が2であることを次のように証明した.  $K = 7_4$  に対して  $u(K) = 1$  と仮定する. (9)式を使うと  $\sigma(K) = -2$  より, スケイン三つ組  $(K, U, L_0)$  が存在する. ところが,  $V(K; \omega) = -i\sqrt{3}$ ,  $V(U; \omega) = 1$  より, 表1を見るとそのようなスケイン三つ組は存在しないことがわかる.  $10_{67}$  についても同様であると述べられている.

**注意 3.6** 例3.5のTraczyk [42] 以前にMiyazawa [26] は, Jones 多項式, 符号数, 結び目の行列式, Conway 多項式の4次の係数を使って, 結び目解消数が1の結び目に対するある条件を与え,  $10_{65}$ ,  $10_{69}$ ,  $10_{89}$ ,  $10_{97}$ ,  $10_{108}$ ,  $10_{163}$ ,  $10_{165}$  の結び目解消数が2であることを示した. これらは例3.5の方法によっても示すこともできる.

### 3.5. HOMFLYPT 多項式の特特殊値

$L$  を  $c$  成分からなる絡み目,  $\Sigma_3(L)$  を  $S^3$  の  $L$  上での巡回3重分岐被覆空間とする. また,  $h(L) = \dim H_1(\Sigma_3(L); \mathbf{Z}_2)$  とおく. このとき, Lickorish, Millett [22, Theorem 2] は  $v = z = i$  における HOMFLYPT 多項式の特特殊値  $P(L; i, i)$  に関する次の式を与えた.

$$P(L; i, i) = (-2)^{h(L)}. \quad (17)$$

(6)式に  $v = z = i$  を代入すると,

$$P(L_+; i, i) + P(L_-; i, i) + P(L_0; i, i) = 0 \quad (18)$$

を得る. この式と (17)式より, 次を得る ([25], [17]).

**定理 3.7** 2つの絡み目  $L$ ,  $L'$  が, 1回の交差交換, または, 整合的バンド手術で移り合うとき,

$$P(L; i, i)/P(L'; i, i) \in \{1, -2^{\pm 1}\} \quad (19)$$

**例 3.8** 絡み目  $L$  に対して, その鏡像を  $L!$  とすると,  $P(L; i, i) = P(L!; i, i)$  であることにまず注意する.  $K = 3_1, 4_1$  については,  $P(K; i, i) = -2$  である. また, (2,6)型トールス絡み目  $T'_6$  については,  $P(T'_6; i, i) = 1$  である. したがって, 次の結び目と2成分絡み目の対は1回の整合的バンド手術では移り合わないことがわかる.

$$(3_1 \# 3_1!, T'_6), \quad (3_1 \# 4_1, T'_6!) \quad (20)$$

これらは符号数, 3.4 節の Jones 多項式の特特殊値を使っても示せない例である. ただし, 後者は Alexander 多項式を使った Kawauchi の判定法でも示すことができる [13, Lemma 3.10(2)].

### 3.5.1. Q 多項式とその特殊値

Q 多項式  $Q(L; z) \in \mathbf{Z}[z^{\pm 1}]$  [3, 10] は向きの付いていない絡み目の位相不変量で, 次の関係式により定義される.

$$Q(U; z) = 1; \quad (21)$$

$$Q(L_+; z) + Q(L_-; z) = z(Q(L_0; z) + Q(L_\infty; z)), \quad (22)$$

ここで,  $U$  は自明な結び目,  $L_+, L_-, L_0, L_\infty$  はある 1 点の近くで図 10 のように違っている以外はまったく同じ 4 つの絡み目である.

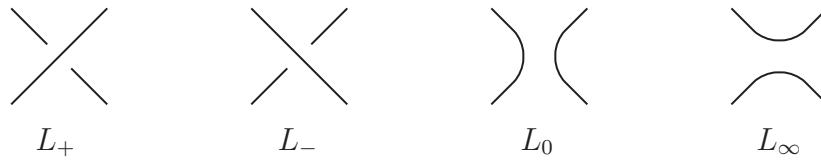


図 10: 向きの付いていないスケイン 4 つ組

Jones [15] は,  $z = (\sqrt{5}-1)/2$  における Q 多項式の特特殊値  $\rho(L) = Q(L; (\sqrt{5}-1)/2)$  に関して次の式を与えた.

$$\rho(L) = \pm\sqrt{5}^r \quad (23)$$

ただし,  $r = \dim H_1(\Sigma(L); \mathbf{Z}_5)$  である. さらに, Rong [37] は, 4 つの結び目, 絡み目  $(L_+, L_-, L_0, L_\infty)$  の Q 多項式の特特殊値の比の値は表 2 の (a)–(f) の 6 通りの場合しかないことを示した.

表 2: Q 多項式の特特殊値の比

Cases	$\rho(L_-)/\rho(L_\infty)$	$\rho(L_0)/\rho(L_\infty)$	$\rho(L_+)/\rho(L_\infty)$
(a)	1	$\sqrt{5}$	1
(b)	$\sqrt{5}$	1	-1
(c)	1	-1	-1
(d)	-1	-1	1
(e)	-1	1	$\sqrt{5}$
(f)	$\sqrt{5}^{-1}$	$\sqrt{5}^{-1}$	$\sqrt{5}^{-1}$

これを利用して, Stoimenow [40] は, 特特殊値  $\rho(L)$  の結び目解消数に関する条件を与えて, いくつかの結び目の結び目解消数を決定した.

表 2 より, 次を得る.

**定理 3.9** 2 つの絡み目  $L, L'$  がバンド手術で移り合うとき,

$$\rho(L)/\rho(L') \in \left\{ \pm 1, \sqrt{5}^{\pm 1} \right\}. \quad (24)$$

#### 4. さまざまな結び目, 絡み目の局所変形

局所変形  $T$  に対して, 結び目  $K$  と  $K'$  の間の  $T$  **ゴルディアン距離**  $d_T(K, K')$  を,  $K$  を  $K'$  に変形するための局所変形  $T$  の最小回数で定義する. また, 局所変形  $T$  が結び目解消操作のとき, 結び目  $K$  の  $T$  **結び目解消数**  $u_T(K)$  を,  $K$  と自明な結び目の間の  $T$  ゴルディアン距離で定義する. とくに,

- $SH(3)$  ゴルディアン距離は  $sd_3(K, K')$ ,  $SH(3)$  結び目解消数は  $su_3(K)$
- $H(2)$  ゴルディアン距離は  $d_2(K, K')$ ,  $H(2)$  結び目解消数は  $u_2(K)$

であらわす.

##### 4.1. $\Gamma_0$ 移動と $\Delta$ 移動

Shibuya [38] は図 11 のような隣り合った 2 個の交点を同時におこなう交差交換  $\Gamma_0$  **移動** ( $\Gamma_0$ -move) と  $\Gamma'_0$  移動を定義した.  $\Gamma'_0$  と  $\Gamma_0$  移動は同値である.

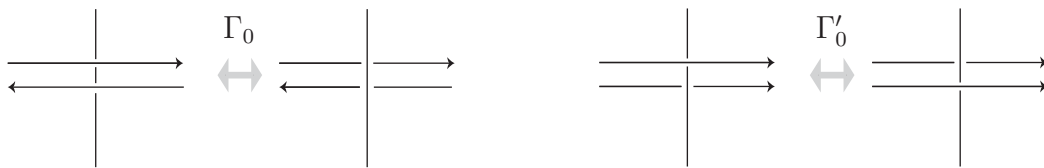


図 11:  $\Gamma_0$  移動と  $\Gamma'_0$  移動

$\Gamma_0$  移動は結び目解消操作である. 実際, 1 回の交差交換は 1 回の  $\Gamma_0$  移動で実現される (図 12). また,  $\Gamma_0$  移動は 1 回の  $SH(3)$  移動で実現される (図 13).

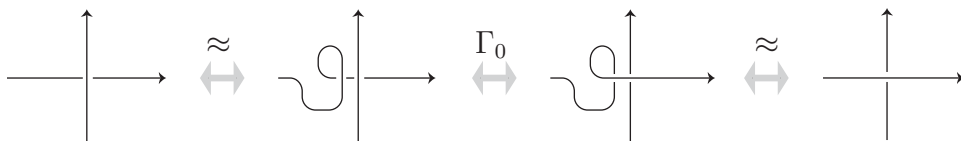


図 12: 1 回の交差交換は 1 回の  $\Gamma_0$  移動で実現される

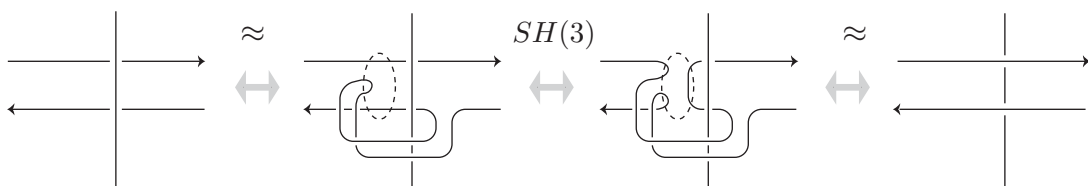


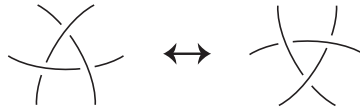
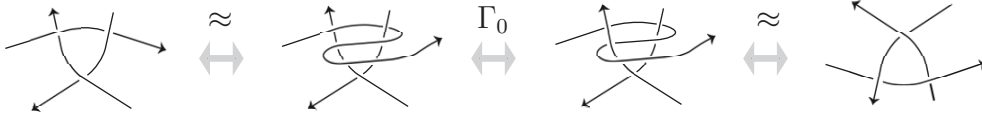
図 13: 1 回の  $\Gamma_0$  移動は 1 回の  $SH(3)$  移動で実現される

図 14 のような 3 本のひもからなるタングルの局所変形を  $\Delta$  **移動** ( $\Delta$ -move) とよぶ. この図で, 向きをどのように付けても, それらは同値な変形である ([30], [24] 参照).  $\Delta$  移動も結び目解消操作である.

1 回の  $\Delta$  移動は 1 回の  $\Gamma_0$  移動で実現される (図 13). 1 回の  $\Gamma_0$  移動は 1 回の  $SH(3)$  移動で実現される (図 15). したがって,

**命題 4.1** 結び目  $K, K'$  に対して

$$sd_3(K, K') \leq d_{\Gamma_0}(K, K') \leq d_{\Delta}(K, K') \quad (25)$$

図 14:  $\Delta$ 移動図 15: 1回の $\Delta$ 移動は1回の $\Gamma_0$ 移動で実現される

$SH(3)$  結び目解消数に関する不等式をあげる.

**命題 4.2** 結び目  $K$  に対して次が成り立つ.

$$|\sigma(K)|/2 \leq g^*(K) \leq \text{su}_3(K) \leq g(K); \quad (26)$$

$$e_m(K)/2(m-1) \leq e(K)/2 \leq \text{su}_3(K) \leq u_{\Gamma_0}(K) \leq u(K), u_{\Delta}(K). \quad (27)$$

ここで,  $g^*(K)$  は 4次元種数,  $g(K)$  は (3次元)種数,  $e_m(K)$  は  $H_1(\Sigma_m(L); \mathbf{Z})$  の生成元の最小数,  $e(K)$  は中西指数 ( $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$  加群としての  $H_1(\tilde{\Sigma}(K); \mathbf{Z})$  の生成元の最小数).

さらに,  $\Delta$  結び目解消数には次の評価式がある.

$$u_{\Delta}(K) \equiv \text{Arf}(K) \pmod{2}, \quad u_{\Delta}(K) \geq |a_2(K)| \quad (28)$$

$SH(3)$  結び目解消数を使うと良い評価を得られる場合がある.

**例 4.3** 12交点の交代結び目  $K = 12a177$  [4] に対して,  $u_{\Delta}(K) = 3$  である. まず,  $\Delta$  の印の付いた領域のまわりで  $\Delta$  移動をおこなうと  $10_{67}$  結び目になる.  $u_{\Delta}(10_{67}) = 2$  [34] なので  $u_{\Delta}(K) \leq 3$ . 逆に,  $\nabla(K) = 1 - z^2 - 3z^4 + 2z^6$  から,  $g(K) = 3$ ,  $u_{\Delta}(K) \equiv a_2(K) \equiv -1 \pmod{2}$ . 次に,  $V(K; \omega) = -3$  より, 定理 3.4 を使うと, 整合的バンド手術で自明な結び目に変形するためには, 3回以上の手術が必要なことがわかる. したがって,  $SH(3)$  移動は 2回以上必要となる.  $\text{su}_3(K) \geq 2$ . よって (27) 式より,  $u_{\Delta}(K) = 3$  を得る. さらに, 2交点\*で交差交換をおこなうとほどけるので,  $u(K) \leq 2$ . また,  $1 = |\sigma(K)|/2 \leq g^*(K) \leq \text{su}_3(K) \leq g(K)$ ,  $u(K)$  より  $\text{su}_3(K) = u(K) = 2$ .  $g^*(K) = 1$  も図のバンドの手術からわかる.

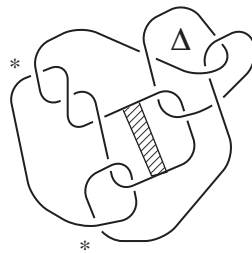


図 16: 12a177 結び目

#### 4.2. #移動とパス移動

#移動 (#-move) [28] とパス移動 (pass move) [20] はともに平行な2本のひもを同時に交差交換する局所変形である。ただし、2本のひもの向きは、#移動は同じで、パス移動は逆になっている。#移動は結び目解消操作であるが、パス移動は Arf 不変量が同じ結び目どうしでは移り合うことが知られている。

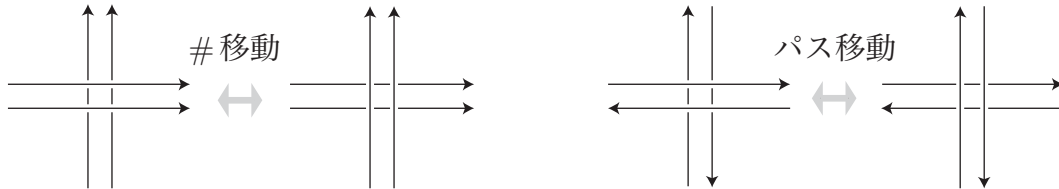


図 17: #移動とパス移動

**パス・ゴルディアン距離の評価** 図 13 と同様にすると、パス移動は 1 回の  $SH(3)$  移動で実現されることがわかる。したがって、結び目  $K, K'$  に対して、

$$sd_3(K, K') \leq d_{\text{pass}}(K, K'), \quad su_3(K) \leq u_{\text{pass}}(K). \quad (29)$$

パス・ゴルディアン距離の評価として、 $|\sigma(K) - \sigma(K')| \leq d_{\text{pass}}(K, K')$  は知られていた。さらに、 $SH(3)$  結び目解消数を使うと評価が良くなる場合がある。

**例 4.4**  $K = 10_{74}$  とする。  $\nabla(K) = 1 - 4z^4$ ,  $\sigma(K) = -2$  より、 $u_{\text{pass}}(K) \geq 1$  である。さらに、 $V(K; \omega) = -3$  より、 $2 \leq su_3(K) \leq u_{\text{pass}}(K)$  がわかる。実際に、4-move だけで  $K \rightarrow 6_1 \rightarrow U$  と変形できるので、 $su_3(K) = u_{\text{pass}}(K) = 2$  と決定できる。

**#ゴルディアン距離の評価** #移動は 2 回の  $H(2)$  移動で実現されることがわかる。したがって、結び目  $K, K'$  に対して、

$$d_2(K, K') \leq 2d_{\#}(K, K'), \quad u_2(K) \leq 2u_{\#}(K). \quad (30)$$

#ゴルディアン距離を評価するための性質として次のことが知られている。結び目  $K$  が  $K'$  から 1 回の #移動で得られるとき、

$$a_2(K) - a_2(K') \equiv 1 \pmod{2}, \quad |\sigma(K) - \sigma(K')| = 2, 4, 6. \quad (31)$$

さらに、 $H(2)$  結び目解消数を使うと評価が良くなる場合がある。

**例 4.5**  $K = 10_{103}$  (図 18) とする。  $\nabla(K) = 1 + 3z^2 + 4z^4 + 2z^6$  より、 $u_{\#}(K) \equiv a_2(K) = 3 \pmod{2}$ 。(また、 $\sigma(K) = 2$ ) よって、 $u_{\#}(K)$  は 1 以上の奇数である。一方、#移動により  $K$  は  $5_2!$  に変形でき、 $u_{\#}(5_2!) = 2$  が知られているので、 $u_{\#}(K) \leq 3$ 。ところで、 $\rho(K) = -5$  より、 $3 \leq u_2(K) \leq 2u_{\#}(K)$  [19]。したがって、 $u_{\#}(K) = 3$  と決定できる。

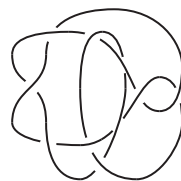


図 18:  $10_{103}$  結び目

## 参考文献

- [1] Y. Abe and T. Kanenobu. Unoriented band surgery on knots and links. arXiv:1112.2449v1 [math.GT], 2011.
- [2] J. S. Birman and T. Kanenobu. Jones' braid-plat formula and a new surgery triple. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102:687–695, 1988.
- [3] R. D. Brandt, W. B. R. Lickorish, and K. C. Millett. A polynomial invariant for unoriented knots and links. *Invent. Math.*, 84(3):563–573, 1986.
- [4] J. C. Cha and C. Livingston. Knotinfo: an online table of knot invariants. <http://www.indiana.edu/~knotinfo/>.
- [5] J. H. Conway. An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. In *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*, pages 329–358. Pergamon, Oxford, 1970.
- [6] Isabel Darcy, Kai Ishihara, Ram. K. Medikondur, and Koya Shimokawa. Rational tangle surgery and Xer recombination on catenanes. *Algebr. Geom. Topol.*, 12:1183–1210, 2012.
- [7] Y. Diao, C. Ernst, and A. Montemayor. Nullification of knots and links. *J. Knot Theory Ramifications*, 21(6):1250046 (24 pages), 2012.
- [8] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(2):239–246, 1985.
- [9] C. A. Giller. A family of links and the Conway calculus. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 270(1):75–109, 1982.
- [10] C. F. Ho. A polynomial invariant for knots and links—preliminary report. *Abstracts Amer. Math. Soc.*, 6:300, 1985.
- [11] J. Hoste, Y. Nakanishi, and K. Taniyama. Unknotting operations involving trivial tangles. *Osaka J. Math.*, 27(3):555–566, 1990.
- [12] Kai Ishihara and Dorothy Buck. Nullification distance between links with small crossing numbers. pages 182–188, 2011. <http://www.math.twcu.ac.jp/~mok4/index.html>.
- [13] Kai Ishihara and Koya Shimokawa. Band surgeries between knots and links with small crossing numbers. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 191, 2011.
- [14] V. F. R. Jones. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. of Math. (2)*, 126(2):335–388, 1987.
- [15] V. F. R. Jones. On a certain value of the Kauffman polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 125(3):459–467, 1989.
- [16] T. Kanenobu.  $H(2)$ -Gordian distance of knots. *J. Knot Theory Ramifications*, 20(6):813–835, 2011.
- [17] T. Kanenobu. Band surgery on knots and links, II. *J. Knot Theory Ramifications*, 21(9):1250086 (22 pages), 2012.
- [18] T. Kanenobu.  $SH(3)$ -move and other local moves on knots. <http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/math/OCAMI/preprint/index.html>, 2012.
- [19] T. Kanenobu and Y. Miyazawa.  $H(2)$ -unknotting number of a knot. *Commun. Math. Res.*, 25(5):433–460, 2009.
- [20] Louis H. Kauffman. The Arf invariant of classical knots. In *Combinatorial methods in topology and algebraic geometry (Rochester, N.Y., 1982)*, volume 44 of *Contemp. Math.*, pages 101–116. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [21] Akio Kawauchi. *A survey of knot theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. Translated and revised from the 1990 Japanese original by the author.
- [22] W. B. R. Lickorish and K. C. Millett. Some evaluations of link polynomials. *Comment.*

- Math. Helv.*, 61(3):349–359, 1986.
- [23] W. B. Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory*, volume 175 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [24] S. V. Matveev. Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology spheres. *Mat. Zametki*, 42(2):268–278, 345, 1987.
- [25] Y. Miyazawa. Gordian distance and polynomial invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 20:895–907, 2011.
- [26] Yasuyuki Miyazawa. The Jones polynomial of an unknotting number one knot. *Topology Appl.*, 83(3):161–167, 1998.
- [27] Anthony Montemayor. On nullification of knots and links. Master’s thesis, Western Kentucky Univ., 2012.
- [28] H. Murakami. Some metrics on classical knots. *Math. Ann.*, 270(1):35–45, 1985.
- [29] H. Murakami. A recursive calculation of the Arf invariant of a link. *J. Math. Soc. Japan*, 38(2):335–338, 1986.
- [30] Hitoshi Murakami and Yasutaka Nakanishi. On a certain move generating link-homology. *Math. Ann.*, 284(1):75–89, 1989.
- [31] K. Murasugi. On a certain numerical invariant of link types. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117:387–422, 1965.
- [32] K. Murasugi. On the signature of links. *Topology*, 9:283–298, 1970.
- [33] K. Murasugi. *Knot theory & its applications*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1993 Japanese original by Bohdan Kurpita, Reprint of the 1996 translation [MR1391727].
- [34] K. Nakamura, Y. Nakanishi, and Y. Uchida. Delta-unknotting number for knots. *J. Knot Theory Ramifications*, 7(5):639–650, 1998.
- [35] Józef H. Przytycki and Paweł Traczyk. Invariants of links of Conway type. *Kobe J. Math.*, 4(2):115–139, 1988.
- [36] R. A. Robertello. An invariant of knot cobordism. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18:543–555, 1965.
- [37] Y. W. Rong. The Kauffman polynomial and the two-fold cover of a link. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(1):321–331, 1991.
- [38] Tetsuo Shibuya. Local moves and 4-genus of knots. *Mem. Osaka Inst. Tech. Ser. A*, 45(1):1–10, 2000.
- [39] Koya Shimokawa and Mariel Vazquez. DNA and the knot theory. *Sūgaku*, 63(2):237–242, 2011.
- [40] A. Stoimenow. Polynomial values, the linking form and unknotting numbers. *Math. Res. Lett.*, 11(5-6):755–769, 2004.
- [41] K. Taniyama and A. Yasuhara. On  $C$ -distance of knots. *Kobe J. Math.*, 11(1):117–127, 1994.
- [42] Paweł Traczyk. A criterion for signed unknotting number. In *Low-dimensional topology (Funchal, 1998)*, volume 233 of *Contemp. Math.*, pages 215–220. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [43] 吉田正明. On shortest pathways of unlinking by xer-dif-fts. pages 21–25, 2011. <http://www.math.twcu.ac.jp/~mok4/index.html>.

# MONOTONIC NORMAL 空間と 種々の位相空間との積の位相的性質について

平田 康史 (神奈川大学)  
家本 宣幸 (大分大学)  
矢島 幸信 (神奈川大学)

## 1. INTRODUCTION AND BACKGROUNDS

All spaces are regular  $T_1$ . A space  $X$  is said to be *normal* if every disjoint pair  $\{F, H\}$  of closed subsets can be separated, that is, there are disjoint open sets  $U(F)$  and  $U(H)$  with  $F \subset U(F)$  and  $H \subset U(H)$ . It is well known that all compact spaces and all metrizable spaces are normal and these spaces have other nice topological properties listed below.

**Definition 1.1.** Recall the following definitions.

- A space  $X$  is *collectionwise normal* if every discrete collection  $\mathcal{F}$  of closed sets is separated, that is, there is a pairwise disjoint collection  $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$  of open sets with  $F \subset U(F)$  for every  $F \in \mathcal{F}$ , where a collection  $\mathcal{F}$  of subsets of  $X$  is *discrete* if for every  $x \in X$ , there is a neighborhood  $U$  of  $X$  such that  $\{F \in \mathcal{F} : U \cap F \neq \emptyset\}$  is at most one.
- A space  $X$  is (*countably*) *paracompact* if for every (countable) open cover  $\mathcal{U}$  of  $X$ , there is a locally finite open refinement  $\mathcal{V}$  of  $\mathcal{U}$ , that is, for every  $x \in X$  there is a neighborhood  $U$  of  $X$  such that  $\{V \in \mathcal{V} : U \cap V \neq \emptyset\}$  is finite, where an open cover  $\mathcal{V}$  is a refinement of  $\mathcal{U}$  if for every  $V \in \mathcal{V}$  there is  $U \in \mathcal{U}$  with  $V \subset U$ .
- A space  $X$  is (*countably*) *metacompact* if for every (countable) open cover  $\mathcal{U}$  of  $X$ , there is a point finite open refinement  $\mathcal{V}$  of  $\mathcal{U}$ , that is, for every  $x \in X$ ,  $(\mathcal{V})_x$  is finite, where  $(\mathcal{V})_x = \{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ .
- A space  $X$  is *shrinking* if every open cover  $\mathcal{U}$  of  $X$  has a closed shrinking  $\{F(U) : U \in \mathcal{U}\}$  of  $\mathcal{U}$ , that is, it is a closed cover with  $F(U) \subset U$  for every  $U \in \mathcal{U}$ .
- A space  $X$  is *orthocompact* if for every open cover  $\mathcal{U}$  of  $X$ , there is an interior preserving open refinement  $\mathcal{V}$  of  $\mathcal{U}$ , that is, for every  $x \in X$ ,  $\bigcap (\mathcal{V})_x$  is a neighborhood of  $x$ .

It is well known that



2

- All subspaces of metrizable spaces are metrizable but subspaces of compact spaces need not be compact.
- Products of countably many metrizable spaces are also metrizable and products of arbitrary many compact spaces are compact.
- Metrizable spaces and compact spaces are paracompact.
- Paracompact spaces are collectionwise normal, shrinking and metacompact.
- Shrinking spaces are normal and countably paracompact.
- Collectionwise normal spaces are normal.
- Metacompact spaces are countably metacompact and orthocompact.

Also remark that

- Product spaces of arbitrary many regular  $T_1$  spaces are also regular  $T_1$ .

On 1950s, the following problem was discussed:

**Problem 1.2.** If  $X$  is normal, then so is  $X \times \mathbb{I}$ ? Here  $\mathbb{I}$  denotes the unit interval  $[0, 1]$  of the real line  $\mathbb{R}$ .

Nowadays this problem is known as to “Dowker problem”. Dowker proved in 1951:

**Theorem 1.3** (Dowker’s Theorem [4]). *For a normal space  $X$ ,  $X \times \mathbb{I}$  is normal if and only if  $X$  is countably paracompact.*

A normal space  $X$  is said to be *Dowker* if it is not countably paracompact, equivalently  $X \times \mathbb{I}$  is not normal. After many mathematicians constructed various Dowker spaces assuming some additional set theoretical assumptions, finally in 1978, Rudin terminated the problem:

**Theorem 1.4** (Rudin’s Theorem [13]). *There is a Dowker space without any other additional set theoretical assumptions.*

Dowker’s Theorem has an interesting analogy:

**Theorem 1.5** (Scott’s Theorem [14]). *For a space  $X$ ,  $X \times \mathbb{I}$  is orthocompact if and only if  $X$  is countably metacompact.*

Also the following result is well-known:

**Theorem 1.6.** *Let  $\beta X$  denotes the Stone-Čech compactification of a completely regular space  $X$ . Then:*

- (a)  $X \times \beta X$  is normal if and only if  $X$  is paracompact [12, Tamano].
- (b)  $X \times \beta X$  is orthocompact if and only if  $X$  is metacompact [5, Junnila].

Since (countably) paracompact spaces are (countably) metacompact, we have;

- If  $X \times \mathbb{I}$  is normal, then it is orthocompact.
- If  $X \times \beta X$  is normal, then it is orthocompact.

So we naturally have the following conjecture:

**Conjecture A.** In general, normality of a product space  $X \times Y$  imply its orthocompactness.

On the other hand, there are many pairs of normal spaces  $X$  and  $Y$  such that  $X \times Y$  is not normal. For instance,

- $X = Y = \mathbb{S}$ , where  $\mathbb{S}$  is the Sorgenfrey line, that is,  $\mathbb{S} = \mathbb{R}$  as the base set and its topology generated by half open intervals  $[a, b)$ 's with  $a < b$ .
- $X = \omega_1$  and  $Y = \omega_1 + 1$ , where  $\omega_1$  denotes the first uncountable ordinal numbers with the usual order topology.

Remark that intuitively ordinal numbers are inductively constructed:

- the first ordinal is 0,
- add a next ordinal  $\alpha + 1$  after an ordinal  $\alpha$  at successor stage, like:  $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ,
- add a new ordinal at limit stage, like:  $0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega$ .

Repeating this construction, we get ordinal numbers

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega_1, \omega_1 + 1, \dots$$

where  $\omega$  is the first infinite ordinal and  $\omega_1$  is the first uncountable ordinal. We can consider every ordinal is the set of its all smaller ordinals, that is  $1 = \{0\}$ ,  $2 = \{0, 1\}$ ,  $3 = \{0, 1, 2\}$ ,  $\dots$ ,  $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$ ,  $\omega_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}$  and  $\omega_1 + 1 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega_1\}$ . Thus every ordinal number is considered as linearly ordered set with the usual order topology, that is, the topology generated by open intervals  $(a, b)$ 's with  $a < b$ . Remark that  $\omega_1 + 1$  is compact but  $\omega_1$  is not paracompact.

Generally a linearly ordered set with the usual order topology is said to be a *Linearly Ordered Topological Space* (LOTS). Also a subspace of a LOTS is said to be a *Generalized Ordered space* (GO-space). The Sorgenfrey line  $\mathbb{S}$  is a GO-space but not a LOTS.

For an ordinal  $\alpha$ ,  $\text{cf } \alpha$  denotes the cofinality of  $\alpha$ , that is,

$$\text{cf } \alpha = \min\{|A| : A \text{ is unbounded subset of } \alpha\},$$

where  $|A|$  denotes the cardinality of  $A$ . An ordinal  $\alpha$  with  $\text{cf } \alpha = \alpha$  is said to be a *regular cardinal*.

These twenty years, we have investigated topological properties of the products of subspaces of an ordinal. For example we got:

**Theorem 1.7** ([6, 7, 9]). *Let  $X$  and  $Y$  be subspaces of an ordinal. Then the following are equivalent:*

- (a)  $X \times Y$  is orthocompact.
- (b)  $X \times Y$  is normal and rectangular.

4

- (c)  $X \times Y$  is shrinking.
- (d)  $X \times Y$  is collectionwise normal.
- (e)  $X \times Y$  is normal.

Here a product space  $X \times Y$  said to be *rectangular* if every cozero cover  $\{U_0, U_1\}$  of  $X \times Y$  has a locally finite refinement  $\mathcal{V}$  such that every  $V \in \mathcal{V}$  is cozero and represented as  $V = \pi_X[V] \times \pi_Y[V]$ , where  $\pi_X$  and  $\pi_Y$  are the usual projection maps. Moreover a subset  $U$  of  $X$  is said to be *cozero* if  $U = f^{-1}[(0, 1]]$  for some continuous map  $f : X \rightarrow \mathbb{I}$ . Note that the notion of rectangularity is useful when we calculate the dimension of product spaces and that if  $Y$  is compact, then  $X \times Y$  is rectangular for every space  $X$  (see [3]). Also we got:

**Theorem 1.8** ([9]). *Let  $X$  and  $Y$  be subspaces of an ordinal. Then  $X \times Y$  is rectangular if and only if  $X \times Y$  is countably paracompact.*

Therefore by two Theorems above, we have:

**Corollary 1.9.** *Let  $X$  and  $Y$  be subspaces of an ordinal. If  $X \times Y$  is normal, then it is rectangular.*

Also remark that  $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$  is rectangular but not normal. So the following conjecture seems to be true:

**Conjecture B.** In general, normality of a product space  $X \times Y$  implies its rectangularity.

However the following immediately gives a negative answer to this conjecture:

**Theorem 1.10** (Ohta's Theorem [11]). *If a space  $X$  is normal but not paracompact, then there is an almost discrete space  $Y$ , that is,  $Y$  has exactly one non-isolated point, such that  $X \times Y$  is normal but not rectangular. In particular, there is an almost discrete space  $Y_{\omega_1}$  such that  $\omega_1 \times Y_{\omega_1}$  is normal but not rectangular.*

Back to Conjecture A, we have the following unexpected result:

**Theorem 1.11** ([8]). *Let  $X$  be a paracompact space and  $\kappa$  a regular uncountable cardinal. If  $X \times \kappa$  is orthocompact, then it is normal.*

Also note that the following shows the implication of the above theorem is not reversible.

**Example 1.12** (Aoki's example [1]).  $\alpha D(\omega_1) \times \omega_1$  is normal but not orthocompact, where  $\alpha D(\omega_1)$  denotes the one point compactification of the discrete space  $D(\omega_1)$  of size  $\omega_1$ .

Also note that  $\alpha D(\omega_1)$  is almost discrete. It is a well-known wide class of (so called monotonically normal) spaces containing the class of metrizable spaces, the class of

GO-spaces and the class of almost discrete spaces. Yajima has been studied topological properties of product spaces of monotonically normal spaces with various special factors, e.g. compact factors.

**Theorem 1.13** ([16]). *If a product space  $X \times Y$  of a monotonically normal space  $X$  and a compact space  $Y$  is orthocompact, then it is normal.*

It should be also noted by Example 1.12 that the converse of Theorem 1.13 is not true.

Also remark:

**Theorem 1.14** ([10] etc, see [16]). *Let  $X$  be a monotonically normal space and  $Y$  a compact space. Then the following are equivalent:*

- (a)  $X \times Y$  is normal.
- (b)  $X \times Y$  is shrinking.
- (c)  $X \times Y$  is collectionwise normal.

Now we give the definition of monotonically normal spaces.

**Definition 1.15** (Monotonically normal). A space  $X$  is said to be *monotonically normal* if for any two disjoint closed sets  $E$  and  $F$  in  $X$ , one can assign an open set  $M(E, F)$ , satisfying that

- (i)  $E \subset M(E, F) \subset \text{Cl } M(E, F) \subset X \setminus F$ , where  $\text{Cl}$  denotes the closure,
- (ii) if  $E'$  and  $F'$  are disjoint closed sets in  $X$  with  $E \subset E'$  and  $F \supset F'$  in  $X$ , then  $M(E, F) \subset M(E', F')$  holds.

Obviously (i) ensures that monotonically normal spaces are normal and (ii) says that the operator  $M$  is monotonic. Moreover these spaces have richer properties, e.g.:

- Monotonically normal spaces are collectionwise normal, countably paracompact and shrinking.
- All subspaces of monotonically normal spaces are also monotonically normal.
- Metrizable spaces, GO-spaces and almost discrete spaces are orthocompact and monotonically normal.

Later we will also consider whether monotonically normal spaces are orthocompact or not. Both metrizable spaces and almost discrete spaces are paracompact. But GO-spaces need not be paracompact, for example  $\omega_1$ .

Balogh and Rudin gave a strong tool for monotonically normal spaces. To describe this tool, we need some notations.

- For a regular uncountable cardinal  $\kappa$ , a subset  $S$  of  $\kappa$  is said to be *stationary* if  $S \cap C \neq \emptyset$  for every closed unbounded (club) set  $C$  of  $\kappa$ .
- For a cover  $\mathcal{U}$  of  $X$ , a collection  $\mathcal{V}$  of subsets of  $X$  is said to be a *partial refinement* of  $\mathcal{U}$  if each member of  $\mathcal{V}$  is contained in some member of  $\mathcal{U}$ . Here we do not require that  $\mathcal{V}$  covers  $X$ .

6

- A collection  $\mathcal{V}$  of subsets of  $X$  is said to be  $\sigma$ -disjoint if  $\mathcal{V}$  is represented as  $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n$ , where each  $\mathcal{V}_n$  is pairwise disjoint.

**Theorem 1.16** (Balogh and Rudin's Theorem [2]). *Every monotonically normal space  $X$  has the following property (BR).*

(BR) *For every open cover  $\mathcal{U}$  of  $X$ , there are a  $\sigma$ -disjoint partial refinement  $\mathcal{V}$  of  $\mathcal{U}$  by open sets in  $X$  and a discrete collection  $\mathcal{F}$  of closed sets each of which is homeomorphic to some stationary set in a regular uncountable cardinal such that  $X \setminus \bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{F}$ .*

## 2. RESULTS

Remember that metrizable spaces, GO-spaces and almost discrete spaces are orthocompact and monotonically normal. So it is natural to ask whether monotonically normal spaces are orthocompact. But the answer is negative.

**Theorem 2.1** (Machine). *There is a machine constructing a monotonically normal space which is not orthocompact from a monotonically normal space which is not paracompact (e.g.,  $\omega_1$ ).*

Next we investigate whether a product space  $X \times Y$  has a property  $P$  in the following various cases:

- $P$  is normal, orthocompact, rectangular,...etc.
- $X$  is a monotonically normal space, a GO-space, ...etc.
- $Y$  is a subspace of ordinal, a compact space, a space defined by a topological game, an almost discrete space,...etc.

In some cases, we can give necessary and sufficient conditions on  $X$  and  $Y$  in order that  $X \times Y$  has a property  $P$ . To describe such conditions, we need some notation.

**Definition 2.2** (Stationary subspaces). Let  $X$  be a space.

- For a regular uncountable cardinal  $\kappa$ , let

$$\mathcal{S}(X, \kappa) = \{E \subset X : E \text{ is a closed set homeomorphic to some stationary set in } \kappa. \}.$$

- Let

$$\Lambda(X) = \{\kappa : \kappa \text{ is a regular uncountable cardinal with } \mathcal{S}(X, \kappa) \neq \emptyset. \},$$

$$\mathcal{S}(X) = \bigcup_{\kappa \in \Lambda(X)} \mathcal{S}(X, \kappa).$$

- For every  $E \in \mathcal{S}(X, \kappa)$  with  $\kappa \in \Lambda(X)$ , fix a stationary set  $S_E$  of  $\kappa$  which is homeomorphic to  $E$ .

Remark that a monotonically normal space  $X$  with  $\mathcal{S}(X) = \emptyset$  is paracompact. Through our results, the most basic and important result is following;

**Lemma 2.3** (Structural Lemma). *Let  $X$  be a monotonically normal space and  $\mathcal{U}$  an open cover of  $X$ . Then  $\mathcal{U}$  has a locally finite open refinement iff every  $E \in \mathcal{S}(X, \kappa)$  with  $\kappa \in \Lambda(X)$  is almost contained in some member  $U \in \mathcal{U}$ , that is,  $|E \setminus U| < |E|$ .*

The proof of this Lemma is essentially used the property BR above.

For a subset  $S$  of a regular uncountable cardinal  $\kappa$ ,  $\text{Lim}(S)$  denotes the set of all limit point of  $S$  in  $\kappa$ , that is,  $\text{Lim}(S) = \{\alpha \in \kappa : \alpha = \sup(S \cap \alpha)\}$ .

**Definition 2.4** (Neighborhood properties). Let  $X$  be a space with  $x \in X$  and  $S$  a subset of a regular uncountable cardinal  $\kappa$ .

- $X$  has *orthocaliber*  $\kappa$  at  $x$  if for every collection  $\{V_\alpha : \alpha \in \kappa\}$  of neighborhoods of  $x$ , there is a subset  $T$  of  $\kappa$  with  $|T| = \kappa$  such that  $\bigcap_{\alpha \in T} V_\alpha$  is a neighborhood of  $x$ .
- $X$  has the  *$\kappa$ -decreasing open preserving* ( $\kappa$ -dop) property at  $x$  if for every decreasing sequence  $\{V_\alpha : \alpha \in \kappa\}$  of neighborhoods of  $x$ ,  $\bigcap_{\alpha \in \kappa} V_\alpha$  is a neighborhood of  $x$ .
- $X$  has the  *$S$ -continuous decreasing clopen preserving* ( $S$ -codecop) property at  $x$  if for every continuous decreasing sequence  $\{V_\alpha : \alpha \in S\}$  of clopen neighborhoods of  $x$ ,  $\bigcap_{\alpha \in S} V_\alpha$  is a neighborhood of  $x$ , where a decreasing sequence  $\{V_\alpha : \alpha \in S\}$  is said to be *continuous* if  $V_\alpha = \bigcap_{\beta \in S \cap \alpha} V_\beta$  for every  $\alpha \in S \cap \text{Lim}(S)$ .
- $X$  has the  *$S$ -decreasing open continuously shrinking* ( $S$ -docs) property at  $x$  if for every decreasing sequence  $\{V_\alpha : \alpha \in S\}$  of neighborhoods of  $x$ , there is a continuous sequence  $\{F_\alpha : \alpha \in S\}$  of closed neighborhoods of  $x$  with  $F_\alpha \subset V_\alpha$  for every  $\alpha \in S$ .

These definitions immediately yield:

**Lemma 2.5.** *Let  $X$  be a space with  $x \in X$  and  $\kappa$  a regular uncountable cardinal.*

- (1) *If  $X$  has orthocaliber  $\kappa$  at  $x$ , then it has the  $\kappa$ -dop property at  $x$ .*
- (2) *If  $X$  has the  $\kappa$ -dop property at  $x$ , then it has the  $S$ -codecop and  $S$ -docs property at  $x$  for every unbounded subset  $S$  of  $\kappa$ .*

When  $S$  is a stationary set, we have:

**Lemma 2.6.** *Let  $X$  be a space with  $x \in X$  and  $S$  a stationary set in a regular uncountable cardinal  $\kappa$ .*

- (1) *If  $X \times S$  is orthocompact, then  $X$  has orthocaliber  $\kappa$  at every point in  $X$ .*
- (2) *If  $X \times S$  is normal and rectangular, then  $X$  has the  $\kappa$ -dop property at every point in  $X$ .*
- (3) *If  $X \times S$  is rectangular, then  $X$  has the  $S$ -codecop property at every point in  $X$ .*
- (4) *If  $X \times S$  is normal, then  $X$  has the  $S$ -docs property at every point in  $X$ .*

8

**Definition 2.7** (Product conditions). For two spaces  $X$  and  $Y$ ,

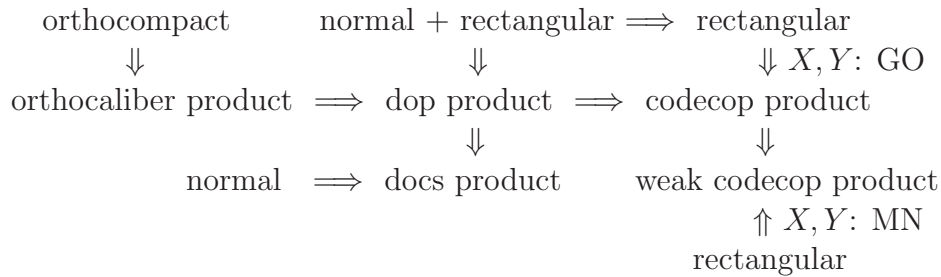
- (A)  $X \times Y$  is called an orthocaliber product (a dop product) if the following three conditions are true:
- (1)  $S_E \cap S_F$  is stationary for every  $E \in \mathcal{S}(X, \kappa)$  and  $F \in \mathcal{S}(Y, \kappa)$  with  $\kappa \in \Lambda(X) \cap \Lambda(Y)$ .
  - (2)  $Y$  has orthocaliber  $\kappa$  (the  $\kappa$ -dop property) at every point in  $Y$  for all  $\kappa \in \Lambda(X)$ .
  - (3)  $X$  has orthocaliber  $\kappa$  (the  $\kappa$ -dop property) at every point in  $X$  for all  $\kappa \in \Lambda(Y)$ .
- (B)  $X \times Y$  is called a docs (codecop) product if the following three conditions are true:
- (1)  $S_E \cap S_F$  is stationary for every  $E \in \mathcal{S}(X, \kappa)$  and  $F \in \mathcal{S}(Y, \kappa)$  with  $\kappa \in \Lambda(X) \cap \Lambda(Y)$ .
  - (2)  $Y$  has the  $S_E$ -docs property (the  $S_E$ -codecop property) at every point in  $Y$  for all  $E \in \mathcal{S}(X, \kappa)$  with  $\kappa \in \Lambda(X)$ .
  - (3)  $X$  has the  $S_F$ -docs property (the  $S_F$ -codecop property) at every point in  $X$  for all  $F \in \mathcal{S}(Y, \kappa)$  with  $\kappa \in \Lambda(Y)$ .
- (C)  $X \times Y$  is called a weak codecop product if the following two conditions are true:
- (1)  $Y$  has the  $\kappa$ -codecop property at every point in  $Y$  for all  $\kappa \in \Lambda(X)$ .
  - (2)  $X$  has the  $\kappa$ -codecop property at every point in  $X$  for all  $\kappa \in \Lambda(Y)$ .

Using Lemma 2.6, we have:

**Theorem 2.8** (General implications). *Let  $X$  and  $Y$  be spaces.*

- (1) *If  $X \times Y$  is orthocompact, then it is an orthocaliber product.*
- (2) *If  $X \times Y$  is normal and rectangular, then it is a dop product.*
- (3) *If  $X \times Y$  is normal, then it is a docs product.*
- (4) *If  $X$  and  $Y$  are monotonically normal spaces and  $X \times Y$  is rectangular, then it is a weak codecop product.*
- (5) *If  $X$  and  $Y$  are GO-spaces and  $X \times Y$  is rectangular, then it is a codecop product.*

The following implications hold for a product space  $X \times Y$ :



When the factor space  $Y$  is a subspace of an ordinal, we have:

**Theorem 2.9** (Ordinal subspaces). *Let  $X$  be a monotonically normal space and  $Y$  a subspace of an ordinal. Then:*

- (a)  $X \times Y$  is orthocompact iff  $X$  is orthocompact and  $X \times Y$  is an orthocaliber product.
- (b)  $X \times Y$  is normal and rectangular iff  $X \times Y$  is a dop product.
- (c) If  $X \times Y$  is normal and rectangular, then it is collectionwise normal and shrinking.

Hence under the assumption of Theorem 2.9, if  $X \times Y$  is orthocompact, then it is normal and rectangular. In the case that  $X$  is a GO-space, we have:

**Theorem 2.10** (GO-spaces). *Let  $X$  be a GO-space and  $Y$  a subspace of an ordinal. Then:*

- (a)  $X \times Y$  is orthocompact iff it is normal.
- (b)  $X \times Y$  is rectangular iff it is countably paracompact.

Hence under the assumption of Theorem 2.10, if  $X \times Y$  is normal, then it is rectangular.

When the factor space  $Y$  is compact, we can get two characterizations of  $X \times Y$  being normal and being orthocompact, respectively, as follows.

**Theorem 2.11** (Compact spaces). *Let  $X$  be a monotonically normal space and  $Y$  a compact space.*

- (A) *The following are equivalent.*
  - (a)  $X \times Y$  is orthocompact.
  - (b)  $X$  is orthocompact and  $X \times Y$  is an orthocaliber product.
  - (c)  $X$  is orthocompact and  $E \times Y$  is orthocompact for each  $E \in \mathcal{S}(X)$ .
  - (d)  $X$  is orthocompact and  $Y$  has orthocaliber  $\kappa$  for each  $\kappa \in \Lambda(X)$ .
- (B) *The following are equivalent.*
  - (a)  $X \times Y$  is normal.
  - (b)  $X \times Y$  is a dop product.
  - (c)  $X \times Y$  is a docs product.
  - (d)  $E \times Y$  is normal for each  $E \in \mathcal{S}(X)$ .
  - (e)  $Y$  has the  $\kappa$ -dop property for each  $\kappa \in \Lambda(X)$ .
  - (f)  $Y$  has the  $S_E$ -docs property for each  $E \in \mathcal{S}(X)$ .

This immediately yields Theorem 1.13 as a corollary.

Next we consider the case that the factor space  $Y$  has a property defined by a topological game which is weaker than both compactness and almost discreteness.



**Definition 2.12** (Topological games). Let  $\mathbb{DC}$  denotes the class of all spaces each of which has a discrete cover by compact sets. Let describe a topological game  $G(\mathbb{DC}, Y)$  defined by Telgársky [15], which is played by two persons of Players  $I$  and  $II$ .

A sequence  $\langle E_0, F_0, E_1, F_1, \dots \rangle$  of closed sets in a space  $Y$  is a *play* of  $G(\mathbb{DC}, Y)$  if it has the following rules: for each  $n \in \omega$ , where  $F_{-1} = Y$ ,

- (1)  $E_n$  is a choice of Player  $I$ ,
- (2)  $F_n$  is a choice of Player  $II$ ,
- (3)  $E_n \in \mathbb{DC}$ ,
- (4)  $E_n \cup F_n \subset F_{n-1}$ ,
- (5)  $E_n \cap F_n = \emptyset$ .

Player  $I$  wins this play if  $\bigcap_{n \in \omega} F_n = \emptyset$ . Otherwise, Player  $II$  wins it.

Remark that if  $Y$  is a compact space or an almost discrete space (more generally a space having a  $\sigma$ -closure preserving cover by compact sets), then Player  $I$  has a winning strategy in  $G(\mathbb{DC}, Y)$ .

**Theorem 2.13** (Spaces defined by topological games). *Let  $X$  be a monotonically normal space and  $Y$  a paracompact space with a winning strategy for Player  $I$  in the game  $G(\mathbb{DC}, Y)$ . Then:*

- (a)  $X \times Y$  is orthocompact iff  $X$  is orthocompact and  $X \times Y$  is an orthocaliber product.
- (b) If  $X$  is orthocompact, then  $X \times Y$  is normal and rectangular iff  $X \times Y$  is a dop product.

Hence under the assumption of Theorem 2.13, if  $X \times Y$  is orthocompact, then it is normal and rectangular. We also constructed an example:

**Example 2.14.** There is a space which witnesses that the assumption “ $X$  is orthocompact” in (b) of the Theorem above cannot be removed.

On Conjecture B, we have the following unexpected result:

**Theorem 2.15** (Almost discrete spaces). *Let  $X$  be a monotonically normal space and  $Y$  an almost discrete space. If  $X \times Y$  is rectangular, then it is normal.*

Remember that the product  $\omega_1 \times Y_{\omega_1}$  described in Theorem 1.10 is normal but not rectangular.

## REFERENCES

- [1] Y. Aoki, *Orthocompactness of inverse limits and products*, Tsukuba J. Math., **4** (1980), 241–255.
- [2] Z. Balogh and M. E. Rudin, *Monotone Normality*, Topology and Appl., **47** (1992), 115–127.
- [3] T. Chiba and K. Chiba, *Q-paracompactness and closed mappings*, Sci. Rep. Tokyo Kyouiku Daigaku Sect. A **11** (1972), 159–162.
- [4] C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canadian J. Math. **3** (1951), 219–224.

- [5] H. J. K. Junnila, *Metacompactness, paracompactness, and interior-preserving open covers*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 373–385.
- [6] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Topology and Appl. **45** (1992), 245–260.
- [7] N. Kemoto and Y. Yajima, *Orthocompactness in products*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 407–422.
- [8] N. Kemoto and Y. Yajima, *Orthocompactness and normality of products with a cardinal factor*, Topology and Appl. **49** (1993), 141–148.
- [9] N. Kemoto and Y. Yajima, *Rectangular products with ordinal factors*, Topology Appl. **154** (2007), 758–770.
- [10] Z. Lazarevic, *Shrinking in perfect preimages of shrinking spaces*, Topology Appl. **71** (1996), 167–178.
- [11] H. Ohta, *On normal non-rectangular products*, Quart. J. Math. **32** (1981), 339–344.
- [12] H. Tamano, *On compactifications*, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 161–193.
- [13] M. E. Rudin,  *$\kappa$ -Dowker spaces*, Czechoslovak Math. J., **28** (1978), 324–326.
- [14] B. M. Scott, *Some "almost-Dowker" spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), 359–364.
- [15] R. Telgársky, *Spaces defined by topological games*, Fund. Math. **88** (1975), 193–223.
- [16] Y. Yajima, *Normality of products of monotonically normal spaces with compact spaces*, Topology and Appl. **158** (2011), 2085–2089.
- [17] Y. Yajima, *Products of monotonically normal spaces with factors defined by topological games*, Topology and Appl. **159** (2012), 1223–1235.



## 3 次元開多様体上の絡み目と平面への沈め込み

三好 重明 (中央大学理工学部)

### 1 序

以下、断らない限り滑らかな圏で議論する。また、全ての多様体は向き付け可能であるとする。  $n$  次元多様体  $M$  上のベクトル場  $X$  に対して、  $n - 1$  個の独立な第一積分  $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) が存在する場合を考える。ここで、  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  が  $X$  の第一積分であるとは  $f$  が  $X$  の各積分曲線に沿って一定値を取ることをいう。このとき、  $n - 1$  個の独立な第一積分を並べる事により  $M$  から  $\mathbb{R}^{n-1}$  への沈め込み  $(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  が得られ、  $X$  の各積分曲線はその沈め込みの 1 点の逆像である。 A. F. Costa, F. G. Gascon 及び A. Gonzalez-Lopez [CGG-L] は  $M$  が  $n$  次元ユークリッド空間の場合に上のような自励系微分方程式 (即ち、時間に依存しないベクトル場) を考察し、  $n \geq 3$  のとき、積分曲線の位相型として円周と直線の 2 種類が混在し得る事を示した。そして  $n = 3$  のとき、或る 1 点の逆像 (以下、繊維と呼ぶ) が非自明の結び目となっているような沈め込み  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が存在するかどうかを open problem として問うた。この問に対して渡邊展也は次の肯定的解答を得た。

**定理 1.1** ([Wa]) 任意に与えられた絡み目  $L \subset \mathbb{R}^3$  に対し、沈め込み  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  であって  $\varphi^{-1}(0)$  のコンパクトな連結成分の合併が与えられた絡み目  $L$  と一致するものが存在する。

さらに講演者は 3 次元多様体の場合に拡張し、満足すべき「解答」を得た (積りであった)。1 次元整係数の局所有限無限チェインのホモロジー群を  $H_1^\infty(-; \mathbb{Z})$  によって表す。

**「定理」 1.2** ([M1])  $L$  を向き付けられた 3 次元開多様体  $M$  内の向き付けられた絡み目とする。このとき以下の 2 条件は同値である：

- (1) 沈め込み  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  であって  $\varphi^{-1}(0) = L$  かつ  $\varphi$  は  $L$  の横断的向きを  $\mathbb{R}^2$  の標準的向きへ写すものが存在する。
- (2) 輪体  $L \subset M$  は局所有限無限チェインの意味で零ホモロジー :  $[L] = 0 \in H_1^\infty(M; \mathbb{Z})$ 。

しかしながら、この「定理」は証明に不備があり、実際、誤りである事が G. Hector と D. Peralta-Salas により指摘された。条件 (2) は十分ではなく、正しくは以下の通りでなければならない。

**定理 1.3 ([M2])**  $L$  を向き付けられた 3 次元開多様体  $M$  内の向き付けられた絡み目とする。このとき以下の 2 条件は同値である：

- (1) 沈め込み  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  であって  $\varphi^{-1}(0) = L$  かつ  $\varphi$  は  $L$  の横断的向きを  $\mathbb{R}^2$  の標準的向きへ写すものが存在する。
- (2) 輪体  $L \subset M$  は局所有限無限チェーンの意味で零ホモロークでありかつ  $L$  の優先枠付け (preferred framing) が  $M$  全体へ拡張する。

優先枠付けの定義は以下を見よ。「定理」の誤りは条件 (2) に於いて、この枠付けの拡張条件が抜けていた事である。[M1] のもう一つの定理は正しいが、そこでの証明は不完全なものであった。実際、 $L$  の (優先とは限らない) 枠付けの  $M$  全体への拡張を示さなければならないが、それは必要なら枠付けを取り替える事により可能である。

**定理 1.4 ([M1])** 可附向 3 次元開多様体  $M$  内の任意の絡み目に対し、沈め込み  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  であって  $\varphi^{-1}(0)$  のコンパクトな連結成分の合併が  $L$  と一致するものが存在する。

定理 1.3 による「定理」1.2 の修正により、絡み目がいつ平面への沈め込みの繊維として実現されるかを判定する為の、良く知られた不変量による基準が求められる。この問題に関し、向き付けられた 3 次元開多様体内の向き付けられた結び目  $K \subset M$  に対しては以下の解が得られた。簡単の為に、沈め込み  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  が存在して  $K = \varphi^{-1}(0)$  であって、 $K$  に横断的な十分小さい円板  $D$  への制限  $\varphi|_D$  が向きを保つものが存在するとき、 $K$  は**実現可能**であるという事にする。 $K$  の外部を  $M_K$  と表す： $M_K = M \setminus \text{Int}N(K)$ 。

**定理 1.5 ([M2])**  $K$  は局所有限無限チェーンの意味で零ホモロークとする。さらに  $K$  のメリディアンが  $H_1^\infty(M_K; \mathbb{Z})$  に於いて奇数位数の捩れ類を代表するとするとき、 $K$  は実現可能である。

**定理 1.6 ([M2])**  $H_1(M; \mathbb{Z})$  は有限生成であるとする。 $K$  は局所有限無限チェーンの意味で零ホモロークとし、さらに  $K$  のメリディアンが  $H_1^\infty(M_K; \mathbb{Z})$  に於いて無限位数であるかまたは偶数位数の捩れ類を代表するとするとき、このとき、 $K$  が実現可能である為の必要十分条件は  $0 \neq [K] \in H_1(M; \mathbb{Z}_2)$  である。

一方, Hector と Peralta-Salas [HP-S] はこの種の部分多様体の実現問題に関し一般的な枠組みで研究し非常に徹底した結果を得ている. 即ち,  $n$  次元開多様体の  $k$  次元部分多様体  $L$  に対し沈め込み  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  であつて  $L \subset \varphi^{-1}(0)$  または  $L = \varphi^{-1}(0)$  となるものが存在する為の条件を考察している. (第 3 節参照.) その理論の応用の一つとして彼らは特に上の定理 1.3, 1.4 を導いているばかりでなく,  $\mathbb{R}^3$  内の絡み目が実現可能である為の必要十分条件を得ている (定理 3.4). 特に  $\mathbb{R}^3$  内の任意の結び目は実現不可能である事が示されている. 我々の定理 1.5, 1.6 は彼らの特徴付けを, 結び目の場合に一般の 3 次元開多様体へと一般化したものと看做す事ができる.

## 2 絡み目の枠付けとホモトピー枠付け

向き付けられた 3 次元開多様体  $M$  内の向き付けられた  $n$  成分絡み目  $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$  に対して, 管状近傍  $N(L) \subset M$  と, その**枠付け** (framing)  $\nu: \coprod_{j=1}^n (S^1 \times D^2)_j \rightarrow N(L)$ , 即ち,  $n$  個のソリッドトーラスの  $N(L)$  の上への埋め込みで中心円周  $\coprod_{j=1}^n (S^1 \times \{0\})_j$  を  $L$  へ写すものを選ぶ. ここで  $L$  の枠付けは  $L$  の法束 (の単位円板束) の自明化を管状近傍として実現したものと看做せる事に注意しよう. さらに  $[L] = 0 \in H_1^\infty(M; \mathbb{Z})$  であるとするとき, その枠付け  $\nu$  が**優先枠付け** (preferred framing) であるとはロンジチュードの合併  $\nu(\coprod_{j=1}^n (S^1 \times \{1\})_j)$  が局所有限無限チェーンとして  $M \setminus \text{Int}N(L)$  に於いて零ホモロークであるときをいう. 但し,  $D^2$  は複素平面の単位円板を表す.  $\mathbb{R}^3$  内の結び目とは異なり, 一般に優先枠付けは一意とは限らない事に注意しよう. 定理 1.3 の (2) の拡張条件とは  $N(L)$  の優先枠付けの定める接束の制限  $TM|N(L)$  の自明化が  $M$  全体へ拡張する事を要請するものである.

ここで  $K \subset M$  を向き付けられた結び目とし, 管状近傍  $N(K)$  及び枠付け  $\nu: S^1 \times D^2 \rightarrow N(K)$  をとる.  $M$  は平行化可能であるから接束  $TM$  の自明化  $\Pi: TM \cong M \times \mathbb{R}^3$  をとり固定する.  $\Pi$  による計量に関し各円板  $\nu(\{e^{\sqrt{-1}\theta}\} \times D^2)$  は  $K$  と直交しているとしてよい. すると  $M$  と  $K$  の向き及び自明化  $\Pi$  により写像  $f: K \rightarrow \text{SO}(3)$  が定まる. 即ち, 点  $p \in K$  に対し  $v_1(p) \in T_p M$  を  $K$  に接する単位接ベクトルとし,  $v_2(p), v_3(p) \in T_p M$  を互いに直交し  $K$  の法円板に接する単位接ベクトルで円板  $\nu(\{e^{\sqrt{-1}\theta}\} \times D^2)$  の座標から定まるものとする. すると  $(v_1(p), v_2(p), v_3(p))$  は  $T_p M$  の正規直交基底を定めるから自明化  $\Pi$  により  $\text{SO}(3)$  の要素と思える. それを  $f(p)$  とおく. この写像  $f: K \rightarrow \text{SO}(3)$  を  $K$  の**ホモトピー枠付け**と呼ぶ.  $K$  の枠付けが  $M$  全体へ拡張する為の必要十分条件はその枠付けの定めるホモトピー枠付けが  $M$  全体へ拡張することである.

## 3 Hector と Peralta-Salas による可積分埋め込みの理論

この節では第 1 節で触れた Hector と Peralta-Salas による部分多様体の沈め込みの纖維による実現問題に関する理論 [HP-S] の一部をごく簡単に紹介する. まず彼らによる術

語を定義する. この節では  $M$  を  $n$  次元可附向開多様体とし,  $L$  を  $M$  の  $k$  次元可附向部分多様体 ( $k < n$ ) とする.

**定義** ([HP-S]) 部分多様体  $L \subset M$  が**弱可積分** (WI: *weakly integrable*) であるとは, 沈め込み  $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  で  $L \subset \Phi^{-1}(0)$  となるものが存在する事をいう. ここで  $L = \Phi^{-1}(0)$  と取れるとき,  $L$  は**強可積分** (SI: *strongly integrable*) であるという. また,  $L$  が**完全交差** (CI: *completely intersection*) であるとは写像  $\Psi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  であって  $0$  が  $\Psi$  の正則値でありかつ  $L = \Psi^{-1}(0)$  となるものが存在する事をいう.

まず, 余次元 1 (即ち  $k = n - 1$ ) の場合は完全に解かれている.

**定理 3.1** ([HP-S])  $L \subset M$  を余次元 1 部分多様体とすると, 以下の条件は同値である:

- (1)  $L$  は強可積分である.
- (2)  $L$  は弱可積分かつ或る向きに関し  $[L] = 0 \in H_{n-1}^\infty(M; \mathbb{Z})$  が成り立つ.
- (3)  $L$  は完全交差かつ弱可積分である.
- (4)  $L$  は完全交差かつ  $L$  の外部  $M \setminus \text{Int}N(L)$  の各連結成分はコンパクトでない.

さらに,  $L$  が弱可積分である為の必要十分条件は  $L$  の外部の各連結成分がコンパクトでない事である.

余次元が 2 以上の場合は, 所謂 Gromov-Phillips の h 原理 (h-principle) の相対版によって次が得られている.

**定理 3.2** ([HP-S])  $L \subset M$  を余次元 2 以上の部分多様体とすると, 以下の条件は同値である:

- (1)  $L$  は弱可積分である.
- (2)  $L$  の法束は  $M$  全体へ自明束として拡張する.

余次元が 2 以上の部分多様体の強可積分性に関しては, 完全交差部分多様体の特別なものと捉えることができる.

**定義** ([HP-S]) 完全交差部分多様体  $L \subset M$  が**馴れた完全交差** (TCI: *tame complete intersection*) であるとは, 以下の条件が満たされる事をいう:

- (1)  $L$  の法束が  $M$  上のベクトル束  $E$  へ拡張する.
- (2)  $L$  の完全交差を与える写像  $\Psi$  が誘導する  $L$  の法束の自明化が  $E$  の自明化に拡張する.

**定理 3.3** ([HP-S])  $L \subset M$  を余次元 2 以上の部分多様体とするとき,  $L$  が強可積分である為の必要十分条件は  $L$  が馴れた完全交差である事である.

彼らの理論による古典的結び目理論 ( $\mathbb{R}^3$  内の結び目理論) に関わる定理の一例が次の定理である.

**定理 3.4**  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n \subset \mathbb{R}^3$  を向き付けられた絡み目とするとき,  $L$  が強可積分である為の必要十分条件は, 任意の  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$\sum_{i \neq j} \text{lk}(L_i, L_j) = 1 \pmod{2}$$

が成立する事である.

## 4 定理の証明

この節に於いて定理 1.5, 1.6 の証明の概略を述べる. 詳細は [M2] を見られたい.  $M$  を向き付けられた 3 次元開多様体とし,  $K \subset M$  を向き付けられた結び目とする. まず,  $K$  の優先枠付けとホモトピー枠付けに関する次の補題が成立する.

**補題 4.1**  $K$  は局所有限無限チェーンの意味で零ホモローグであると仮定する.  $K$  の外部を  $M_K = M \setminus \text{Int}N(K)$  と表す. このとき, 以下が成立する:

- (1)  $K$  のメリディアンが  $H_1^\infty(M_K; \mathbb{Z})$  に於いて無限位数または偶数位数の捩れ類を代表するとき,  $K$  の任意の優先枠付けにより誘導されるホモトピー枠付けはホモトピーを除いて一意的である.
- (2)  $K$  のメリディアンが  $H_1^\infty(M_K; \mathbb{Z})$  に於いて奇数位数の捩れ類を代表するとき, (ホモトピーを除いて)  $K$  の任意のホモトピー枠付けは或る優先枠付けから誘導される.



言い換えると、 $K$  のメリディアンが  $H_1^\infty(M_K; \mathbb{Z})$  に於いて偶数位数振れであるなら  $K$  の優先ホモトピー枠付け（即ち、優先枠付けの誘導するホモトピー枠付け）は一意的であり、奇数位数振れなら全てのホモトピー枠付けは或る優先枠付けによって実現できる。

**定理 1.5 の証明**  $K$  のメリディアンが  $H_1^\infty(M_K; \mathbb{Z})$  に於いて奇数位数の振れ類を代表すると仮定すると、補題 4.1 の (2) により  $K$  の優先枠付け  $\nu: S^1 \times D^2 \rightarrow N(K)$  であってその誘導するホモトピー枠付け  $f_\nu: K \rightarrow \text{SO}(3)$  が  $[f_\nu] = 0 \in \pi_1(\text{SO}(3))$  を満たすものが存在する。すると  $(f_\nu)_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(\text{SO}(3))$  は自明に  $\pi_1(M)$  へ拡張する。3次元開多様体  $M$  はその（或る単体分割に関する）2骨格（の部分複体）にホモトピー同値（cf. [Wh]）であり、従って準同型  $(f_\nu)_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(\text{SO}(3))$  の  $\pi_1(M)$  への拡張が存在すれば  $f_\nu: K \rightarrow \text{SO}(3)$  の  $M$  への拡張が存在する。よって定理 1.3 により  $K$  は実現可能である。Q. E. D.

この証明に見られるように、枠付けの  $K$  から  $M$  への拡張に関して以下の基準が得られる。即ち、 $M$  はその 2骨格（の部分複体）にホモトピー同値である（例えば [Wh] 参照）から初等的な障害理論及び、基本群  $\pi_1(K)$ ,  $\pi_1(\text{SO}(3))$  の可換性により次の補題を得る。

**補題 4.2**  $M$  を 3次元可附向開多様体とし、 $K \subset M$  を結び目とするとき、以下の 3条件は同値である：

- (1) 写像  $f: K \rightarrow \text{SO}(3)$  は  $M \rightarrow \text{SO}(3)$  へ拡張する。
- (2) 誘導準同型  $f_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(\text{SO}(3))$  は準同型  $\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\text{SO}(3))$  へ拡張する。
- (3) 誘導準同型  $f_*: H_1(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  は準同型  $H_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  へ拡張する。

定理 1.6 の証明の為に、補題 4.1 の (1) の状況をより詳しく調べなければならない。次の補題が必要である。 $J \subset M$  を向き付けられた結び目で、 $[J] = 0 \in H_1^\infty(M; \mathbb{Z})$  とする。また  $H_1(M; \mathbb{Z})$  に於いて  $[J] = p\gamma$ ,  $\gamma \in H_1(M; \mathbb{Z})$  であるとする。但し  $p$  は或る正整数である。さらに  $C$  を  $\gamma$  を代表する輪体（向き付けられた結び目）とする。このとき、以下の補題が成立する。

**補題 4.3** 以下の性質を持つ  $C$  の  $(p, l)$  型のケーブル結び目  $L$  が存在する。但し、 $p$  が偶数なら  $l = 1$ , 奇数なら  $l = 1$  または  $2$  である；

- (1)  $L$  は  $J$  とホモロガスである。
- (2)  $J$  の優先枠付けは  $L$  の優先枠付けを誘導する。

- (3) (2) の  $L$  の優先枠付けの誘導するホモトピー枠付けは回転的ホモトピー枠付けに (ホモトピーを除き) 一致する.

ここで  $C$  のケーブル結び目  $L$  の回転的 (ホモトピー) 枠付けとは  $C$  の枠付けに対して定まる  $L$  の枠付けであって,  $C$  のメリディアン円板  $D$  上で中心  $C \cap D$  から  $L \cap D$  へ向かう線分 (半径) 達  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) が定めるものである. 即ち,  $L \cap D$  を中心とする小円板達  $\Delta_i \subset D$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) を  $D$  の中心に関する  $\frac{2k\pi}{p}$  回転不変 ( $k = 1, 2, \dots, p-1$ ) となるように取り, 各  $\Delta_i$  於いて  $r_i \cap \Delta_i \subset \Delta_i$  が複素平面の単位円板に於ける実軸の像であるとするような枠付けである. 図1 参照.

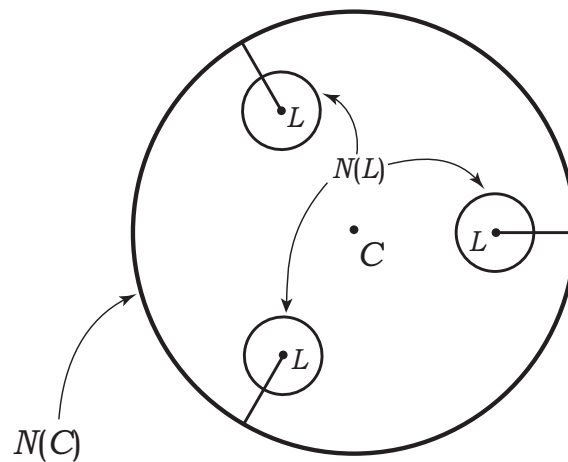


図 1:  $L$  の回転的枠付け

**補題 4.3 の証明**  $[J] = p\gamma \in H_1(M; \mathbb{Z})$  であるから向き付けられたコンパクト曲面  $S$  で境界が  $J$  と “ $p$  重の  $C$ ” であるものが存在する. ここで,  $S$  の  $C$  の周りの様子は以下の通りである.  $N(C)$  を  $C$  の管状近傍とする:

$S \cap \partial N(C)$  は  $(p, q)$  型のケーブル絡み目で  $S \cap N(C)$  は  $S \cap \partial N(C)$  から  $C$  への  $p$  重被覆写像の写像柱 (mapping cylinder) である.

そこで以下のように  $p$  と  $q$  の偶奇に従って  $C$  の周りの  $N(C)$  内に  $(p, 1)$  型または  $(p, 2)$  型のケーブル結び目として  $L$  を定義する.

**Case 1**  $p$  が偶数であるかまたは  $p, q$  共に奇数であるならば  $L$  を  $(p, 1)$  型ケーブル結び目とする.

**Case 2**  $p$  が奇数で  $q$  が偶数であるならば  $L$  を  $(p, 2)$  型ケーブル結び目とする.

$L$  の十分小さい管状近傍  $N(L)$  を  $N(C)$  内にとり, 以下のような向き付けられたコンパクト曲面  $B \subset N(C) \setminus N(L)$  を構成する:

$B \cap \partial N(C)$  は  $(p, q)$  型ケーブル絡み目 ( $= S \cap \partial N(C)$ ) であって  $B \cap \partial N(L)$  は  $N(L)$  内で  $L$  にアイソトピック.

曲面  $B$  を構成する為に  $L$  と  $L$  に「平行」な  $\partial N(C)$  上のケーブル結び目を境界とする円環面 (annulus) と何枚かのメリディアン円板とに二重曲面手術 (double curve surgery) を施す (図 2 参照). メリディアン円板の枚数は **Case 1** では  $q-1$  枚, **Case 2** では  $q-2$  枚である.

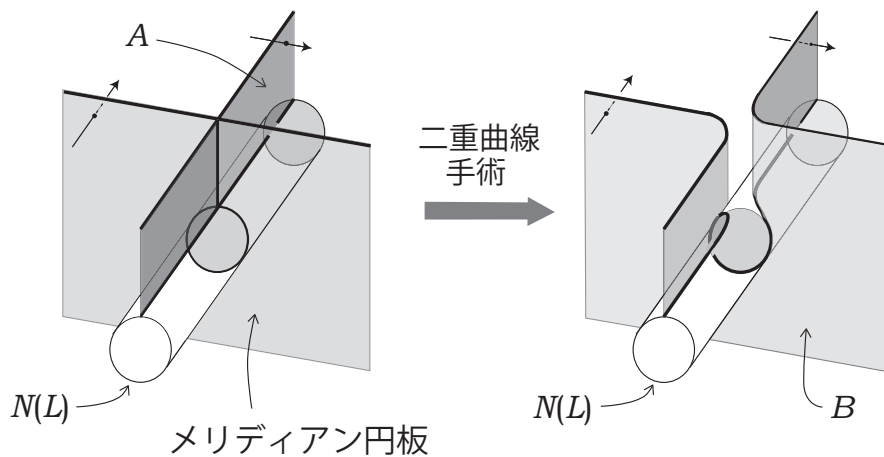


図 2: 曲面  $B$  の構成

$S \setminus \text{Int}N(C)$  と  $B$  とを  $S \cap \partial N(C) = B \cap \partial N(C)$  に沿って貼り合わせる事によって  $J$  と  $L$  を張る向き付けられた曲面  $T$  が得られる. 実際は  $\partial T \setminus J = T \cap \partial N(L)$  は  $\partial N(L)$  上にあり,  $N(L)$  内で  $L$  とアイソトピックな曲線である. また,  $L$  の枠付けは  $\partial T \setminus J = T \cap \partial N(L)$  をロンジチュードとすることによって定める. この枠付けの誘導するホモトピー枠付けを  $g: L \rightarrow \text{SO}(3)$  と表す.

この  $L$  のホモトピー枠付け  $g$  は  $L$  の  $C$  に関する回転的枠付けの誘導するホモトピー枠付けと等しい. 何故なら, 二重曲線手術のホモトピー枠付けに対する効果は,  $L$  とメリディアン円板との各交点に於いて一回捻りである. そしてそれらの交点の個数は **Case 1** では  $p(q-1)$  個, **Case 2** では  $p(q-2)$  個であり, いずれにせよ偶数である. 従って  $g$  の定めるホモトピー類は回転的ホモトピー枠付けのそれと一致する.

**定理 1.6 の証明**  $K \subset M$  は局所有限無限チェーンの意味で零ホモロジーであるとするとし, そのメリディアンは外部に於いて同じ意味で偶數位数の捩れ類を表すと仮定する. すると補題 4.1 の (1) により  $K$  のホモトピー枠付けは (ホモトピーを除き) 一意である. ここでホモロジー類  $\kappa := [K] \in H_1(M; \mathbb{Z})$  を捩れ部分  $\kappa_T$  と自由部分  $\kappa_F$  とに分解しておく:  $\kappa = \kappa_F + \kappa_T$ . さらに, 一般にホモロジー類  $\xi \in H_1(M; \mathbb{Z})$  に対しその  $\mathbb{Z}_2$  還元を  $\xi_{(2)} \in H_1(M; \mathbb{Z}_2)$  と表す. 証明は以下の二つの主張に分かれる:

**主張 1**  $\kappa_{(2)} = 0$  ならば  $f_* : H_1(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  は  $H_1(M; \mathbb{Z})$  上の準同型へは拡張しない。

**主張 2**  $\kappa_{(2)} \neq 0$  ならば  $f_* : H_1(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  は準同型  $H_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  へ拡張する。

**主張 1 の証明** 帰謬法による。  $f_*$  の拡張  $\Phi : H_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  が存在したと仮定する。すると  $\kappa_{(2)} = 0$  かつ  $H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$  より  $f_*([K]) = \Phi(\kappa) = 0$  である。  $(\kappa_F)_{(2)} = 0$  であるから原始類  $\alpha \in H_1(M; \mathbb{Z})$  と非負整数  $m$  が存在して  $\kappa_F = 2m\alpha$  となる。ここで  $\zeta \in H_1(M; \mathbb{Z})$  が原始類とは  $\zeta$  が如何なるホモロジー類の整数倍にもならない事をいう。  $(\kappa_T)_{(2)} = 0$  である必要十分条件は  $\kappa_T$  が奇数位数の捩れ類であるかまたは偶数位数の捩れ類の偶数倍である事に注意する。従ってこの二つの場合に分かれる。

**Case 1**  $\kappa_T$  が奇数位数の捩れ類であると仮定する。  $\kappa_T$  の位数を  $k$  とする。すると或る非負整数  $n$  により  $\kappa_T = (k-1)(-\kappa_T) = 2n(-\kappa_T)$  と表されるから、このとき  $\kappa = \kappa_F + \kappa_T = 2m\alpha - 2n\kappa_T = 2(m\alpha - n\kappa_T)$  を得る。補題 4.3 に於いて  $J = K$ ,  $\gamma = m\alpha - n\kappa_T$ ,  $p = 2$  とおいて適用すれば、  $\gamma$  を代表する輪体  $C$  とその管状近傍  $N(C)$  の枠付けを選んでそれらに関して (2,1) 型のケーブル結び目  $L$  が得られる。誘導されるホモトピー枠付けを  $g : C \rightarrow \text{SO}(3)$ , 回転的ホモトピー枠付けを  $f_L : L \rightarrow \text{SO}(3)$  と表す。  $\pi_1(\text{SO}(3)) \cong H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$  に於いて  $[f_L] = 2[g] + 1 \equiv 1$  であるが、これは  $C$  の枠付けが如何なるものであろうとも  $L$  のホモトピー枠付けは非自明となる事を意味している。また  $\kappa = [L]$  であってさらに帰謬法の仮定により  $f_*$  の拡張準同型  $\Phi$  が存在するから結局、  $0 = \Phi(\kappa) = \Phi([L]) = [f_L] \equiv 1$  を得るが、これは矛盾である。

**Case 2**  $\kappa_T$  が偶数位数の捩れ類の偶数倍であると仮定する。即ち、或る  $\beta \in H_1(M; \mathbb{Z})$  と非負整数  $n$  によって  $\kappa_T = 2n\beta$  と表されると仮定する。すると  $\kappa = \kappa_F + \kappa_T = 2(m\alpha + n\beta)$  となる。補題 4.3 を  $J = K$ ,  $\gamma = m\alpha + n\beta$ ,  $p = 2$  とおいて適用すれば Case 1 と同様に矛盾が生ずる。

結局、いずれの場合も矛盾が得られた。従って  $f_*$  は拡張し得ず、主張 1 が示された。

**主張 2 の証明**  $\kappa_{(2)} \neq 0$  i.e.  $(\kappa_F)_{(2)} \neq 0$  または  $(\kappa_T)_{(2)} \neq 0$  と仮定する。特に  $(\kappa_T)_{(2)} \neq 0$  であるのは  $\kappa_T$  が  $H_1(M; \mathbb{Z})$  に於いて偶数位数の捩れ類の奇数倍であるときかつそのときに限ることに注意する。  $f_* : H_1(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  を拡張する準同型  $\Phi : H_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  を構成する。  $\kappa_F$  と  $\kappa_T$  の代表輪体  $K_F, K_T$  をそれぞれ選ぶ。さらに  $K$  の優先ホモトピー枠付けは自然に  $K_F$  と  $K_T$  の優先ホモトピー枠付けを誘導するから、それらをそれぞれ  $f_{K_F} : K_F \rightarrow \text{SO}(3)$  及び  $f_{K_T} : K_T \rightarrow \text{SO}(3)$  とする。最初に  $\kappa_F \neq 0$  かつ  $\kappa_T \neq 0$  の場合を考える。

**Step 1** まず,  $(f_{K_F})_* : H_1(K_F; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  の拡張準同型  $\Phi_F : H_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  を構成する.  $(\kappa_F)_{(2)} \neq 0$  であるから, (無限位数) 原始類  $\alpha \in H_1(M; \mathbb{Z})$  と非負整数  $m$  が存在して  $\kappa_F = (2m+1)\alpha$  と表せる.  $J = K_F$ ,  $\gamma = \alpha$ ,  $p = 2m+1$  において補題 4.3 を適用すると,  $\alpha$  の代表輪体  $C$  及びその管状近傍  $N(C)$  の或る枠付けに関する  $(2m+1, 1)$  型または  $(2m+1, 2)$  型のケーブル結び目  $L$  が得られる.  $g : C \rightarrow \text{SO}(3)$  をその  $N(C)$  の枠付けの誘導するホモトピー枠付けとする.  $[L] = [K_F]$  であるから拡張準同型を構成する為には回転的ホモトピー枠付け  $f_L : L \rightarrow \text{SO}(3)$  を調整して  $[f_L] = [f_{K_F}]$  とする必要がある. いま  $H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$  に於いて,  $[f_L] = (2m+1)[g] + r$  である. 但し,  $r$  は  $L$  の型に応じて 1 または 2 である.  $r = 1$  なら  $g$  を  $N(C)$  のメリディアン方向に一回捻って新たなホモトピー枠付け  $g' : C \rightarrow \text{SO}(3)$  を得る. すると  $f_L = (2m+1)([g'] - 1) + 1 \equiv [g'] \in \mathbb{Z}_{2 \cong H_1(\text{SO}(3))}$  となる. このとき  $h = g'$  とおく.  $r = 2$  ならば  $[f_L] = (2m+1)[g] + 2 \equiv [g]$  であり,  $h = g$  とおく. すると定理の仮定より  $H_1(M; \mathbb{Z})$  の自由部分の基底  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_b\}$  を  $\alpha_1 = \alpha$  を拡張するかたちで選ぶ事ができる. このとき  $\Phi_F : H_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\text{SO}(3); \mathbb{Z})$  を以下のように定義する:

$$\Phi_F(\alpha_i) = \begin{cases} [h] & i = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\Phi_F|_T \equiv 0$$

但し,  $H_1(M; \mathbb{Z}) = F \oplus T$  であって,  $T \subset H_1(M; \mathbb{Z})$  は捩じれ部分群,  $F \subset H_1(M; \mathbb{Z})$  は自由部分を表す.  $\Phi_F$  は  $(f_{K_F})_*$  の拡張準同型である.

**Step 2**  $(\kappa_T)_{(2)} \neq 0$  であるのは  $\kappa_T$  が  $H_1(M; \mathbb{Z})$  に於いて偶数位数の捩れ類の奇数倍であるときかつそのときに限るのであった. 捩じれ部分群  $T \subset H_1(M; \mathbb{Z})$  の部分群  $G \subset T$  を以下のように定義する.  $T$  の部分集合  $D^{\text{odd}}(\kappa_T)$  を

$$D^{\text{odd}}(\kappa_T) := \{\sigma \in T \mid \kappa_T = (2m+1)\sigma \ (\exists m \in \mathbb{Z})\}$$

と定義し,  $G$  を  $D^{\text{odd}}(\kappa_T)$  の生成する  $T$  の部分群とする. すると有限生成 Abel 群の基本定理により  $G$  は  $T$  の (従って  $H_1(M; \mathbb{Z})$  の) 直和因子である. 準同型  $\Phi_T : G \rightarrow H_1(\text{SO}(3))$  を  $\Phi_T|_{D^{\text{odd}}(\kappa_T)} \equiv (f_{K_T})_*[K_T]$  (特に  $\Phi_T(\kappa_T) := (f_{K_T})_*[K_T]$ ) によって定めると, 矛盾無く定義されている事が判る.  $\Phi_T$  を  $G$  の補因子上は零準同型として  $H_1(M; \mathbb{Z})$  へ拡張すると  $(f_{K_T})_*$  の拡張準同型 (これも  $\Phi_T$  と表す) が得られる.

以上より  $(f_{K_F})_*$  及び  $(f_{K_T})_*$  の拡張準同型  $\Phi_F$  及び  $\Phi_T$  がそれぞれ得られた. そこで  $\Phi = \Phi_F + \Phi_T$  とおけば

$$\begin{aligned} \Phi \circ \iota_*[K] &= (\Phi_F + \Phi_T) \circ \iota_*[K] \\ &= \Phi_F \circ \iota_*[K_F] + \Phi_T \circ \iota_*[K_T] \\ &= (f_{K_F})_*[K_F] + (f_{K_T})_*[K_T] \\ &= f_*[K]. \end{aligned}$$

であるから、求める  $f_*$  の拡張準同型  $\Phi$  が得られた。

$(\kappa_F)_{(2)} = 0$  (かつ  $(\kappa_T)_{(2)} \neq 0$ ) または  $(\kappa_T)_{(2)} = 0$  (かつ  $(\kappa_F)_{(2)} \neq 0$ ) の場合は、上の構成でホモロジー類を少し調整する必要がある。実際、 $(\kappa_F)_{(2)} = 0$  ならば  $((\kappa_T)_{(2)} \neq 0$  であって)  $\Phi_T(\kappa_T) := f_*[K]$ ,  $\Phi_T|_{D^{\text{odd}}(\kappa_T)} \equiv f_*[K]$  及び  $\Phi_F \equiv 0$  と定義する。 $(\kappa_T)_{(2)} = 0$  ならば  $((\kappa_F)_{(2)} \neq 0$  であって)  $\Phi_F(\alpha_1) := f_*[K](= [h] + (f_{K_T})_*)$  と定義する。すると  $\Phi = \Phi_F + \Phi_T$  は求める拡張準同型である。

以上より主張 2 が示され、結局、定理 1.6 の証明が完了した。

**注意** 上の定理 1.6 の証明を見れば判るように、 $H_1(M; \mathbb{Z})$  の有限生成性の条件は拡張準同型の構成 (特に主張 2 の Step 2) に必要な言わば技術的なものである。無限生成の場合でも  $\kappa_{(2)} \neq 0$  の必要性は上の証明でも明らかである。一般に無限生成の場合でも十分であるかは open problem である。

## 参考文献

- [CGG-L] A. F. Costa, F. G. Gascon and A. Gonzalez-Lopez: *On codimension one submersions of euclidean spaces*, Invent. math. **93** (1988), 545–555.
- [HP-S] G. Hector and D. Peralta-Salas: *Integrable embeddings and foliations*, Amer. J. Math. **134** (2012), 773–825.
- [M1] S. Miyoshi: *Links and globally completely integrable vector fields on an open 3-manifold*, Topology **34** (1995), 383–387.
- [M2] S. Miyoshi: *Links and submersions on an open 3-manifold*, preprint.
- [Wa] N. Watanabe: *On knotted preimages of submersions*, Topology **32** (1993), 251–257.
- [Wh] J. H. C. Whitehead: *The immersion of an open 3-manifold in Euclidean 3-space*, Proc. London Math. Soc. **11** (1961), 81–90.

112-8551 東京都文京区春日 1-13-27

中央大学理工学部数学科

miyoshi@math.chuo-u.ac.jp



# 結び目カンドルの表現からわかる 絡み目の幾何について

井上 歩 (東京工業大学)\*

## 1. 序

カンドルは Reidemeister 変形で互いに移り合う絡み目図式の検出に有効な (極小の) 代数系である [14]. この Reidemeister 変形との密接な関係は, Carter ら [3] が導入し, その後いくつかの形 [1, 2, 9] に拡張された, カンドルのホモロジーにも引き継がれている. カンドルとそのホモロジーは, 図式を用いた絡み目の研究に有用であり, この方面で活発に利用されている.

カンドルと絡み目図式との関係には, 絡み目が定める結び目カンドルの表現として, 幾何学的な解釈を与えることもできる. ならば, カンドルとそのホモロジーを用いて, (3次元球面に埋め込まれたいくつかの円周としての) 絡み目の幾何も記述することができるのではないかと. 本稿ではこの立場により進めた著者の研究について紹介したい. なお一部の成果は, 蒲谷祐一氏との共同研究により得られたものである.

### 【約束】

本稿において, 絡み目 (結び目) とその図式はすべて向き付けられていると約束する.

## 2. カンドルと絡み目図式

まずはじめに, カンドルと絡み目図式との関係を簡単に紹介する. 詳細については [10] を参照されたい.

**カンドル**とは, 集合  $X$  とその上に定義された二項演算  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  の組であり, 次の公理を満たすものである:

- (Q1) 任意の  $x \in X$  に対し,  $x * x = x$ .
- (Q2) 任意の  $x \in X$  に対し, 写像  $*x: X \rightarrow X (\bullet \mapsto \bullet * x)$  は全単射.
- (Q3) 任意の  $x, y, z \in X$  に対し,  $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ .

演算を保つカンドル間の写像を**準同型**と呼び, 特に値域を固定するときは**表現**と呼ぶ. カンドルは, 次に紹介する二種類の彩色により, 絡み目図式と関係する.

$X$  をカンドルとする. 絡み目図式の  $X$  **彩色**とは, 図式の各弧への  $X$  の要素の割り当てであり, 各交点において図 1 左の条件を満たすものである. つまり交点において, 上弧から見て (進行方向) 右側にある下弧に  $x \in X$  が, 上弧に  $y \in X$  が割り当てられているとき, 上弧から見て左側にある下弧には  $x * y \in X$  が割り当てられている必要がある. カンドルの公理 (Q1) ~ (Q3) は, 変形の境界にある弧の色 (割り当てられた  $X$  の要素) を固定しながら Reidemeister 変形 R1 ~ R3 が施せることをそれぞれ保証する (図 2 参照). よって, 同値な絡み目を表す図式たちの  $X$  彩色の間には一対一の対応がつき, 特に  $X$  彩色の総数は絡み目に不変量を与える.

本研究はグローバル COE プログラム「計算世界観の深化と展開」および科学研究費補助金 (研究活動スタート支援 課題番号: 23840014) の助成を受けている.

\* 〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 大学院情報理工学研究科 数理・計算科学専攻  
e-mail: ayumu.inoue@math.titech.ac.jp



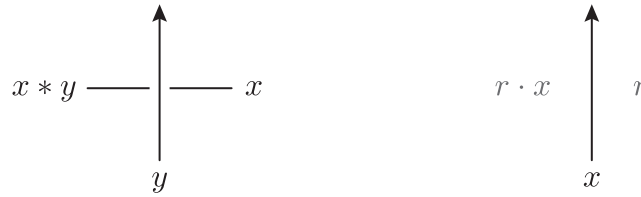


図 1

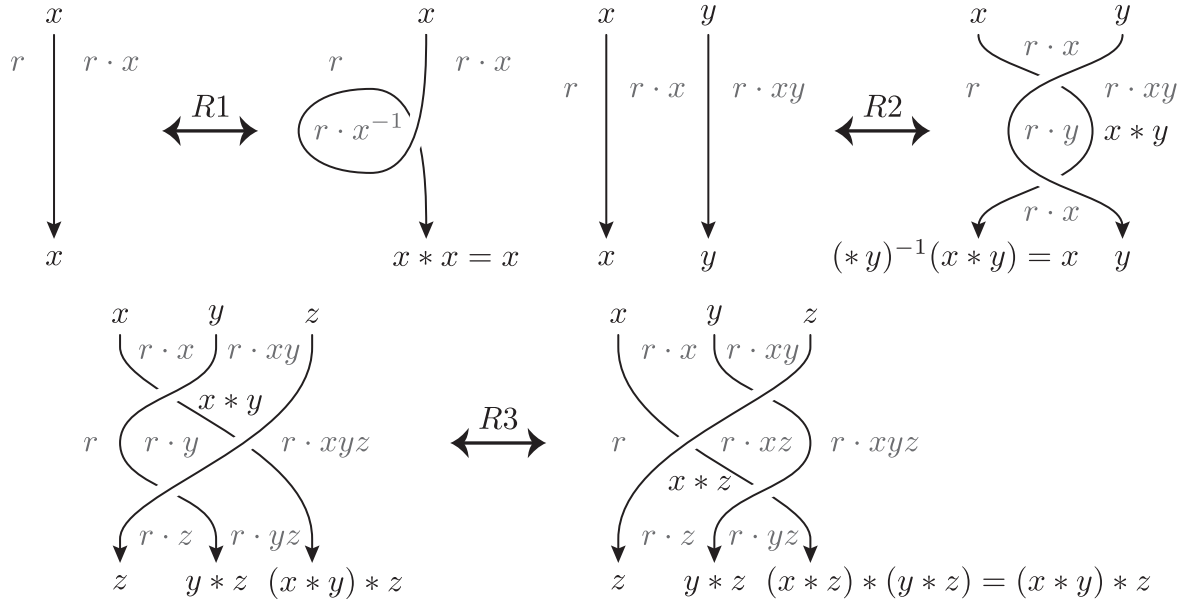


図 2

次の表示により与えられる群  $As(X)$  を、カンドル  $X$  の付随群と呼ぶ：

$$\langle x \ (x \in X) \mid x * y = y^{-1}xy \ (x, y \in X) \rangle.$$

すなわち、 $F(X)$  を  $X$  が生成する自由群、 $N(X)$  を集合  $\{y^{-1}xy(x*y)^{-1} \mid x, y \in X\}$  が生成する  $F(X)$  の正規部分群とすると、 $As(X) = F(X)/N(X)$  である。

$Y$  を付随群  $As(X)$  が右から作用する集合とする。絡み目図式の  $(X, Y)$  彩色とは、図式の各弧および各領域へのそれぞれ  $X$  および  $Y$  の要素の割り当てであり、 $X$  彩色の条件を満たし、弧の周りで図 1 右の条件を満たすものである<sup>1</sup>。つまり、領域を分離する弧に  $x \in X$  が、弧から見て右側の領域に  $r \in Y$  が割り当てられているとき、弧から見て左側の領域には ( $x$  を  $As(X)$  の要素とみなして)  $r \cdot x \in Y$  が割り当てられている必要がある。図 2 からわかるように、Reidemeister 変形 R1 ~ R3 は変形の境界にある領域の色も変化させない。よって、同値な絡み目を表す図式たちの  $(X, Y)$  彩色の間にも一対一の対応がつき、特に  $(X, Y)$  彩色の総数は絡み目に不変量を与える。

$Y$  として一元集合を考え、 $As(X)$  の  $Y$  への作用を自明と定めれば、 $(X, Y)$  彩色と  $X$  彩色の間には一対一の対応がつけられる。よって  $(X, Y)$  彩色は  $X$  彩色の一般化と考えることができる。

<sup>1</sup> 任意の  $x, y \in X$  に対して、 $x, y$  および  $x * y$  を  $As(X)$  の要素とみなすと  $xy = y(x * y)$  が成り立つので、この条件は交点の周りで well-defined である。

次にカンドルのホモロジーを紹介する. 自然数  $n$  に対して,  $C_n^R(X, Y)$  を  $Y \otimes X^n$  が生成する自由アーベル群とする. また,  $C_0^R(X, Y)$  を  $Y$  が生成する自由アーベル群とする. このとき, 写像  $\partial_n : C_n^R(X, Y) \rightarrow C_{n-1}^R(X, Y)$  を

$$\partial_n(r \otimes (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \{ r \otimes (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) - r \cdot x_i \otimes (x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \} \quad (n \geq 2),$$

$\partial_1(r \otimes (x_1)) = r \cdot x_1 - r$  と定めると,  $(C_n^R(X, Y), \partial_n)$  は鎖複体となる. 図 3 で示すように,  $C_n^R(X, Y)$  の生成元は向き付け・ラベル付けされた  $n$  次元の立方体と同一視でき,  $\partial_n$  はその境界を読み取る写像と解釈できる.

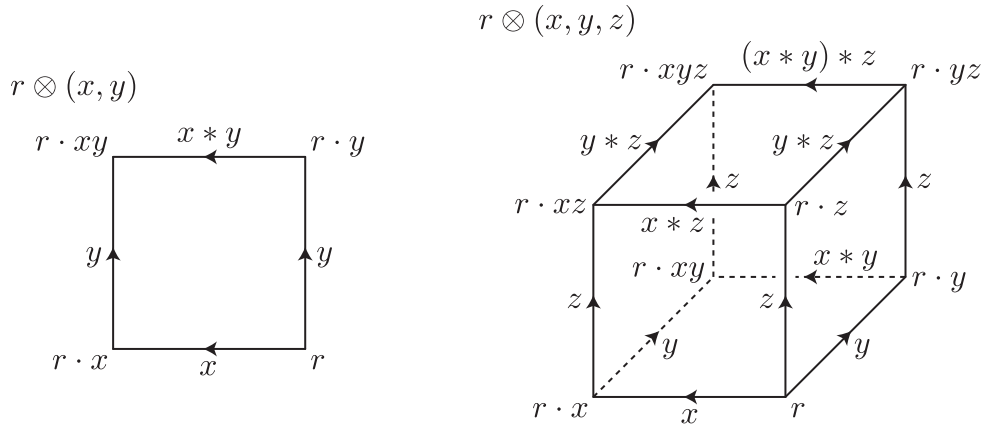


図 3

$C_n^R(X, Y)$  の部分群  $C_n^D(X, Y)$  を

$$C_n^D(X, Y) = \begin{cases} \text{span}_{\mathbb{Z}}\{r \otimes (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \exists i \text{ s.t. } x_i = x_{i+1}\} & (n \geq 2), \\ 0 & (n = 0, 1) \end{cases}$$

と定義する. このとき  $\partial_n(C_n^D(X, Y)) \subset C_{n-1}^D(X, Y)$  が成り立つので,  $C_n^Q(X, Y)$  を  $C_n^R(X, Y)/C_n^D(X, Y)$  と定めれば,  $(C_n^Q(X, Y), \partial_n)$  はまた鎖複体となる. この鎖複体のホモロジー群を  $(X, Y)$  のカンドルホモロジー群と呼び,  $H_*^Q(X, Y)$  で表す. またアーベル群  $A$  に対し, 余鎖複体  $(\text{Hom}(C_n^Q(X, Y), A), \text{Hom}(\partial_n, \text{id}))$  のコホモロジー群を  $(X, Y)$  の  $A$  係数カンドルコホモロジー群と呼び,  $H_Q^*(X, Y; A)$  で表す.

$(X, Y)$  彩色された絡み目図式の双対グラフを考えると, その各補領域は一つの交点を含む四角形である. そこで, 交わる弧の向きと色から四角形の辺の向きとラベルを, 交わる領域の色から四角形の頂点のラベルを定めることで, 図式の交点に  $C_2^Q(X, Y)$  の要素を付随させることができる (図 4 参照). 構成から, すべての交点についてこの要素を足し合わせたものは, 2次元サイクルとなる. この2次元サイクルが定める  $H_2^Q(X, Y)$  の要素を,  $(X, Y)$  彩色の基本類と呼ぶ.

基本類は Reidemeister 変形で不変である. すなわち, Reidemeister 変形に対応する  $(X, Y)$  彩色たちは, 同一の基本類を定める. 実際, 図 2 の R1, R2, R3 変形は元々の2次元サイクルにそれぞれ  $\pm r \otimes (x, x) \in C_2^D(X, Y)$ ,  $+r \otimes (x, y) - r \otimes (x, y) = 0$ ,  $\pm \partial_3(r \otimes (x, y, z))$  を加えるが, これらはホモロジー類を変化させない.

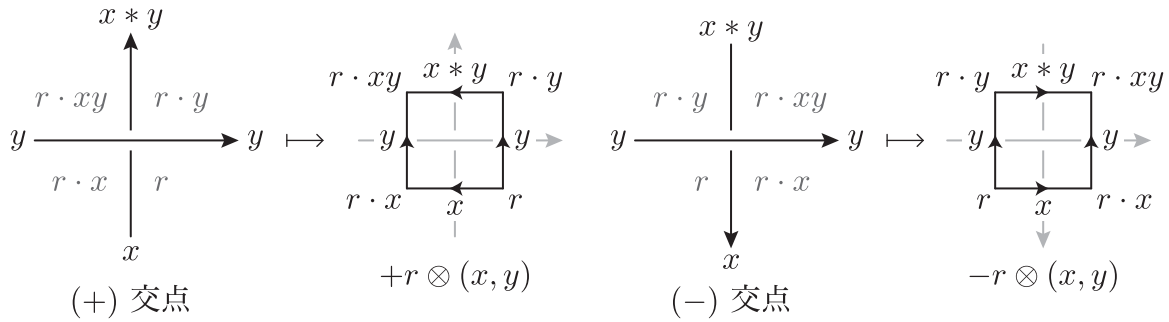


図 4

当然ながら、基本類を2次元コサイクル  $\theta$  で評価した値は Reidemeister 変形で不変である。特に絡み目図式に対してすべての  $(X, Y)$  彩色を考えると、その基本類を  $\theta$  で評価した値たちがなす多重集合は絡み目に不変量を与える。この多重集合を  $\theta$  に付随した**カンドルコサイクル不変量**と呼ぶ。

### 3. 結び目カンドルと彩色

彩色は図式に対する概念であるが、これには幾何学的な解釈を与えることができる。その鍵となるのは、Joyce [8] により定義された結び目カンドルである<sup>2</sup>。

$L$  を絡み目とし、点  $p$  をその補空間の点とする。また、複素平面の部分集合  $\mathcal{N}$  を単位円板  $\mathcal{D}$  と実軸上の線分  $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq z \leq 5\}$  の和集合とする。このとき、次の条件を満たす連続写像  $\nu: \mathcal{N} \rightarrow S^3$  を  $L$  の**ヌース**と呼ぶ (図 5 左参照)：

- (1)  $\nu(5) = p$ .
- (2) 制限写像  $\nu|_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \rightarrow S^3$  は埋め込み。
- (3)  $\nu(\mathcal{N})$  と  $L$  とは一点  $\nu(0)$  のみで横断的に交わる。
- (4)  $\nu(\partial\mathcal{D})$  は  $L$  のある成分の (+) メリディアンをなす。

二つのヌース  $\mu, \nu$  に対し、その積  $\mu * \nu$  を次で定義する (図 5 右参照)：

$$(\mu * \nu)(z) = \begin{cases} \mu(z) & (|z| \leq 1), \\ \mu(4z - 3) & (1 \leq z \leq 2), \\ \nu(13 - 4z) & (2 \leq z \leq 3), \\ \nu(e^{2(z-3)\pi i}) & (3 \leq z \leq 4), \\ \nu(4z - 15) & (4 \leq z \leq 5). \end{cases}$$

$\mu * \nu$  は再びヌースであることに注意する。 $L$  のヌースのホモトピー類がなす集合を  $Q(L)$  とすると、積  $*$  は  $Q(L)$  上の well-defined な二項演算となり、カンドルの公理 (Q1) ~ (Q3) を満たす。このカンドル  $Q(L)$  を、 $L$  の**結び目カンドル**と呼ぶ。

ヌース  $\nu$  の制限写像  $\nu|_{\partial\mathcal{D} \cup \mathcal{R}}$  は、写像  $\bar{\nu}: Q(L) \rightarrow \pi_1(S^3 \setminus L)$  を誘導する。ヌース  $\nu$  のホモトピー類を  $[\nu]$  と表すと、 $[\mu] * [\nu] = [\nu]^{-1} [\mu] [\nu]$  が成り立つことから、付随群  $\text{As}(Q(L))$  は  $\bar{\nu}$  が誘導する準同型により  $\pi_1(S^3 \setminus L)$  と同型になる。

<sup>2</sup>Matveev [12] も (異なる語彙により) 結び目カンドルと同値な概念を与えている。

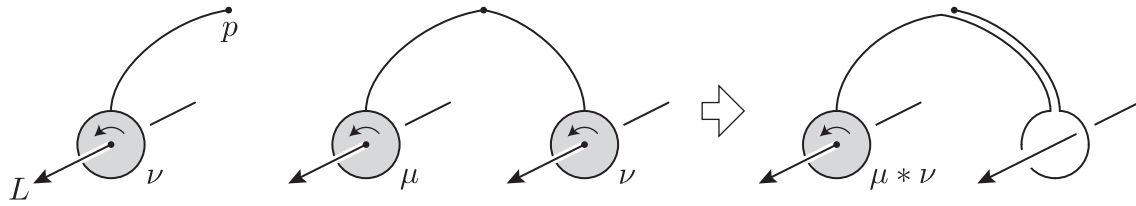


図 5

二種類の彩色に幾何学的な解釈を与えるため、次の設定を行う。  $D$  を 2次元球面  $S$  上に描かれた  $L$  の図式とする。  $L$  は  $D$  と交点の近くを除いて一致しており、点  $p$  は  $S$  上に無いと仮定する。点  $q$  を  $S^3 \setminus S$  の点  $p$  を含まない成分にある  $L$  の補空間の点とする。  $X$  をカンドルとし、  $Y$  を付随群  $\text{As}(X)$  が右から作用する集合とする。

$D$  の各弧  $A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して、ヌース  $\nu_i$  を図 6 左のように定める。このとき、図 7 左の交点に付随して  $[\nu_u] = [\nu_s] * [\nu_t]$  が成り立つから、表現  $\varphi: Q(L) \rightarrow X$  は関係式  $\varphi([\nu_u]) = \varphi([\nu_s]) * \varphi([\nu_t])$  を満たす。これは、弧  $A_i$  に  $\varphi([\nu_i])$  を割り当てれば、  $D$  の  $X$  彩色が得られることを意味する。反対に、  $D$  の  $X$  彩色が与えられたとき、写像  $\varphi: \{[\nu_1], \dots, [\nu_n]\} \rightarrow X$  を  $\varphi([\nu_i]) = (A_i \text{ の色})$  で定めれば、  $\varphi$  は表現  $Q(L) \rightarrow X$  へと一意に拡張する。よって  $D$  の  $X$  彩色は、表現  $Q(L) \rightarrow X$  と同一視できる。

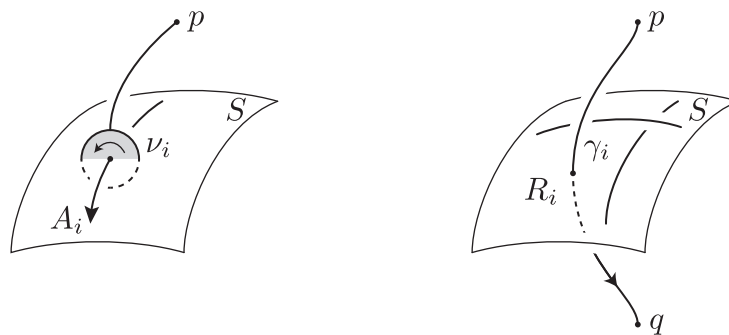


図 6

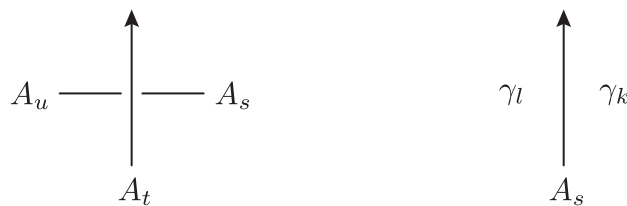


図 7

$X$  彩色に対応する表現  $\varphi: Q(L) \rightarrow X$  を一つ選び、固定しておく。  $L$  の補空間内で点  $p$  から点  $q$  へ向かう道  $\gamma$  のホモトピー類  $[\gamma]$  がなす集合を  $Z(L)$  とする。図 8 のように、付随群  $\text{As}(Q(L))$  は  $Z(L)$  に右から作用する。そこで  $\psi: Z(L) \rightarrow Y$  を  $\varphi$  が誘導する準同型  $\varphi_*: \text{As}(Q(L)) \rightarrow \text{As}(X)$  により付随群の右作用を保つような写像とする。つまり  $\psi$  は、任意の  $[\gamma] \in Z(L)$ 、  $[\bar{\nu}] \in \text{As}(Q(L))$  に対して  $\psi([\gamma] \cdot [\bar{\nu}]) = \psi([\gamma]) \cdot \varphi_*([\bar{\nu}])$

を満たすとする. このとき,  $D$  の各領域  $R_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) に対して点  $p$  から点  $q$  への道  $\gamma_i$  を図 6 右のように定めると, 図 7 右の状況に付随して  $[\gamma_i] = [\gamma_k] \cdot [\overline{\nu_s}]$  が成り立つから,  $\psi$  は関係式  $\psi([\gamma_i]) = \psi([\gamma_k]) \cdot \varphi_*([\overline{\nu_s}])$  を満たす. これは, 領域  $R_i$  に  $\psi([\gamma_i])$  を割り当てれば,  $D$  の  $(X, Y)$  彩色が得られることを意味する. 反対に,  $(X)$  彩色としては  $\varphi$  に対応する)  $D$  の  $(X, Y)$  彩色が与えられたとき, 写像  $\psi: \{[\gamma_1], \dots, [\gamma_m]\} \rightarrow Y$  を  $\psi([\gamma_i]) = (R_i \text{ の色})$  で定めれば,  $\psi$  は  $\varphi_*$  により付随群の右作用を保つような写像  $Z(L) \rightarrow Y$  へと一意に拡張する. よって  $D$  の  $(X, Y)$  彩色は, 表現  $\varphi: Q(L) \rightarrow X$  とその誘導準同型  $\varphi_*: \text{As}(Q(L)) \rightarrow \text{As}(X)$  により付随群の右作用を保つような写像  $\psi: Z(L) \rightarrow Y$  の組と同一視できる.

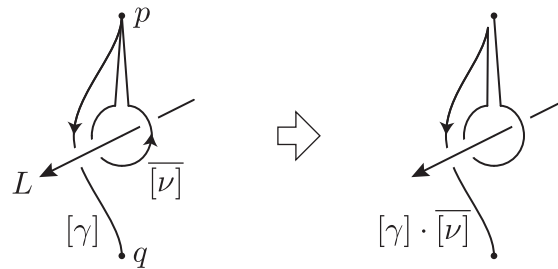


図 8

#### 4. 彩色と四面体分割

彩色の幾何学的解釈を考察すると, 彩色と絡み目補空間のある四面体分割との間に関係を見いだすことができる. 本章ではこのことを紹介する. 前章に引き続き,  $L$  を絡み目,  $D$  を 2次元球面  $S$  上に描かれた  $L$  の図式, 点  $p, q$  を  $L$  の補空間の点とする. 技術的な理由により,  $L$  の各成分は  $D$  で少なくとも一つの交点を持ち,  $D$  は分離不能と仮定する<sup>3</sup>.  $A_i$  で  $D$  の弧を表し,  $R_i$  で  $D$  の領域を表す.

まず, Weeks [16] が与えた  $L$  の補空間の四面体分割方法を紹介する.  $S$  上に  $D$  の双対グラフを描き, 点  $p, q$  によるその懸垂を考える. この操作により,  $L$  の補空間はバナナのような細長い領域に分割される (図 9 左参照). さらにこの領域を図 9 右のように四分分割し, 斜線部分を (絡み目の各成分を一点に潰すようにして) 線分に変形する. この操作により, 各ピースは二つの理想頂点を持つ四面体となる. つまり  $L$  の補空間に四面体分割が与えられたことになる.

上記の四面体分割において, 四面体は  $D$  の交点の角 (かど) と一対一の対応を持つ. そこで, 領域  $R_i$  および弧  $A_j, A_k$  からなる角に対応する四面体を  $\Delta_{i,j,k}$  とする. このとき, 点  $p$  と点  $q$  を結ぶ  $\Delta_{i,j,k}$  の辺は, 前章で定義した道  $\gamma_i$  に他ならない. また, 点  $p$  と弧  $A_j$  (または  $A_k$ ) をつなぐ  $\Delta_{i,j,k}$  の辺は, 前章で定義したヌース  $\nu_j$  (または  $\nu_k$ ) と自然に同一視できる. よって  $D$  に  $(X, Y)$  彩色が与えられたとき,  $\Delta_{i,j,k}$  には  $R_i, A_j$  および  $A_k$  の色から得られる情報を付与することができる.

この議論を応用するため, 次の設定を行う<sup>4</sup>.  $L_0$  を双曲絡み目とし, その補空間の異なる二点  $p_0, q_0$  を固定する.  $Q(L_0)$  を ( $p_0$  を基点とする)  $L_0$  の結び目カンドルとし,  $Z(L_0)$  を  $L_0$  の補空間内で点  $p_0$  と点  $q_0$  を結ぶ道のホモトピー類がなす集合とする. ま

<sup>3</sup> 必要ならば図式に数回の R1, R2 変形を施すことで, この仮定はいつでも満たすことができる.

<sup>4</sup> 双曲幾何の用語や事実を未定義のまま使用しているので, 参考文献として [11] を挙げておく.

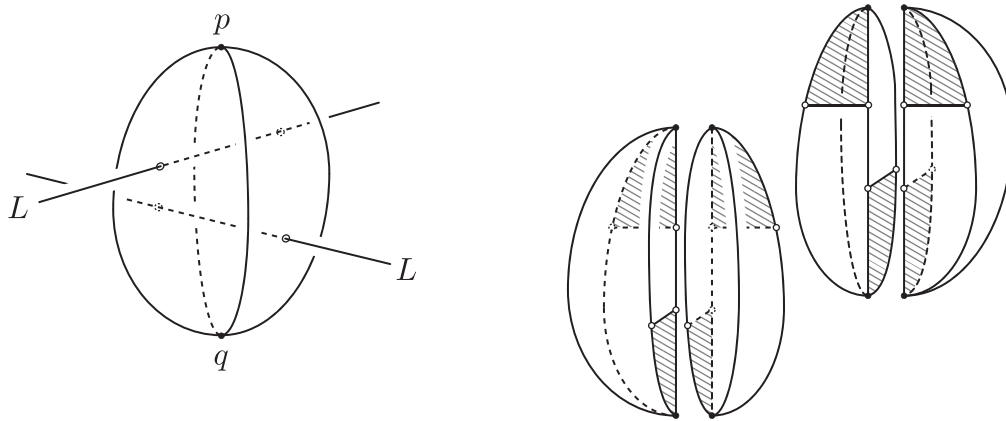


図 9

た  $\Psi: \mathbb{H}^3 \rightarrow S^3 \setminus L_0$  を普遍被覆とし,  $\rho: \pi_1(S^3 \setminus L_0) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  をそのホロノミー表現とする. 前章で定義した写像  $\tau: Q(L_0) \rightarrow \pi_1(S^3 \setminus L_0)$  と  $\rho$  の合成写像は  $x \in Q(L_0)$  を  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  の放物的元にうつす. その放物的元の唯一の固定点を  $x_\infty \in \partial \mathbb{H}^3$  で表す. 点  $\tilde{p}_0 \in \Psi^{-1}(p_0)$  を選んで固定し,  $r \in Z(L_0)$  に対して  $\tilde{p}_0$  を始点とする  $r$  の代表元の持ち上げの終点を  $\tilde{r}(1) \in \mathbb{H}^3$  とする. また,  $\mathbb{H}^3$  の点  $a, b, c, d$  を頂点とする  $\mathbb{H}^3$  の測地四面体 (退化していても構わない) を  $\Delta(a, b, c, d)$  と表す.

$D$  に  $(Q(L_0), Z(L_0))$  彩色が与えられているとする. 弧  $A_i$  の色を  $x_i$ , 領域  $R_i$  の色を  $r_i$  とすると, 四面体  $\Delta_{i,j,k}$  には  $\tilde{r}_i(1), x_{j_\infty}, x_{k_\infty}$  の情報が付与される. この情報を用いれば, (辺の対応を考慮しながら) 全射連続写像  $\Delta_{i,j,k} \rightarrow \Psi(\Delta(\tilde{p}_0, \tilde{r}_i(1), x_{j_\infty}, x_{k_\infty}))$  が構成できる. この連続写像は, 四面体たちの共通部分で一致すると仮定することができる. よって, 次の定理が成り立つ.

**定理 1.**  $L$  を絡み目とし,  $L_0$  を双曲絡み目とする. このとき,  $L$  の図式の  $(Q(L_0), Z(L_0))$  彩色は, 連続写像  $S^3 \setminus L \rightarrow S^3 \setminus L_0$  を誘導する.

$D$  の各交点には四つの四面体に対応する. よって, 交点に付随する  $C_2^Q(Q(L_0), Z(L_0))$  の要素 (図 4 参照) には, 対応する四つの四面体の連続写像による像の符号付き (双曲) 体積の和を割り当てることができる. この操作により写像  $\mathrm{vol}: C_2^Q(Q(L_0), Z(L_0)) \rightarrow \mathbb{R}$  が定まるが, 簡単な考察から  $\mathrm{vol}$  は 2次元コサイクルであることがわかる. この 2次元コサイクル  $\mathrm{vol}$  を利用して, 定理 1 から次を示すことができる.

**定理 2.**  $K$  を双曲結び目とする.  $K$  の補空間の体積を  $\mathrm{Vol}(S^3 \setminus K)$  と表し,  $K$  の向きを逆にして得られる双曲結び目を  $-K$  と表す. このとき次が成り立つ:

- (1) その基本類を  $\mathrm{vol}$  により評価した値が  $-\mathrm{Vol}(S^3 \setminus K)$  となる  $K$  の図式の  $(Q(K), Z(K))$  彩色が存在するとき, またそのときに限り,  $K$  は  $(-)$  もろて型である.
- (2) その基本類を  $\mathrm{vol}$  により評価した値が  $\mathrm{Vol}(S^3 \setminus K)$  となる  $K$  の図式の  $(Q(-K), Z(-K))$  彩色が存在するとき, またそのときに限り,  $K$  は可逆である.
- (3) その基本類を  $\mathrm{vol}$  により評価した値が  $-\mathrm{Vol}(S^3 \setminus K)$  となる  $K$  の図式の  $(Q(-K), Z(-K))$  彩色が存在するとき, またそのときに限り,  $K$  は  $(+)$  もろて型である.

詳細は拙論文 [5] に譲ることとする。

次に紹介する単体的カンドルホモロジーは、上記の議論を一般化するために、蒲谷祐一氏と共同で導入したものである [7]。\$X\$ をカンドルとする。非負整数 \$n\$ に対して、\$X^{n+1}\$ が生成する自由アーベル群を \$C\_n^\Delta(X)\$ とする。写像 \$\delta\_n : C\_n^\Delta(X) \to C\_{n-1}^\Delta(X)\$ を

$$\delta_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

と定めると、\$(C\_n^\Delta(X), \delta\_n)\$ は非輪状な鎖複体となる。\$C\_n^\Delta(X)\$ の生成元は頂点に \$x\_i\$ が付与された \$n\$ 次元の四面体と同一視でき、\$\delta\_n\$ はその境界を読み取る写像と解釈できる。付随群 \$\text{As}(X)\$ の群環を \$\mathbb{Z}[\text{As}(X)]\$ と表す。\$\text{As}(X)\$ は \$X\$ に右から自然に作用するから、\$C\_n^\Delta(X)\$ は自然に \$\mathbb{Z}[\text{As}(X)]\$ 加群の構造を持つ。そこで \$C\_n^\Delta(X)\_{\text{As}(X)}\$ を \$C\_n^\Delta(X) \otimes\_{\mathbb{Z}[\text{As}(X)]} \mathbb{Z}\$ と定義する。明らかに \$(C\_n^\Delta(X)\_{\text{As}(X)}, \delta\_n)\$ はまた鎖複体である。この鎖複体のホモロジー群を \$X\$ の**単体的カンドルホモロジー群**と呼び、\$H\_\*^\Delta(X)\$ で表す。またアーベル群 \$A\$ に対し、余鎖複体 \$(\text{Hom}(C\_n^\Delta(X)\_{\text{As}(X)}, A), \text{Hom}(\delta\_n, \text{id}))\$ のコホモロジー群を \$X\$ の \$A\$ 係数**単体的カンドルコホモロジー群**と呼び、\$H\_\Delta^\*(X; A)\$ で表す。

\$w \in X\$ を固定し、写像 \$\tau : C\_2^R(X, X) \to C\_3^\Delta(X)\_{\text{As}(X)}\$ を

$$\tau(r \otimes (x, y)) = (w, r, x, y) - (w, r \cdot x, x, y) - (w, r \cdot y, x * y, y) + (w, r \cdot xy, x * y, y)$$

と定める。このとき、次の定理が成り立つ。

**定理 3.** 写像 \$\tau\$ は準同型 \$\tau\_\* : H\_2^Q(X, X) \to H\_3^\Delta(X)\$ を誘導する。この準同型は \$w \in X\$ の選び方に依らず、一意に定まる。

\$D\$ の \$(X, X)\$ 彩色が定める基本類の \$\tau\_\*\$ による像は、頂点に付与されている \$X\$ の要素の情報を無視すれば、これまでに考えてきた \$L\$ の補空間の四面体分割に他ならない。よって定理 3 は、これまでの議論を代数的に表したものと考えることができる。

次に簡単に紹介する定理 3 の応用は、やはり蒲谷氏との共同研究 [7] の成果である。\$\mathcal{P}\$ を \$\text{PSL}(2, \mathbb{C})\$ の放物的元がなす集合とする。二項演算 \$\* : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}\$ を \$x \* y = y^{-1}xy\$ と定めると、\$\mathcal{P}\$ はカンドルとなる。\$L\$ を双曲絡み目と仮定すると、ホロノミー表現 \$\pi\_1(S^3 \setminus L) \to \text{PSL}(2, \mathbb{C})\$ に対応する \$D\$ の \$(\mathcal{P}, \mathcal{P})\$ 彩色を考えることができる。定理 3 といくつかの議論から、この彩色の基本類が拡張 Bloch 群 ([15]) に \$L\$ の補空間を表す要素を定めることが分かる。Neumann [15] は、3次元双曲多様体 \$M\$ を表す拡張 Bloch 群の要素から、\$M\$ の体積および Chern-Simons 不変量が組み合わせ的に計算できることを示している。この結果を利用することで、次の定理が得られる。

**定理 4.** \$L\$ を双曲絡み目とする。このとき、ホロノミー表現 \$\pi\_1(S^3 \setminus L) \to \text{PSL}(2, \mathbb{C})\$ に対応する \$L\$ の図式の \$(\mathcal{P}, \mathcal{P})\$ 彩色から、\$L\$ の補空間の体積および Chern-Simons 不変量が組み合わせ的に計算できる。

## 5. 彩色と絡み目ホモトピー

彩色の幾何学的な解釈は、彩色が絡み目ホモトピーで不変となるための条件も与える。最後にこのことを紹介する。

Milnor [13] により導入された**絡み目ホモトピー**は、同一成分の接触を許した絡み目の連続変形である。正確には、二つの絡み目は、アンビエントイソトピーと自己交差

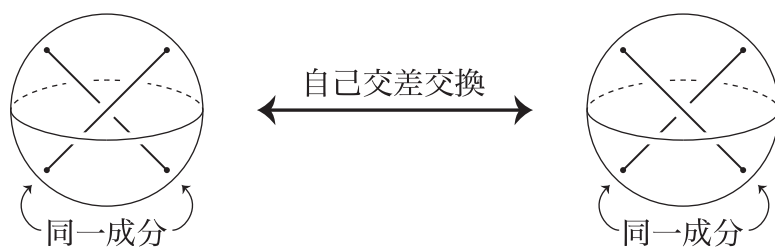


図 10

交換の有限列で互いに移り合うとき、絡み目ホモトピックであるという。ここで自己交差交換とは、絡み目の同一成分に対する図 10 の変形を意味する。

結び目カンドルは、アンビエントイソトピーで不変だが、自己交差交換で不変とは限らない。これは、自己交差交換がヌースのホモトピー同値性を保たないことによる。しかし元々ホモトピックだったヌースたちは、自己交差交換後、ホモトピーと図 11 の変形で互いに移り合う。そこで絡み目  $L$  に対して、(集合としての)  $Q(L)$  を図 11 の変形が与える関係で割った集合  $RQ(L)$  を考える。ヌースの積  $*$  は、 $RQ(L)$  上でも well-defined な二項演算となり、カンドルの公理 (Q1) ~ (Q3) を満たす。このカンドル  $RQ(L)$  を  $L$  の**簡約結び目カンドル**と呼ぶ。明らかに簡約結び目カンドルは絡み目ホモトピーで不変である。なお、この構成は著者によるものであるが、簡約結び目カンドル自体は Hughes [4] が代数的に定義したものである。

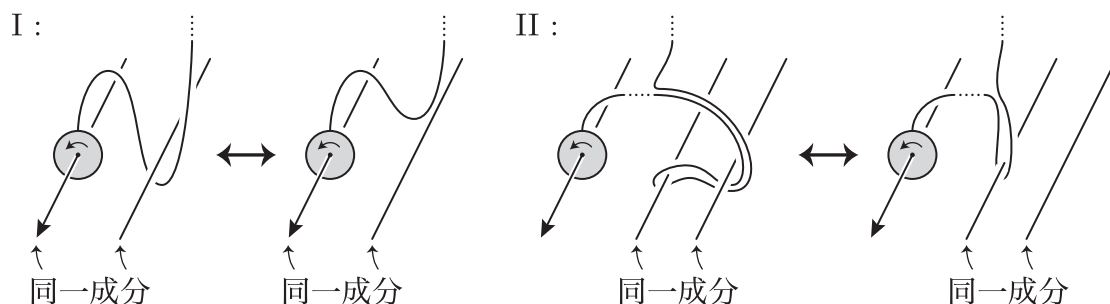


図 11

簡約結び目カンドルの性質を代数的に述べるため、次の用語を用意する。カンドル  $X$  の**自己同型群**  $\text{Aut}(X)$  とは、写像の合成を積として、 $X$  の自己同型全体がなす群である。カンドルの公理 (Q2) と (Q3) より、任意の  $x \in X$  に対して写像  $*x: X \rightarrow X$  は自己同型である。そこで集合  $\{ *x: X \rightarrow X \mid x \in X \}$  が生成する  $\text{Aut}(X)$  の部分群  $\text{Inn}(X)$  を考え、これを  $X$  の**内部自己同型群**と呼ぶ。また  $\text{Inn}(X)$  の要素を  $X$  の**内部自己同型**と呼ぶ。

$L$  を絡み目とし、 $\mu, \nu$  をそのヌースとする。 $\mu$  と  $\nu$  が  $L$  の同一成分と交わることは、 $[\mu] = \varphi([\nu])$  を満たす内部自己同型  $\varphi \in \text{Inn}(Q(L))$  が存在することと同値である。よって図 11 の I の変形が与える関係は、

$$(*) \text{ 任意の } [\nu] \in RQ(L) \text{ と } \varphi \in \text{Inn}(RQ(L)) \text{ に対して } [\nu] * \varphi([\nu]) = [\nu]$$

と表せる。同様に、図 11 の II の変形が与える関係は、任意の  $[\mu], [\nu] \in RQ(L)$  と  $\varphi \in \text{Inn}(RQ(L))$  に対して  $[\mu] * ([\nu] * \varphi([\nu])) = [\mu] * [\nu]$  と表せる。以上より、条件 (\*)



を満たすことが簡約結び目カンドル  $RQ(L)$  の特徴であることがわかる。そこで、簡約結び目カンドルからの非自明な表現を許容し得るカンドルとして、次を定義する。

**定義 5.** 次の条件を満たすカンドル  $X$  を**準自明カンドル**と呼ぶ：

(QT) 任意の  $x \in X$  と  $\varphi \in \text{Inn}(X)$  に対して  $x * \varphi(x) = x$ .

商写像  $\pi : Q(L) \rightarrow RQ(L)$  は準同型であるから、任意のカンドル  $X$  に対し、表現  $RQ(L) \rightarrow X$  は表現  $Q(L) \rightarrow X$  に持ち上がる。反対に、 $X$  が準自明カンドルならば、表現  $Q(L) \rightarrow X$  は  $\pi : Q(L) \rightarrow RQ(L)$  と表現  $RQ(L) \rightarrow X$  に分解する。よって、次の定理が成り立つ。

**定理 6.**  $X$  を準自明カンドルとする。このとき、絡み目ホモトピックな絡み目を表す図式たちの  $X$  彩色の間には一対一の対応がつく。特に  $X$  彩色の総数は、絡み目ホモトピー不変量を与える。

$X$  を準自明カンドルとし、 $Y$  を一元集合とする。 $X$  彩色と  $(X, Y)$  彩色との同一視により、 $X$  彩色は  $H_2^Q(X, Y)$  に基本類を定める。一般に、この基本類は自己交差交換で不変とはならない。そこで、カンドルホモロジーの定義を次のように修正する。

自由アーベル群  $C_n^R(X, Y)$  とその部分群  $C_n^D(X, Y)$ 、そして鎖写像  $\partial_n : C_n^R(X, Y) \rightarrow C_{n-1}^R(X, Y)$  を 2 章のように定める。また  $C_n^R(X, Y)$  の部分群  $C_n^{D,qt}(X, Y)$  を

$$C_n^{D,qt}(X, Y) = \begin{cases} C_n^D(X, Y) \cup \text{span}_{\mathbb{Z}}\{r \otimes (x_1, \varphi(x_1), x_3, \dots, x_n) \mid \varphi \in \text{Inn}(X)\} & (n \geq 2), \\ 0 & (n = 0, 1) \end{cases}$$

と定義する。このとき  $\partial_n(C_n^{D,qt}(X, Y)) \subset C_{n-1}^{D,qt}(X, Y)$  が成り立つから、 $C_n^{Q,qt}(X, Y)$  を  $C_n^R(X, Y)/C_n^{D,qt}(X, Y)$  と定めれば、 $(C_n^{Q,qt}(X, Y), \partial_n)$  は鎖複体となる。この鎖複体のホモロジー群を  $(X, Y)$  の**準自明カンドルホモロジー群**と呼び、 $H_*^{Q,qt}(X, Y)$  で表す。またアーベル群  $A$  に対し、余鎖複体  $(\text{Hom}(C_n^{Q,qt}(X, Y), A), \text{Hom}(\partial_n, \text{id}))$  のコホモロジー群を  $(X, Y)$  の**準自明カンドルコホモロジー群**と呼び、 $H_{Q,qt}^*(X, Y; A)$  で表す。

$X$  彩色は  $H_2^{Q,qt}(X, Y)$  にも基本類を定め、これは Reidemeister 変形および自己交差交換で不変となる。よって、次の定理が成り立つ。

**定理 7.**  $X$  を準自明カンドルとし、 $Y$  を一元集合とする。また  $A$  をアーベル群とし、 $\theta : C_2^{Q,qt}(X, Y) \rightarrow A$  を 2次元コサイクルとする。このとき、 $\theta$  に付随したカンドルコサイクル不変量は絡み目ホモトピーで不変である。

拙論文 [6] では、定理 7 の適用例として、Borromean 環（ある 3 成分絡み目）が自明な 3 成分絡み目と絡み目ホモトピックではないことを示している。

## 参考文献

- [1] J. S. Carter, M. Elhamdadi, M. Graña and M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle homology*, Osaka J. Math. **42** (2005), no. 3, 499–541.
- [2] J. S. Carter, M. Elhamdadi and M. Saito, *Twisted quandle homology theory and cocycle knot invariants*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 95–135.
- [3] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3947–3989.

- [4] J. R. Hughes, *Link homotopy invariant quandles*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), no. 5, 763–773.
- [5] A. Inoue, *Quandle and hyperbolic volume*, Topology Appl. **157** (2010), no. 7, 1237–1245.
- [6] A. Inoue, *Quasi-triviality of quandles for link-homotopy*, preprint (arXiv:1205.5891).
- [7] A. Inoue and Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, preprint (arXiv:1012.2923).
- [8] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.
- [9] S. Kamada, *Quandles with good involutions, their homologies and knot invariants*, Intelligence of low dimensional topology 2006, 101–108, Ser. Knots Everything, 40, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [10] 鎌田 聖一, 曲面結び目理論, シュプリンガー現代数学シリーズ 16, 丸善出版, 2012.
- [11] 小島 定吉, 3次元の幾何学, 講座 数学の考え方 22, 朝倉書店, 2002.
- [12] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) **119 (161)** (1982), 78–88 (English translation: Math. USSR-Sb. **47** (1984), 73–83).
- [13] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. **59** (1954), 177–195.
- [14] S. Nelson, *The combinatorial revolution in knot theory*, Notices Amer. Math. Soc. **58** (2011), no. 11, 1553–1561.
- [15] W. Neumann, *Extended Bloch group and the Cheeger-Chern-Simons class*, Geom. Topol. **8** (2004), 413–474.
- [16] J. Weeks, *Computation of hyperbolic structures in knot theory*, Handbook of knot theory, 461–480, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.



# ホイットニーの傘とスワローテイル

西村尚史 (横浜国立大学)

## 1 序

H. Whitney のパイオニア的な仕事 ([19, 20]) 以来, 次の写像芽  $f$  はホイットニーの傘の標準形としてよく知られている. 図 1 の左は  $f$  の像である.

$$f(x, y) = (xy, x^2, y).$$

他方, スワローテイルの標準形<sup>1</sup>は次の写像芽  $F$  であり, 図 1 の右は  $F$  の像である.

$$F(x, y) = (3x^4 + x^2y, -4x^3 - 2xy, y).$$

ホイットニーの傘の像とスワローテイルの像は, たとえて言うとな『東の横綱

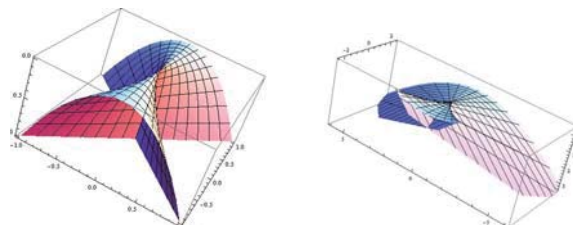


図 1: 左: ホイットニーの傘. 右: スワローテイル.

と西の横綱』とでも言いたくなるような, 特異点を持つ曲面としては代表的な存在と言える. これらは独立して研究されてきた<sup>2</sup>が, 「本質的には同じものとみなせる」というご報告をさせていただく. この報告の内容は [14] に出版済みですので, 詳細についてはそちらをご覧ください幸いです.

<sup>1</sup>スワローテイルはカタストロフ理論に登場してから有名になったように見受けられるが, 実はもっと遙か以前から知られていて, L. Kronecker (1823-1891) の 1878 年の論文に既に登場しているそうである. スワローテイルの標準形  $F$  は標準形と言いつつも残念ながら記憶に残りにくい形をしており, そのことは本研究の動機の一つにもなっているが, 4.2 節における超平面のワンパラメータ族 (3) を  $k=2, n=1$  の場合に考えると, その包絡面のパラメータ表示が  $F$  である. すなわち, 4 次項の係数が 1 である 4 次方程式にチルンハウス変換を施し 3 次項の係数をゼロとしておいて, 重根を持つような係数の集合のパラメータ表示である ([3] を参照).

<sup>2</sup>本当は, 同時に登場することもしどきある. 図 1 の左右を眺めていただくとおわかりのように, 像たちは  $\mathbb{R}^3$  の同相写像で写りあうが, この事実が役立つときもあるので (たとえば, [21] を参照).

ホイットニーの傘の標準形  $f$  からスワローテイルの標準形  $F$  を作ってみることから話を始めることにする. 三つのステップで簡単に作ることができる.

ステップ 1 写像芽  $f$  に二つの座標変換  $h_s(x, y) = (x, x^2 + y)$ ,  $h_t(X, Y, Z) = (X, -Z, -Y + Z)$  を合成する. すると, 次の  $g$  を得る.

$$g(x, y) = h_t \circ f \circ h_s(x, y) = (x^3 + xy, -x^2 - y, y).$$

ステップ 2 写像芽  $g$  の第 1 成分と第 2 成分を 0 から  $x$  まで積分し,  $G$  とおく.

$$G(x, y) = \left( \int_0^x (x^3 + xy) dx, \int_0^x (-x^2 - y) dx, y \right) = \left( \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y, -\frac{1}{3}x^3 - xy, y \right).$$

ステップ 3 写像芽  $G$  にスケーリング変換  $H_s(x, y) = (x, \frac{1}{6}y)$ ,  $H_t(X, Y, Z) = (12X, 12Y, 6Z)$  を合成すると, スワローテイルの標準形  $F$  が得られている.

$$H_t \circ G \circ H_s(x, y) = (3x^4 + x^2y, -4x^3 - 2xy, y) = F(x, y).$$

**定義 1** 1.  $C^\infty$  級の二つの写像芽  $\varphi, \psi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  が  $\mathcal{A}$ -同値であるとは,  $C^\infty$  級の微分同相写像芽  $h_s : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  と  $h_t : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  が存在して  $\psi = h_t \circ \varphi \circ h_s$  をみたすことである.

2.  $C^\infty$  級の写像芽  $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  は, ホイットニーの傘の標準形  $f$  (resp., スワローテイルの標準形  $F$ ) と  $\mathcal{A}$ -同値であるとき **ホイットニーの傘** (resp., **スワローテイル**) と呼ばれる.

定義 1 により, ステップ 1 で得られた  $g$  はホイットニーの傘であり, ステップ 2 で得られた  $G$  はスワローテイルである. そうすると, ステップ 2 が本質的ステップであることがわかる. 他方, 以下の写像芽 (1) のディスクリミナント (特異点集合の像) は直線であってカスプ状ではないので, ステップ 1 を経ずにステップ 2 だけではスワローテイルは得られないこともわかる.

$$(x, y) \mapsto \left( \int_0^x xy dx, \int_0^x x^2 dx, y \right). \quad (1)$$

では, ステップ 1 はいったい何をしているのでしょうか? ステップ 1 の意味をご理解いただくため, 垂足曲線の定義<sup>3</sup> を復習しておく.

変曲点を持たない正則曲線  $\mathbf{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $0 \in (a, b)$ ) と平面  $\mathbb{R}^2$  上の点  $P$  が与えられたとする. そのとき,  $\mathbf{r}(s)$  における接線  $\{\mathbf{r}(s) + u\mathbf{r}'(s) \mid u \in \mathbb{R}\}$  に点  $P$  からおろした垂線の足の軌跡を,  $\mathbf{r}$  の垂足点  $P$  に関する垂足曲線といひ,  $ped_{\mathbf{r}, P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  と表す.

**定義 2** ([2, 7] を参照)  $C^\infty$  級の写像芽  $\Phi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{m+1}, 0)$  は以下の条件をみたす  $\Phi$  に沿った  $C^\infty$  級単位ベクトル場  $\nu_\Phi$  が存在するとき **ルジャンドル写像芽** と呼ばれる. ルジャンドル写像芽の像は  $m = 1$  のとき **波線**,  $m = 2$  のとき **波面** と呼ばれる.

<sup>3</sup>たとえば, [1, 3, 9] などに載っている.

$$1. \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) \cdot \nu_{\Phi}(x_1, \dots, x_m) = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) \cdot \nu_{\Phi}(x_1, \dots, x_m) = 0.$$

2. 以下のように定義される写像芽  $L_{\Phi} : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow T_1\mathbb{R}^{m+1}$  は非特異.

$$L_{\Phi}(x_1, \dots, x_m) = (\Phi(x_1, \dots, x_m), \nu_{\Phi}(x_1, \dots, x_m)).$$

ベクトル場  $\nu_{\Phi}$  は  $\Phi$  の単位法ベクトル場と呼ばれ、写像芽  $L_{\Phi}$  は  $\Phi$  のルジャンドルリフトと呼ばれる.

次で定義される解曲線を  $WF_{\mathbf{r}, P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  で表す.

$$\frac{d}{ds} WF_{\mathbf{r}, P}(s) = \text{ped}_{\mathbf{r}, P}(s) - P, \quad WF_{\mathbf{r}, P}(0) = (0, 0).$$

すると、垂足曲線の定義により、 $\mathbf{r}'(s)$  (これは  $\mathbf{r}(s)$  における  $\mathbf{r}$  の単位接ベクトル<sup>4</sup>) は  $WF_{\mathbf{r}, P}(s)$  における  $WF_{\mathbf{r}, P}$  の単位法ベクトルになっている. 従って、

$$L_{WF_{\mathbf{r}, P}}(s) = (WF_{\mathbf{r}, P}(s), \mathbf{r}'(s))$$

とおけば  $L_{WF_{\mathbf{r}, P}}$  は  $WF_{\mathbf{r}, P}$  のルジャンドルリフトになっている. 与えられた平面曲線  $\mathbf{r}$  は変曲点を持たなかった<sup>5</sup>ので、フレネ・セレの公式<sup>5</sup>より、 $L_{WF_{\mathbf{r}, P}}$  は非特異であることがわかる. すなわち、 $WF_{\mathbf{r}, P}$  の像は波線である<sup>6</sup>.

次に垂足点  $P$  を動かすことにより、垂足曲線を動かしてみる. すなわち、 $C^{\infty}$  級の写像  $P : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $0 \in (c, d)$ ) に対して次の写像を考えることにする.

$$(s, \lambda) \mapsto (\text{ped}_{\mathbf{r}, P(\lambda)}(s), \lambda).$$

この写像を (ワンパラメータ) 垂足開折と呼び、 $Un\text{-ped}_{\mathbf{r}, P}$  という記号で表すことにする. ワンパラメータ垂足開折は垂足曲線のパラパラ漫画として得られる曲面のパラメータ表示を与えている. 図2より、「与えられた平面曲線  $\mathbf{r}$  に横断的に交わるように点  $P$  を動かしていった場合は、ワンパラメータ垂足開折はホイットニーの傘になるであろう」ということが容易に想像できる<sup>7</sup>. ステップ1では「(垂足開折という幾何学的な概念を元にした) 第2節の定義3で定義する垂足開折型の写像芽となるように、ホイットニーの傘の標準形を座標変換する」ということを行っていた.

垂足点  $P$  を動かしていくとルジャンドル写像  $WF_{\mathbf{r}, P}$  も動いていき、像である波線も動いていく. 垂足点  $P$  が動いていくときの  $WF_{\mathbf{r}, P}$  の動きは次の写像でとらえることが出来る.

$$Un\text{-}WF_{\mathbf{r}, P}(s, \lambda) = (WF_{\mathbf{r}, P(\lambda)}(s), \lambda).$$

<sup>4</sup> $s$  は  $\mathbf{r}$  の弧長. 従って、 $\mathbf{r}'(s)$  の長さは 1.

<sup>5</sup>たとえば、[3, 9] を参照

<sup>6</sup>本稿とは異なる観点ではあるが、双曲空間において、垂足超曲面の特異点とルジャンドル写像の特異点との密接な関連は [10] で既に見出されていた.

<sup>7</sup>証明もできる. [13, 15] を参照.

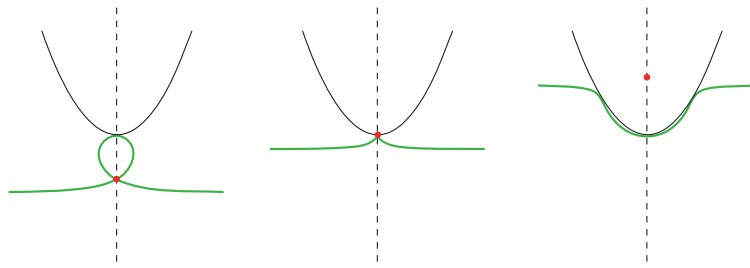


図 2: ワンパラメータ垂足開折であるホイットニーの傘.

この写像を (ワンパラメータ) 波開折と呼ぶことにする. ワンパラメータ波開折は波線のパラパラ漫画として得られる曲面<sup>8</sup>のパラメータ表示を与えている. では, 垂足曲線のパラパラ漫画として得られる曲面がホイットニーの傘であるとき, 波線のパラパラ漫画として得られる波面はどういう曲面になるのでしょうか? 図 3, 4 を眺めていると「ホイットニーの傘  $g(x, y) = (x^3 + xy, -x^2 - y, y)$  を積分して得られる曲面はスワローテイルであろう」ということが予想できる<sup>9</sup>. この講演の目的は, 「ここまでの平易で幾何学的な構成を, 垂足曲線の

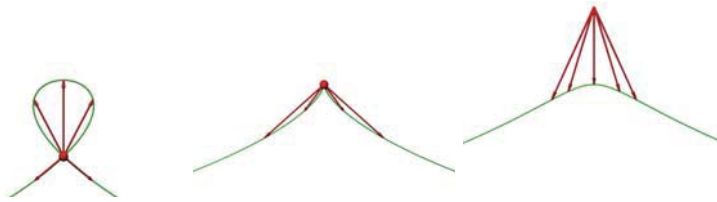


図 3: ワンパラメータ垂足開折.



図 4: ワンパラメータ波開折.

ばらばら漫画 (垂足開折) として得られるホイットニーの傘の集合<sup>10</sup>と波線のばらばら漫画 (波開折) として得られるスワローテイルの集合<sup>11</sup>との間の

<sup>8</sup>この曲面は波面であることが容易にわかる.

<sup>9</sup>実際にスワローテイルであることをさきほど確認した.

<sup>10</sup>正確には, (第 2 節の定義 3 で定義する) 垂足開折型のホイットニーの傘の集合.

<sup>11</sup>正確には, (第 2 節の定義 5 で定義する) 正規化されたスワローテイルの集合.

対応<sup>12</sup>に昇華させることができる」ということを報告することである。

## 2 垂足開折型のホイットニーの傘と正規化されたスワローテイル

**定義 3** ([14]) 以下の形をしている  $C^\infty$  級の写像芽  $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  を垂足開折型の写像芽という。

$$\varphi(x, y) = (n(x, y)p(x, y), p(x, y), y).$$

ここに  $n : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  は  $\frac{\partial n}{\partial x}(0, 0) \neq 0$  という条件をみたしている  $C^\infty$  級の写像芽であり,  $p : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  は  $C^\infty$  級の写像芽である. ??で明らかにされる.

**命題 1** ([13, 15])  $\mathbf{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $0 \in (a, b)$ ) を変曲点を持たず  $\mathbf{r}(0) = 0$  となっている正則曲線とし,  $P : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $0 \in (c, d)$ ) を  $P(0) = \mathbf{r}(0) = 0$  をみたす  $C^\infty$  級の写像とする. そのとき, 以下が成立する.

1. 垂足開折  $Un\text{-}ped_{\mathbf{r}, P}$  は垂足開折型の写像芽である.
2. 垂足開折  $Un\text{-}ped_{\mathbf{r}, P}$  は次の形の写像芽と  $\mathcal{A}$ -同値となる<sup>13</sup>.

$$(x, y) \mapsto (x(x^2 + q(y)), x^2 + q(y), y).$$

**定義 4** ([12])  $k$  を非負整数とする.  $C^\infty$  級の写像芽  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  は,  $f_{k, \pm}(x, y) = (x(x^2 \pm y^{k+1}), x^2 \pm y^{k+1}, y)$  という写像芽と  $\mathcal{A}$ -同値のとき,  $S_k$  特異点と呼ばれる.

命題 1 により, ワンパラメータ垂足開折  $Un\text{-}ped_{\mathbf{r}, P}$  の特異点は  $S_k$  特異点に限ることがわかる (ただし,  $\mathbf{r}$  は変曲点なしの正則曲線であり,  $\mathbf{r}(0) = P(0)$  と  $q(y)$  が平坦でないという仮定の元で). たとえ非退化曲線  $\mathbf{r}$  をパラメータ  $y$  に依存して動かしたとしても,  $\mathbf{r}_0$  が非退化であって  $\mathbf{r}_0(0) = P(0)$  をみたして  $q(y)$  が平坦ではない限り, 新しい特異点は決して現れないことが命題 1 の証明からわかる.

**定義 5** ([14]) 1. 垂足開折型の写像芽  $\varphi(x, y) = (n(x, y)p(x, y), p(x, y), y)$  に対し,

$$\mathcal{I}(\varphi) = \left( \int_0^x n(x, y)p(x, y)dx, \int_0^x p(x, y)dx, y \right)$$

とおく. 写像芽  $\mathcal{I}(\varphi) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  を  $\varphi$  の積分と呼ぶ.

<sup>12</sup>この対応は微分と積分によって与えられるので, 微積分対応と呼ぶことにする. 微積分対応により同一視できるということが「ホイットニーの傘とスワローテイルは同じものとみなせる」の意味である.

<sup>13</sup> $y = 0$  のときだけ考えてみると, 命題 1 の 2 は [1, 3, 9] などに載っている垂足曲線の特異点の解説と矛盾しているように見えるかもしれない. しかし, [1, 3, 9] では  $P(0) = \mathbf{r}(0)$  という場合は除外しており, 矛盾していない.



2. 以下の三つの条件をみたすルジャンドル写像芽  $\Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  を正規化されたルジャンドル写像芽と呼ぶ.

(a)  $\Phi$  は  $\Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y), y)$  という形をしている.

(b)  $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(0, 0) = 0$ .

(c)  $\nu_\Phi(0, 0)$  は  $\frac{\partial}{\partial X}$  または  $-\frac{\partial}{\partial X}$ .

3. 正規化されたルジャンドル写像芽  $\Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y), y)$  に対し,

$$\mathcal{D}(\Phi) = \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x, y), y \right)$$

とおく. 写像芽  $\mathcal{D}(\Phi) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  を  $\Phi$  の微分と呼ぶ.

**命題 2 ([14])** 1. 垂足開折型の  $C^\infty$  級写像芽  $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  に対し,  $\varphi$  の積分  $\mathcal{I}(\varphi)$  は正規化されたルジャンドル写像芽である.

2. 正規化されたルジャンドル写像芽  $\Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  に対し,  $\Phi$  の微分  $\mathcal{D}(\Phi)$  は垂足開折型の写像芽である.

$$\mathcal{W} = \{ \varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \text{ 垂足開折型のホイットニーの傘} \},$$

$$\mathcal{S} = \{ \Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \text{ 正規化されたスワローテイル} \}$$

とおく.

**定理 1 ([14])** 1.  $\mathcal{W} \ni \varphi \mapsto \mathcal{I}(\varphi) \in \mathcal{S}$  で定義される写像  $\mathcal{I} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{S}$  は well-defined であり, 全単射写像である.

2.  $\mathcal{S} \ni \Phi \mapsto \mathcal{D}(\Phi) \in \mathcal{W}$  で定義される写像  $\mathcal{D} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{W}$  は well-defined であり, 全単射写像である.

定理 1 の応用を一つあげておく.

**系 1** 写像芽  $\Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  が次の形をしているとする:

$$\Phi(x, y) = (ax^4 + bx^2y, cx^3 + dxy, y) \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

そのとき, 以下は同値である.

1.  $\Phi$  はスワローテイル.

2.  $abcd \neq 0$  かつ  $2ad = 3bc$ .

この系の証明は定理 1 の応用として [15] に与えてある.

ルジャンドル写像の特異点として, 次の写像芽 (2) と  $\mathcal{A}$ -同値なカスピダルエッジと呼ばれるジェネリックな特異点がある. 垂足開折型の非特異写像芽と正規化されたカスピダルエッジとの間にも微積分対応がある (定理 2).

$$(x, y) \mapsto (2x^3, -3x^2, y). \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{ \varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \text{ 垂足開折型の非特異写像芽} \}, \\ \mathcal{C} &= \{ \Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \text{ 正規化されたカスピダルエッジ} \} \end{aligned}$$

とおく.

**定理 2** ([14]) 1.  $\mathcal{N} \ni \varphi \mapsto \mathcal{I}(\varphi) \in \mathcal{C}$  で定義される写像  $\mathcal{I} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  は well-defined であり, 全単射写像である.

2.  $\mathcal{C} \ni \Phi \mapsto \mathcal{D}(\Phi) \in \mathcal{N}$  で定義される写像  $\mathcal{D} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{N}$  は well-defined であり, 全単射写像である.

次の二つの事実はよく知られている (たとえば [2] を参照).

1. 安定写像芽  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  はホイットニーの傘か非特異のいずれかである<sup>14</sup>.
2. 安定なルジャンドル特異点  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  はスワローテイルかカスピダルエッジのいずれかである.

従って, 定理 1 と定理 2 は, 安定写像芽  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  と安定なルジャンドル特異点  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  に対する微積分の基本定理とみなすことができる.

### 3 ルジャンドリアン ヤコビアン

**定義 6** ([14])  $\Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  をルジャンドル写像芽とし,  $\nu_\Phi$  を  $\Phi$  の単位法ベクトル場とする. そのとき, 以下で定義される関数芽  $LJ_\Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\Phi$  のルジャンドリアン ヤコビアン<sup>15</sup>と呼ぶ.

$$LJ_\Phi(x, y) = \det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y), \nu_\Phi(x, y) \right).$$

<sup>14</sup>これに関しては, [5] の第 I 部『特異点とマザー理論』にも証明付きで載っている. しかし, スワローテイルやカスピダルエッジはこの本には登場していない.

<sup>15</sup>同一の関数芽は [11] において既に導入されており, [14] において導入しているのはルジャンドリアン ヤコビアンという名称にすぎない. この関数芽は [18] においては “signed area density function” と呼ばれているが, 「(特異点付き曲面という図形に関する概念というよりも) 写像に関する概念」ととらえたいとの思いから, ルジャンドリアン ヤコビアンという名称を導入した.

$\nu_\Phi$  が  $\Phi$  の単位法ベクトル場であれば、 $-\nu_\Phi$  も  $\Phi$  の単位法ベクトル場となる。従って、 $LJ_\Phi(x, y)$  の符号は単位法ベクトル場の選び方に依存する。

**定理 3 (佐治・梅原・山田の判定法 [17])**<sup>16</sup>  $\Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y), y)$  を正規化されたルジャンドル写像芽とする。そのとき、以下は同値である。

1.  $\Phi$  はスワローテイル。
2.  $Q(LJ_\Phi, \frac{\partial LJ_\Phi}{\partial x}) \cong Q(x, y)$ 。

ここで、 $Q(LJ_\Phi, \frac{\partial LJ_\Phi}{\partial x})$  は関数芽  $LJ_\Phi, \frac{\partial LJ_\Phi}{\partial x}$  に対するマザーの局所代数<sup>17</sup>である。定理 3 により、正規化されたルジャンドル写像芽がスワローテイルであるかどうかを知るにはルジャンドリアン ヤコビアンを調べればよいことがわかった。では、垂足開折型の写像芽がホイットニーの傘であるかどうかを知るには何を調べればよいのであろうか？ 答えは次<sup>18</sup>である。

**定理 4**  $\phi(x, y) = (n(x, y)p(x, y), p(x, y), y)$  を垂足開折型の写像芽とする。そのとき、以下は同値である。

1.  $\phi$  はホイットニーの傘。
2.  $Q(p, \frac{\partial p}{\partial x}) \cong Q(x, y)$ 。

定理 3 と定理 4 は形が同じだけでなく、「(住んでいる世界は異なれど) 同じもので判定できる」ということを示しているのが次の補題である。命題 2, 定理 3, 定理 4, 補題 1 を結び付ければ定理 1 の証明は完了する。

**補題 1 ([14])**  $\Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y), y)$  を正規化されたルジャンドル写像芽とすると、以下が成立する。

$$LJ_\Phi(x, y) = \frac{\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x, y)}{\nu_1(x, y)}.$$

ここに  $\nu_\Phi(x, y) = \nu_1(x, y)\frac{\partial}{\partial X_1} + \nu_2(x, y)\frac{\partial}{\partial X_2} + \cdots + \nu_{n+2}(x, y)\frac{\partial}{\partial X_{n+2}}$  である。

<sup>16</sup>後に見るように、佐治・梅原・山田の判定法は  $n$  個のパラメータに対してルジャンドル  $A_{k+1}$  特異点を判定する判定法である ( $k \leq n+1$ )。スワローテイルの判定法としては國分・ラスマン・佐治・梅原・山田の判定法 [11] もあり、スワローテイルに限っては両者は本質的には同じ判定法であるが、垂足開折型のホイットニーの傘の集合と正規化されたスワローテイルの集合との微積分対応を得るには [17] のほうが使いやすいのでそちらを使った。

<sup>17</sup>原点における  $x, y$  を変数とする  $C^\infty$  級関数芽の集合を  $\mathcal{E}_{x,y}$  とおくと  $\mathbb{R}$  の  $\mathbb{R}$ -代数構造により  $\mathcal{E}_{x,y}$  には  $\mathbb{R}$ -代数の構造が自然に入る。  $\mathbb{R}$ -代数  $\mathcal{E}_{x,y}$  を  $LJ_\Phi, \frac{\partial LJ_\Phi}{\partial x}$  で生成するイデアルで割った商代数が  $Q(LJ_\Phi, \frac{\partial LJ_\Phi}{\partial x})$ 。

<sup>18</sup>この定理は [12] における定理 4.1.1 とパラメータ付きのモースの補題 (たとえば [3] を参照) から得られる。

## 4 今後の課題

[14]には次の問題が提出されている.

- 問題 1**
1. 二つの垂足開折型の写像芽  $\varphi_1, \varphi_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  が与えられたとする.  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  は  $\mathcal{A}$ -同値であると仮定する. そのとき,  $\mathcal{I}(\varphi_1)$  は, 必然的に,  $\mathcal{I}(\varphi_2)$  と  $\mathcal{A}$ -同値になるのであろうか?
  2. 二つの正規化されたルジャンドル写像芽  $\Phi_1, \Phi_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  が与えられたとする.  $\Phi_1$  と  $\Phi_2$  は  $\mathcal{A}$ -同値であると仮定する. そのとき,  $\mathcal{D}(\Phi_1)$  は, 必然的に,  $\mathcal{D}(\Phi_2)$  と  $\mathcal{A}$ -同値になるのであろうか?

問題 1 の完全解決はとても難しそうに見える. そこで, 問題 1 の特別な場合や定理 1 の自然な一般化について考えてみることにする.

### 4.1 $S_k$ 特異点とルジャンドル $S_k$ 特異点

定義 4 における  $f_{k,\pm}$  は垂足開折型の写像芽なので, 命題 2 により, 次の  $F_{k,\pm}$  は正規化されたルジャンドル写像芽である.

$$F_{k,\pm}(x, y) = \mathcal{I}(f_{k,\pm})(x, y) = \left( \frac{1}{4}x^4 \pm \frac{1}{2}x^2y^{k+1}, \frac{1}{3}x^3 \pm xy^{k+1}, y \right).$$

ルジャンドル写像芽  $F_{k,\pm}$  はルジャンドル  $S_k$  特異点の標準形と呼ばれ,  $F_{k,\pm}$  と  $\mathcal{A}$ -同値なルジャンドル写像芽はルジャンドル  $S_k$  特異点と呼ばれる.

「垂足開折型の  $S_k$  特異点の集合と正規化されたルジャンドル  $S_k$  特異点の集合との間に微積分対応が存在しているであろうか?」と問うてみる.  $k = 0$  の場合は, 定理 1 で肯定的に解決済みである.  $k = 1$  の場合<sup>19</sup>は, まず  $f_{1,+}$  (resp.,  $F_{1,+}$ ) と  $f_{1,-}$  (resp.,  $F_{1,-}$ ) は  $\mathcal{A}$ -同値ではないことに注意しておく. [12] の定理 4.1.1 は, パラメータ付きのモースの補題と組み合わせることにより任意の非負整数  $k$  に対する  $S_k$  特異点の判定法として使える形で述べられているので,  $S_1$  特異点は判定可能である. 他方, ルジャンドル  $S_1$  特異点については泉屋・佐治・高橋の判定法が知られている ([8]). 従って, 佐治・梅原・山田の判定法を泉屋・佐治・高橋の判定法に置き換えれば, 定理 1 と同様に, 垂足開折型の  $S_1$  特異点の集合と正規化されたルジャンドル  $S_1$  特異点の集合の間の微積分対応の存在を示すことができるであろう.

次に,  $k \geq 2$  の場合について考えてみる.  $k \geq 2$  の場合でも [12] の定理 4.1.1 は  $S_k$  特異点の判定法として機能する. しかし,  $k \geq 2$  の場合にはルジャンドル  $S_k$  特異点の判定法が知られていないようである. 従って, 現状では, 定理 1 の証明のアナロジーは期待できそうもない.

<sup>19</sup>  $f_{1,+}, f_{1,-}$  は, [12] とは独立に, ほぼ同時期に, [4] においても発見されている.

## 4.2 ルジャンドル $A_k$ 特異点とその微分

ここまではワンパラメータであったが、この部分節のみ  $y = (y_1, \dots, y_n)$  ( $n \geq 1$ ) と多パラメータで考えることにする. 多パラメータにしても,  $S_k$  特異点に関する箇所とモンドの判定法以外の第3節までの結果はほとんどそのまま成立する ([15]).

**定義 7 ([17])**  $k, n$  は  $k \leq n+1$  をみたす正の整数とする.

1. 以下で定義される写像芽  $G_k : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n, (0, 0))$  をルジャンドル  $A_{k+1}$  特異点の標準形と呼ぶ, ここに  $(x, y) = (x, y_1, \dots, y_n)$  とおいている.

$$G_k(x, y) = \left( (k+1)x^{k+2} + \sum_{j=1}^{k-1} jx^{j+1}y_j, -(k+2)x^{k+1} - \sum_{j=1}^{k-1} (j+1)x^j y_j, y \right).$$

2.  $C^\infty$  級の写像芽  $\Phi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n, (0, 0))$  がルジャンドル  $A_{k+1}$  特異点とは,  $\Phi$  が  $G_k$  と  $\mathcal{A}$ -同値であることである.

$G_k$  の像は次の超平面のワンパラメータ族の包絡超曲面になる. このことから,  $G_k$  はルジャンドル  $A_{k+1}$  特異点の標準形と呼ばれる.

$$\{(X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_n) \mid x^{k+2} + Y_{k-1}x^k + \dots + Y_1x^2 + X_2x + X_1 = 0\}. \quad (3)$$

ルジャンドル  $A_{k+1}$  特異点の標準形を微分すると次を得る.

$$D(G_k)(x, y) = (n(x, y)p(x, y), p(x, y), y),$$

ここに  $n(x, y) = -x$  であり  $p(x, y) = -(k+2)(k+1)x^k - \sum_{j=1}^{k-1} j(j+1)x^{j-1}y_j$  である.  $p(0, 0) = 0$  となっており  $\frac{\partial n}{\partial x}(0, 0) \neq 0$  であるから,  $D(G_k)$  は垂足開折型である. 従って, 命題 2 より,  $G_k = \mathcal{I}(D(G_k))$  は正規化されたルジャンドル写像芽である. 次の問題 2 は北海道大学の石川教授 [6] とノースイースタン大学の Gaffney 教授から<sup>20</sup>独立に質問された.

- 問題 2**
1. 垂足開折型の写像芽  $\varphi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n, (0, 0))$  が与えられたとする.  $\varphi$  と  $D(G_k)$  は  $\mathcal{A}$ -同値であると仮定する. そのとき,  $\mathcal{I}(\varphi)$  は, 必然的に,  $G_k$  と  $\mathcal{A}$ -同値になるのであろうか?
  2. 正規化されたルジャンドル写像芽  $\Phi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n, (0, 0))$  が与えられたとする.  $\Phi$  と  $G_k$  は  $\mathcal{A}$ -同値であると仮定する. そのとき,  $D(\Phi)$  は, 必然的に,  $D(G_k)$  と  $\mathcal{A}$ -同値になるのであろうか?

$G_1$  は (カスプ)  $\times \mathbb{R}^n$  であることや  $G_2$  は (スワローテイル)  $\times \mathbb{R}^{n-1}$  であることはすぐわかる. よって,  $k = 1, 2$  の場合は, 定理 2 や定理 1 の多パラメータ版<sup>21</sup>が問題 2 の肯定的解答になっている.

<sup>20</sup>AMS 2012 Spring Western Section Meeting の “Special Session on Singularities, Stratifications and Their Applications ” における講演後の質問.

<sup>21</sup>定理 2 や定理 1 の多パラメータ版が成立することは [15] で示されている.

従って、問題 2 は  $k \geq 3$  の場合が本質的である。佐治・梅原・山田の判定法は、 $k \geq 3$  の場合でも有効なように元々作られていた (定理 5) ので正規化されたルジャンドル  $A_{k+1}$  特異点の判定には困らない。他方、 $\mathcal{D}(G_k)$  ( $k \geq 3$ ) の  $\mathcal{A}$ -同値類の判定法は未だ存在していないようである<sup>22</sup>。従って、ここでもまた、定理 1 の証明のアナロジーは現状では期待できないようである。

**定理 5 ([17])**  $\Phi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n, (0, 0))$  を正規化されたルジャンドル写像芽とする。そのとき、以下は同値である。

1.  $\Phi$  はルジャンドル  $A_{k+1}$  特異点。
2.  $Q \left( LJ_\Phi, \frac{\partial LJ_\Phi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} LJ_\Phi}{\partial x^{k-1}} \right) \cong Q(x, y_1, \dots, y_{k-1}), \frac{\partial^k LJ_\Phi}{\partial x^k}(0, 0) \neq 0$ .

### 4.3 さらに・・・

4.1 節や 4.2 節で紹介した問題以外にも、微積分対応に関連する問題はいくつか考えられる<sup>23</sup>。しかし、すでに予定ページ数を超過してしまっているので、講演時に時間の余裕があればそのうちのいくつかにはなんらかの言及をするかもしれない、ということをご容赦願いたい。

## 参考文献

- [1] V. I. Arnold, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [2] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps I. Monographs in Mathematics*, **82**, Birkhäuser, Boston Basel Stuttgart, 1985.
- [3] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and Singularities (second edition)*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [4] X. Y. Chen and T. Matumoto, *On generic 1-parameter families of  $C^\infty$ -maps of an  $n$ -manifold into a  $(2n-1)$ -manifold*, Hiroshima Math. J., **14**(1984), 547–550.
- [5] 福田拓生・西村尚史, 特異点と分岐, 特異点の数理 2, 共立出版, 2002.
- [6] G. Ishikawa, Private communications, November 2011.
- [7] 泉屋周一・石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版, 1998.
- [8] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space*, J. Math. Soc. Japan, **62**(2010), 789–849.
- [9] 泉屋周一・佐野貴志・佐伯 修・佐久間一浩, 幾何学と特異点, 特異点の数理 1, 共立出版, 2001.
- [10] S. Izumiya and F. Tari, *Projections of hypersurfaces in the hyperbolic space to hyperhorospheres and hyperplanes*. Rev. Mat. Iberoam, **24**(2008), 895–920.

<sup>22</sup> $k \geq 3$  の場合、 $\mathcal{D}(G_k)$  は無限小安定ではなく、従って安定ではない。このことから、 $k \geq 3$  の場合は通常の写像の特異点論とは相性が悪いのかもしれないとも思える。他方、垂足開折型という特殊な形をしていることを考慮すると可能性があるのかもしれない。

<sup>23</sup>[6] でももう一つ質問をいただいた。

- [11] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math., **221**(2005), 303–351.
- [12] D. Mond, *On the classification of germs of maps from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^3$* , Proc. London Math. Soc., **50**(1985), 333–369.
- [13] T. Nishimura, *Singularities of one-parameter pedal unfoldings of spherical pedal curves*, J. Singularities <sup>24</sup>, **2**(2010), 160–169.
- [14] T. Nishimura, *Whitney umbrellas and swallowtails*, Pacific J. Math., **252**(2011), 459–471. arXiv:1112.5011.
- [15] T. Nishimura, *Wave front evolution and pedal evolution*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu. arXiv:1206.5602.
- [16] 野口 広・福田拓生, 復刊 初等カタストロフイー, 共立出版, 2002.
- [17] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada,  *$A_k$  singularities of wave fronts*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., **146**(2009), 731–746.
- [18] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math., **169**(2009), 491–529.
- [19] H. Whitney, *The general type of singularity of a set of  $2n-1$  smooth functions of  $n$  variables*, Duke Math. J., **10**(1943), 161–172.
- [20] H. Whitney, *The singularities of mappings of smooth  $n$ -manifolds into  $(2n-1)$ -space*, Ann. of Math., **45**(1944), 247–293.
- [21] T. Yamamoto, *Classification of singular fibres of stable maps of 4-manifolds into 3-manifolds and its applications*, J. Math. Soc. Japan, **58**(2006), 721–742.

---

<sup>24</sup>J. Singularities(<http://www.journalofsing.org/>) はオープンアクセスジャーナル.

# カンドルの分類空間と低次元トポロジー

野坂 武史 (Takefumi Nosaka)<sup>1</sup>

京都大学数理解析研究所 日本学術振興会研究員 P D

## 概要

この予稿では、カンドルという代数系が低次元トポロジーへどう活用されるかを叙述する。特にカンドルの分類空間 (ラック空間) に関する代数トポロジー的研究の活用法を概観する。また、そのラック空間のホモトピー群に関し、筆者の研究結果をいくつか紹介する。

## 1 導入

この節では、カンドルの分類空間における系譜を、本稿の構成に準じ簡単に説明する。

カンドルとは或る代数系であり (定義 2.1), おおよそ等質空間  $H \setminus G$  に入る良い二項演算の事である (定理 2.7 を見よ). カンドルは、余次元 2 の実多様体の組の研究に相性がよく、実際、基本カンドルが定義できる (基本群の類似). そしてカンドルの代数的特徴や位相的モデルなどは、原論文 [Joy, Mat] でかなり本質的に解っている (節 2 で説明する).

時を経て 1995 年に、Fenn-Rourke-Sanderson [FRS1] はラック空間  $BX$  を導入した. それはカンドルの分類空間に相応するものであり、その構成はカンドルの公理にあわせ四角形を貼った (cubical-set) 幾何実現として構成された (定義 3.1). そして、そのホモトピー群  $\pi_*(BX)$  と ‘結び目(のカラリング)のボルディズム群’ との関連が調べられた. しかし彼らの仕事は定性的で安定域的な議論でもあった. これについて、節 3,4 で紹介する.

次に 2000 年に入ると、ラック空間  $BX$  のコホモロジーが (曲面) 結び目論で扱われる (論文 [CJKLS, CEGS]). カンドルコサイクル不変量と知られる結び目不変量が構成され、曲面結び目への応用を幾つか与えた. その不変量を例えていえば、「カンドルの特性類と、上記の結び目ボルディズムのペアリング」といえる. こういった観点と応用からの需要もあり、 $BX$  のコホモロジーが計算されていた ([Moc, Eis, Cla1, N1] 参照. 節 5 を見よ).

この背景を基に、筆者はその  $BX$  のホモトピー群を定量的に研究している. 幾つか試んだ [HN, N3, N6] なか著しい結果として、 $\pi_2(BX)$  の計算には、Postnikov 塔という古典的手法が有力な事を見抜いた (定理 6.1). 実際、これで多くのカンドル  $X$  に関し  $\pi_2(BX)$  を計算できる. 他方で、その  $\pi_2(BX)$  を用いた応用・進展として、低次元トポロジーへの適用法を幾らか試みた (勿論、先人の結果・アイディアに基づいている). カンドルの研究から、幾つか正統的な位相的对象を扱える事が段々解ってきた. 節 7 で簡単な紹介をする.

最後に、本稿の構成と注意点を述べる. 節の順は、上述の順に従っている. また本稿では、低次元トポロジーの用語を多用したが、その用語の定義を付しておいた. 但し煩雑さを防ぐため多くを footnote に回してある. さて以上を導入とし、本論に移るとする.

<sup>1</sup>E-mail address: nosaka@kurims.kyoto-u.ac.jp



## 2 カンドル (quandle) の定義と、例

カンドルの定義を与え、例を見た後、カンドルの特徴と長所を観察する。

まずカンドルの定義を復習する。

**定義 2.1.** カンドル (Quandle) とは、集合  $X$  と二項演算  $\triangleleft : X \times X \rightarrow X$  の組のことで次の3条件を満たすものをいう。

(QI) 任意の  $x \in X$  に対して、 $x \triangleleft x = x$ .

(QII) 任意の  $y \in X$  に対し、写像  $(\bullet \triangleleft y) : X \rightarrow X$  は全単射である。

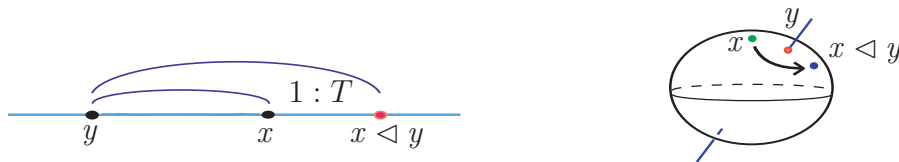
(QIII) 任意の  $x, y, z \in X$  に対して  $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$ .

この定義は一見わかり辛い。例を見ながら、カンドルの抽象・本性を観察しよう。

**例 2.2 (アレクサンダーカンドル).**  $\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$  加群  $X$  は、 $x \triangleleft y \stackrel{\text{def}}{=} y + T(x - y)$  によってカンドルとなる。図的には「 $x \triangleleft y$  は  $y$  を中心にした  $1 : T$  等分点」とみなせる (左下図参照)。

**例 2.3 (球面上のカンドル).**  $\theta \in \mathbb{R}$  を固定し、 $X$  を球面  $S^2$  とする。カンドル演算  $x \triangleleft y$  を「 $y$  を軸にして  $\theta$  回転させたときの  $x$  の行先」と定める (右下図を見よ)。

**例 2.4 (対称空間).**  $X$  を滑らかな実多様体とし、各点  $y \in X$  に対し、対合  $\rho_y : X \rightarrow X$  をとる (i.e.  $\rho_y \circ \rho_y = \text{id}_X$ )。組  $(X, \rho_*)$  が“(大域的リーマン) 対称空間”を成すとする (定義は多様体の教科書を参照)。この時、 $x \triangleleft y := \rho_y(x)$  と定めれば、カンドルになる。



この例示から、カンドル演算の抽象とは「 $y$  を軸とした作用を、公理化したもの」と察するが出来る。実際、上の例 2.2, 2.3, 2.4 を包括し、その抽象を標榜したカンドルが次である。

**例 2.5 (等質空間上のカンドル構造).**  $H \subset G$  を群の組とし、中心化群  $Z_G(H)$  の元  $z_0$  を固定する。このとき、左商集合  $X = H \backslash G$  に、カンドル演算を次で入れる。

$$[x] \triangleleft [y] := [z_0 x y^{-1} z_0 y] \in H \backslash G \quad (x, y \in G).$$

例えば、例 2.2 を実現するには、 $G$  を半直積  $M \rtimes \mathbb{Z}$  (ここで  $\mathbb{Z}$  は  $T$  倍で  $M$  に作用させる) とし、 $H$  を  $\{0\} \times \mathbb{Z}$  とする。  $z_0 = (0, 1)$  とすれば、確かに例 2.2 と一致する。他に、例 2.4 を復元するには、Lie 群の組  $H \subset G$  をとり、 $z_0 \in Z_H(G)$  で  $(z_0)^2 = 1_G$  となるものをとれば、多くの場合、対称空間が実現できる (cf. 対称空間対という概念)。

逆に“連結”なカンドルはこの例 2.5 に尽きる (定理 2.7)。これを見る為に、用語を準備する。

**定義 2.6.** カンドル  $X$  に対し、随伴群  $\text{As}(X)$  を次の表示で定める群とする：

$$\text{As}(X) := \langle e_x \quad (x \in X) \mid e_{x \triangleleft y} = e_y^{-1} e_x e_y \quad (x, y \in X) \rangle.$$

また  $\text{As}(X)$  は  $X$  に自然な右作用をもつ, 実際,  $x \cdot e_y := x \triangleleft y$  と定めればよい ( $x, y \in X$ ).  
 カンドル  $X$  が連結であるとは, この作用が推移的の時をいう.

**定理 2.7** ([Mat, Joy]).  $X$  を連結カンドルとする. 元  $x_0 \in X$  を固定し,  $H \subset \text{As}(X)$  を  $x_0$  の固定部分群とする. また  $z_0 := e_{x_0} \in H$  と定める. この時, 自然な写像

$$\text{As}(X) \longrightarrow X \quad (g \longmapsto x_0 \cdot g)$$

が誘導する全単射  $H \backslash \text{As}(X) \rightarrow X$  は, カンドル同形である. ここで左辺  $H \backslash \text{As}(X)$  は例 2.5 のカンドル構造を入れた.

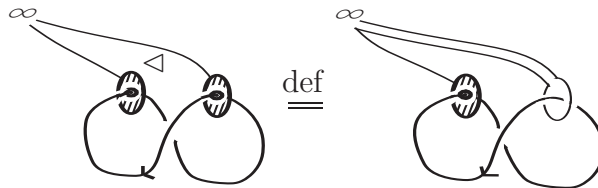
結論として, カンドルは「等質空間  $H \backslash G$  に入る良い二項演算」といえる.

さて話題を変え, カンドルが余次元 2 の位相的对象にどう有効なのか見てみよう. まず基本カンドルの定義を復習する.

**例 2.8 (基本カンドル)**.  $N \subset M$  を向付き実多様体の余次元 2 の組とする. このとき, **基本カンドル**  $Q(M, N)$  を, 次のラケット状のものからの  $C^\infty$ -写像のホモトピー類で定義する.

$$Q(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{---} \circlearrowleft \longrightarrow (M, N, \{\infty\}) \} / \text{ホモトピー}.$$

$Q(M, N)$  上にカンドル構造が下図のように (大雑把に) 定義される (詳細は [Joy, Mat] 参照).



この典型例として, 向付き結び目  $K$  を考える (定義は下を見よ<sup>2</sup>). すると, 上述の等質空間という観点から, 基本カンドル  $Q(S^3, K)$  は結び目を分類する:

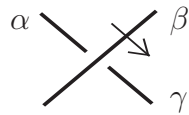
**事実 2.9** ([Joy, Mat]). 結び目  $K'$  が, 他の  $K$  (または  $-K^*$ ) にイソトピックである必要十分条件は, 或るカンドル同形  $Q(S^3, K) \cong Q(S^3, K')$  が存在する事である.

**概証** 必要性は明らかだから, 十分性を示す.  $G := \pi_1(S^3 \setminus K)$  とおき, メリディアン  $m_K \in G$  を一つ固定し  $z_0$  と書く.  $z_0$  で生成される部分群  $H (\cong \mathbb{Z}) \subset G$  をとる. この時, 例 2.5 による  $H \backslash G$  上のカンドルが,  $Q(S^3, K)$  に同形に成る事は容易に確かめられる. 故に当カンドル同形は, メリディアンを保つ基本群の同形を意味する. これは (ハーケン多様体論の事実より),  $K'$  と  $K$  (または  $-K^*$ ) がイソトピックで繋がる事を意味する.  $\square$

しかし基本カンドルは有限表示可能な代数系であるから直接調べる事は難儀である. そこで他のカンドルを使って, 基本カンドルを相対的に調べる手段を一つ紹介する:

**定義 2.10**.  $D$  を向付き絡み目図式とし,  $X$  をカンドルとする.  $X$ -カラリングとは写像  $C : \{ \text{over arc} \} \rightarrow X$  のことで図式  $D$  の各交点に対して下図を満たすものをいう.


<sup>2</sup>結び目の用語を確認する: **結び目**とは円周の  $S^1$  から球面  $S^3$  への埋込みをいう. **絡み目**とは有限個の円周  $\sqcup S^1$  から  $S^3$  への埋込みをいう. また二つの絡み目が**イソトピック**とは, その二つが埋込みとして連続変形で移り合う時を言う. **絡み目図式**とは, だいたい '有限個の円周  $\sqcup S^1$  から  $S^2$  への (正則横断的な) はめ込みと, 交点の上下情報との組' である (正確には教科書をご覧ください). 以上の概念で向きを込めた時, **向付き**という装飾語を添える. 最後に, 図式  $D$  上の **over arc** とは, 上交点から次の上交点までをつなぐパスをいう.



$$C(\gamma) = C(\alpha) \triangleleft C(\beta)$$

そこで、 $X$ -カラリング全体の集合を  $\text{Col}_X(D)$  と書く事にする。次が出来る。

**事実 2.11.**  $D$  を絡み目  $L \subset S^3$  の図式とする。このとき自然な全単射がある<sup>3</sup>:

$$\text{Col}_X(D) \xleftarrow{1:1} \text{Hom}_{\text{Qnd}}(Q(S^3, L), X)$$


よって  $X$ -カラリングを考察する事で、基本カンドルが組合せ的に研究できる。

他方で、代数トポロジー・特性類の知見から自然に次の問いが思い浮かぶ: カンドル  $X$  のコホモロジーを準同形  $Q(S^3, L) \rightarrow X$  により引き戻す事で、より深い情報を (カラリングを用い組合せ的に) 得られるか、と。その回答の1つが次節で紹介するラック空間である。

### 3 ラック空間と、 $X$ -カラリングのボルディズム群

この節では、ラック空間  $BX$  の定義を紹介する (定義3.1)。その後、ホモトピー群  $\pi_2(BX)$  を考察し、 $X$ -カラリングのボルディズム群との対応を見る。

先ず、 $BX$  を定義する前に、その3-スケルトンを紹介し、構成のアイデアを述べる。カンドル  $X$  に対し、ラック空間の3-スケルトンとは次で定義される CW 複体である。

- $BX$  の1-スケルトンを  $X$  で添字づけられた  $S^1$  の一点和と定める (左下図を見よ)。
- $BX$  の2-スケルトンを、1-スケルトン  $\cup \{(a, b)\text{-セル} \mid (a, b) \in X^2\}$  と定める。ここで  $(a, b)$ -セルとは下図のような正方形であり、各辺を1-セルに添字が合うように貼る。
- $BX$  の3-スケルトンを、2-スケルトン  $\cup \{(a, b, c)\text{-セル} \mid (a, b, c) \in X^3\}$  と定める。ここで  $(a, b, c)$ -セルとは次のような立方体である: 即ち、上面が  $(a, b)$ -セルで、高さ方向の辺を全て  $c \in X$  で添字つけたものである。公理 (QIII) から底面の添字が well-defined となり、各面が  $(a, b)$  型の2-セルとなる。そこで添字に合わせて各面を2-スケルトンに貼る。

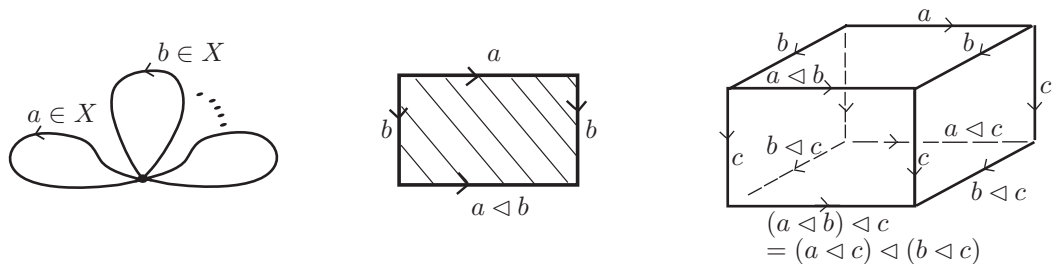


図 1: 左から、 $BX$  の1-スケルトン、 $(a, b)$ -セル、 $(a, b, c)$ -セルを図示した。

このように、カンドルの公理が  $n$  次元立方体  $[0, 1]^n$  と相性よいものと察せる。実際、(cubical-set の幾何実現として) 一般に、ラック空間が次で定義される:

<sup>3</sup>ここで右辺は、カンドル準同形たちの集合である。ここでカンドル間の写像  $f: X \rightarrow Y$  が準同形であるとは、任意の  $a, b \in X$  に対して  $f(a \triangleleft b) = f(a) \triangleleft f(b)$  を満たす時をいう。

**定義 3.1.** カンドル  $X$  に対し,  $Y$  を  $As(X)$  の作用付き集合とする.  $X$  と  $Y$  に離散位相を入れ, 和集合  $\bigcup_{n \geq 0} (Y \times ([0, 1] \times X)^n)$  をおく. そこに次の同値関係を定める:

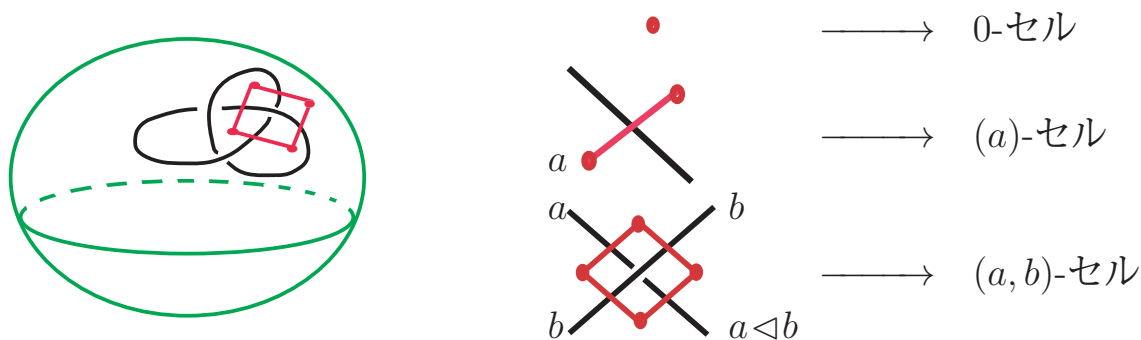
$$(y; t_1, x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_j, t_{j+1}, \dots, t_n, x_n) \sim (y \cdot e_{x_j}; t_1, x_1 \triangleleft x_j, \dots, t_{j-1}, x_{j-1} \triangleleft x_j, t_{j+1}, x_{j+1}, \dots, t_n, x_n),$$

$$(y; t_1, x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, t_{j+1}, \dots, t_n, x_n) \sim (y; t_1, x_1, \dots, t_{j-1}, x_{j-1}, t_{j-1}, x_{j+1}, \dots, t_n, x_n).$$

するとラック空間(rack space)とは, この同値関係による商空間と定める.  $BX_Y$  と書く.

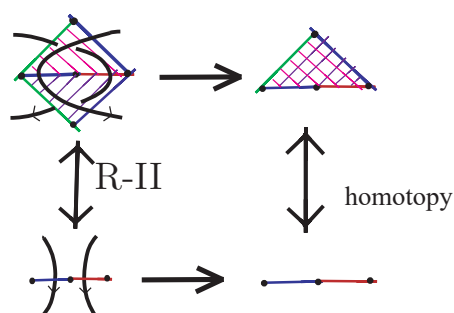
$BX_Y$  は CW 複体である, 実際, 射影  $\bigcup_{n \geq 0} (Y \times ([0, 1] \times X)^n) \rightarrow BX_Y$  を,  $BX_Y$  のセル分割と思えばよい. 特に,  $Y$  が一点の時に  $BX_Y$  を  $BX$  と書くと,  $BX$  の 3-スケルトンは上記のそれと一致する.

次に,  $BX$  のホモトピー群と結び目の  $X$ -カラリングとの関係を述べる.  $D$  を絡み目図式とし, その  $X$ -カラリング  $C$  をとる. 絡み目図式  $D$  を  $S^2$  上の図式と思うと, 左下図のような  $D$  の双対分割は  $S^2$  のセル分割を与える. それを右下図のように各交点に対して,  $BX$  の 2-スケルトンに対応させる. するとこれらは  $S^2$  全体に貼り合い, セル写像  $\xi_{D,C} : S^2 \rightarrow BX$  を得る. このホモトピー類を  $[\xi_{D,C}] \in \pi_2(BX)$  とおく.

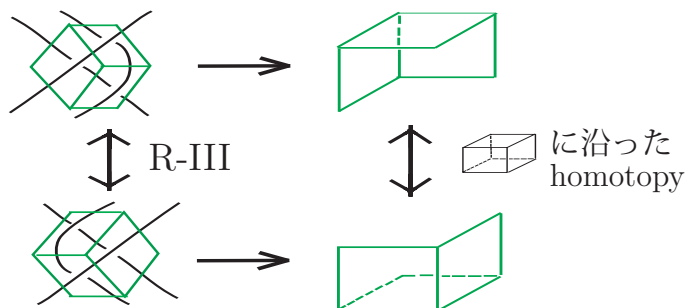


**注意 3.2.** ホモトピー類  $[\xi_{D,C}] \in \pi_2(BX)$  がライデマイスター (R-II, R-III) 移動に抛らない. 実際,  $BX$  の 3-セルの貼合せ方から解る (下図参照. 図内の水平射は  $\xi_{D,C}$  である.)

● R-II 移動の不変性



● R-III 移動の不変性



加えて, 下図の「concordance 関係」にもよらないことが解る. そこで次を定義する:

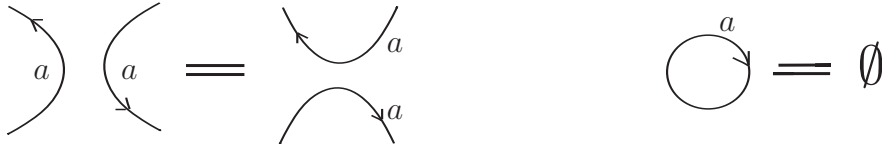
$$\Pi_2(X) := \{ D \text{ 上の } X\text{-カラリング} \} / \sim_{D:\text{絡み目図式}/R-II, III, \text{concordance 関係}}$$

ここでは, disjoint union でアーベル群構造が入る. よって対応  $(C \mapsto [\xi_{D,C}])$  から準同形  $\Pi_2(X) \rightarrow \pi_2(BX)$  を得る. すると [FRS2] にて, この同形性が示された:

**定理 3.3** ([FRS2]). カンドル  $X$  に対し, この準同形  $\Pi_2(X) \rightarrow \pi_2(BX)$  は同形である.

これは Thom の基本定理の類似である ( $MO$ -スペクトラムのホモトピー群と向付きボルディズム群の等価性).

この定理を研究の基本原理・方針と考えている. つまり,  $\pi_2(BX)$  のホモトピー群を使って, 結び目の不変量などに応用できる事が予想できる. 実際, 低次元トポロジーの研究に幾つか役立つ (節 7). 次節以降はこのホモトピー群の計算法や結果を紹介していく.



#### 4 ラック空間の基本的性質

ホモトピー群の計算には, 基本群からホモトピー群への自然な作用について優先的に調べる必要がある. 以下, ラック空間の基本群の性質を列挙する.

- 空間  $BX$  は弧状連結である ( $\because$  0-cell が一点より).
- 基本群は  $\pi_1(BX) \cong \text{As}(X)$  となる ( $\because$   $BX$  の 2-スケルトンを見よ).
- 任意の  $\text{As}(X)$ -作用付き集合  $Y$  に対し, 自然な射影  $BX_Y \rightarrow BX$  は被覆となる (定義 3.1 と幾何実現の基本的性質より明らか).
- Clauwens 氏 [Cla1] は,  $BX$  の普遍被覆空間に位相モノイド構造が入る事を示した. これを見よう.  $Y = \text{As}(X)$  とし  $\text{As}(X)$  を右から作用させる:  $g \cdot h := gh$ . 次の写像を考える.

$$\mu : (Y \times [0, 1]^n \times X^n) \times (Y \times [0, 1]^m \times X^m) \rightarrow Y \times [0, 1]^{n+m} \times X^{n+m},$$

$$\begin{aligned} \mu([g; t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n], [h; t'_1, \dots, t'_m, x'_1, \dots, x'_m]) := \\ [gh; t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m, x_1 \cdot h, \dots, x_n \cdot h, x'_1, \dots, x'_m]. \end{aligned}$$

すると  $BX_Y$  は  $BX$  の普遍被覆空間だが, この二項演算から位相モノイド構造が誘導される.

このモノイド構造は  $BX$  の研究上重要である. 例えば [FRS2] の定理が容易に示される:

**定理 4.1** ([FRS2]).  $BX$  は単純空間である. 即ち, 自然な作用  $\pi_1(BX) \curvearrowright \pi_*(BX)$  は自明.

**証明.** 普遍被覆空間が  $H$ -空間なので単純である. あとは lifting property を用いて, 「 $H$ -空間が単純である」事の証明と同様に敢行すれば,  $BX$  の単純性が示される.  $\square$

しかしながら注意する事に,  $\text{As}(X)$  は無限より,  $BX_Y$  は無限被覆であり扱い辛い. だから実用上では, 具体的な  $X$  に応じ,  $Y = \text{As}(X)$  の商集合のうち  $BX_Y$  のモノイド構造が誘導されるものを適宜使い分ける必要がある (例えばトランスファーなど使えるようになる). 例えば, 有限位数で連結なカンドルに対し, 空間の有理部分は次のようにすぐ解る:

**定理 4.2.** 有限で連結なカンドル  $X$  に対し,  $BX$  の 0-局所化はループ空間  $\Omega S^2_{(0)}$  である.

**概証.** 作用  $X \curvearrowright \text{As}(X)$  が effective になるように,  $\text{As}(X)$  の商群  $Y$  をとる.  $Y$  は有限群であり,  $BX_Y$  にモノイド構造が誘導される. 他方,  $Z$  を一点とすると,  $BZ$  はループ空間  $\Omega S^2$  となる事が知られている [FRS2]. すると一点射  $X \rightarrow Z$  は,  $H$  空間写像  $BX_Y \rightarrow \Omega S^2$  が誘導される. 誘導射は (トランスファーより) 有理ホモロジーで同形なので,  $H$  空間の Whitehead の定理から,  $BX$  の 0-局所化はループ空間  $\Omega S^2_{(0)}$  となる.  $\square$

証明はさておき, 連結な有限位数のカンドルに関し,  $BX$  の捩れ部分群が重要課題となった.

## 5 ラック空間のホモロジーに関する計算例

ラック空間のコホモロジーに関する計算例を紹介する. 既存の計算法はアドホックなものが多いため, 細部は割愛する. 結果のみ述べる為, 読み飛ばしても構わない.

まず 2次 ホモロジーに関し, Eisermann 氏は (カンドルの中心拡大の関連で) 次を示した:

**定理 5.1** ([Eis]).  $X$  を連結カンドルとする. 元  $x_0 \in X$  を固定し, 固定部分群  $\text{Stab}(x_0) \subset \text{As}(X)$  をおく. このアーベル化は,  $BX$  の 2次ホモロジーである: 即ち

$$H_2(BX; \mathbb{Z}) \cong \text{Stab}(x_0)_{\text{ab}}.$$

従って随伴群  $\text{As}(X)$  の表示が解れば, 2次は計算できる. 例えば, アレクサンダーの場合 (定義は例 2.2 を見よ), Clauwens 氏は  $\text{As}(X)$  の表示を与え, 次を示した:

**定理 5.2** ([Cla2]). アレクサンダーカンドル  $X$  を連結とする, *i.e.*,  $(1-T)X = X$ . この時,

$$H_2(BX; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus (X \otimes_{\mathbb{Z}} X / (x \otimes y - Ty \otimes x)_{x,y \in X}).$$

鮮やかなこの公式は, 2次代数  $K$  群に関する Matsumoto の定理の類似を思わせる.

つぎに話を 3次ホモロジーに転じると, 突如難しくなる. 最近までは, 望月拓朗氏 [Moc] の 2002 年の結果が 3次に関し最良だった. つまり氏は,  $X$  が  $\mathbb{F}_q[T]/(T-\omega)$  という形のアレクサンダーカンドル (ここで  $\omega \in \mathbb{F}_q$ ) に対し, この 3次コホモロジー群を  $\mathbb{F}_q$  係数で基底込で計算しきった. がその手法も定理も, 陳述や数式が複雑で難解なものであった.

しかし近日, この様相を解明する定理を筆者は得た:

**定理 5.3** ([N6]).  $X$  を有限位数で連結なアレクサンダーカンドルとする. この時,

$$H_3(BX; \mathbb{Z})_{(\ell)} \cong H_3^{\text{gr}}(\text{As}(X))_{(\ell)} \oplus (H_2(BX)_{(\ell)} \wedge H_2(BX)_{(\ell)}).$$

ここで素数  $\ell (\neq 2)$  は, 最小数  $\min\{n \in \mathbb{N} \mid T^n = \text{id}_X\}$  と互いに素なものとする.

$X$  が  $\mathbb{F}_q[T]/(T-\omega)$  の時,  $\ell = p$  でよい事に注意する ( $\because \omega^{q-1} = 1$ ). この定理によれば, 左辺は群の 3次ホモロジー  $H_3^{\text{gr}}(\text{As}(X))$  であまねく縛られる. この  $H_3^{\text{gr}}(\text{As}(X); \mathbb{F}_q)$  は Massey 積を持つため, 帰結として, 望月氏の結果がなぜ複雑だったのか解った事になる.

ちなみに, 高次に関する計算結果を述べる. ここでは  $H_*(BX)$  の直和因子である “カンドルホモロジー  $H_n^Q(X)$ ” ([CJKLS] で導入) に着目する. それは  $H_*(BX)$  の主要な情報を成す事が知られている. 筆者は, 奇素数位数で連結カンドルに対し,  $H_n^Q(X)$  を **全て** 決定した:

**定理 5.4** ([N1]).  $X$  を  $\mathbb{F}_p[T]/(T - \omega)$  の形のアレクサンダーカンドルとする (但し  $\omega \neq 1$ ).  $e := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \omega^n = 1\}$  とする. この時,  $H_n^Q(X) \cong (\mathbb{Z}/p)^{b_n}$  となる. ここで  $b_n$  は数列

$$b_0 = b_{2e-1} = 1, \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_{2e-2} = 0, \quad b_{n+2e} = b_n + b_{n+1} + b_{n+2}$$

で定まる自然数である.

ところで独立にも, Clauwens 氏 [Cla1] は,  $\omega = -1$  の時のみ  $H_*(BX; \mathbb{Z})$  を決定している. 氏の手法は  $H^*(BX; \mathbb{F}_p)$  をコホモロジー作用素の情報込みで決定した点が優れている.

## 6 ラック空間 $BX$ の 2 次ホモトピー群

$BX$  は単純空間だった (定理 4.1) が, さらにホモトピー群  $\pi_2(BX)$  も単純な事をみる.

主定理を述べる為に, 一つ用語を導入する: カンドル  $X$  の **タイプ** を, 次の自然数で定める:

$$\text{Type}(X) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid (\underbrace{\cdots (x \triangleleft y) \cdots}_{n \text{ 回作用}}) \triangleleft y = x \quad (\forall x, y \in X)\}.$$

例えば, 対称空間 (例 2.4) ならば  $\text{Type}(X) = 2$  であり, アレクサンダーの時,  $\text{Type}(X) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid T^n = \text{id}_X\}$  である.

タイプは素朴な概念であるが, 次の定理のように  $\pi_2(BX)$  を知る最小の障<sup>がい</sup>碍である:

**定理 6.1** ([N6]).  $X$  を有限位数の連結カンドルとし, タイプを  $m$  とする. 自明  $\mathbb{Z}$ -係数のフルビッツ準同形  $\mathcal{H}_X : \pi_2(BX) \rightarrow H_2(BX; \mathbb{Z})$  をとる. このとき, ある準同形  $\Theta_X : \pi_2(BX) \rightarrow H_3^{\text{gr}}(\text{As}(X); \mathbb{Z})$  があって, 直和

$$\Theta_X \oplus \mathcal{H}_X : \pi_2(BX) \longrightarrow H_3^{\text{gr}}(\text{As}(X)) \oplus H_2(BX)$$

は  $m$  振れ部分を見れば同形である.

この証明は節末に回すとして, 結果のご利益をのべる.

まず,  $\pi_2(BX)$  はほとんど決着した事になる. つまり, もし随伴群  $\text{As}(X)$  の具体的表示がわかれば, 定理 3.3 で  $H_2(BX)$  も解り, 従って,  $\pi_2(BX)$  が  $m$ -振れを除き決定される. 実際, 筆者は  $\text{As}(X)$  の ( $m$ -振れを除く) 表示を得るアルゴリズムを考案した (詳細は [N6] にて).

次に,  $m$ -振れ部分が問題になるが, 一般論は完成していない. が, 簡単な例において, 定理 6.1 の準同形は  $m$  振れ部分でも同形である事を確かめた. これを紹介しよう:

**例 6.2.** 位数 9 未満の連結カンドル (但し, ひとつのカンドルを除く. 約 10 種ある) に対し, 上の準同形は全振れ部分で同形である.

**例 6.3 (有限体  $\mathbb{F}_q$  上のシンプレクティックカンドル).**  $q = p^d$  を奇数とし,  $q \neq 3, 5, 7, 9, 27$  とする (ある種の安定域).  $\Sigma_g$  を閉曲面とする. このとき,  $X := H^1(\Sigma_g; \mathbb{F}_q) \setminus \{0\}$  とし,  $x \triangleleft y := \langle x, y \rangle_{\text{sym}} y + x$  というカンドルをおく. すると  $\text{As}(X) \cong \mathbb{Z} \times Sp(2g; \mathbb{F}_q)$  である事がわかった. すると Quillen 氏の結果である  $H_3^{\text{gr}}(Sp(2g; \mathbb{F}_q)) \cong \mathbb{Z}/(q^2 - 1)$  が役立つ (これは代数  $K$  群  $K_3(\mathbb{F}_q)$  である). また定理 5.3 から,  $g > 1$  のとき  $H_2(BX) \cong \mathbb{Z}$  がわかり,  $g = 1$  のとき,  $H_2(BX) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/p)^d$  がわかる. 従って, 次が結論付けられる:

$$\pi_2(BX) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(q^2 - 1), & g > 1, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(q^2 - 1) \oplus (\mathbb{Z}/p)^d, & g = 1. \end{cases}$$

さらに、この結果と定理 5.3 の議論を使い、 $H_3(BX)$  を次で決定した (証明略):

$$H_3(BX; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & g > 1, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(q^2 - 1) \oplus (\mathbb{Z}/p)^{d(d+3)/2}, & g = 1. \end{cases}$$

このように、ラック空間  $BX$  の位相的構造は特異な振舞いをするようである。

(定理 6.1 の概証). 今から定理 6.1 の証明を解説する. それには  $\pi_2$  の数多の計算法の中、Postnikov 塔の一階<sup>4</sup> という最も古典的手法を用いる. 即ち

$$H_3(BX) \xrightarrow{c_*} H_3^{\text{gr}}(\pi_1(BX)) \longrightarrow \pi_2(BX) \xrightarrow{\mathcal{H}_X} H_2(BX) \xrightarrow{c_*} H_2^{\text{gr}}(\pi_1(BX)) \rightarrow 0 \quad (\text{exact}),$$

という完全列である. 中央の  $\pi_2(BX)$  は計算から遠いものと感じるが、次を示せた:

**命題 6.4** ([N6]). 両翼の  $c_*$  は  $m$  倍で消える. 特に、最右  $H_2^{\text{gr}}(\text{As}(X))$  は  $m$  倍で消える.

証明は割愛する<sup>5</sup> が、とにかく上の完全系列は短くなった.

次に、主張した準同形  $\Theta_X : \pi_2(BX) = \Pi_2(X) \rightarrow H_3^{\text{gr}}(\text{As}(X))$  の構成を見よう.  $\Pi_2(X)$  に帰着させる為、絡み目  $L$  の  $X$ -カラリング  $\mathcal{C}$  を考える. 事実 2.11 の全単射を通じ、自然に、群準同形  $\Gamma_{\mathcal{C}} : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow \text{As}(X)$  を得る. そこで  $L$  に沿う  $m$  次巡回分岐被覆を  $\widehat{C}_L^m$  と書くと、 $\Gamma_{\mathcal{C}}$  は  $\widehat{\Gamma}_{\mathcal{C}} : \pi_1(\widehat{C}_L^m) \rightarrow \text{As}(X)$  を誘導する事が確かめられる. この  $\widehat{\Gamma}_{\mathcal{C}}$  による基本類  $[\widehat{C}_L^m]$  の押出しを考えよう. 要約すると次の写像を得る.

$$\{ \text{Col}_X(D) \}_{D:\text{図式}} \longrightarrow H_3^{\text{gr}}(\text{As}(X)), \quad \mathcal{C} \longmapsto (\widehat{\Gamma}_{\mathcal{C}})_*([\widehat{C}_L^m]).$$

これは concordance 関係式によらない (concordance 関係式の巡回分岐被覆を考えよ). よって準同形  $\Theta_X : \Pi_2(X) \rightarrow H_3^{\text{gr}}(\text{As}(X))$  が得られた.

最後に  $\Theta_X$  の分裂全射性は次の様に示す. ボルディズム群がホモロジー理論を成す事に注目し、ボルディズム群内への  $\Theta_X$  の拡張が分裂全射となる事に帰着させる (詳細略).  $\square$

この証明方針の長所は、 $BX$  の 1 次 Postnikov 不変量が ( $m$ -振れを除き) 解る点である. 加えて、上の証明をなざると、 $\Pi_2(X)$  を用いた結び目不変量も、巡回被覆を用い位相的意味が付けられた利点もある (詳細は [N6] にて). カンドルコサイクル不変量 [CJKLS, CEGS] や群  $\Pi_2(X)$  が、結び目図式から組合せ的に定義された事と比較すると、この位相的意味づけは一般的で綺麗なため、インパクトがあるものと考えている.

## 7 カンドルによる低次元トポロジーへの応用例

低次元トポロジーでカンドルの応用例を概説し、筆者の仕事も紹介する. この研究の基本方針は、定理 3.3 で述べたホモトピー群  $\pi_2(BX)$  とカラリングのボルディズム群との関係に

<sup>4</sup>正確に述べると次である: 自然な入射  $c : BX \rightarrow K(\pi_1(BX), 1)$  のホモトピーファイバーは、 $BX$  の普遍被覆空間である. そこでこの Leray-Serre スペクトル系列の尻尾を見たものが、該当の完全系列である. ここで作用  $\pi_1(BX) \curvearrowright \pi_2(BX)$  の自明性を用いる.

<sup>5</sup>タイプ  $m$  が利く部分を述べておく. 鍵は「 $\forall x, y \in X$  で、等式  $(e_x)^m = (e_y)^m$  が  $\text{As}(X)$  の中心で成立する」事である. この等式は定義から容易に示されるが、上述の証明の色々な箇所できき強力である.



帰着させるものである。この節では次の4つの位相的対象を順々に見る。即ち、閉3次元多様体、球面上4次元レフシツ束、曲面結び目、ハンドル体結び目である。紙幅の都合上、箇条書き的な駆け足の説明になるが、詳細は該当の参考文献などを参照下さい。

### (I) カンドルを用いた3次元多様体の不変量

任意の3次元多様体は、結び目に沿った分岐被覆空間として実現される事が古典的に知られている。他方「カンドルは余次元2と相性がよい」と前述したが、特に分岐被覆のモノドロミーをカンドルで換言でき、よって3次元多様体をカンドルを用い扱える。その知見から、畠中英里氏 [Hat] は3次元多様体のカンドルコサイクル不変量を構成する仕事をされた。そこで筆者も参画し [N2, HN], 氏の構成を普遍的な議論に持ち上げた。即ち、ホモトピー群  $\pi_2(BX)$  を用いて3次元多様体の不変量を構成し、基本的事項を整えた。そして我々の不変量は、“Dijkgraaf-Witten 不変量”より強い等しい事を示した。

### (II) 球面上のレフシツ束のカンドルコサイクル不変量

球面上レフシツ束とは、おおよそ「よい特異点を許した、球面上の閉曲面束となる4次元多様体」である。そのモノドロミーを“デーンカンドル”(写像類群の亜種)から捉える研究法が、松本幸夫氏や Yetter 氏により考察されていた ([Y] 参照)。

そこで筆者は、底空間  $S^2$  を“トーラス絡み目  $T_{n,n}$ ”の基本カンドルに取り替えられる事を見出した。そこでレフシツ束の カンドルコサイクル不変量 を、トーラス絡み目の それ として定義した。この不変量から、4次元多様体の符号数とオイラー標数が導出される事を示した [N4]。これより強い不変量が構成できるかは今後の課題である。

### (III) 曲面結び目の不変量と3次ホモトピー群 $\pi_3(BX)$

次元結び目を考えたが、議論を1次元上げ、曲面結び目 ( $\Sigma_g$  から  $S^4$  への埋込み)の研究も行った。そこでは3次ホモトピー群  $\pi_3(BX)$  が鍵となる (cf. 定理 3.3)。この  $\pi_3(BX)$  は、論文 [CJKLS, CEGS] で定義されたコサイクル不変量の普遍的対象であり、この研究は意味を持つ。ただし3次の計算は2次の場合より、議論がややこしい。が筆者は、 $H_2^Q(X)$  の消えるアレクサンダーカンドルに対し、 $\pi_3(BX)$  の計算に成功した。詳細は [N3] を御覧下さい。

### (IV) 不変式論から構成されるカンドルコサイクルと、ハンドル体結び目への応用

「カンドルの特性類」という観点から、 $H^*(BX; A)$  のコサイクルの表示は重要である。下で説明するカンドルのクラスに対し、コサイクルを表示込みで量産する構成法を見出した。それは任意の群  $G$  と右  $G$  加群  $M$  に対し成立し、適用範囲が広い。

そのカンドルのクラスと構成法を概説する。アレクサンダーカンドルの  $G$  族 [IIJO] とは、直積  $X (= M \times G)$  上のカンドルで、演算を次で定めたものである。

$$\triangleleft : (M \times G) \times (M \times G) \longrightarrow M \times G \quad (x, g, y, h) \longmapsto ((x - y) \cdot g + y, h^{-1}gh).$$

このカンドルのクラスに対して、筆者 [N6] は準同形

$$\varphi_n^* : H_{\text{gr}}^n(M; A)^G \longrightarrow H^n(BX; A)$$

を構成した。この左辺はアーベル群  $M$  の群コホモロジーの  $G$  不変部分である。特に、 $M$  が  $G$  の線形表現の時、(ベクトル) 不変式論から左辺の元を例示すれば、右辺のコサイクルを量

産できる. さらに「こう得られたコサイクルが, ハンドル体結び目のカンドルコサイクル不変量 [IIJO] に適用できる」事を筆者 [N6] は示した. 応用例として「筆者のコサイクルが幾つかのハンドル体結び目の鏡像を分別する」事が論文 [IIJO] で確かめられた.

跋語で恐縮であるが, (IV) のアイディアの大元を述べる. 井上-蒲谷氏 [IK] は, 結び目の双曲体積・Chern-Simons 不変量をカンドルに換言する仕事を修めた. 両氏はある鎖準同形 (定義域は  $BX$  の cellular 複体) を構成し, Chern-Simons 類をカンドルコホモロジーで置き換えたのである (詳細は当論文 [IK] を参照). 上述の  $\varphi_n^*$  はその改良版となっている. しかしながら, この鎖写像は幾何的に興味深く, さらなる他の応用を期待している.

## 参考文献

- [CEGS] J. S. Carter, J. S. Elhamdadi, M. Graña, M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle homology*, Osaka J. Math. **42** (2005) 499–541.
- [CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [Cla1] F.J.-B.J. Clauwens, *The algebra of rack and quandle cohomology*, J. Knot Theory Ramifications **11** (2011), 1487–1535.
- [Cla2] ———, *The adjoint group of an Alexander quandle*, arXiv:math/1011.1587
- [Eis] M. Eisermann, *Quandle coverings and their Galois correspondence*, arXiv:math/0612459.
- [FRS1] R. Fenn, C. Rourke, B. Sanderson, *Trunks and classifying spaces*, Appl. Categ. Structures **3** (1995) 321–356.
- [FRS2] ———, *The rack space*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007) 701–740.
- [Joy] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982) 37–65.
- [Hat] E. Hatakenaka, *Invariants of 3-manifolds derived from covering presentations*, in Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **149** (2010) 263–296.
- [HN] ———, T. Nosaka, *Some topological aspects to 4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds*, to appear Internat. J. Math.
- [IK] A. Inoue, Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, arXiv:math/1012.2923.
- [IIJO] A. Ishii, M. Iwakiri, Y. Jang, K. Oshiro, *A  $G$ -family of quandles and handlebody-knots*, preprint
- [Mat] S. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 119(161) (1982), no. 1, 78–88, 160. MR 84e:57008
- [Moc] T. Mochizuki, *The 3-cocycles of the Alexander quandles  $\mathbb{F}_q[T]/(T-\omega)$* , Algebr. Geom.Topol. **5** (2005) 183–205.
- [N1] T. Nosaka, *On quandle homology groups of Alexander quandles of prime order*, to appear Trans. Amer. Math. Soc.
- [N2] ———, *4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds*, Algebr. Geom.Topol. **11** (2011) 1601–1648.
- [N3] ———, *Quandle homotopy invariants of knotted surfaces*, to appear Mathematische Zeitschrift.
- [N4] ———, *Quandle cocycle invariants of Lefschetz fibrations over the 2-sphere*, preprint.
- [N5] ———, *Quandle cocycles from invariant theory*, preprint
- [N6] ———, *Topological interpretation of the quandle cocycle invariants of links*, in preparation
- [Y] D. N. Yetter, *Quandles and monodromy*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003), 523–541.



# パーシステントホモロジー群のタンパク質構造解析への応用

平岡裕章 (Yasuaki HIRAOKA)  
九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

## 概要

本講演では、パーシステントホモロジー群をタンパク質の構造解析や遺伝解析へ応用する試みについて、解説をおこなう。

## 1 単体複体フィルトレーション

### 1.1 脈体

$X \subset \mathbb{R}^N$  が有限個の部分集合の集まり  $\Phi = \{B_i \subset \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots, m\}$  で被覆されているとする：

$$X = \bigcup_{i=1}^m B_i.$$

このとき頂点集合を  $V = \{1, \dots, m\}$ 、単体の集まりを

$$\Sigma = \left\{ \{i_0, \dots, i_k\} \mid \bigcap_{j=0}^k B_{i_j} \neq \emptyset \right\}$$

で定めると、これは抽象単体複体になる。この抽象単体複体を  $\Phi$  の脈体とよび  $\mathcal{N}(\Phi)$  で表す。  $X$  の被覆が凸閉集合で与えられる場合は次の関係が成り立つ。

**定理 1.1 (脈体定理)**  $X \subset \mathbb{R}^N$  が有限個の凸閉集合の集まり  $\Phi = \{B_i \mid i = 1, \dots, m\}$  で被覆

$$X = \bigcup_{i=1}^m B_i$$

されているとする。このとき  $X$  と脈体  $\mathcal{N}(\Phi)$  はホモトピー同型となる。

### 1.2 Čech 複体

$\mathbb{R}^N$  内の有限個の点の集まり  $P = \{x_i \in \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots, m\}$  に対して、点  $x_i$  を中心とし半径  $r$  の球  $B_r(x_i) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - x_i\| \leq r\}$  を配置する。ここで  $\|x\|$  はユークリッドノルムを表す。これらの球の集まり  $\Phi = \{B_r(x_i) \mid x_i \in P\}$  についての脈体

---

本研究は、Marcio Gameiro, 泉俊輔, Miroslav Kramar, Konstantin Mischaikow, Vidit Nanda 氏との共同研究にもとづく。

$\mathcal{N}(\Phi)$  をČech 複体とよび,  $\mathcal{C}(P, r)$  で表す. 球は凸閉集合なので, 脈体定理よりホモトピー同型

$$X_r = \bigcup_{i=1}^m B_r(x_i) \simeq \mathcal{C}(P, r)$$

を得る. 図 1 にČech 複体の例を示す.

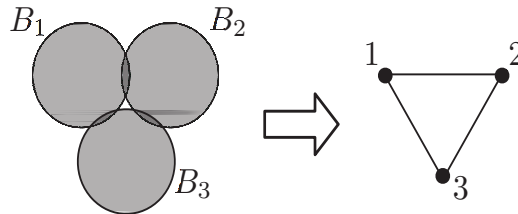


図 1: Čech 複体の例

Čech 複体に  $k$  単体  $\{i_0, \dots, i_k\}$  が存在する必要十分条件は,  $\bigcap_{j=0}^k B_r(x_{i_j}) \neq \emptyset$  である. この条件は, 球の半径を  $r$  より大きい  $r'$  に置き換えても成り立つ. すなわち

$$\bigcap_{j=0}^k B_r(x_{i_j}) \neq \emptyset \implies \bigcap_{j=0}^k B_{r'}(x_{i_j}) \neq \emptyset, \quad r < r'.$$

よって半径  $r$  が定めるČech 複体に現れる単体は,  $r$  より大きな半径  $r'$  が定めるČech 複体に全て含まれる. よって以下の包含関係が成立する:

$$\mathcal{C}(P, r) \subset \mathcal{C}(P, r').$$

これにより  $r$  の増大列  $r_1 < \dots < r_i < \dots < r_T$  に対してČech 複体のフィルトレーション

$$\mathcal{C}(P, r_1) \subset \dots \subset \mathcal{C}(P, r_i) \subset \dots \subset \mathcal{C}(P, r_T)$$

を得る.

ここまでは全ての点に同じ半径の球を配置して脈体を構成していたが, 脈体定理を適用する際には各点で異なる半径を与えても構わない. すなわち  $P$  内の各点  $x_i$  に半径  $r_i$  の球  $B_{r_i}(x_i)$  を配置し, その脈体を考えることで  $\bigcup_{i=1}^m B_{r_i}(x_i)$  とホモトピー同型な単体複体を得られる. この単体複体を重み付きČech 複体とよび  $\mathcal{C}(P, R)$  で表す. ここで  $R$  は各点での半径の集まり  $R = \{r_i \mid i = 1, \dots, m\}$  を表す.

### 1.3 アルファ複体

有限個の点の集まり  $P = \{x_i \in \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots, m\}$  に対して, 各点  $x_i$  に領域

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|, 1 \leq j \leq m, j \neq i\}$$

を割り当てる. すると  $\mathbb{R}^N$  はこれらの領域の和集合として表せる:

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{i=1}^m V_i. \quad (1)$$

領域  $V_i$  をボロノイ領域とよび、ボロノイ領域による  $\mathbb{R}^N$  の分割 (1) をボロノイ図とよぶ。

ドロネー複体はボロノイ図の脈体として定められる。すなわち (1) で与えられる被覆  $\Phi = \{V_i \mid i = 1, \dots, m\}$  に対して、そのドロネー複体  $\mathcal{D}(P)$  を  $\mathcal{D}(P) = \mathcal{N}(\Phi)$  で定める。よってドロネー複体  $\mathcal{D}(P)$  に  $k$  単体  $\{i_0, \dots, i_k\}$  が存在する必要十分条件は

$$\bigcap_{j=0}^k V_{i_j} \neq \emptyset$$

であり、さらにこの条件は、

$$\|x - x_{i_0}\| = \dots = \|x - x_{i_k}\| \text{ となる } x \in \mathbb{R}^N \text{ が存在する,}$$

と同値である。図2は、 $\mathbb{R}^2$  内の5点が定めるボロノイ図と、そのドロネー複体の例を示してある。

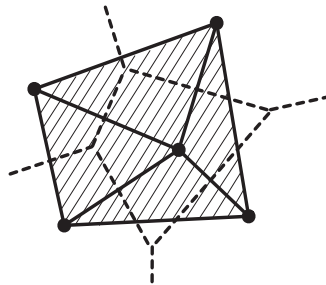


図2: ボロノイ図 (点線) とそのドロネー複体 (実線)

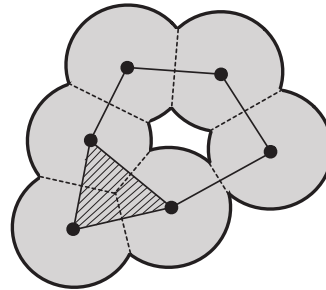


図3: アルファ複体の例

ここでアルファ複体を導入する。  $m$  個の半径  $r$  の球からなる和集合

$$X_r = \bigcup_{i=1}^m B_r(x_i), \quad x_i \in P$$

を考える。  $P$  が定める各ボロノイ領域  $V_i$  と、球  $B_r(x_i)$  の共通部分を  $W_i = B_r(x_i) \cap V_i$  とおく。すると  $W_i$  は凸集合の共通部分なので凸集合となり、球  $B_r(x_i)$  をボロノイ領域  $V_i$  に制限した図形を与える。また

$$\Psi = \{W_i \mid i = 1, \dots, m\}$$

が  $X_r$  の被覆

$$X_r = \bigcup_{i=1}^m W_i$$

を与えることも容易にわかる。

球の集まり  $\{B_r(x_i) \mid i = 1, \dots, m\}$  のアルファ複体  $\alpha(P, r)$  は、 $\Psi$  に対する脈体

$$\alpha(P, r) = \mathcal{N}(\Psi)$$

として定義される。図3は6個の球の集まりからなるアルファ複体の例である。

$W_i$  は凸閉集合であり  $X_r$  の被覆を与えていることから、脈体定理 1.1 より  $X_r$  と  $\alpha(P, r)$  はホモトピー同型

$$X_r \simeq \alpha(P, r)$$

である。

包含関係  $W_i \subset B_r(x_i)$  より、アルファ複体  $\alpha(P, r)$  はČech 複体  $\mathcal{C}(P, r)$  の部分複体である。また  $W_i \subset V_i$  より、アルファ複体  $\alpha(P, r)$  はドロネー複体  $\mathcal{D}(P)$  の部分複体でもある。  $P$  が一般の位置にある\*場合は、ドロネー複体  $\mathcal{D}(P)$  の次元は  $N$  以下であり、よってアルファ複体  $\alpha(P, r)$  の次元も  $N$  以下になる。

ここでČech 複体も  $X_r$  とホモトピー同型な単体複体であったが、一般には  $N$  より大きな次元の単体が現れることに注意する。すなわち  $P$  が一般の位置にある場合、アルファ複体は  $X_r$  とホモトピー同型な単体複体を、次元が  $N$  以下の単体で構成できる点においてČech 複体とは異なる。

またČech 複体のときと同様に、半径の増大列  $r_1 < \dots < r_i < \dots < r_T$  からアルファ複体のフィルトレーション

$$\alpha(P, r_1) \subset \dots \subset \alpha(P, r_i) \subset \dots \subset \alpha(P, r_T)$$

も得られる。各点で半径が異なる球を配置させる重み付きアルファ複体も同様に定義される。

## 2 パーシステントホモロジー群

単体複体  $K^t, t = 0, 1, \dots$ , のフィルトレーション

$$\mathbb{K}: K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^t \subset \dots \quad (2)$$

を考える。ここで、フィルトレーション内の単体複体  $K^t$  を指定する添字  $t$  を時刻とよぶことにする。フィルトレーション  $\mathbb{K}$  は、ある非負整数  $\Theta$  が存在し、 $K^j = K^\Theta$ ,  $j \geq \Theta$ , が成り立つとき、有限型であるという。またこの性質を満たす  $\Theta$  の最小値を、フィルトレーションの飽和時刻とよぶことにする。以下では有限型フィルトレーションのみを考察する。

フィルトレーション (2) に対して、 $K = \cup_{t \geq 0} K^t$  とする。また時刻  $t$  での単体複体  $K^t$  の、 $k$  次元単体の集まりを  $K_k^t$  と表す。さらに  $K$  内の単体  $\sigma$  が時刻  $t$  で発生したとき、つまり

$$\sigma \in K^t \setminus K^{t-1}$$

のとき、 $T(\sigma) = t$  と表すことにする。

各次元  $k$  ごとに、 $\mathbb{Z}_2$  係数ベクトル空間

$$C_k(K^t) = \sum_{\sigma \in K_k^t} \mathbb{Z}_2 \sigma$$

\* $\mathbb{R}^N$  内の  $N+2$  個の点  $x_1, \dots, x_{N+2}$  は、それらから等距離にある点が存在しないとき一般の位置にあるという。また  $P$  内の全ての  $N+2$  個の点が一一般の位置にあるとき、 $P$  は一般の位置にあるという。

を用意する. さらにこれらの直和

$$C_k(\mathbb{K}) = \bigoplus_{t \geq 0} C_k(K^t) = \{(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots) \mid c_t \in C_k(K^t)\}$$

に, 次の  $x$  の作用

$$x \cdot (c_0, c_1, \dots) = (0, c_0, c_1, \dots)$$

を導入する. すると  $C_k(\mathbb{K})$  は次数付き  $\mathbb{Z}_2[x]$  加群となる. この次数付き  $\mathbb{Z}_2[x]$  加群  $C_k(\mathbb{K})$  を, フィルトレーション  $\mathbb{K}$  に対する  $k$  鎖群とよぶ. また斉次部分  $C_k(K^t)$  から  $C_k(\mathbb{K})$  への包含写像  $i_t: C_k(K^t) \rightarrow C_k(\mathbb{K})$ ,

$$i_t(\sigma) = (c_0, c_1, \dots), \quad c_i = \begin{cases} \sigma, & i = t, \\ 0, & i \neq t \end{cases}$$

を導入しておく.

ここで  $k$  鎖群  $C_k(\mathbb{K})$  は

$$\Xi_k = \{e_\sigma = i_{T(\sigma)}(\sigma) \mid \sigma \in K_k\}$$

を基底とする自由  $\mathbb{Z}_2[x]$  加群になることが確かめられる. そこで境界作用素  $\partial_k: C_k(\mathbb{K}) \rightarrow C_{k-1}(\mathbb{K})$  を, 基底  $\Xi_k$  をもちいて

$$\partial_k(e_\sigma) = \sum_{i=0}^k \left( x^{T(\sigma) - T(\sigma_i)} \right) e_{\sigma_i}, \quad \sigma \in K_k$$

で定める. ここで  $k$  単体  $\sigma = \{v_0 \cdots v_k\} \in K_k$  の面を  $\sigma_i = \{v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k\}$  ( $v_i$  を除く) で表している.

この定義において, 単体  $\sigma$  の面  $\sigma_i$  に対しては,  $T(\sigma_i) \leq T(\sigma)$  であることに注意しておく. またここで導入した境界作用素は,  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$  を満たす次数付き準同型写像  $\partial_k(C_k(K^t)) \subset C_{k-1}(K^t)$  となる.

ここで  $k$  鎖群  $C_k(\mathbb{K})$  に対して, 2つの斉次部分加群を導入する:

$$Z_k(\mathbb{K}) = \text{Ker } \partial_k,$$

$$B_k(\mathbb{K}) = \text{Im } \partial_{k+1}.$$

$Z_k(\mathbb{K}), B_k(\mathbb{K})$  は斉次部分加群なので,  $Z_k(K^t) = Z_k(\mathbb{K}) \cap C_k(K^t), B_k(K^t) = B_k(\mathbb{K}) \cap C_k(K^t)$  とすると,

$$Z_k(\mathbb{K}) = \bigoplus_{t \geq 0} Z_k(K^t),$$

$$B_k(\mathbb{K}) = \bigoplus_{t \geq 0} B_k(K^t)$$

が成り立つ.

単体複体のフィルトレーションに対して, そのパーシステントホモロジー群は次で与えられる.



**定義 2.1** 単体複体の有限型フィルトレーション

$$\mathbb{K} : K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^t \subset \dots$$

に対して

$$PH_k(\mathbb{K}) = Z_k(\mathbb{K})/B_k(\mathbb{K})$$

を,  $k$  次パーシステントホモロジー群とよぶ.

パーシステントホモロジー群の詳細については文献 [2, 4] などを参照されたい. まず  $Z_k(\mathbb{K}), B_k(\mathbb{K})$  は斉次部分加群なので, パーシステントホモロジー群は次数付き  $\mathbb{Z}_2[x]$  加群として

$$PH_k(\mathbb{K}) = \bigoplus_{t \geq 0} Z_k(K^t)/B_k(K^t) = \bigoplus_{t \geq 0} H_k(K^t)$$

となる. ここで  $x$  の  $PH_k(\mathbb{K})$  への作用は, 包含写像  $C_k(K^t) \rightarrow C_k(K^{t+1})$  が誘導する準同型写像

$$\varphi_t^{t+1} : H_k(K^t) \rightarrow H_k(K^{t+1})$$

を用いて

$$x \cdot [z] = \varphi_t^{t+1}([z]), [z] \in H_k(K^t)$$

で与えられる.

また  $\mathbb{Z}_2[x]$  は単項イデアル整域なので, パーシステントホモロジー群  $PH_k(\mathbb{K})$  は次の形に一意的に表せる:

$$PH_k(\mathbb{K}) \simeq \bigoplus_{i=1}^s \left( (x^{d_i}) / (x^{d_i+l_i}) \right) \oplus \bigoplus_{i=s+1}^{s+r} (x^{d_i}) \quad (3)$$

この表示において, 最初の  $s$  個の直和成分は, 時刻  $d_i$  で発生し  $d_i + l_i$  で消滅するホモロジー類を表している. また次の  $r$  個の直和成分は, 時刻  $d_i$  で発生しフィルトレーションの飽和時刻まで存続するホモロジー類を表している.

**定義 2.2** パーシステントホモロジー群 (3) に対して

$$I_i = \begin{cases} [d_i, d_i + l_i], & i = 1, \dots, s, \\ [d_i, \Theta], & i = s + 1, \dots, s + r \end{cases}$$

をパーシステント区間とよぶ. ここで  $\Theta$  はフィルトレーション (2) の飽和時刻である. また  $d_i$  をパーシステント区間  $I_i$  の発生時刻,  $d_i + l_i$  を消滅時刻とよぶ.

パーシステント区間  $I_i$  に対して,  $I_i(b)$  で区間の下限 (birth),  $I_i(d)$  で区間の上限 (death) を表すことにする.

**定義 2.3** パーシステントホモロジー群 (3) に対して

$$PD_k(\mathbb{K}) = \{(I_i(b), I_i(d)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid i = 1, \dots, s + r\}$$

を  $k$  次パーシステント図とよぶ.

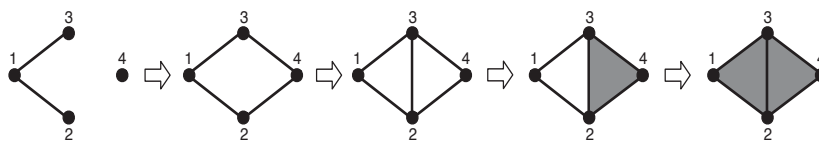


図 4: フィルトレーション  $\mathbb{K}$ , 飽和時刻  $\Theta = 4$ .

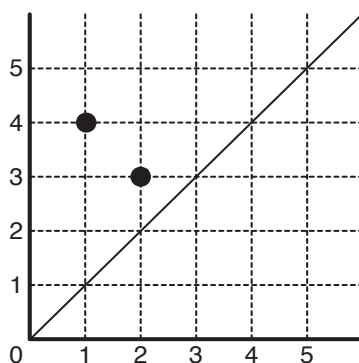


図 5: 図 4 で与えられるフィルトレーション  $\mathbb{K}$  の 1 次パーシステント図  $PD_1(\mathbb{K})$

ここでパーシステント図  $PD_k(\mathbb{K})$  内の全ての点は、対角線より上側にくることに注意しておく。また定義より、対角線付近の点はパーシステント区間が短いため、発生してからすぐに消滅、もしくは飽和するホモロジー類に対応する。一方で対角線から離れたところにある点は、長く存続するホモロジー類を表すことになる。

例えば図 4 のフィルトレーション  $\mathbb{K}$  が定めるパーシステント図  $PD_1(\mathbb{K})$  は、図 5 で与えられる。

### 3 タンパク質の立体構造解析への応用

タンパク質は生命活動を営む上で必須の物質であり、細胞内で繰り広げられている様々な働きはタンパク質を基本ユニットとして展開される。生体内に現れるタンパク質は、20 種類のアミノ酸を 1 次元的に並べたものを、3 次元空間内で折りたたんだ構造をとる。

ここで、アミノ酸は共通の基本構造に加えられる側鎖の違いによって分類される。またアミノ酸の 1 次元的な構造は、隣り合うアミノ酸とのペプチド結合によって与えられる (図 6 参照)

各原子にはファンデルワールス半径が定められている。これはそれぞれの原子の原子核を中心に、電子が存在する密度に応じて定められた原子の仮想的な半径である。この半径が定める球として原子を表現したものを、ファンデルワールス球とよぶ。よって各原子の 3 次元空間での中心座標がわかれば、タンパク質をファンデルワールス球の和集合として表現できることになる。ここでタンパク質を構成している原子の空間座

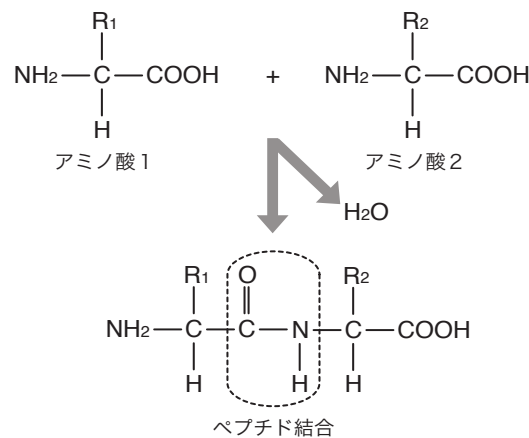


図 6: ペプチド結合.  $R_1$  や  $R_2$  はアミノ酸の側鎖を表す.

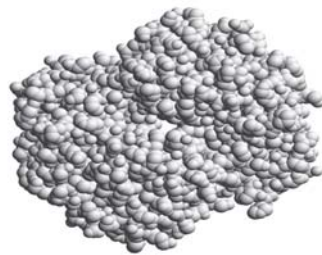


図 7: ヘモグロビン (1BUW)

標は, X線結晶解析技術の発達によって詳細に調べられており, そのデータは Protein Data Bank (PDB) [5] に保存され一般公開されている. 図 7 は, タンパク質の一つであるヘモグロビン (PDB ID: 1BUW) のファンデルワールス球体モデルを, PDB データから描画させたものである.

これより各タンパク質を, 重み付きČech 複体やアルファ複体で表現することができる. また半径増大列に対応するフィルトレーションを構成することで (図 8 を参照), トポロジカルな量の履歴やロバスト性を調べることが可能となる.

例えば PDB ID が 1OVA で与えられるオボアルブミンを例に挙げ, そのパーシステント図を見てみよう. ここでフィルトレーションは重み付きアルファ複体で与える. またファンデルワールス球の半径を調節するパラメータ  $w$  を, 各  $i$  番目の原子半径ごとに

$$r_i(w) = \sqrt{r_i^2 + w}$$

で導入する. ここで  $w = 0$  に対応する  $r_i$  はファンデルワールス半径とする. このときパラメータ  $w$  を区間  $[0, 20]$  の間で動かした 1, 2 次パーシステント図は, それぞれ図 9 と図 10 で与えられる. また比較のため, これらのベッチ数のプロットを図 11 と図 12 にのせてある.

パーシステント図を見てわかるように, 対角線付近に多くの生成元が存在している.



図 8: ヘモグロビン (1BUW) のČech 複体フィルトレーション

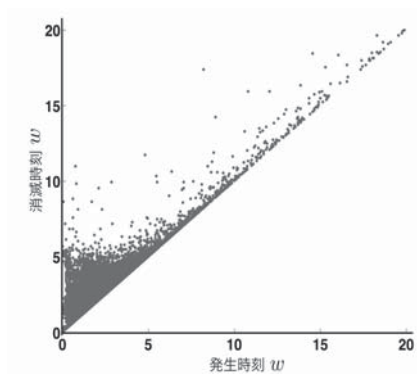


図 9: 1OVA の 1 次パーシステント図

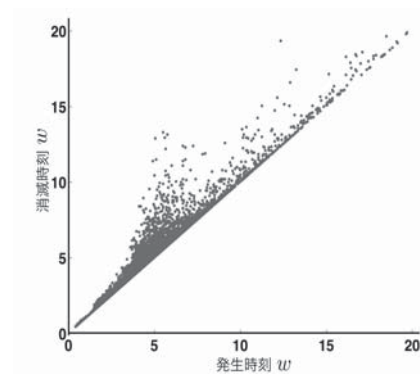


図 10: 1OVA の 2 次パーシステント図

これらの対角線付近の生成元は、発生してから消滅するまでのパラメータ幅が短いため、フィルトレーション内に現れるトポジカルなノイズと見なせる。また比較的対角線から離れたところに位置する生成元は発生してから消滅するまでのパラメータ幅が長いため、パラメータ変化に対してロバストな生成元に対応する。つまりフィルトレーション過程に現れるこのようなトポジカルなノイズやロバストな生成元を、パーシステント図は区別することができる。ベッチ数のプロットからなる図 11 と図 12 からは、このような情報は手に入らないことに注意しておく。

ではパーシステントホモロジー群を用いて、タンパク質の物性について調べてみよう。タンパク質は生体内で多種多様な働きをしており、その機能と立体構造は密接に関係している。例えば、立体構造を大きく変形させることで、別の分子を取り込む働きをするタンパク質もある。このようなタンパク質の場合、立体構造を変形させる為にはある程度柔らかい構造を取る必要がある。このようにタンパク質の柔らかさといった物性を知ることは、機能発現を調べる際の重要な手がかりとなりうる。

このタンパク質の柔らかさを測る指標の 1 つに圧縮率とよばれるものがある。タンパク質の圧縮率を実験的に求めることで、立体構造とゆらぎや機能との関係を調べることが可能である (詳しくは文献 [1] を参照)。しかし圧縮率を実験で測定するにはそれなりの実験装置が必要であり、もう少し手軽に圧縮率を調べることができれば望ましい。例えば PDB には膨大なタンパク質の立体構造に関するデータが蓄えられてい

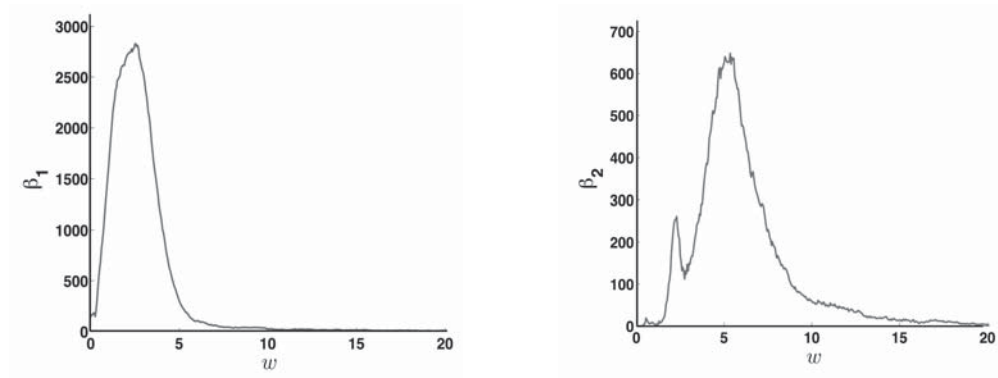


図 11: 1OVA の 1 次ベッチ数のプロット 図 12: 1OVA の 2 次ベッチ数のプロット

るので、これらのデータを利用して圧縮率と相関をもつ指標を得られないだろうか。そこでパーシステントホモロジー群の立場からこの問題を考えてみる。

タンパク質の圧縮率は、その内部に存在する空洞に関係していると予想されている。さらに物理・化学的背景から、圧縮率に影響を及ぼすと思われる幾つかの幾何構造（原子の疎配置性など）もある。論文 [3] では、これらを反映させた量をパーシステント図から取り出し定量化を試みた。その結果を図 13 に示す。

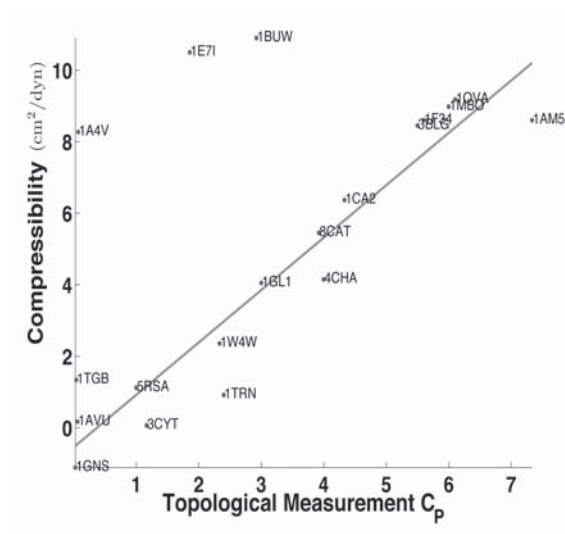


図 13: パーシステント図から得られる定量化  $C_P$  と圧縮率の関係。各タンパク質の圧縮率は論文 [1] の値を用いており、数値計算で使用した PDB ID はプロットの横に記入してある。

ここでの数値計算結果との比較には、文献 [1] 内にある実験から圧縮率が求まっているタンパク質を用いている。図 13 から見てとれるように、多くのタンパク質がパーシステント図から導出した定量化  $C_P$  と線型相関の関係にある。これより、ここで行ったパーシステント図を用いた圧縮率の定量化  $C_P$  は、ある程度幾何構造と圧縮率の関係を抽出できているものと思われる。

また講演では、パーシステント図に定まる距離関数を、タンパク質の遺伝系統樹解析へ応用する試みについても紹介する予定である。

## 参考文献

- [1] 月向邦彦, 硬い蛋白質と軟らかい蛋白質 –圧縮率から見た構造のゆらぎ–, 蛋白質 核酸 酵素, Vol.41, 2025-2036.
- [2] G. Carlsson, Topology and Data, Bulletin AMS, Vol. 46, 255-308 (2009).
- [3] M. Gameiro, Y. Hiraoka, S. Izumi, M. Kramar, K. Mischaikow, and V. Nanda, Topological Measurement of Protein Compressibility via Persistence Diagrams, 九州大学IMI プレプリント.
- [4] A. Zomorodian and G. Carlsson, Computing Persistent Homology, Discrete Comput. Geom. Vol. 33, 249-274 (2005).
- [5] PDB, <http://www.rcsb.org/pdb/>































# バビロンまでは何マイル？ — コンパクト化の近似と集合論 —

嘉田 勝 (大阪府立大学)

2012年8月13日

*How many miles to Babylon?  
Three score miles and ten.  
Can I get there by candle-light?  
Yes, and back again.  
If your heels are nimble and light,  
You may get there by candle-light.* \*1

## 概要

本発表では、距離に依存するコンパクト化の族による Stone-Čech コンパクト化の近似について、嘉田が友安一夫氏 (都城高専)、吉信康夫氏 (名古屋大) と共同で 2004 年から現在までに行ってきた一連の研究の流れとその成果を紹介する。

## 1 準備

### 1.1 距離依存コンパクト化の族による Stone-Čech コンパクト化の近似

コンパクトでない完全正則空間  $X$  のコンパクト化\*2  $\alpha X, \gamma X$  について、 $\gamma X$  から  $\alpha X$  への連続な全射で、 $X$  への制限が恒等写像となるものが存在するとき、 $\alpha X \leq \gamma X$  と表す。特にその写像が同相写像でとれるとき、 $\alpha X \simeq \gamma X$  と表す。 $X$  のコンパクト化全体

---

嘉田 勝: 大阪府立大学大学院理学系研究科 email [kada@mi.s.osakafu-u.ac.jp](mailto:kada@mi.s.osakafu-u.ac.jp)

本研究は次の科学研究費補助金の補助を受けて行われました。若手研究 (B) 14740057, 若手研究 (B) 14740058, 基盤研究 (C) 15540115, 基盤研究 (C) 20540114, 若手研究 (B) 21740080, 基盤研究 (C) 24540121.

\*1 マザーグース (nursery rhymes, イギリスの伝承童謡) のひとつ。[5, 6, 8] および本発表の表題の由来。

\*2 本稿では、単にコンパクト化というとハウスドルフコンパクト化を意味するものとする。

を  $\text{Cpt}(X)$  で表す.\*<sup>3</sup>  $\text{Cpt}(X)$  は  $\leq$  について完備上半束をなし,  $X$  の Stone-Čech コンパクト化  $\beta X$  はその最大元となる.

位相空間  $X$  から  $\mathbb{R}$  への有界連続関数全体の集合  $C^*(X)$  は (各点ごとの和と積について) 環の構造を持ち, かつ, 一様ノルム位相に関する位相環となる. 位相空間  $X$  のコンパクト化  $\alpha X$  について,  $C^*(X)$  の元のうち  $\alpha X$  上に連続に拡張できるものの全体を  $C_{\alpha X}$  とおくと,  $C_{\alpha X}$  は  $C^*(X)$  の点と閉集合を分離する閉部分環をなし, 定数関数をすべて含む. また, この  $C_{\alpha X}$  は  $\alpha X$  を生成する  $C^*(X)$  の部分集合のうち最大のものである. 逆に, 定数関数をすべて含み, かつ  $C^*(X)$  の点と閉集合を分離する閉部分環  $R$  が与えられたとき,  $X$  のコンパクト化  $\alpha X$  で,  $C_{\alpha X} = R$  となるものが存在する.  $X$  の Stone-Čech コンパクト化  $\beta X$  については,  $C_{\beta X} = C^*(X)$  となる.

空間  $X$  のコンパクト化  $\alpha X$  と,  $X$  の閉集合  $A, B$  に対して,  $\text{cl}_{\alpha X} A \cap \text{cl}_{\alpha X} B = \emptyset$  あるときに  $A \parallel B$  ( $\alpha X$ ) と記す.  $X$  が正規空間ならば,  $\alpha X \simeq \beta X$  と「 $X$  の交わらない閉集合  $A, B$  について常に  $A \parallel B$  ( $\alpha X$ ) が成り立つ」が同値である.

距離化可能空間  $X$  の Stone-Čech コンパクト化  $\beta X$  は, 以下に述べる形で, 同じ位相を導く距離に関する Smirnov コンパクト化あるいは Higson コンパクト化の全体で「近似」できる.

距離空間  $(X, d)$  から  $\mathbb{R}$  への有界一様連続関数の全体を  $U_d^*(X)$  で表す.  $U_d^*(X)$  に対応するコンパクト化を  $u_d X$  で表し, 距離空間  $(X, d)$  の Smirnov コンパクト化という. 距離空間  $(X, d)$  の空でない閉集合  $A, B$  について,  $A \parallel B$  ( $u_d X$ ) と  $d(A, B) > 0$  が同値である [12, Theorem 2.5].

$X$  の位相を導く距離関数の全体を  $M(X)$  で表す. 次の定理は, 距離化可能空間  $X$  の Stone-Čech コンパクト化  $\beta X$  は,  $X$  の位相を導く距離関数に対応する Smirnov コンパクト化の全体で近似できることを意味する.

**定理 1.1.** [12, Theorem 2.11]  $X$  をコンパクトでない距離化可能空間とするととき,  $\beta X \simeq \sup\{u_d X : d \in M(X)\}$  が成り立つ.\*<sup>4</sup>

$X$  上の距離関数  $d$  がプロパーであるとは,  $d$  に関して有界な任意の  $X$  の部分集合がコンパクトな閉包をもつときにいう. プロパーな距離  $d$  をもつ距離空間  $(X, d)$  について, 関数  $f \in C^*(X)$  が (距離  $d$  に関して) slowly oscillating であるとは, 任意の  $r > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  に対し,  $X$  のコンパクト部分集合  $K_{r,\varepsilon}$  が存在し, すべての  $x \in X \setminus K_{r,\varepsilon}$  につい

\*<sup>3</sup> 通常,  $\text{Cpt}(X)$  の元は  $\simeq$  に関する同値類と考え,  $\simeq$  の意味で同値なコンパクト化は同一視する.

\*<sup>4</sup> この式における  $\sup$  は, 完備上半束  $(\text{Cpt}(X), \leq)$  における  $\sup$  ( $\bigvee$ ) を意味する. 以下の文中においても同様.

て  $\text{diam}(f'' B_d(x, r)) < \varepsilon$  が成り立つときにいう。<sup>\*5</sup> 距離  $d$  に関して slowly oscillating な  $C^*(X)$  の元の全体を  $C_d^*(X)$  で表す。  $C_d^*(X)$  に対応するコンパクト化を  $\overline{X}^d$  で表し、  $(X, d)$  の Higson コンパクト化という。

距離化可能空間  $X$  について、  $X$  と同じ位相を導くプロパーな距離関数の全体を  $\text{PM}(X)$  で表す。 局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間  $X$  については、  $\text{PM}(X) \neq \emptyset$  である [10, Lemma 3.1]。 Higson コンパクト化による Stone-Čech コンパクト化の近似定理は、 次の形で述べられる。

**定理 1.2.** [10, Proposition 3.2]  $X$  を、コンパクトでない局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間とすると、  $\beta X \simeq \sup\{\overline{X}^d : d \in \text{PM}(X)\}$  である。

## 1.2 実数の基数不変量

実数直線のルベグ測度およびベールのカテゴリに関する構造を対象とする集合論的手法による研究は**実数の集合論** (set theory of the reals) と呼ばれ、集合論の主要な一分野となっている。

実数の集合論の研究のひとつとして、**実数の基数不変量** (cardinal invariants of the reals) の研究が行われてきた。実数の基数不変量とは、実数直線の位相および測度に関する集合論的性質から定義される基数の総称で、それらの多くは  $\aleph_1$  以上  $\mathfrak{c}$  (連続体濃度) 以下の値をもつ。連続体濃度  $\mathfrak{c}$  の具体的な値が ZFC (集合論の公理系) からは決定できないことはよく知られているが、 $\aleph_1$  以上  $\mathfrak{c}$  以下の種々の基数不変量がとる値についても、やはり ZFC から完全には決定できず、それらの具体的な値は考えている数学世界 (ZFC のモデル) に依存する。

自然数全体の集合を  $\omega$  で表す。  $\omega$  から  $\{0, 1\}$  への関数全体の集合を  $2^\omega$  で、  $\omega$  から  $\omega$  への関数全体の集合を  $\omega^\omega$  で表す。 集合  $2^\omega$  および  $\omega^\omega$  を、ターゲットの集合  $\{0, 1\}$  あるいは  $\omega$  に離散位相と適切な測度 ( $\{0, 1\}$  の場合は  $1/2$  ずつ) を導入して可算個のコピーの直積をとったと捉えたものが**コントロール空間**  $2^\omega$  および**ベール空間**  $\omega^\omega$  である。<sup>\*6</sup> 実数直線  $\mathbb{R}$  は  $2^\omega$  および  $\omega^\omega$  と位相および測度の意味で共通の性質をもつので、実数直線の集合論的性質はしばしば自然数の組合せ論の言葉で表現され、それゆえ、自然数集合の無限組合せ論から定義される基数不変量が重要な役割を果たす。

<sup>\*5</sup> おおざっぱに言う、「遠くに行くほど、値の振れ幅が小さくなる」。

<sup>\*6</sup> コントロール空間  $2^\omega$  はコントロール 3 進集合と同相であり、また、ベール空間  $\omega^\omega$  は無理数全体のなす  $\mathbb{R}$  の部分空間と同相である。

実数直線  $\mathbb{R}$  におけるベール第一類集合の全体を  $\mathcal{M}$ , ルベーク測度零の集合の全体を  $\mathcal{N}$  で表す.  $\mathcal{M}$  および  $\mathcal{N}$  は  $\mathbb{R}$  上の可算加法的なイデアルである. 基数  $\text{cov}(\mathcal{M})$  および  $\text{cov}(\mathcal{N})$  を次のとおり定義する.

$$\begin{aligned}\text{cov}(\mathcal{M}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \text{ かつ } \bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}\} \\ \text{cov}(\mathcal{N}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \text{ かつ } \bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$f, g \in \omega^\omega$  に対し, すべての  $n < \omega$  について  $f(n) \leq g(n)$  であるとき  $f \leq g$  と表し, **有限個を除く** すべての  $n < \omega$  について  $f(n) \leq g(n)$  であるとき  $f \leq^* g$  と表す.  $\omega^\omega$  の部分集合  $\mathcal{F}$  が  $\leq^*$  (あるいは  $\leq$ ) に関する dominating family であるとは, 任意の  $g \in \omega^\omega$  に対し, ある  $f \in \mathcal{F}$  が  $g \leq^* f$  ( $g \leq f$ ) を満たすときにいう. 基数  $\mathfrak{d}$  を,  $\leq^*$  に関する dominating family の最小の濃度として定義する.\*7

$\omega$  上の超フィルター  $\mathcal{F}$  の部分集合  $\mathcal{G}$  が  $\mathcal{F}$  を**生成する**とは, 任意の  $X \in \mathcal{F}$  に対し, ある  $Y \in \mathcal{G}$  が  $Y \subseteq X$  を満たすときにいう. 基数  $\mathfrak{u}$  を,  $\omega$  上の非単項超フィルター\*8を生成する  $\mathcal{P}(\omega)$  の部分集合の最小濃度として定義する.

$\mathfrak{d}, \text{cov}(\mathcal{M}), \text{cov}(\mathcal{N}), \mathfrak{u}$  の間には, 次の関係が成り立つ.

- 命題 1.3.**
1.  $\aleph_1 \leq \text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{u} \leq \mathfrak{c}$  かつ  $\aleph_1 \leq \text{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{u}$  である. さらに, それぞれの  $\leq$  について,  $<$  が成り立つことは ZFC 上無矛盾である.
  2.  $\mathfrak{d} < \text{cov}(\mathcal{N})$  は ZFC 上無矛盾である.
  3.  $\text{cov}(\mathcal{N}) < \text{cov}(\mathcal{M})$  は ZFC 上無矛盾である.

### 1.3 Generalized Galois–Tukey connection

順序集合の「共終な構造」を相互に比較し解析するための一般的な枠組みとして, Vojtaš は Generalized Galois–Tukey connection という概念を導入した [11] (本稿での記法は Blass [1] に従う).  $A_-, A_+$  を空でない集合,  $A$  を  $A_-$  と  $A_+$  の間の 2 項関係 (つまり  $A \subseteq A_- \times A_+$ ) とし,  $\mathbf{A} = (A_-, A_+, A)$  の形の 3 つ組を考える.  $\mathbf{A} = (A_-, A_+, A)$  と  $\mathbf{B} = (B_-, B_+, B)$  に対し,  $\mathbf{A}$  から  $\mathbf{B}$  への morphism とは, 写像  $\varphi_- : B_- \rightarrow A_-$ ,  $\varphi_+ : A_+ \rightarrow B_+$  の組  $\varphi = (\varphi_-, \varphi_+)$  で, 「 $b \in B_-$  と  $a \in A_+$  について,  $\varphi_-(b) A a$  ならば  $b B \varphi_+(a)$ 」という性質をみたすものをいう.  $\mathbf{A}$  から  $\mathbf{B}$  への morphism が存在するとき,  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  と書き表す. 3 つ組の間の関係  $\rightarrow$  が推移的であることは容易に確かめられる.

\*7  $\leq^*$  でなく  $\leq$  に関する dominating family の最小の濃度としても, 基数としては同じになる.

\*8 有限集合の補集合をすべて元として持つ  $\omega$  上の超フィルター.

有向集合  $(D, \leq_D)$ ,  $(E, \leq_E)$  について,  $(E, \leq_E) \rightarrow (D, \leq_D)$  が成り立つとき,  $D \leq_T E$  と書く.  $D \leq_T E$  は,  $E$  から  $D$  への写像を  $E$  の任意の共終集合が  $D$  の共終集合に移るように作れる, つまり  $E$  は  $D$  より『共終的に細かい』構造をもつことを意味する.  $D \leq_T E$  かつ  $E \leq_T D$  のとき  $D \equiv_T E$  と書く. 有向集合の間の関係  $\leq_T$  を Tukey relation と呼ぶ.

Tukey relation は有向集合の「共終的な細かさ」を比較する関係だが, その考えを異なる集合の間の 2 項関係にも適用できるように一般化したものが generalized Galois–Tukey connection だと考えることができる.

## 2 $\beta X$ まで何マイル? — 距離関数の順序構造の解析へ

定理 1.1 により, 距離化可能空間  $X$  について,  $\beta X$  は  $X$  の Smirnov コンパクト化を「すべて」集めれば近似できる. ところで, Smirnov コンパクト化を最低「いくつ」集めれば  $\beta X$  を近似するために十分だろうか. この疑問から自然に次の cardinal function の定義を思いつく.

**定義 2.1.** 距離化可能空間  $X$  に対し,  $\mathfrak{sa}(X)$  は次で定義される基数である.

$$\mathfrak{sa}(X) = \min \{ |D| : D \subseteq \mathcal{M}(X) \text{ かつ } \beta X \simeq \sup \{ u_d X : d \in D \} \}$$

明らかなケースとして,  $X$  がコンパクト空間や離散空間の場合は  $\mathfrak{sa}(X) = 1$  である. 一般に, 次のことが知られている. 位相空間  $X$  の非孤立点全体がなす部分空間 ( $X$  の first Cantor–Bendixson derivative) を  $X^{(1)}$  で表す.

**定理 2.2.** [12, Corollary 3.5]  $\mathfrak{sa}(X) = 1$  であることと  $X^{(1)}$  がコンパクトであることは同値である.

したがって,  $X^{(1)}$  がコンパクトでない場合が興味の対象となる. そこで, 手近な例として半直線  $[0, \infty)$  について  $\mathfrak{sa}([0, \infty))$  を考えると, そこに基数  $\mathfrak{d}$  が現れる.

**事実 2.3.** [6, Example 2.3]  $\mathfrak{sa}([0, \infty)) = \mathfrak{d}$ .

嘉田・友安・吉信は, この事実の証明をさらに詳しく検討し, 次のことを証明した.

**定理 2.4.** [8]  $X$  は距離化可能空間で  $X^{(1)}$  はコンパクトでないとする.

1.  $\mathfrak{sa}(X) \geq \mathfrak{d}$ .
2.  $X$  が局所コンパクトかつ可分ならば  $\mathfrak{sa}(X) = \mathfrak{d}$ .



3. 任意の基数  $\kappa$  に対し,  $\mathfrak{sa}(X) \geq \kappa$  をみたす局所コンパクトな距離化可能空間  $X$  が存在する.

残る重要な場合は,  $X$  が (局所コンパクトでない) 可分な距離化可能空間の場合である. この場合  $X$  はヒルベルトキューブ  $\mathbb{H} = [0, 1]^\omega$  に位相的に埋め込めるので,  $X$  として  $\mathbb{H}$  の部分空間を考える. 嘉田・友安・吉信は次のことを証明した.  $X^* = \text{cl}_{\mathbb{H}} X \setminus X$  とし,  $\mathcal{K}(X^*)$  は  $X^*$  のコンパクト部分集合全体の集合を表す. また, 有向集合  $(D, \leq_D)$  に対し,  $\text{cof}(D, \leq_D)$  は  $\leq_D$  について共終な  $D$  の部分集合の最小の濃度を表す.

**定理 2.5.** [7, 系 4.6]  $X$  が可分な距離化可能空間で  $X^{(1)}$  がコンパクトでないならば,  $\mathfrak{sa}(X) = \mathfrak{d} \cdot \text{cof}(\mathcal{K}(X^*), \subseteq)$  である.

特に,  $X$  が局所コンパクトの場合,  $X^*$  はコンパクトなので  $(\mathcal{K}(X^*), \subseteq)$  は最大元  $X^*$  をもち,  $\mathfrak{sa}(X) = \mathfrak{d}$  となる [8, Theorem 2.10].

ところで,  $\mathfrak{sa}(X) = \mathfrak{d} \cdot \text{cof}(\mathcal{K}(X^*), \subseteq)$  の右辺は, 直積順序  $(\omega^\omega, \leq) \times (\mathcal{K}(X^*), \subseteq)$  の cofinality (共終集合の最小濃度) を表している. また, 一般に有向集合  $(D, \leq_D)$ ,  $(E, \leq_E)$  について,  $D \leq_T E$  ならば  $\text{cof}(D) \leq \text{cof}(E)$  で, したがって  $D \equiv_T E$  ならば  $\text{cof}(D) = \text{cof}(E)$  である.

そこで, Todorćević は, 定理 2.5 とその証明を知った直後に次の問題を提示した.

$d_1, d_2 \in \mathcal{M}(X)$  について, 「 $d_1 \preceq d_2 \iff X$  上の恒等写像が  $(X, d_2)$  から  $(X, d_1)$  への写像として一様連続である」と定めることで  $\mathcal{M}(X)$  上に順序関係  $\preceq$  を導入する.  $d_1 \preceq d_2$  は  $u_{d_1} X \leq u_{d_2} X$  と同値であり, この意味で, 順序構造  $(\mathcal{M}(X), \preceq)$  は  $\text{Cpt}(X)$  の中で Smirnov コンパクト化の全体がなす順序構造と自然に対応する. 特に,  $\mathcal{M}(X)$  の部分集合  $D$  が  $(\mathcal{M}(X), \preceq)$  で共終であるとき,  $\beta X \simeq \sup\{u_d : d \in D\}$  が成り立つ [12].

**問題 2.6.**  $X$  が可分な距離化可能空間で  $X^{(1)}$  がコンパクトでないとき,  $(\mathcal{M}(X), \preceq) \equiv_T (\omega^\omega, \leq) \times (\mathcal{K}(X^*), \subseteq)$  が成り立つか?

定理 2.5 が  $\preceq$  について共終な  $\mathcal{M}(X)$  の部分集合の濃度だけを問題にしているのに対し, 問題 2.6 は  $(\mathcal{M}(X), \preceq)$  の順序構造というより詳しい情報について問いかけている. そして, 問題 2.6 が肯定的に解決されれば, 系として定理 2.5 の別証明が得られる.

問題 2.6 の完全な解決は今のところ与えられていない. 部分解として,  $X$  が局所コンパクトの場合に限って, 嘉田は次のことを証明した.

**定理 2.7.** [4, Theorem 3.1]  $X$  が可分かつ局所コンパクトな距離化可能空間で  $X^{(1)}$  がコンパクトでないとき,  $(\mathcal{M}(X), \preceq) \equiv_T (\omega^\omega, \leq)$  が成り立つ.

一般の場合については、問題の完全な解決は与えられていないが、嘉田・吉信は、Tukey relation のかわりに generalized Galois–Tukey connection を用いて考え、さらに問題 2.6 を少し変形することにより、当初の問題 2.6 の肯定解に近い結果を得た。

$M(X)$  上の新たな順序関係  $\preceq_\varepsilon$  ( $\varepsilon$  は正の実数) を、 $d_1, d_2 \in M(X)$  について

$$d_1 \preceq_\varepsilon d_2 \iff \forall p, q \in X [d_1(p, q) \geq \varepsilon \Rightarrow d_2(p, q) \geq \varepsilon]$$

と定めることで導入する。<sup>\*9</sup>  $d_1, d_2 \in M(X)$  について、 $d_1 \preceq_\varepsilon d_2$  は、 $p, q \in X$  について「 $d_1(p, q) \geq \varepsilon$  ならば  $d_2(p, q) \geq \varepsilon$ 」であることと同値である。<sup>\*10</sup> また、 $X$  の空でない閉集合のペア全体の集合を  $PC(X)$  で表し、 $(A, B) \in PC(X)$ ,  $d \in M(X)$ ,  $\varepsilon > 0$  について、 $d(A, B) \geq \varepsilon$  であることを  $(A, B) \text{ Sep}_\varepsilon d$  と表すことにより、2 項関係  $\text{Sep}_\varepsilon$  を定義する。

**定理 2.8.** [9, Theorem 1.7]  $X$  が可分な距離化可能空間で  $X^{(1)}$  がコンパクトでないとき、次の morphism のサイクルが存在する。ただし  $\leq \times \subseteq$  は  $\omega^\omega$  上の順序関係  $\leq$  と  $\mathcal{K}(X^*)$  上の順序関係  $\subseteq$  の通常の意味での直積順序を表す。

$$\begin{aligned} (\omega^\omega \times \mathcal{K}(X^*), \omega^\omega \times \mathcal{K}(X^*), \leq \times \subseteq) &\rightarrow (M(X), M(X), \preceq_1) \\ &\rightarrow (PC(X), M(X), \text{Sep}_1) \\ &\rightarrow (\omega^\omega \times \mathcal{K}(X^*), \omega^\omega \times \mathcal{K}(X^*), \leq \times \subseteq). \end{aligned}$$

この定理から直ちに次の定理が導かれる。

**定理 2.9.** [9, Corollary 1.8]  $X$  が可分な距離化可能空間で  $X^{(1)}$  がコンパクトでないとき、 $(M(X), \preceq_1) \equiv_T (\omega^\omega, \leq) \times (\mathcal{K}(X^*), \subseteq)$  が成り立つ。

定理 2.9 の系として、定理 2.5 の別証明が得られる [9, Section 4]。その意味で、定理 2.9 は問題 2.6 に対する（当初の想定とは異なる）ひとつの答を与えているといえる。

### 3 $\beta\omega$ まで何マイル？ — 実数の集合論との関わり

可算離散空間  $\omega$  について、 $\beta\omega$  の Smirnov コンパクト化による近似を単純に考えようとする、 $\text{sa}(\omega) = 1$  となり意味をなさない。ところが、次のように定義に「ひねり」を加えると、実数の集合論の観点から非常に興味深い問題が現れる。

<sup>\*9</sup>  $d_1 \preceq d_2$  と  $d_1 \preceq_\varepsilon d_2$  は定義が似通っているが、それらの間に直接の強弱関係はない。

<sup>\*10</sup> また、 $d_1 \preceq_\varepsilon d_2$  は、 $X$  の空でない閉集合  $A, B$  について「 $d_1(A, B) \geq \varepsilon$  ならば  $d_2(A, B) \geq \varepsilon$ 」であることと同値である。

**定義 3.1.**  $M'(X) = \{d \in M(X) : u_d X \neq \beta X\}$  とおく. 基数  $\mathfrak{sp}$  を次で定義する.

$$\mathfrak{sp} = \min \left\{ |D| \mid \begin{array}{l} D \subseteq M'(\omega), \forall F \in [D]^{<\aleph_0} (\sup\{u_d \omega : d \in F\} \neq \beta \omega) \\ \text{かつ } \sup\{u_d \omega : d \in D\} \simeq \beta \omega \end{array} \right\}.$$

Higson コンパクト化についても, 同じ考えで次のとおり定義する.

**定義 3.2.**  $PM'(X) = \{d \in PM(X) : \overline{X}^d \neq \beta X\}$  とおく. 基数  $\mathfrak{hp}$  を次で定義する.

$$\mathfrak{hp} = \min \left\{ |D| \mid \begin{array}{l} D \subseteq PM'(\omega), \forall F \in [D]^{<\aleph_0} (\sup\{\overline{\omega}^d : d \in F\} \neq \beta \omega) \\ \text{かつ } \sup\{\overline{\omega}^d : d \in D\} \simeq \beta \omega \end{array} \right\}.$$

これらの基数について, 嘉田・友安・吉信は次のことを証明した  $\text{cof}(\mathcal{N})$  は  $\text{cof}(\mathcal{N}, \subseteq)$  を表す.

**定理 3.3.** [6] 基数  $\mathfrak{sp}, \mathfrak{hp}$  について次の大小関係が ZFC で証明できる.

1.  $\max\{\text{cov}(\mathcal{M}), \text{cov}(\mathcal{N})\} \leq \mathfrak{sp} \leq \text{cof}(\mathcal{N})$ .
2.  $\max\{\text{cov}(\mathcal{M}), \text{cov}(\mathcal{N})\} \leq \mathfrak{hp} \leq \text{cof}(\mathcal{N})$ .
3.  $\mathfrak{sp} \leq \mathfrak{u}$ .

$\mathfrak{hp}$  と  $\mathfrak{u}$  の関係については,  $\mathfrak{hp} \leq \mathfrak{u}$  と予想されるが, 未解決である. 部分解として, 嘉田は次のことを証明した.  $\omega$  上の非単項超フィルター  $\mathcal{U}$  が q-point であるとは,  $\omega$  を定義域とする任意の finite-to-one の写像  $f$  について, ある  $U$  の要素  $X$  について  $f \upharpoonright X$  が単射となるときにいう.  $\mathfrak{u}(\text{non-q-point})$  は q-point **でない**超フィルターを生成する  $\mathcal{P}(\omega)$  の部分集合の最小濃度を表す. 明らかに  $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{u}(\text{non-q-point})$  だが,  $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(\text{non-q-point})$  が ZFC で証明できるかどうかは未解決である.

**定理 3.4.** [3]  $\mathfrak{hp} \leq \mathfrak{u}(\text{non-q-point})$ .

## 4 To $\beta\omega$ , or not to $\beta\omega$ : that is the question.

前節で定義した基数  $\mathfrak{sp}, \mathfrak{hp}$  をさらに変形して定義される次の基数も, 実数の集合論の観点から興味深い対象である.

**定義 4.1.** 基数  $\mathfrak{st}, \mathfrak{ht}$  を次のとおり定義する. ただし,  $d_1, d_2 \in PM'(\omega)$  について,  $d_1 \trianglelefteq d_2 \iff \overline{\omega}^{d_1} \leq \overline{\omega}^{d_2}$  とする. また,  $\min \emptyset = \infty$  と定め, すべての基数  $\kappa$  について

$\kappa < \infty$  と規約する.

$$\text{st} = \min \left\{ |D| \mid \begin{array}{l} D \subseteq M'(\omega), D \text{ は } \leq \text{ で整列されていて,} \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\},$$

$$\text{ht} = \min \left\{ |D| \mid \begin{array}{l} D \subseteq PM'(\omega), D \text{ は } \leq \text{ で整列されていて,} \\ \text{かつ } \sup\{\bar{\omega}^d : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}.$$

定義より明らかに,  $\text{sp} \leq \text{st}$ ,  $\text{hp} \leq \text{ht}$  である. ただし,  $\text{st}$ ,  $\text{ht}$  の場合, 定義をみたく距離関数の集合  $D$  が存在するとは限らず, 定義により  $\infty$  という (形式的な) 値をとる可能性があるので, それらが (具体的な基数の) 値をもつか, それとも  $\infty$  になるか, そこから議論を始める必要がある.

- 定理 4.2.**
1. [5, 命題 5.10, 命題 6.15]  $\text{st} = \text{ht} = \infty$  をみたく ZFC のモデルが存在する.
  2. [5, 系 5.7] マーティンの公理のもとでは  $\text{st} = \mathfrak{c}$  が成り立つ. 特に, 連続体仮説のもとでは  $\text{st} = \aleph_1 = \mathfrak{c}$  である.
  3. [7, 系 2.6][2, Corollary 3.4] マーティンの公理のもとでは  $\text{ht} = \mathfrak{c}$  が成り立つ. 特に, 連続体仮説のもとでは  $\text{ht} = \aleph_1 = \mathfrak{c}$  である.
  4. [7, 系 2.7][2, Corollary 3.3]  $\text{st} = \text{ht} = \aleph_1 < \aleph_2 = \mathfrak{c}$  は ZFC 上無矛盾である.

## 参考文献

- [1] A. Blass. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum. In M. Foreman and A. Kanamori, editors, *Handbook of Set Theory*, pp. 395–489. Springer, 2010.
- [2] M. Kada. Covering a bounded set of functions by an increasing chain of slaloms. *Topology Appl.*, Vol. 154, pp. 277–281, 2007.
- [3] 嘉田 勝. Ultrafilters and Higson compactifications. 公理的集合論と集合論的位相空間論, 数理解析研究所講究録, No. 1595, pp. 14–19. 京都大学数理解析研究所, 2008.
- [4] M. Kada. How many miles to  $\beta X$ ? II —Approximations to  $\beta X$  versus cofinal types of sets of metrics. *Topology Appl.*, Vol. 157, pp. 1460–1464, 2010.
- [5] 嘉田 勝, 友安一夫. How many miles to  $\beta\omega$ ? —  $\beta\omega$  まで何マイル? 一般及び幾何学的トポロジーと関連する諸問題, 数理解析研究所講究録, No. 1370, pp. 86–101. 京都大学数理解析研究所, 2004.

- [6] M. Kada, K. Tomoyasu, and Y. Yoshinobu. How many miles to  $\beta\omega$ ? — Approximating  $\beta\omega$  by metric-dependent compactifications. *Topology Appl.*, Vol. 145, pp. 277–292, 2004.
- [7] 嘉田 勝, 友安 一夫, 吉信 康夫. How many miles to  $\beta\omega$ ? II. 集合論的及び幾何学的位相空間論とその応用, 数理解析研究所講究録, No. 1419, pp. 105–125. 京都大学数理解析研究所, 2005.
- [8] M. Kada, K. Tomoyasu, and Y. Yoshinobu. How many miles to  $\beta X$ ? —  $\mathfrak{d}$  miles, or just one foot. *Topology Appl.*, Vol. 153, pp. 3313–3319, 2006.
- [9] M. Kada and Y. Yoshinobu. Galois–Tukey connection involving sets of metrics. to appear.
- [10] K. Kawamura and K. Tomoyasu. Approximations of Stone–Čech compactifications by Higson compactifications. *Colloquium Mathematicum*, Vol. 88, pp. 75–92, 2001.
- [11] P. Vojtaš. Generalized Galois–Tukey connections between explicit relations on classical objects of real analysis. In H. Judah, editor, *Set Theory of the Reals*, Vol. 6 of *Israel Mathematical Conference Proceedings*, pp. 619–643, 1993.
- [12] R. G. Woods. The minimum uniform compactification of a metric space. *Fund. Math.*, Vol. 147, pp. 39–59, 1995.

バビロンの流れのほとりに座り  
 シオンを思って、私たちは泣いた。  
 豎琴は、ほとりの柳の木々に掛けた。  
 わたしたちを捕囚にした民が  
 歌をうたえと言うから  
 わたしたちを嘲る民が、楽しもうとして  
 「歌って聞かせよ、シオンの歌を」と言うから。  
 どうして歌うことができようか  
 主のための歌を、異教の地で。  
 (詩篇 137)

# $A_\infty$ -structure in string topology

森谷 駿二 (京都大学理学研究科 数学教室)

## 概要

Chas と Sullivan は  $C^\infty$ -多様体の自由ループ空間の特異ホモロジーにある代数的構造を定義した ([7]). この構造またはその拡張の研究が今日ストリングトポロジーと呼ばれている. 本稿では, Chas と Sullivan によって定義された代数的構造と Hochschild コホモロジーとの関係, 及びオペラッドとの関係について説明する. またこれらに関連する筆者の結果を紹介する.

**注意:** 本稿で用いられている用語は一般的なものと異なる場合があるので注意されたい.

**記号:**  $M$  を向きづけられた閉  $C^\infty$ -多様体とし,  $d$  をその次元とする.  $LM$  を  $M$  の自由ループ空間とする.  $k$  を任意の体とし,  $H_*(-)$  を  $k$ -係数の特異ホモロジーとする.

## 1 ストリングトポロジー

Chas と Sullivan は多様体の自由ループ空間の特異ホモロジーに Batalin-Vilkovisky 代数と呼ばれる代数的構造を構成した. ここではそれを紹介する. ただし, Chas-Sullivan の元々の構成ではなく, Cohen と Jones による構成 [11] を紹介する.

$\Delta: M \rightarrow M \times M$  を対角線写像,  $\nu_\Delta$  を  $\Delta$  の normal bundle,  $N_\Delta$  を  $\Delta$  の管状近傍,  $ev: LM \rightarrow M$  を固定された点  $p \in S^1$  における evaluation 写像とする. 次のような引き戻し図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} LM \times_M LM & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & LM \times LM \\ \downarrow e & & \downarrow ev \times ev \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \end{array}$$

次の補題は無限次元多様体の埋め込み  $LM \times_M LM \rightarrow LM \times LM$  に関する管状近傍定理と見なせる.

**補題 1.1.** 部分空間  $(ev \times ev)^{-1}N_\Delta \subset LM \times LM$  はベクトル束  $e^*\nu_\Delta$  の全空間に同相である.  $\square$

この補題を用いてループ積  $H_p(LM) \otimes H_q(LM) \rightarrow H_{p+q-d}(LM)$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned} H_p(LM) \otimes H_q(LM) &\rightarrow H_{p+q}(LM \times LM) \\ &\rightarrow H_{p+q}(LM \times LM / (LM \times LM - (ev \times ev)^{-1}N_\Delta)) \quad (\text{collapse}) \\ &\cong H_{p+q}(\overline{(ev \times ev)^{-1}N_\Delta} / \partial((ev \times ev)^{-1}N_\Delta)) \\ &\cong H_{p+q}(LM^{e^*\nu_\Delta}) \quad (\text{補題. } LM^{e^*\nu_\Delta} \text{ は Thom 空間を表す.}) \\ &\cong H_{p+q-d}(LM \times_M LM) \quad (\text{Thom 同型}) \\ &\rightarrow H_{p+q-d}(LM) \quad (\text{ループの結合}) \end{aligned}$$

**定義 1.2.**  $\mathbb{H}_p = H_{p+d}(LM)$  とおく.

ループ積は次数付き加群  $\mathbb{H}_*$  に次数を保つ積  $\bullet: \mathbb{H}_* \otimes \mathbb{H}_* \rightarrow \mathbb{H}_*$  を定義する.

$\rho: S^1 \times LM \rightarrow LM$  を  $\rho(s, \gamma)(t) = \gamma(t + s)$  によって定まる写像とし,  $[S^1] \in H_1(S^1)$  を基本類とする.  $\Delta: \mathbb{H}_* \rightarrow \mathbb{H}_{*+1}$  を次の合成で定める.

$$H_p(LM) \xrightarrow{[S^1] \otimes} H_1(S^1) \otimes H_p(LM) \rightarrow H_{p+1}(S^1 \times LM) \xrightarrow{\rho_*} H_p(LM).$$

**定理 1.3** ([7]). ループ積  $\bullet$  と作用素  $\Delta$  は次数付き加群  $\mathbb{H}_*$  に **Batalin-Vilkovisky 代数 (BV-代数)** の構造を定める. すなわち, (i)  $\bullet : \mathbb{H}_* \otimes \mathbb{H}_* \rightarrow \mathbb{H}_*$  は単位的, 結合的かつ次数付き可換であり, (ii)  $\Delta$  は  $\Delta \circ \Delta = 0$  を満たし, (iii)  $\bullet$  と  $\Delta$  は次の関係式を満たす.

$$\begin{aligned} \Delta(a \cdot b \cdot c) &= \Delta(a \cdot b) \cdot c + (-1)^{|a|} a \cdot \Delta(b \cdot c) + (-1)^{(|a|-1)|b|} b \cdot \Delta(a \cdot c) \\ &\quad - \Delta(a) \cdot b \cdot c - (-1)^{|a|} a \cdot \Delta(b) \cdot c - (-1)^{|a|+|b|} a \cdot b \cdot \Delta(c) \end{aligned}$$

□

**注釈 1.4** (Gerstenhaber 代数).  $\{-, -\} : \mathbb{H}_* \otimes \mathbb{H}_* \rightarrow \mathbb{H}_{*+1}$  を  $\{a, b\} = (-1)^{|a|} \Delta(a \cdot b) - (-1)^{|a|} (\Delta a) \cdot b - a \cdot \Delta b$  と定義すると, これは  $\mathbb{H}_*[-1]$  に次数付き Lie 代数の構造を定める. さらに,  $(-\bullet-)$  と  $\{-, -\}$  は等式

$$\{a, b \bullet c\} = \{a, b\} \bullet c + (-1)^{|b|(|a|-1)} b \bullet \{a, c\}$$

を満たす. 一般にこの関係式を満たす次数付き可換な積と次数付き Lie カッコの組を **Gerstenhaber 代数** と呼ぶ.

BV-代数や Gerstenhaber 代数のホモトピー論的な意味については 3 節で述べる. また, ループ積の応用については [16],[17],[14] などを参照されたい.

## 2 Hochschild コホモロジーとの比較

$A$  を結合的な微分次数付き代数 (differential graded algebra) とする.  $A$  の Hochschild コホモロジーを定義するために, まず次のような二重チェイン複体  $CH^{*,*}(A, A)$  を定義する.

$$CH^{k,l}(A, A) = \underline{Hom}^k(A^{\otimes l}, A),$$

( $\underline{Hom}$  は hom-複体を表す) 水平方向の微分  $d : CH^{k,l}(A, A) \rightarrow CH^{k+1,l}(A, A)$  は通常の hom-複体の微分  $df = d_A f - (-1)^k f d_{A^{\otimes l}}$  とし, 垂直方向の微分  $\delta : CH^{k,l}(A, A) \rightarrow CH^{k,l+1}(A, A)$  は次式で定める.

$$(\delta f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l+1}) = \pm a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{l+1}) + \sum_i \pm f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \cdot a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_l) \pm f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_l) a_{l+1}$$

(正確な符号については [18] 参照.)  $CH^{*,*}(A, A)$  の total complex  $CH^*(A, A)$  を Hochschild 複体と呼び, そのコホモロジーを Hochschild コホモロジーと呼び  $HH^*(A, A)$  で表す.  $CH^*(A, A)$  には結合的な微分次数付き代数の構造が次のようにして定まる.

$$(f \cdot g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l+m}) = \pm f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_l) \cdot g(a_{l+1} \otimes \cdots \otimes a_{l+m})$$

この積から Hochschild コホモロジーに入る積のことを Gerstenhaber 積と呼ぶ. 次の定理はループ積と Gerstenhaber 積の関係を述べている.

**定理 2.1** ([11]).  $C^*(M)$  を  $M$  の  $k$ -係数特異コチェイン代数とする.  $M$  が単連結のとき, 二つの次数付き代数 ( $\mathbb{H}$ , ループ積) と  $(HH^*(C^*(M), C^*(M)), \text{Gerstenhaber 積})$  は同型である. □

この定理の証明の概略は 6 節で説明する. 一般に, 結合的な微分次数付き代数の Hochschild コホモロジーには次数付き Lie 代数の構造が入ることが知られており, これと上述の Gerstenhaber 積は Gerstenhaber 代数をなすことが知られている ([1]). これについて, 球面 [18] や複素射影空間の場合の計算を元に次の予想がなされている.

**予想 2.2** ([18]). Hochschild コホモロジー  $HH^*(C^*(M), C^*(M))$  の Gerstenhaber 代数構造とストリングトポロジー作用素から定まる  $\mathbb{H}$  上のそれ (注釈 1.4 参照) は同型であろう. □

### 3 オペラッド

$(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I})$  を次のうちのいずれかの対称モノイダル圏とする.

$$(\mathcal{SET}, \times, *), \quad (\mathcal{TOP}, \times, *), \quad (\mathcal{CH}, \otimes_k, k).$$

ここで,  $\mathcal{SET}, \mathcal{TOP}, \mathcal{CH}$  はそれぞれ集合と写像の圏, 位相空間と連続写像の圏, チェイン複体とチェイン写像の圏を表す.

**定義 3.1** (オペラッド). (1)  $\mathcal{C}$  上の (対称) オペラッドとは,  $\mathcal{C}$  の対象の列  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(n)\}_{n \geq 0}$  で, 次のようなデータが与えられたもののことである.

1. 合成積と呼ばれる  $\mathcal{C}$  の射の族  $\mu_{k_1, \dots, k_n} : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(k_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(k_n) \longrightarrow \mathcal{O}(k)$  ( $n \geq 1$ ,  $k_1 \dots k_n \geq 0$ ,  $k = k_1 + \dots + k_n$ ) で, 次の結合律を満たすもの:  $c \in \mathcal{O}(n)$ ,  $d_i \in \mathcal{O}(k_i)$ ,  $e_j \in \mathcal{O}(l_j)$  に対して,

$$\mu_{l_1, \dots, l_k}(\mu_{k_1, \dots, k_n}(c; d_1, \dots, d_n); e_1, \dots, e_j) = \mu_{L_1, \dots, L_n}(c; f_1, \dots, f_n)$$

但し,  $f_i = \mu(d_i; e_{k_1 + \dots + k_{i-1} + 1}, \dots, e_{k_1 + \dots + k_i})$ ,  $L_i = l_{k_1 + \dots + k_{i-1} + 1} + \dots + l_{k_1 + \dots + k_i}$  である.

2. 単位元と呼ばれる次の等式をみたす元  $1 \in \mathcal{O}(1)$ :  $d \in \mathcal{O}(k)$  に対して  $\mu(1; d) = d$ ,  $c \in \mathcal{O}(n)$  に対して  $\mu(c; 1^n) = c$ . 但し  $1^n = (1, \dots, 1)$ .
3.  $\mathcal{O}(n)$  への  $n$  次対称群  $\Sigma_n$  の右からの作用で, 次の様な規則を満たすもの:  $c \in \mathcal{O}(n)$ ,  $d_i \in \mathcal{O}(k_j)$ ,  $\sigma \in \Sigma_n$ ,  $\tau_j \in \Sigma_{k_j}$  について,

$$\begin{aligned} \mu(c\sigma; d_1 \dots d_n) &= \mu(c; d_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, d_{\sigma^{-1}(n)})\sigma(k_1, \dots, k_n) \\ \mu(c; d_1\tau_1, \dots, d_n\tau_n) &= \mu(c; d_1, \dots, d_n)(\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_n) \end{aligned}$$

ここで,  $\sigma(k_1, \dots, k_n)$  は block permutation,  $\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_n$  を  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  の通常の埋め込み  $\Sigma_{k_1} \times \dots \times \Sigma_{k_n} \subset \Sigma_{k_1 + \dots + k_n}$  による像である.

二つのオペラッド  $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$  の間の射とは,  $\mathcal{C}$  の射の列  $\{\mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{O}'(n)\}_{n \geq 0}$  で, 合成積, 単位元, 対称群の作用を保つものことである.

(2)  $\mathcal{C}$  上の非対称オペラッドとは, 上記のオペラッドの定義で対称群の作用とそれに関する規則を除去したものである. 非対称オペラッドの間の射についても同様.

**例 3.2.** (Endomorphism オペラッド)  $X, Y \in \mathcal{C}$  に対して  $\mathcal{C}$  の対象  $\mathfrak{Hom}(X, Y)$  を次のように定める.  $\mathcal{C} = \mathcal{SET}$  のとき,  $\mathfrak{Hom}(X, Y)$  は  $X$  から  $Y$  への射の集合,  $\mathcal{C} = \mathcal{TOP}$  のとき,  $\mathfrak{Hom}(X, Y) = \text{Map}(X, Y)$ , すなわち, 射の集合にコンパクト開位相を入れたもの.  $\mathcal{C} = \mathcal{CH}$  のとき  $\mathfrak{Hom}(X, Y) = \underline{\text{Hom}}(X, Y)$ . このとき  $X \in \mathcal{C}$  に対して, オペラッド  $\text{End}_X$  を次のように定める.

$$\text{End}_X(n) = \mathfrak{Hom}(X^{\otimes n}, X)$$

(つまり  $X$  上のすべての  $n$  項演算のなす対象). 単位元  $1 = \text{id} \in \mathfrak{Hom}(X, X)$  とする. 合成積は  $f \in \text{End}_X(n)$ ,  $g_i \in \text{End}_X(k_i)$  に対して,  $\mu(f; g_1, \dots, g_n) = f \circ (g_1 \otimes \dots \otimes g_n)$  と定める. また,  $f \in \text{End}_X(n)$ ,  $x_i \in X$  に対して,  $(f\sigma)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$  とおく. (この例は自己同型群のオペラッドにおける類似である.)

**定義 3.3** (オペラッド上の代数).  $\mathcal{O}$  を  $\mathcal{C}$  上のオペラッドとする.  $\mathcal{O}$  上の代数 (または  $\mathcal{O}$ -代数) とは,  $\mathcal{C}$  の対象  $X$  とオペラッドの射  $\rho : \mathcal{O} \rightarrow \text{End}_X$  の組  $(X, \rho)$  のことである.  $\mathcal{O}$  が非対称オペラッドの場合は,  $\text{End}_X$  も (対称群の作用を忘れて) 非対称オペラッドと見なして全く同様に  $\mathcal{O}$ -代数を定義する. 射  $\rho$  のことを  $\mathcal{O}$  の  $X$  への作用と呼ぶ. (群の表現の類似.)



**注釈 3.4.** 上述の定義を適当に書きかえることによって一般の対称モノイダル圏でもオペラッドやオペラッド上の代数を定義することができる。

**例 3.5** (結合オペラッド).  $\mathcal{C}$  上の非対称オペラッド  $\mathcal{A}$  を次のように定義する.  $\mathcal{A}(n) = \mathbb{I}$ , 合成積  $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{I}$  は標準的な同型  $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$  の  $n-1$  回の合成により定義する. ( $\mathcal{C} = \mathcal{CH}$  のとき単位は  $1 \in k$ .)  $\mathcal{A}$ -代数は  $\mathcal{C}$  の単位的結合的なモノイドと一対一対応する.

**例 3.6** (小球オペラッド).  $B^m \subset \mathbb{R}^m$  を原点を中心とする半径 1 の  $m$  次元閉球とする. 各  $m \geq 1$  に対して部分空間  $\mathcal{D}_m(n) \subset \text{Map}(B^m, B^m)^{\times n}$  を次のように定義する:  $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{D}_m(n) \iff [f_i \text{ は } f_i(u) = x_i + r_i u, x_i \in B^m, r_i > 0 \text{ の形で, } i \neq j \text{ ならば, } f_i(\text{Int} B^m) \cap f_j(\text{Int} B^m) = \emptyset.]$   $\mathcal{D}_m = \{\mathcal{D}_m(n)\}$  に次のようにしてオペラッドの構造を入れる.  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{D}_m(n)$ ,  $g^i = (g_1^i, \dots, g_{k_i}^i) \in \mathcal{D}_m(k_i)$  に対して, 合成積  $\mu(f; g^1, \dots, g^n) = (h_1, \dots, h_{k_1 + \dots + k_n})$  を次式で定める:  $h_{k_1 + \dots + k_{i-1} + t} = f_i \circ g_t^i$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq k_i$ ).  $1 = \text{id} \in \text{Map}(B^m, B^m)$  とする. また, 対称群は成分入れ替えで作用させる. オペラッド  $\mathcal{D}_m$  を小  $m$ -球オペラッド (little  $m$ -balls operad) と呼ぶ.  $m = 1, 2$  のときそれぞれ小区間, 小円盤オペラッドと呼ぶこともある.

**例 3.7** (多重ループ空間).  $X$  を基点付き位相空間とし,  $\Omega(X)$  を基点付きループ空間とする.  $\Omega^m(X) = \Omega(\Omega^{m-1}(X))$  とする.  $\Omega^m(X)$  への  $\mathcal{D}_m$  への作用を次の様に定義する.  $\Omega^n(X)$  は写像空間  $\text{Map}((B^m, \partial B^m), (X, *))$  と同相である.  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{D}_m(n)$  と,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Omega^m(X)$  に対して,  $\beta = \rho(f)(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  を,  $u \in B^m - (\cup_i \text{Int} f_i(B^m))$  ならば  $\beta(u) = *$ . ある  $i$  について  $u \in \text{Int} f_i(B^m)$  ならば  $\beta(u) = \alpha_i \circ f_i^{-1}(u)$  と定める.

逆に, ある弧状連結な空間に  $\mathcal{D}_m$  が作用していれば, その空間は  $m$  重ループ空間にホモトピー同値であることが知られている. (多重ループ空間の認識原理 [3])

**例 3.8** (枠付き小円盤オペラッド). 部分空間  $f\mathcal{D}_2(n) \subset \text{Map}(B^2, B^2)^{\times n}$  を次のように定める:  $(f_1, \dots, f_n) \in f\mathcal{D}_2(n) \iff \exists (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{D}_2(n) \exists \alpha_i \in SO(2), f_i = g_i \circ \alpha_i$ .  $f\mathcal{D}_2 = \{f\mathcal{D}_2(n)\}$  には  $\mathcal{D}$  とまったく同様にして位相的オペラッドの構造が入る.

以下では  $\mathcal{C} = \mathcal{TOP}$  又は  $\mathcal{CH}$  として,  $\mathcal{C}$  の射が弱同値であるとは,  $\mathcal{C} = \mathcal{TOP}$  のときは弱ホモトピー同値であること,  $\mathcal{C} = \mathcal{CH}$  のときは quasi-isomorphism であることとする.

**定義 3.9.**  $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$  を  $\mathcal{C}$  上の二つのオペラッドとする.

(1) オペラッドの射  $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$  が弱同値であるとは, 各  $n \geq 0$  に対して  $f_n: \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{O}'(n)$  が  $\mathcal{C}$  の弱同値であることを言う.  $\mathcal{O}$  と  $\mathcal{O}'$  が弱同値であるとは, オペラッドの射の鎖

$$\mathcal{O} \xrightarrow{g_1} \mathcal{O}_1 \xrightarrow{g_2} \mathcal{O}_2 \xrightarrow{g_3} \dots \xrightarrow{g_N} \mathcal{O}'$$

で, 各  $g_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) が弱同値であるものが存在することを言う.

(2)  $\mathcal{O}$ -代数の射が弱同値であるとは, それが  $\mathcal{C}$  の射として弱同値であることを言う. 二つの  $\mathcal{O}$ -代数  $X$  と  $Y$  が弱同値であることもオペラッドの弱同値と同様に定義する.

(3)  $\mathcal{A}$  と弱同値な非対称オペラッドを  $A_\infty$ -オペラッドといい,  $\mathcal{D}_m$  (または  $\mathcal{D}_m$  の特異チェーンをとって得られるオペラッド) と弱同値な対称オペラッドを  $E_m$ -オペラッドという.

**例 3.10** (Associahedra[2]). Planer  $n$ -tree とは, 頂点の幾つかに 0 から  $n$  までの数字がラベリングされている finite planer tree で, 次の規則を満たす物のことを言う.

- 頂点 0 の valence は 2 以上で 1 から  $n$  までの頂点の valence は 1. その他の頂点の valence は 3 以上.
- 平面内で, 頂点 0 は下方に, 1 から  $n$  は上方に位置し, 左から番号が若い順に並んでいる.

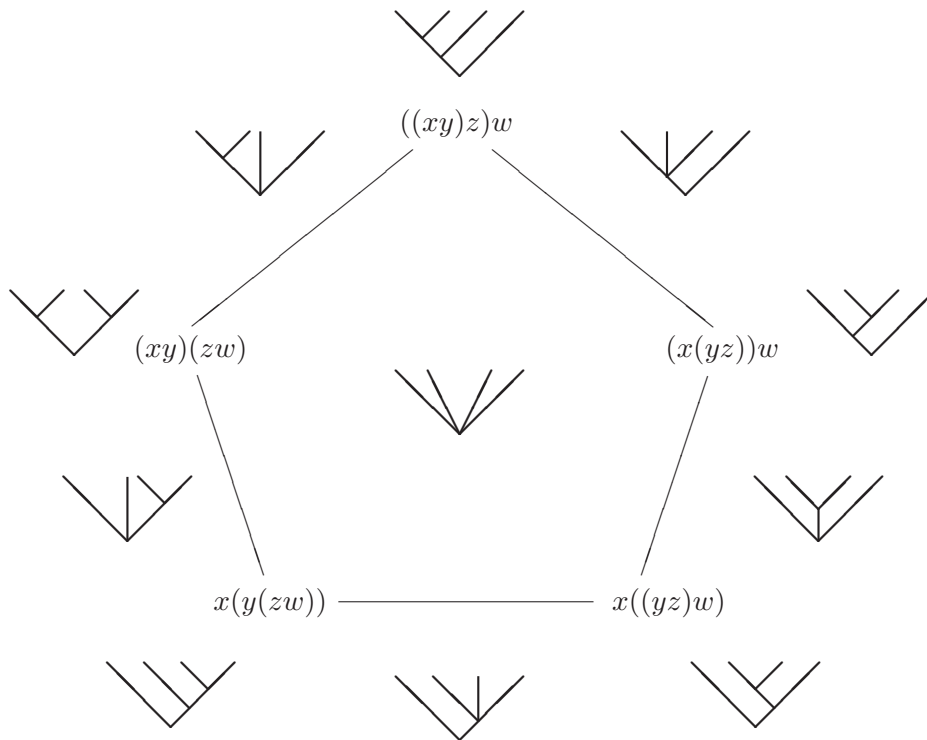


図 1:  $\mathcal{T}(4)$  (頂点の番号は省略.)

$n$ -tree とは planer  $n$ -tree のラベルを保つアイソトピーによる同値類のこととする. 頂点  $0$  のことをアウトプットと呼び, 頂点  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) のことを第  $i$  インプットと呼ぶことにする.  $n$ -tree の集合を  $\mathcal{T}(n)$  で表す.  $T, T' \in \mathcal{T}(n)$  に対して  $T'$  が  $T$  に辺縮約を繰り返して得られるとき,  $T \leq T'$  であるとする. この関係により  $\mathcal{T}(n)$  に半順序が定まる. 例えば, 図 1 で五角形の各辺の中間に位置する 4-tree は両端に位置するものより大きく, 中心に位置するものが最大である.  $\mathcal{T}(0), \mathcal{T}(1)$  は一点集合とする.  $T \in \mathcal{T}(n), S_i \in \mathcal{T}(k_i)$  に対して,  $\mu(T; S_1, \dots, S_n)$  を各  $i$  について  $T$  の第  $i$  インプットと  $S_i$  のアウトプットとを同一視して得られる tree とすることによって,  $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}(n)\}_{n \geq 0}$  に半順序集合の圏における非対称オペラッドの構造が定まる. ( $\otimes$  は直積とする.)

$\mathcal{K}(n)$  を  $\mathcal{T}(n)$  の幾何学的実現とする.  $\{\mathcal{K}(n)\}$  には  $\mathcal{T}$  から自然に非対称位相的オペラッドの構造が入る. このオペラッドを associahedra と呼び,  $\mathcal{K}$  で表す.  $\mathcal{T}(n)$  は最大元を持つので,  $\mathcal{K}(n)$  は可縮であり,  $\mathcal{K}$  は  $A_\infty$ -オペラッドである.

次の定理が BV-代数や Gerstenhaber 代数にオペラッドの視点からの意味を与える.

**定理 3.11** ([4]). (1) 小円盤オペラッドの作用はホモロジーに Gerstenhaber 代数の構造を誘導する. より詳しく述べると, 空間  $X$  への  $\mathcal{D}_2$  の作用はホモロジーの写像

$$H_*(\mathcal{D}_2(2)) \otimes H_*(X)^{\otimes 2} \longrightarrow H_*(X)$$

を誘導するが, この写像を一点で表わされる類で evaluate すると次数付き可換な積が得られ, ホモトピー同値  $\mathcal{D}_2(2) \simeq S^1$  によって  $S^1$  の基本類に対応する類で evaluate すると次数付き Lie カッコが得られ, この二つの作用素が注釈 1.4 の等式をみたす.

(2) 枠付き小円盤オペラッドの作用はホモロジーに Batalin-Vilkovisky 代数の構造を誘導する. ((1) と同様の意味で)  $H_1(f\mathcal{D}(1)) \cong H_1(SO(2))$  が次数 +1 の作用素を誘導し, 一点で表わされる類が次数付き可換な積を誘導する.

**例 3.12** ([10]). 結合的 dg-代数  $A$  の Hochschild 複体  $CH^*(A, A)$  には  $E_2$ -オペラッドの作用が入り、この作用は Gerstenhaber 積と Lie カッコを上での定理の意味で復元する。

オペラッドが作用する空間のその他の例については [5], [6], [9], [15] などを参照されたい。

#### 4 余単体対象と $A_\infty$ -オペラッド

この節では McClure と Smith [12] によって定義された、totalization に  $A_\infty$ -オペラッドの作用を誘導するような余単体対象上の構造について述べる。以下では簡略化のため余単体空間についてのみ述べるが、実際には一般の位相的モノイダルモデル圏 (例えば後に述べる対称スペクトラの圏)  $\mathcal{C}$  についても  $\mathcal{C}$  上の余単体対象に関して全く同じことが成り立つ。

**定義 4.1** (余単体空間). (1) 圏  $\Delta$  を次のように定める.  $Ob(\Delta) = \{[n] = \{0, 1, \dots, n\} | n \geq 0\}$ ,  $Hom_\Delta([n], [m]) = \{[n] \text{ から } [m] \text{ への弱い意味で順序を保つ写像}\}$ .

(2) 余単体空間 (cosimplicial space) とは関手  $X : \Delta \rightarrow \mathcal{TOP}$  のことである.  $X([n]) = X^n$  と書き、余単体空間を  $X^\bullet$  などと肩に  $\bullet$  をつけて表す. 二つの余単体空間の間の射とは、自然変換のことである. 余単体空間のなす圏を  $\mathcal{TOP}^\Delta$  で表す.

射  $d^i : [n] \rightarrow [n+1] \in \Delta$  ( $0 \leq i \leq n+1$ ) を  $i$  をスキップする単射,  $s^i : [n] \rightarrow [n-1] \in \Delta$  ( $0 \leq i \leq n$ ) を  $i$  と  $i+1$  を  $i$  にうつす全射とすると、 $\Delta$  の任意の射は  $\{d^i, s^i\}$  の合成で書ける. このため余単体空間  $X^\bullet$  はデータ

$$X^n \ (n \geq 0), \quad d^i : X^n \rightarrow X^{n+1} \ (n \geq 0, 0 \leq i \leq n+1), \quad s^i : X^n \rightarrow X^{n-1} \ (n \geq 1, 0 \leq i \leq n)$$

で、 $\{d^i, s^i\}$  が適当な条件 (余単体等式, 例えば [12] 参照) を満たすものと一対一対応する.

**定義 4.2** (totalization).  $\Delta_{top}^\bullet$  を位相的標準単体からなる余単体空間とする. すなわち、 $\Delta_{top}^n = \{(t_1, \dots, t_n) | 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$  であり、 $d^0((t_1, \dots, t_n)) = (0, t_1, \dots, t_n)$ ,  $d^i(t_1, \dots, t_n) = (\dots, t_i, t_i, \dots)$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $d^{n+1}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_n, 1)$ ,  $s^i(t_1, \dots, t_n) = (\dots, t_i, t_{i+2}, \dots)$  である. 余単体空間  $X^\bullet$  に対して、余単体空間の射の集合  $Hom(\Delta_{top}^\bullet, X^\bullet)$  に  $\prod_{n \geq 0} Map(\Delta_{top}^n, X^n)$  の部分空間としての位相を入れたものを  $Tot(X^\bullet)$  と書き、 $X^\bullet$  の totalization と呼ぶ.

**定義 4.3** (McClure-Smith 積 [12]).  $X^\bullet$  を余単体空間とする.  $X^\bullet$  上の McClure-Smith 積とは、写像の族  $\{\mu_{p,q} : X^p \times X^q \rightarrow X^{p+q} | p, q \geq 0\}$  で、次の条件を満たすものである. (以下では  $\mu_{p,q}(x, y)$  の代わりに  $x \cdot y$  と書く.)

$$\begin{aligned} d^i(x \cdot y) &= \begin{cases} (d^i x) \cdot y & \text{if } 0 \leq i \leq p \\ x \cdot (d^{i-p} y) & \text{if } p+1 \leq i \leq p+q+1 \end{cases} \\ (d^{p+1} x) \cdot y &= x \cdot (d^0 y) \\ s^i(x \cdot y) &= \begin{cases} (s^i x) \cdot y & \text{if } 0 \leq i \leq p-1 \\ x \cdot s^{i-p} y & \text{if } p \leq i \leq p+q \end{cases} \\ x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \end{aligned}$$

余単体的空間  $X^\bullet, Y^\bullet$  に対して、余単体空間  $X^\bullet \square Y^\bullet$  を次のように定義する.

$$(X^\bullet \square Y^\bullet)^r = \bigsqcup_{p+q=r} X^p \times Y^q / \sim, \quad (d^{p+1} x, y) \sim (x, d^0 y).$$

$\{d^i, s^i\}$  は上記の McClure-Smith 積の条件式で定める.  $(-\square-)$  は  $\mathcal{C}^\Delta$  に (非対称な) モノイダル構造を与える. 明らかに、余単体空間  $X^\bullet$  上の McClure-Smith 積と、結合的な写像  $X^\bullet \square X^\bullet \rightarrow X^\bullet$  とは一対一対応する.

非対称位相的オペラッド  $\mathcal{B}$  を次のように定める.  $\mathcal{B}(n) = Map_{\mathcal{TOP}^\Delta}(\Delta_{top}^\bullet, (\Delta_{top}^\bullet)^{\square n})$  とおき、 $f \in \mathcal{B}(n)$ ,  $g_i \in \mathcal{B}(m_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して、 $\mu(f; g_1, \dots, g_n)$  を次の合成とする.

$$\Delta^\bullet \xrightarrow{f} (\Delta^\bullet)^{\square n} \xrightarrow{g_1 \square \dots \square g_n} (\Delta^\bullet)^{\square m_1} \square \dots \square (\Delta^\bullet)^{\square m_n} \cong (\Delta^\bullet)^{\square m_1 + \dots + m_n}$$

**命題 4.4** ([12]).  $\mathcal{B}$  は  $A_\infty$ -オペラッドである.

*Proof.* 射  $\zeta : \Delta_{top}^\bullet \square \Delta_{top}^\bullet \rightarrow \Delta_{top}^\bullet$  を

$$\zeta((t_1, \dots, t_p), (s_1, \dots, s_q)) = (t_1/2, \dots, t_p/2, (1+s_1)/2, \dots, (1+s_q)/2)$$

によって定義すると,  $\zeta$  が同型であることが容易に確かめられる. よって,  $\mathcal{B}(n) \cong \text{Map}(\Delta_{top}^\bullet, \Delta_{top}^\bullet)$  であるが, 後者は閉区間  $[0, 1]$  からそれ自身への順序を保つ全射のなす空間 (位相はコンパクト開位相) に同相である. 従って可縮である.  $\square$

**定理 4.5** ([12]). 余単体空間  $X^\bullet$  上の McClure-Smith 積は  $\text{Tot}(X^\bullet)$  に  $\mathcal{B}$  の作用を誘導する.

*Proof.* 作用は次のように与えられる.

$$\mathcal{B}(n) \times \text{Tot}(X^\bullet)^{\times n} \rightarrow \mathcal{B}(n) \times \text{Map}_{\mathcal{TOP}\Delta}((\Delta^\bullet)^{\square n}, X^{\square n}) \rightarrow \text{Map}_{\mathcal{C}\Delta}(\Delta^\bullet, (X^\bullet)^{\square n}) \rightarrow \text{Tot}(X^\bullet).$$

二番目の射は  $\mathcal{B}(n)$  の元による引き戻しによって与えられる.  $\square$

## 5 String topology と枠付き小円盤オペラッド

前節の定理 3.11 から, 定理 1.3 の BV-代数も枠付き小円盤オペラッドによって統制されることが自然に予想される. ただし, ループ空間  $LM$  そのものにオペラッドの作用が入ることは望めないので, スペクトラという安定ホモトピー論の概念を用いる.  $\mathcal{TOP}_*$  を基点付き位相空間と基点を保つ連続写像のなす圏とする. 二つの対象  $X, Y \in \mathcal{TOP}_*$  に対して,  $X \wedge Y = X \times Y / (X \vee Y) \in \mathcal{TOP}_*$  とおく.

**定義 5.1** (スペクトラ). スペクトラム  $\{X_i, \alpha_i\}$  は基点付き空間の列  $X_0, X_1, \dots, X_i, \dots$  と基点を保つ連続写像  $\alpha_i : S^1 \wedge X_i \rightarrow X_{i+1} (i \geq 0)$  の列からなる. 二つのスペクトラ  $\{X_i, \alpha_i\}, \{Y_i, \beta_i\}$  の間の射とは,  $\mathcal{TOP}_*$  の射の列  $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i\}$  で,  $\alpha_i, \beta_i$  と交換するものことである. スペクトラの圏を  $\mathcal{SP}$  で表す. スペクトラの射  $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i\}$  が弱同値 (又は安定ホモトピー同値) であるとは, 任意の  $k \in \mathbb{Z}$  に対して,  $k$ -次の安定ホモトピー群  $\pi_k^S(X_*) = \text{colim}_i \pi_{k+i}(X_i)$  の同型を誘導することを言う. スペクトラの圏を弱同値に関して局所化して得られる圏をスペクトラのホモトピー圏といい,  $Ho(\mathcal{SP})$  と表す. また, 安定ホモロジー群  $H_k^S(X_*)$  を  $H_k^S(X_*) = \text{colim}_i H_{k+i}^S(X_i)$  で定める. 関手  $S^\infty : \mathcal{TOP}_* \rightarrow \mathcal{SP}$  を  $S^\infty(X)_i = S^i \wedge X$  によって定める.

$Ho(\mathcal{SP})$  は次の性質を持つことが知られている.

1.  $\Sigma(X_*)_i = X_{i+1}$  により定義される関手  $\Sigma : \mathcal{SP} \rightarrow \mathcal{SP}$  はホモトピー圏の同値  $\Sigma : Ho(\mathcal{SP}) \xrightarrow{\sim} Ho(\mathcal{SP})$  を誘導する.
2.  $Ho(\mathcal{SP})$  は対称モノイダル構造  $(-\otimes-)$  を持つ.

スペクトラム  $LM^{-TM} \in Ho(\mathcal{SP})$  を次の式で定める.  $e : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  を十分高い次元のユークリッド空間への  $C^\infty$ -埋め込みとし,  $\nu_e$  をその normal bundle とする.

$$LM^{-TM} = \Sigma^{-N} S^\infty(LM^{ev^* \nu_e}) \quad (ev : LM \rightarrow M \text{ evaluation})$$

次の Cohen と Jones の定理はループ積と BV-代数のスペクトラのホモトピー圏での実現について述べている.

**定理 5.2** ([11]). (1)  $LM^{-TM}$  は  $Ho(\mathcal{SP})$  において結合的モノイドの構造を持ち, この構造は Thom 同型  $H_*^S(LM^{-TM}) \cong H_{*+d}(LM) = \mathbb{H}_*$  を通してループ積を誘導する.

(2) 十分大きい  $N$  をとると, 各  $k \geq 1$  に対して,  $f\mathcal{D}_2(k) \times (LM)^{\times k}$  上の向きづけられた  $(k-1)(N-d)$  次元のベクトル束  $\tilde{\theta}_k$  と  $Ho(\mathcal{SP})$  の射

$$\Sigma^{-(k-1)N} S^\infty[(f\mathcal{D}_2(k) \times (LM)^{\times k})^{\tilde{\theta}_k}] \rightarrow LM$$

が存在し, この射は Thom 同型を通してホモロジーに定理 1.3 の BV-代数を復元する.  $\square$

## 6 Cohen-Jones の定理 2.1 の証明の概略と筆者の研究の動機

Cohen と Jones は定理 2.1 の証明に上記のスペクトラム  $LM^{-TM}$  を効果的に用いている. 彼らの証明では,  $LM^{-TM}$  と Hochschild 複体の余単体分解, つまり totalization が  $LM^{-TM}$  (又は Hochschild 複体) になるような余単体スペクトラムをとり, ループ積と Gerstenhaber 積をそれぞれの余単体分解上の積構造に置き換え, この積構造を保つような余単体分解の間の弱同値を構成している. 但し, 上記のような初等的なスペクトラの定義では対称モノイダル構造がホモトピー圏でしか存在せず, この議論を厳密に行うには不十分である. 対称モノイダル構造が (弱同値で局所化していない) 元の圏で存在するようなスペクトラの精密化として, **対称スペクトラ** (symmetric spectra) が知られている ([8]). Cohen は補完的な論文 [13] で余単体分解上の積構造を対称スペクトラの圏で実現したが, この積構造は McClure-Smith 積の条件を満たしていないため, totalization に射を誘導するか不明であり, この構造を用いて上の議論を厳密に行うことは困難である.

筆者の目的は, 予想 2.2 を証明することである. McClure と Smith は totalization に  $E_2$ -構造を誘導するような余単体対象上の構造も定式化しているので, Cohen と Jones の議論の類似によってこの予想を証明するためには, スtringトポロジーサイドの Gerstenhaber 代数を統制するような (枠付き) 小円盤オペラッドの作用を構成する必要がある. 現時点で得られている結果は, ループ積を統制するような  $A_\infty$ -オペラッドの作用の構成と, それを用いた Cohen と Jones の議論の技術的な部分の正当化である. これについて次節で述べる.

**注釈 6.1** ((対称) スペクトラの使用について). 上述の Cohen と Jones の議論を (コ) チェインを用いて行うには, 次のような良い乗法的性質を持った Poincare 双対性の精密化が必要になる:  $[C^\infty$ -チェイン  $C_*^{sm}(M)$  に初等的な交叉積を拡張するような積構造  $C_*^{sm}(M) \otimes C_*^{sm}(M) \rightarrow C_*^{sm}(M)$  が入り, さらにこの積構造とキャップ積  $C^*(M) \otimes C_*^{sm}(M) \rightarrow C_*^{sm}(M)$  が交換し,  $C_*^{sm}(M)$  と  $C^*(M)$  が  $C^*(M)$ -代数として弱同値となる.] しかし, 現時点ではこのような  $C_*^{sm}(M)$  の積も見つかっていない. 一方, 対称スペクトラの圏ではこの Poincare 双対性の精密化に相当するものが存在する (Atiyah 双対性, [13] 参照).

## 7 主定理

部分空間  $\mathcal{D}_1^{ns}(n) \subset \mathcal{D}_1(n)$  を  $\mathcal{D}_1^{ns}(n) = \{(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{D}_1(n) \mid f_i(1) < f_{i+1}(1) \forall i = 1, \dots, n-1\}$  によって定義する.  $\mathcal{D}_1^{ns} = \{\mathcal{D}_1^{ns}(n)\}$  を  $\mathcal{D}_1$  の単位, 合成積によって非対称オペラッドと見なす.  $\mathcal{D}_1^{ns}$  は明らかに  $A_\infty$ -オペラッドである. 非対称オペラッド  $\tilde{\mathcal{K}}$  を  $\tilde{\mathcal{K}}(n) = \mathcal{D}_1^{ns}(n) \times \mathcal{K}(n)$  で定める. (合成, 単位は成分ごとに入れる.) 当然  $\tilde{\mathcal{K}}$  も  $A_\infty$ -オペラッドである. 次の定理は定理 2.1 の精密化と見なせる.

**定理 7.1** ([19]). (1) 対称スペクトラの圏における  $\tilde{\mathcal{K}}$ -代数  $LM^{-\tau}$  が存在し, (ホモトピー圏に落として)  $LM^{-\tau}$  を  $Ho(SP)$  におけるモノイドと見なすと,  $LM^{-TM}$  と同型になる.

(2)  $M$  が単連結と仮定する.  $THH^*(F(M, S), F(M, S))$  を (対称スペクトラムとしての) 関数スペクトラム  $F(M, S)$  の位相的 Hochschild コホモロジーとする. このとき  $A_\infty$ -オペラッド上の代数としての弱同値

$$THH^*(F(M, S), F(M, S)) \simeq LM^{-\tau}$$

が存在する.

(1) の  $\tilde{\mathcal{K}}$ -代数の構成は技術的なので詳細は省略する. (2) の弱同値を構成するためには, McClure-Smith 積の条件をホモトピーの意味で緩めることが必要になる. 次節ではこれを説明する.

## 8 McClure-Smith 積のホモトピー版

この節では定理 7.1.(2) の証明で必要になる McClure-Smith 積の一般化について述べる. ここでは McClure-Smith 積の条件のうち,

$$d^0(x \cdot y) = (d^0 x) \cdot y, \quad d^{p+q+1}(x \cdot y) = x \cdot d^{q+1} y, \quad (d^{p+1} x) \cdot y = x \cdot d^0 y \quad (|x| = p, |y| = q)$$

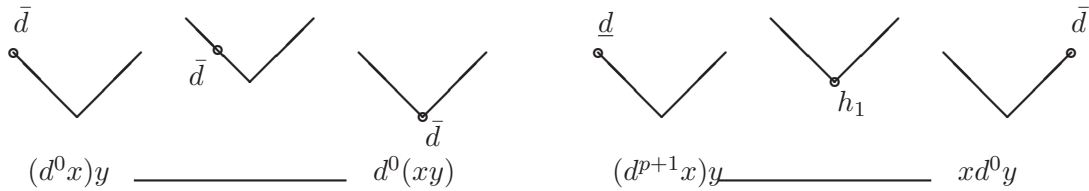


図 2:  $\mathcal{T}^c(2)$  の二つの連結成分 ( $p = |x|$ )

をホモトピーによって緩めることを考える. このためにこれらの等式に関する高次のホモトピーをパラメトライズするオペラッドを定義する必要がある. そこでまず **cofacial  $n$ -tree** という頂点や辺に記号が付いた  $n$ -tree を導入する.  $n$ -tree につく記号は  $\bar{d}, \underline{d}, h_1, \dots, h_{n-1}$  の  $n+1$  種類である.  $\bar{d}$  は first coface map  $d^0$  を表し,  $\underline{d}$  は last coface map を表す.  $h_i$  はホモトピー:

$$x_1 \cdots (\underline{d}x_i) \cdot x_{i+1} \cdots x_n \simeq x_1 \cdots x_i \cdot (\bar{d}x_{i+1}) \cdots x_n.$$

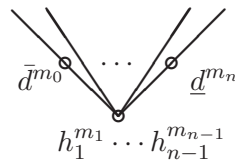
を表す. 例えば, 図 2 の各線分の両端にある元はその上の cofacial tree に対応し, 中間にある cofacial tree はその間のホモトピーを表す. 図 3 も同様に解釈される. この図では五角形の中心にある cofacial tree は五角形の辺を一周するホモトピーと恒等写像からなるホモトピーとのホモトピーを表す.

これらの記号のつき方に次のような規則を課す.

- $\bar{d}$  と  $\underline{d}$  はどの頂点についてもよい.  $\bar{d}$  (resp.  $\underline{d}$ ) は一つの頂点に (インプットの側から) 入る辺の中で最も左 (resp. 右) にあるもののみにつく.
- $h_i$  は  $(i, i+1)$ -ノードにのみつく. ここで  $(i, i+1)$ -ノードとは, アウトプットと第  $i$  インプットをつなぐ道と, アウトプットと第  $i+1$  インプットをつなぐ道の分岐点 (合流点) のことである.

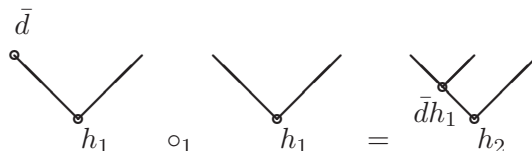
一つの頂点又は辺につく記号の個数を重複度と呼ぶ.  $\mathcal{T}^c(n)$  を cofacial  $n$ -tree の集合とする.  $\mathcal{T}^c(n)$  には半順序が入る. 例えば, 図 2, 3 において, 辺の中間に位置する cofacial tree はその辺の両端に位置するものより大きく, 五角形の中心にある cofacial tree がその成分の中では最も大きい. 実際の半順序は, これらの図に現れる関係を自然に一般化することで与えられる. ( $\mathcal{T}^c(1) = \{\bar{d}^{m_0} \underline{d}^{m_1} \mid m_0, m_1 \geq 0\} (\cong \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\times 2})$ , 半順序は自明とする.) 次の補題は  $\mathcal{T}^c(n)$  の基本的性質を述べている.

**補題 8.1** ([19]).  $n \geq 2$  とする.  $\mathcal{T}^c(n)$  の各連結成分は, 次の形の最大元を持つ.



(記号を取り去った  $n$ -tree としては, これは  $\mathcal{T}(n)$  の最大元である. またこの図で例えば, 第 1 インプットに接する辺での  $\bar{d}$  の重複度は  $m_0$  である.) この元を含む連結成分を  $\mathcal{T}^c(m_0, \dots, m_n)$  で表す. □

$\mathcal{T}^c = \{\mathcal{T}^c(n)\}$  には,  $\mathcal{T}$  と同様にオペラッドの構造を入れることができる. 例えば,



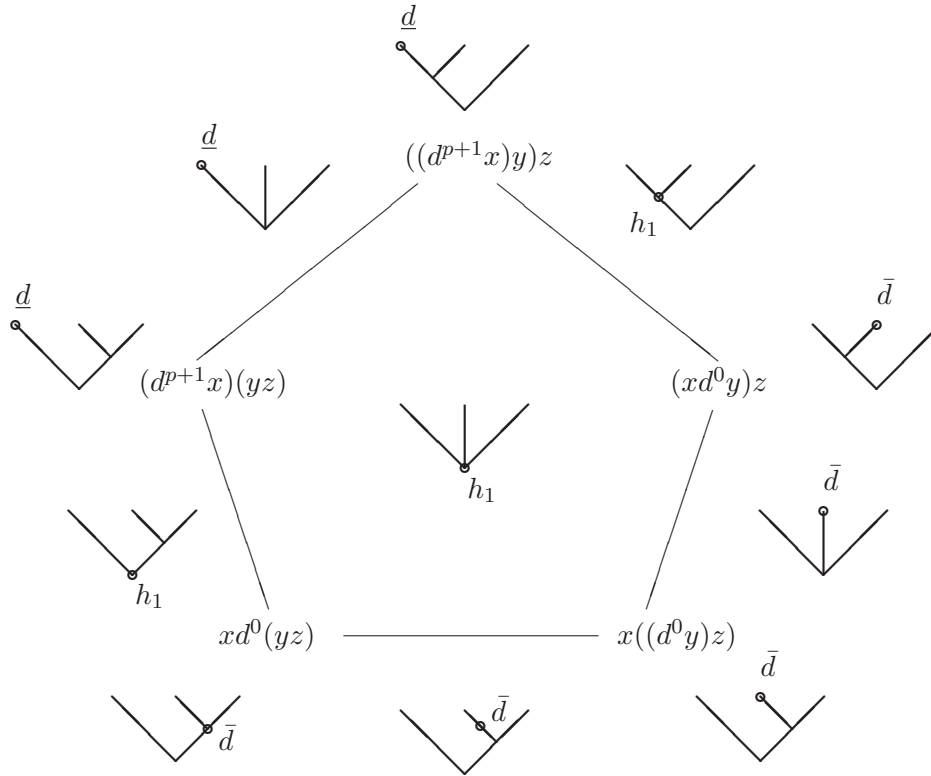


図 3:  $\mathcal{T}^c(3)$  の一つの連結成分

である.  $\mathcal{T}^c$  に関して, 順序を保つ写像の族

$$\begin{aligned} d_i^j &: \mathcal{T}^c(m_0, \dots, m_i, \dots, m_n) \longrightarrow \mathcal{T}^c(m_0, \dots, m_i + 1, \dots, m_n) \\ s_i^j &: \mathcal{T}^c(m_0, \dots, m_i, \dots, m_n) \longrightarrow \mathcal{T}^c(m_0, \dots, m_i - 1, \dots, m_n) \end{aligned}$$

を次のように定義する. ( $0 \leq i \leq n$ .  $j$  の範囲は,  $d_i^j$  に関しては,  $i = 0$  のとき  $j = 0, \dots, m_0$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  のとき,  $j = 1, \dots, m_i$ ,  $i = n$  のとき  $j = 1, \dots, m_n + 1$ .  $s_i^j$  に関しては,  $j = 0, \dots, m_i - 1$ .) まず  $d_i^j$  の定義について述べる.  $T \in \mathcal{T}^c(m_0, \dots, m_n)$  とする.  $d_0^j$  は  $T$  のアウトプットの  $\bar{d}$  の重複度を 1 上げる写像とする.  $d_0^j$  ( $1 \leq j \leq m_n$ ) を定義するために, アウトプットと第 1 インプットをつなぐ  $T$  内の道を考える. アウトプットから始めて, この道上にある  $\bar{d}$  の個数を重複度込みで数え上げたとき,  $d_0^j$  は  $j$  番目の  $\bar{d}$  のある頂点又は辺における  $\bar{d}$  の重複度を 1 上げる写像として定義する.

$1 \leq i \leq n-1$  のときは, 第  $i$  インプットと第  $i+1$  インプットをつなぐ道を考える. 第  $i$  インプットから  $(i, i+1)$  ノードの手前までは  $\underline{d}$  を重複度込みで数え,  $(i, i+1)$ -ノードでは  $h_i$  の個数を数え, その後第  $i+1$  インプットまでは  $\bar{d}$  を数える.  $d_i^j$  を  $j$  番目の記号の重複度を 1 上げる写像とする.

$d_n^j$  を定義するには, 第  $n$ -インプットとアウトプットをつなぐ道を使う. 第  $n$ -インプットから数えて  $j$ -番目の  $\underline{d}$  の重複度を 1 上げる写像として  $d_n^j$  を定義する.  $d_n^{m_n+1}$  はアウトプットの  $\underline{d}$  の重複度を 1 上げる写像とする.

$s_i^j$  は  $d_i^j$  の定義のときに用いた道の  $j+1$  番目の記号の重複度を 1 下げる写像とする.

**定義 8.2** ([19]).  $CK(n)$  によって  $\mathcal{T}^c(n)$  の幾何学的実現を表す.  $CK = \{CK(n)\}$  に  $\mathcal{T}^c$  から定まる非対称な位相的オペラッドの構造を与える. また, 部分空間  $CK(m_0, \dots, m_n) \subset CK(n)$  を

$\mathcal{T}^c(m_0, \dots, m_n)$  に対応する連結成分とし,

$$\begin{aligned} d_i^j &: \mathcal{CK}(m_0, \dots, m_i, \dots, m_n) \longrightarrow \mathcal{CK}(m_0, \dots, m_i + 1, \dots, m_n) \\ s_i^j &: \mathcal{CK}(m_0, \dots, m_i, \dots, m_n) \longrightarrow \mathcal{CK}(m_0, \dots, m_i - 1, \dots, m_n). \end{aligned}$$

を上で定義した順序を保つ写像から自然に誘導される写像とする.

このオペラッド  $\mathcal{CK}$  と写像の族  $\{d_i^j, s_i^j\}$  を用いて次のように圏  $\mathcal{TOP}^\Delta$  上のモナド  $\overline{\mathcal{CK}}$  を次のように定める. ここでモナドとは, 関手  $\overline{\mathcal{CK}}: \mathcal{TOP}^\Delta \rightarrow \mathcal{TOP}^\Delta$  と二つの自然変換  $\eta: \text{id} \Rightarrow \overline{\mathcal{CK}}$ ,  $\mu: \overline{\mathcal{CK}} \circ \overline{\mathcal{CK}} \rightarrow \overline{\mathcal{CK}}$  からなる組  $(\overline{\mathcal{CK}}, \mu, \eta)$  で, 結合律や単位律という公理を満たすものことである.

このモナドを定義するために, まず, 各  $n \geq 1$  に関して関手  $\overline{\mathcal{CK}}_n: \mathcal{TOP}^{\Delta \times n} \rightarrow \mathcal{TOP}^\Delta$  を定義する.  $X_1, \dots, X_n$  を余単体空間とする.  $l$  次の空間  $\overline{\mathcal{CK}}_n(X_1, \dots, X_n)^l$  を次のように定める.

$$\overline{\mathcal{CK}}_n(X_1, \dots, X_n)^l = \bigsqcup \mathcal{CK}(m_0, \dots, m_n) \times X_1^{p_1} \times \dots \times X_n^{p_n} / \sim.$$

ここで, 非交和は  $m_0 + \dots + m_n + p_1 + \dots + p_n = l$  を満たす, 非負整数の列  $(m_0, \dots, m_n; p_1, \dots, p_n)$  を走る. また,  $\sim$  は,

$$\begin{aligned} (u \circ_i \bar{d}, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &\sim (u, x_1, \dots, d^0 x_i, \dots, x_n), \\ (u \circ_i \underline{d}, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &\sim (u, x_1, \dots, d^{p_i+1} x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

( $u \in \mathcal{CK}(n), x_j \in X_j^{p_j}, 1 \leq i \leq n.$ ) によって生成される同値関係である. 余単体作用素  $\{d^j, s^j\}$  は  $\mathcal{CK}$  の作用素と,  $X_i$  の作用素を交互に使って定義する. より正確に述べると,  $\overline{\mathcal{CK}}_n(X_1, \dots, X_n)$  の余単体作用素は次式で定義される.

$$\begin{aligned} &d^j(u, x_1, \dots, x_n) \\ &= \begin{cases} (d_0^j u, x_1, \dots, x_n) & (0 \leq j \leq m_0) \\ (d_i^{j_1} u, x_1, \dots, x_n) & (m_{\leq i-1} + p_{\leq i-1} + 1 \leq j \leq m_{\leq i} + p_{\leq i-1}, j_1 = j - m_{\leq i-1} - p_{\leq i-1}) \\ (u, x_1, \dots, d^{j_2} x_i, \dots, x_n) & (m_{\leq i} + p_{\leq i-1} + 1 \leq j \leq m_{\leq i} + p_{\leq i}, j_2 = j - m_{\leq i} - p_{\leq i-1}) \\ (d_n^{j_3} u, x_1, \dots, x_n) & (m_{\leq n-1} + p_{\leq n} \leq j \leq m_{\leq n} + p_{\leq n} + 1, j_3 = j - m_{\leq n-1} - p_{\leq n}) \end{cases} \end{aligned}$$

( $|x_i| = p_i, u \in \mathcal{CK}(m_0, \dots, m_n), m_{\leq i} = m_0 + \dots + m_i$  など).  $s^j$  も同様に定める. 最後に,

$$\overline{\mathcal{CK}}(X) = \bigsqcup_{n \geq 1} \overline{\mathcal{CK}}_n(X, \dots, X).$$

と置いて, 自然変換  $\eta: \text{id} \Rightarrow \overline{\mathcal{CK}}, \mu: \overline{\mathcal{CK}} \circ \overline{\mathcal{CK}} \Rightarrow \overline{\mathcal{CK}}$  は  $\mathcal{CK}$  の単位, 合成積から自然に定まるものとする. これでモナド  $\overline{\mathcal{CK}}$  の定義は完了した.

$\Delta_{top}^\bullet$  の projective cofibrant replacement  $\tilde{\Delta}^\bullet$  ([12] 参照) をとり, 余単体空間  $X^\bullet$  に対して  $\widetilde{\text{Tot}}(X^\bullet) = \text{Map}(\tilde{\Delta}^\bullet, X^\bullet) \in \mathcal{TOP}$  と置く. 非対称な位相的オペラッド  $\mathcal{CB}$  を  $\mathcal{CB}(n) = \text{Map}(\tilde{\Delta}_{top}^\bullet, \overline{\mathcal{CK}}_n(\tilde{\Delta}^\bullet, \dots, \tilde{\Delta}^\bullet))$  によって定める. (単位, 合成積は  $\mathcal{CK}$  のそれから自然に誘導されるものとする. 4 節参照)

**定理 8.3** ([19]). (1)  $\mathcal{CB}$  は  $A_\infty$ -オペラッドである.

(2) 余単体空間  $X^\bullet$  への  $\overline{\mathcal{CK}}$  の作用は,  $\widetilde{\text{Tot}}(X^\bullet)$  に  $\mathcal{CB}$  の作用を誘導する.

ここで, モナド  $\overline{\mathcal{CK}}$  の余単体空間への作用とは,  $\mathcal{TOP}^\Delta$  の射  $\overline{\mathcal{CK}}(X^\bullet) \rightarrow X^\bullet$  で,  $\mu, \eta$  と適当な意味で交換するものである. 筆者は [19] で  $LM^{-\tau}$  の余単体分解と,  $THH^*(F(M_+, S), F(M_+, S))$  の余単体分解の弱同値で,  $\overline{\mathcal{CK}}$  の作用を保つ物を構成した. 定理 8.3 により, この同値から  $A_\infty$ -代数の同値が得られ主定理の証明が完結する.



## 参考文献

- [1] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) 78 1963 267-288.
- [2] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H -spaces. I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292; *ibid.* 108 1963 293-312.
- [3] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. viii+175 pp.
- [4] F. R. Cohen, T. J. Lada, J. P. May, *The homology of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 533. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. vii+490 pp.
- [5] J. P. May,  *$E_\infty$  ring spaces and  $E_\infty$  ring spectra* With contributions by Frank Quinn, Nigel Ray, and Jorgen Tornehave. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 577. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. 268 pp.
- [6] C. P. Boyer, B. M. Mann, *Monopoles, nonlinear  $\sigma$  models, and two-fold loop spaces*, Comm. Math. Phys. 115 (1988), no. 4, 571-594.
- [7] M. Chas, D. Sullivan, *String Topology*, preprint, arXiv:math/9911159.
- [8] M. A. Mandell, J. P. May, S. Schwede, B. Shipley, *Model categories of diagram spectra*, Proc. London Math. Soc. (3) 82 (2001), no. 2, 441-512.
- [9] M. A. Mandell,  *$E_\infty$  algebras and  $p$ -adic homotopy theory*, Topology 40 (2001), no. 1, 43-94.
- [10] J. E. McClure, J. H. Smith, *A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture*, Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000), 153-193, Contemp. Math., 293, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [11] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, *A homotopy theoretic realization of string topology*, Math. Ann. 324 (2002), no. 4, 773-798.
- [12] J. E. McClure; J. H. Smith, *Cosimplicial objects and little  $n$ -cubes I*, Amer. J. Math. 126 (2004), no. 5, 1109-1153.
- [13] R. L. Cohen, *Multiplicative properties of Atiyah duality* Homology Homotopy Appl. 6 (2004), no. 1, 269-281.
- [14] S. Kallel, P. Salvatore, *Rational maps and string topology*, Geom. Topol. 10 (2006), 1579-1606.
- [15] R. Budney, *Little cubes and long knots*, Topology 46 (2007), no. 1, 1-27.
- [16] M. Goresky, N. Hingston, *Loop products and closed geodesics*, Duke Math. J. 150 (2009), no. 1, 117-209.
- [17] D. Chataur, Jean-Francois Le Borgne, *Homology of spaces of regular loops in the sphere*, Algebr. Geom. Topol. 9 (2009), no. 2, 935-977.
- [18] L. Menichi, *String topology for spheres*, With an appendix by Gerald Gaudens and Menichi. Comment. Math. Helv. 84 (2009), no. 1, 135-157.
- [19] S. Moriya,  *$A_\infty$ -structure in string topology* in preparation.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University,  
 Kyoto, 606-8502, Japan.  
 E-mail adress: moriyasy@math.kyoto-u.ac.jp

# 特異点論を用いたドシッター空間内の空間的部分多様体の幾何学

加世堂 公希 (北海道大学) \*

## 1 Introduction

We argue the differential geometry of spacelike submanifolds in de Sitter space and geometrical correspondence of singularities of map germs related to the spacelike submanifolds. Classical example is a Gauss map of surface in Euclidean three space. Let  $U \subset \mathbb{R}^2$  be an open subset and  $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  be a regular surface (an embedding map), Gauss map  $G : U \rightarrow S^2$  is defined by the unit normal vector field of the surface. The geometric meanings of singularities of the Gauss map are studied by many researchers. For each point  $p = \mathbf{X}(u)$  on the surface  $M = \mathbf{X}(U)$ , the singular set of the Gauss map coincides with the set of parabolic points, where the Gauss-Kronecker curvature  $K(u)$  vanishes.

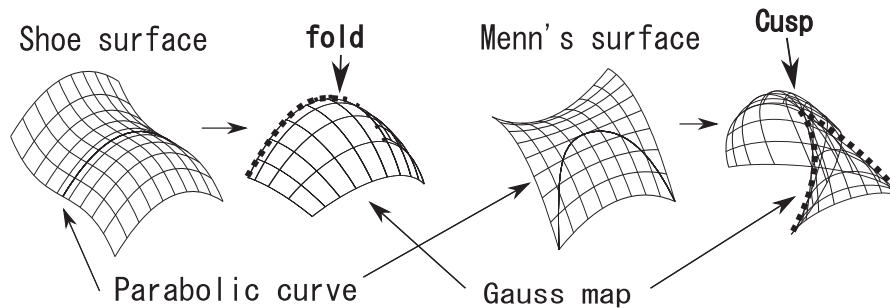


Figure: Singularities of Gauss map germs on surface in  $\mathbb{R}^3$

Let  $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  be a map germ, we say that  $f$  has a *fold* (or *cusp*) singularity at the origin if  $f$  is  $\mathcal{A}$ -equivalent to the map germs  $g_1(u, v) = (u, v^2)$  or  $g_2(u, v) = (u, v^3 - uv)$  respectively. There are two good examples of fold and cusp singularities in [2]. Let  $\psi_i : (-1, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  be surfaces given by

$$\psi_1(u, v) = (u^3 - v^2, u, v). \quad (\text{Shoe surface})$$

$$\psi_2(u, v) = (u^2v - v^2, u, v). \quad (\text{Menn's surface})$$

---

\*This work was supported by the JSPS International Training Program(ITP).

The Gauss map of  $\psi_1$  has a fold singularity at the origin. Singularity of Gauss map of  $\psi_2$  has a cusp singularity at the origin and bifurcates two fold singular curves. It is known that the singularities of Gauss map generically appear only folds or cusps. (see [3])

The singular type of the Gauss map is also related to *asymptotic directions* on the surface. Two distinct asymptotic directions are defined on hyperbolic domain  $\{\mathbf{X}(u) \in M \mid K(u) < 0\}$  and one direction is defined on parabolic domain  $\{\mathbf{X}(u) \mid K(u) = 0\}$ . By drawing asymptotic curves along with the asymptotic directions, we may observe that each asymptotic curves are transversal to the parabolic curve at the fold point and tangent at the swallowtail point.

In this talk, we consider differential geometry of lightlike normal of spacelike submanifold in de Sitter space and describe geometrical property of lightcone Gauss maps and lightlike surfaces. We argue the case of spacelike surfaces in 4-dimensional de Sitter space. We also describe the differential geometry of spacelike surfaces of codimension three in de Sitter 5-space. Finally we briefly describe canal hypersurfaces by using pseudo orthonormal frames on spacelike submanifolds of codimension at least two. We construct spacelike and timelike canal hypersurfaces and describe difference of them.

## 2 Minkowski space and de Sitter space

Minkowski space is defined as a vector space with a metric of index one. It is known that de Sitter space is a Lorentzian space form with a positive curvature and it is defined as a pseudo sphere in Minkowski space. The Lorentzian group  $SO(n, 1)$  acts transitively on the de Sitter space. Let  $\mathbb{R}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x = (x_0, \dots, x_n)\}$  be a vector space with a pseudo scalar product  $\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$  and a pseudo norm  $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ . The space  $(\mathbb{R}_1^{n+1}, \langle, \rangle)$  is called by a *Minkowski  $(n + 1)$ -space*. We say that a vector  $x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$  is spacelike, timelike or lightlike if  $\langle x, x \rangle$  is positive, negative or zero.

There are three types of pseudo-spheres in the Minkowski space. They are hyperbolic space  $H^n(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1\}$ , de Sitter space  $S_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = +1\}$  and lightcone  $LC^* = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \mid \langle x, x \rangle = 0\}$ . The differential geometry on Minkowski space, hyperbolic space and de Sitter space is also studied by several people. Recently, Izumiya, Pei and Sano [6] investigated differential geometry of the hypersurfaces in hyperbolic space. They introduced the notion of *Lightcone Gauss image*. The Lightcone Gauss image is defined by the lightlike normal direction of the hypersurface. They showed that totally umbilic hypersurface with lightcone Gauss-Kronecker curvature zero in the hyperbolic space is a part of *hyperhorosphere*. They also showed that singularities of lightcone Gauss image are generically classified by *cuspidal edges* and *swallowtails* by applying a framework of the theory of Legendre singularity. Here, a map germ  $f : (\mathbb{R}^2, u_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$  has

a cuspidal edge (or a swallowtail) singularity at  $u_0$  if it is  $\mathcal{A}$ -equivalent to the map germ  $g_i : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$  with  $g_1(u) = (u_1, u_2^2, u_2^3)$  or  $g_2(u) = (3u_1^4 + u_1^2 u_2, 4u_1^3 + 2u_1 u_2, u_2)$  respectively.

Let  $\mathbf{X} : U(\subset \mathbb{R}^{n-r}) \rightarrow S_1^n$  be an embedding map and denote its image by  $M \subset S_1^n$ . We say that  $M$  or  $\mathbf{X}$  is *spacelike* if  $M$  has an induced Riemannian metric. When  $r = 1$  we may consider the extrinsic differential geometry on  $M$  with respect to the lightlike normal direction which is an analogous tool of [6]. It is called by a *lightcone Gauss image*  $\mathbb{L}^\pm(u)$ . We respectively define a Gauss-Kronecker curvature and principal curvatures as the determinant and the eigenvalues of the differential map of the lightcone Gauss image.

Let  $v \neq \mathbf{0}$  be a vector in  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  and  $c \in \mathbb{R}$ ,  $HP(v, c) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = c\}$  is a hyperplane in the Minkowski space. We call  $HP(v, c) \cap S_1^n$  by a *hyperquadric* in de Sitter space. We say that a spacelike hypersurface is *totally umbilic* if all principal curvatures coincide at any point on the hypersurface. The totally umbilic hypersurfaces in  $S_1^n$  are given by the hyperquadrics  $HP(v, c) \cap S_1^n$  and topologically classified by three types.

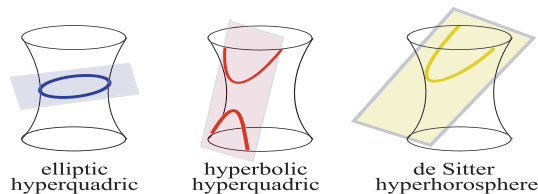


Figure: Totally umbilic hypersurfaces

**Proposition 2.1** ([10]). Spacelike hypersurface  $M$  is totally umbilic and  $K(u) \equiv 0$  if and only if  $M$  is a part of a de Sitter hyperhorosphere  $HS(v, 1) = \{x \in S_1^n \mid \langle x, v \rangle = 1\}$  for some lightlike vector  $v$ . In this case the lightcone Gauss images is a constant map  $\mathbb{L}^\pm(u) \equiv v$ .

In [10] we investigate the singularity of Lightcone Gauss images. In this case the singularity corresponds to the parabolic sets on  $M$ . This situation is similar to the case of hyperbolic space. By applying the framework of the theory of Legendre singularity to our case, we figure out that the singular type also generically appears cuspidal edge and swallowtail.

### 3 Spacelike submanifold of codim 2 in $S_1^n$

We now consider spacelike submanifold  $M$  of codimension two. Since the normal space of  $M$  has Lorentz metric of index one, we may determine two lightlike normals at each point on  $M$ . Let  $U \subset \mathbb{R}^{n-2}$  be an open subset and  $\mathbf{X} : U \rightarrow S_1^n$  be a spacelike submanifold in de Sitter space. In this case we may choose a timelike normal  $\mathbf{n}^T$  and a spacelike normal  $\mathbf{n}^S$  at each point  $p \in M$ , then  $\mathbf{n}^T \pm \mathbf{n}^S$  are lightlike. For any lightlike vector

$v = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  we normalize  $\tilde{v} = (1, v_1/v_0, \dots, v_n/v_0)$ . Since Lorentzian 2-space has only two lightlike directions, therefore the normalized lightlike vectors  $\widetilde{\mathbf{n}^T \pm \mathbf{n}^S}$  are independent from the choice of  $\mathbf{n}^T$  and  $\mathbf{n}^S$ .

Let  $S_+^{n-1} = \{x \in LC^* \mid x_0 = 1\}$  be an  $(n-1)$ -sphere in the lightcone. We call a map  $\widetilde{\mathbb{L}}^\pm = \widetilde{\mathbf{n}^T \pm \mathbf{n}^S} : U \longrightarrow S_+^{n-1}$  as a *lightcone Gauss map* of  $M$ . The lightcone Gauss map is an analogous tool to the study on the Minkowski space [8].

For each  $p \in M$ , a *shape operator*  $S_p^\pm := -\pi^t \circ d\widetilde{\mathbb{L}}_p^\pm$  on  $T_p M$  has real eigenvalues  $\{\tilde{\kappa}_i^\pm(p)\}_{i=1}^{n-2}$ , we call them by *normalized lightcone principal curvatures* and their multiplication  $\tilde{K}_\ell^\pm(u) = \det(S_p^\pm)$  by a *normalized lightcone Gauss-Kronecker curvature*. In this case parabolic point means a point with  $\tilde{K}_\ell^\pm(u) = 0$  and umbilic point means a point whose normalized principal curvatures  $\tilde{\kappa}_i^\pm(p)$  coincide.

### 3.1 Lightlike hypersurface

The notion of lightlike surface of the spacelike curve in  $S_1^3$  is firstly introduced by Fusho and Izumiya [5]. We consider general dimension case of their study by using an idea of [8]. Let  $\mathbf{X}$  be a spacelike submanifold and  $\widetilde{\mathbb{L}}^\pm(u)$  be lightlike normals. A ruled surface map  $LH_M^\pm(u, \mu) = \mathbf{X}(u) + \mu\widetilde{\mathbb{L}}^\pm(u) : U \times \mathbb{R} \longrightarrow S_1^n$  is called by a *lightlike hypersurface* of  $M$ . We define a family of functions  $G : U \times S_1^n \longrightarrow \mathbb{R}$  on a spacelike submanifold  $M$  by

$$G(u, \lambda) = \langle \mathbf{X}(u) - \lambda, \mathbf{X}(u) - \lambda \rangle,$$

where  $p = \mathbf{X}(u)$ . We call  $G$  a *Lorentzian distance squared function* on the spacelike submanifold  $M$ . For any  $\lambda_0 \in S_1^n$  we write  $g_{\lambda_0}(u) = G(u, \lambda_0)$ .

**Proposition 3.1** ([11]). Let  $p_0 = \mathbf{X}(u_0) \neq \lambda_0$  then

- (1)  $g_{\lambda_0}(u_0) = \partial g_{\lambda_0}(u_0)/\partial u_i = 0$  ( $1 \leq i \leq n-2$ ) if and only if  $\lambda_0 = LH_M^\pm(u_0, \mu_0)$  for some  $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , in other words, the discriminant set of  $G$  is the image of  $LH_M^\pm$ .
- (2) Suppose that  $\lambda_0 = LH_M^\pm(u_0, \mu_0)$  then  $\det \text{Hess}(g_{\lambda_0})(u_0) = 0$  if and only if  $-1/\mu_0$  is one of the non-zero normalized lightcone principal curvatures  $\tilde{\kappa}_i^\pm(p_0)$ .

The statement (2) of the above proposition asserts that the singular point of  $LH_M^\pm$  indicates some non-zero principal curvatures. If all principal curvatures are vanishing at  $p \in M$  then  $LH_M^\pm(u, \mu)$  have no singular point for all  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . In this case we call such a point by a *flat point*. We now follow [6] and apply the framework of the theory of Legendre singularity.

**Proposition 3.2** ([11]). For any point  $(u, \lambda) \in \Delta^*G^{-1}(\mathbf{0})$ ,  $G$  is a Morse family of hypersurfaces around  $(u, \lambda)$ .

We have the Legendrian immersion germ  $\mathcal{L}_G^\pm : \Sigma_*(G) \longrightarrow PT^*(S_1^n)$  where  $\Sigma_*(G) = (\Delta^*G)^{-1}(0) = \{(u, \lambda) \in U \times S_1^n \mid \lambda = LH_M^\pm(u, \mu), \mu \in \mathbb{R}\}$ . Wave front set of  $\mathcal{L}_G^\pm$  is the image of  $LH_M^\pm$ . In this case stability condition for  $\mathcal{L}_G^\pm$  respectively corresponds to  $\mathcal{K}$ -versal condition for the deformation  $G$  of the function germ  $g_\lambda$ . (see [6] and [1, 15])

We consider the contact between submanifolds and spacelike submanifolds. We call a set  $LC_{\lambda_0} \cap S_1^n$  by a *de Sitter lightcone*. The following proposition is generalization of Proposition 4.1 in [7].

**Proposition 3.3** ([11]). Let  $\lambda_0 \in S_1^n$  and  $M$  dose not have any flat points, then  $M \subset LC_{\lambda_0} \cap S_1^n$  if and only if  $\lambda_0$  is an isolated singular value of the lightlike hypersurface  $LH_M^\pm$  and  $LH_M^\pm(U \times \mathbb{R}) \subset LC_{\lambda_0} \cap S_1^n$ .

We now consider the contact between submanifolds due to [14]. Let  $X_i$  and  $Y_i$  ( $i = 1, 2$ ) be submanifolds of  $\mathbb{R}^n$  with  $\dim X_1 = \dim X_2$  and  $\dim Y_1 = \dim Y_2$ . We say that *contact type* of  $(X_i, Y_i)$  at  $y_i$  is equivalent (we write  $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$ ) if there is a diffeomorphism  $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$  such that  $\Phi(X_1) = X_2$  and  $\Phi(Y_1) = Y_2$ .

**Theorem 3.4** ([14]). Let  $g_i : (X_i, x_i) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, y_i)$  and  $f_i : (\mathbb{R}^n, y_i) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$  be immersion and submersion germs with  $(Y_i, y_i) = (f_i^{-1}(\mathbf{0}), y_i)$ . Then  $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$  if and only if  $f_1 \circ g_1$  and  $f_2 \circ g_2$  are  $\mathcal{K}$ -equivalent.

Let  $f(x) = \langle x - \lambda_0, x - \lambda_0 \rangle$  and  $g(u) = \mathbf{X}(u)$  then the contact type between  $M$  and  $LC_{\lambda_0} \cap S_1^n$  determined by  $\mathcal{K}$ -equivalent class of  $g_\lambda = (f \circ g)(u)$ . In fact,  $LC_{\lambda_0} \cap S_1^n$  is tangent to  $M$  at  $p_0 = \mathbf{X}(u_0)$ . We call  $LC_{\lambda_0^\pm} \cap S_1^n$  a *tangent lightcone* of  $M$  at  $p_0$ .

**Theorem 3.5** ([11]). Let  $\mathbf{X}_i : (U, u_i) \longrightarrow (S_1^n, p_i)$  (for  $i = 1, 2$ ) be spacelike submanifold germs such that the corresponding Legendrian immersion germs are Legendrian stable. Then the following conditions are equivalent:

- (1) Lightlike hypersurface germs  $LH_{M,1}^\pm$  and  $LH_{M,2}^\pm$  are  $\mathcal{A}$ -equivalent.
- (2) Lorentzian distance squared function germs  $G_1$  and  $G_2$  are  $\mathcal{P}$ - $\mathcal{K}$ -equivalent.
- (3)  $K(\mathbf{X}_1(U), LC_{\lambda_1^\pm}; p_1) = K(\mathbf{X}_2(U), LC_{\lambda_2^\pm}; p_2)$ .

## 3.2 Lightcone Gauss map

Let  $H : U \times S_+^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$  be a family of *lightcone height function* given as  $H(u, v) = \langle X(u), v \rangle$ . For  $v \in S_+^{n-1}$  we write  $h(u) = H(u, v)$ . We may also argue  $\tilde{\mathbb{L}}^\pm$  and  $H$  similarly to the above argument.

**Proposition 3.6** ([11]). Let  $(u_0, v_0) \in U \times S_+^{n-1}$  then we have the following assertions:

- (1)  $H(u_0, v_0) = H_{u_i}(u_0, v_0) = 0$  ( $i = 1, \dots, n - 2$ ) if and only if  $v_0 = \tilde{\mathbb{L}}^\pm(u_0)$ .
- (2) Suppose that  $v_0 = \tilde{\mathbb{L}}^\pm(u_0)$  then  $\det \text{Hess}(h_{v_0})(u_0) = 0$  if and only if  $\tilde{K}_\ell^\pm(u_0) = 0$ .
- (3)  $H$  is a Morse family of hypersurfaces around  $(u, v) \in \Delta^* H^{-1}(0)$ .

If  $v_0 = \tilde{\mathbb{L}}^\pm(u_0)$ , a submanifold  $HP(v_0, 0) \cap S_1^n$  is tangent to  $M$  at  $p_0 = \mathbf{X}(u_0)$ , we call  $LC_{v_0^\pm}$  a *tangent lightlike cylinder* of  $M$  at  $p_0$ .

**Theorem 3.7** ([11]).  $\mathbf{X}_i : (U, u_i) \longrightarrow (S_1^n, p_i)$  ( $i = 1, 2$ ) be spacelike submanifold germs and  $v_i = \tilde{\mathbb{L}}^\pm(u_i)$ . If the corresponding Legendrian immersion germs generated from  $H_i$  are Legendrian stable. Then the following conditions are equivalent:

- (1) Legendrian immersion germs  $\mathcal{L}_1^\pm$  and  $\mathcal{L}_2^\pm$  are Legendrian equivalent.
- (2) Lightcone height function germs  $H_1$  and  $H_2$  are  $\mathcal{P}$ - $\mathcal{K}$ -equivalent.
- (3)  $K(\mathbf{X}_1(U), HP(v_1, 0) \cap S_1^n; p_1) = K(\mathbf{X}_2(U), HP(v_2, 0) \cap S_1^n; p_2)$ .

### 3.3 On spacelike surface of codim 2 in $S_1^4$

We now consider the spacelike surface in de Sitter four space. For the generic spacelike surfaces, the singular types of lightcone Gauss map  $\tilde{\mathbb{L}}^\pm(u)$  appear cuspidal edges ( $\mathcal{A}_2$ -type) and swallowtails. ( $\mathcal{A}_3^\pm$ -type) On the other hand, the lightlike hypersurface  $LH_M^\pm(u, \mu)$  has  $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3^\pm, \mathcal{A}_4$  and  $\mathcal{D}_4^\pm$ -type singularities.

**Theorem 3.8** ([11]). Suppose that  $n = 4$  then the singularities of the lightlike hypersurface are generically classified by  $\mathcal{A}_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ) and  $\mathcal{D}_4^\pm$  types. Moreover,  $\mathcal{D}_4^\pm$  type corresponds to umbilic points of the spacelike submanifold.

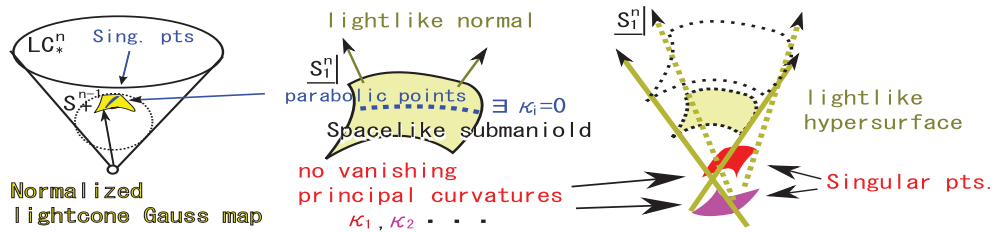


Figure: Lightlike hypersurface and spacelike surface

Let  $h_{v_0}^{-1}(0), g_{\lambda_0}^{-1}(0)$  be zero level sets of the height function and Lorentzian distance squared function. We remark that the diffeomorphism types of  $h_{v_0}^{-1}(0), g_{\lambda_0}^{-1}(0)$  at the origin are invariant under the  $\mathcal{K}$ -equivalence of the function germs  $h_{v_0}$  and  $g_{\lambda_0}$ .

## 4 Spacelike surface of codim 3 in $S_1^5$

Spacelike surface  $M$  in  $S_1^5$  has a family of lightlike directions for any point  $p \in M$ , however, we have a problem of geometrical correspondence of singularities of lightcone Gauss maps. Let  $U \subset \mathbb{R}^2$  be an open subset and  $\mathbf{X} : U \rightarrow S_1^5$  be a spacelike hypersurface of codimension three. Let  $\mathbf{n}_0^T, \mathbf{n}_1^S, \mathbf{n}_2^S : U \rightarrow NM$  be timelike and spacelike orthonormal sections on  $M$ . We define a map  $\mathbf{e} : U \times S^1 \rightarrow LC^{*5}$  and  $\bar{\mathbf{e}} : U \times S^1 \rightarrow S_+^4$  by

$$\mathbf{e}(u, \theta) = \mathbf{n}_0^T(u) + \cos \theta \mathbf{n}_1^S(u) + \sin \theta \mathbf{n}_2^S(u), \quad \bar{\mathbf{e}}(u, \theta) = \tilde{\mathbf{e}}(u, \theta).$$

If the normal sections are parallel then we may define a shape operator  $S_p(\mathbf{n})$  with respect to the lightlike normal direction  $\mathbf{n} = \mathbf{e}(u, \theta)$  by

$$S_p(\mathbf{n}) := d_u \bar{\mathbf{e}}(u, \theta),$$

and the second fundamental by  $h(\mathbf{n})_{ij}(u) = \langle \mathbf{X}_{ij}(u), \mathbf{e}(u, \theta) \rangle = -\langle \mathbf{X}_i(u), \mathbf{e}_j(u, \theta) \rangle$ .

Let  $\mathbf{n}_i$  be the normal section on  $M$ , we say that  $\mathbf{n}_i$  is *parallel* if  $d_u \mathbf{n}_i(T_u U) \subset T_p M$  for any  $u \in U$  and  $p = \mathbf{X}(u)$ . We have the following proposition:

**Proposition 4.1.** If there are parallel normal sections  $\mathbf{n}_0^T, \mathbf{n}_1^S, \mathbf{n}_2^S$  on  $M$  then

$$\text{rank } d\bar{\mathbf{e}}(u_0, \theta_0) = 1 + \text{rank Hess } h_{v_0}(u_0),$$

where  $v_0 = \bar{\mathbf{e}}(u_0, \theta_0)$ . The value 1 of the right hand side of the above formula comes from the vector  $\partial \mathbf{e}(u_0, \theta_0) / \partial \theta$ .

We have a question: *If we don't assume the parallel condition, then the rank of Hesse matrix Hess  $h_{v_0}$  and the differential map  $d\bar{\mathbf{e}}(u_0, \theta_0)$  are related?* That seems to be negative.

**Proposition 4.2.** Let  $H : U \times S_+^4 \rightarrow \mathbb{R}$  be an  $S_+^4$ -height function defined by  $H(u, v) = \langle \mathbf{X}(u), v \rangle$  then,

- (1)  $H(u, v) = H_{u_i}(u, v) = 0$  for  $i = 1, 2$  if and only if  $v = \bar{\mathbf{e}}(u, \theta)$  for some  $(u, \theta) \in U \times S_+^1$ .
- (2)  $H$  is a Morse family of hypersurfaces.

**Proposition 4.3.** We have the following formulas

$$\text{rank } d\bar{\mathbf{e}}(u_0, \theta_0) - \text{rank Hess } h_{v_0}(u_0) = 1 \text{ or } 2, \quad (1)$$

$$\text{rank } d\bar{\mathbf{e}}(u_0, \theta_0) \geq 1. \quad (2)$$

Therefore we have following possibilities of the ranks:

$$(\text{rank Hess } h_{v_0}(u_0), \text{rank } d\bar{\mathbf{e}}(u_0, \theta_0)) = (2, 3), (1, 3), (1, 2), (0, 2), (0, 1).$$



## 5 Canal hypersurfaces of spacelike submanifold

For higher codimension case, we need to consider the arbitrary normals of the spacelike submanifold. The *canal surface* in the Euclidean three space is given by the family of circles with fixed radii lying the normal space of the regular curve and its typical example is a *torus*. In this section we describe differential geometry of canal hypersurfaces and their geometrical correspondence with spacelike submanifolds.

In [9] they introduced an analogous notion of canal surface and studied the differential geometry of submanifolds in the hyperbolic space. We may consider the *spacelike* and *timelike* canal surface in de Sitter space and study their geometrical relation with the original submanifold  $M$ . We consider the two types of canal hypersurfaces respectively in [12] and [13] and study the singularities of some maps which are related to the canal hypersurfaces.

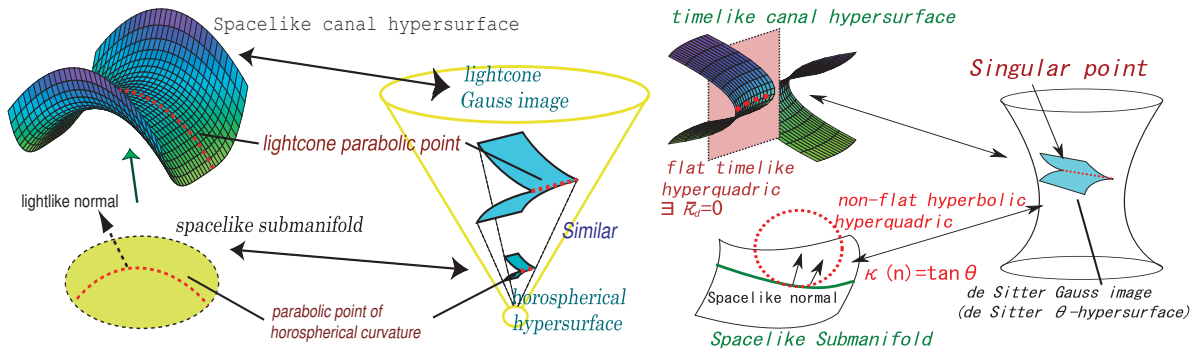


Figure: Spacelike and timelike canal hypersurfaces and their geometrical correspondence

Spacelike canal hypersurface  $\bar{\mathbf{X}}_\theta : V(\subset U \times H^{r-1}(-1)) \rightarrow S_1^n$  is given by  $\bar{\mathbf{X}}_\theta(u, \mu) = \cosh \theta \mathbf{X}(u) + \sinh \theta \mathbf{e}(u, \mu)$  and timelike canal hypersurface  $\bar{\mathbf{X}}_\theta^t : V \times S_1^{r-1} \rightarrow S_1^n$  is given by  $\bar{\mathbf{X}}_\theta^t(u, \mu) = \cos \theta \mathbf{X}(u) + \sin \theta \mathbf{e}(u, \mu)$  where  $|\theta| > 0$  is sufficiently small and  $\mathbf{e}(u, \mu)$  is generated by the parallel orthonormal sections of  $M$ . The lightcone Gauss image of spacelike canal hypersurface is similar to the horospherical hypersurface of spacelike submanifold, therefore their singularities coincide and corresponds to the parabolic set of spacelike submanifold. We may observe geometrical correspondence of the timelike hypersurface.

We have following propositions for the spacelike canal hypersurfaces  $CM^S$ .

**Proposition 5.1** ([12]). The parabolic point on the spacelike canal hypersurface  $CM^S$  corresponds to parabolic point on  $M$  with respect to some lightlike normal  $\mathbf{X}(u) + \mathbf{e}(u_0, \mu_0)$ , where all principal curvatures vanish at the point.

On the other hand, we have following result for the timelike canal hypersurfaces  $CM^T$ .

**Proposition 5.2** ([13]). Singularities of de Sitter Gauss image of the timelike canal hypersurface  $CM^T$  corresponds to the parabolic point on  $CM^T$ . It is also corresponds to some principal curvatures on  $M$  with respect to some spacelike normal  $\mathbf{e}(u_0, \mu_0)$ , whose values are equal to  $\tan \theta$ .

## Reference

- [1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, *Singularities of Differential Maps*, Volume I, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [2] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory, *Cusps of Gauss mappings*, Research Notes in Mathematics 55, Pitman, London, 1982.
- [3] D. Bleeker and L. Wilson, *Stability of Gauss maps*, Illinois J. Math. 22 (1978) 279–289.
- [4] P. Brocker, L. Lander, *Differentiable germs and catastrophes*, Cambridge Univ. Press (1975)
- [5] T. Fusho and S. Izumiya, Lightlike surfaces of spacelike curves in de Sitter 3-space, J. Geom. 88 (2008), 19–29.
- [6] S. Izumiya, D. Pei and T. Sano, Singularities of hyperbolic Gauss maps, Proc. London Math Soc. 86 (2003) 485–512.
- [7] S. Izumiya, M. Kossowski, D. Pei and M.C. Romero Fuster, Singularities of Lightlike Hypersurfaces in Minkowski four-space, Tohoku Math J. 58 (2006), 71–88.
- [8] S. Izumiya and M.C. Romero Fuster, The lightlike flat geometry on spacelike submanifolds of codimension two in Minkowski space, Sel. math. NS. 13 (2007) 23–55.
- [9] S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero Fuster and M. Takahashi, The horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic space, J. London Math. Soc. (2) 71 (2005) 779–800.
- [10] M. Kasedou, Singularities of lightcone Gauss images of spacelike hypersurfaces in de Sitter space, J. of Geom 94 Issue 1 (2009) 107–121.
- [11] M. Kasedou, Spacelike submanifolds of codimension two in de Sitter space, J. of Geom. and Phys. 60 (2010) 31–42.
- [12] M. Kasedou, Spacelike submanifolds in de Sitter space, Demonstratio Mathematica (2) 43 (2010) 401–418.
- [13] M. Kasedou, Timelike canal hypersurfaces of spacelike submanifolds in a de Sitter space, Contemporary Mathematics 569 (2012) 87–100.
- [14] J.A. Montaldi, On contact between submanifolds, Michigan Math. J. 33 (1986) 195–199.
- [15] V.M. Zakalyukin, Lagrangian and Legendrian singularities, Funct. Anal. Appl. 10 (1976) 26–36.



**MINIMAL MODELS, FORMALITY AND HARD  
LEFSCHETZ PROPERTIES OF SOLVMANIFOLDS  
WITH LOCAL SYSTEMS**

HISASHI KASUYA

1. SOLVMANIFOLDS AND NILMANIFOLDS

Let  $G$  be a simply connected solvable Lie group. We assume  $G$  has a lattice (cocompact discrete subgroup)  $\Gamma$ . We call the compact homogeneous space  $G/\Gamma$  a solvmanifold. If  $G$  is nilpotent, we call  $G/\Gamma$  a nilmanifold. If  $G$  is abelian, then  $G/\Gamma$  is a torus and hence a torus is a solvmanifold.

2. NOMIZU'S THEOREM

**Definition 2.1.** A *differential graded algebra* (called *DGA*) is a graded algebra  $A^*$  with the following properties:

(1)  $A^*$  is graded commutative, i.e.

$$y \wedge x = (-1)^{p_q} x \wedge y \quad x \in A^p \quad y \in A^q.$$

(2) There is a differential operator  $d : A \rightarrow A$  of degree one such that  $d \circ d = 0$  and

$$d(x \wedge y) = dx \wedge y + (-1)^p x \wedge dy \quad x \in A^p.$$

Let  $M$  be a manifold. The de Rham complex  $A^*(M)$  of  $M$  is a DGA. The cohomology algebra  $H^*(M, \mathbb{R})$  is a DGA with  $d = 0$ . Let  $\mathfrak{g}$  be a Lie algebra with a bracket  $\{, \}$ . Consider the exterior algebra  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$  of the dual space  $\mathfrak{g}^*$ . The dual map of the Lie bracket induces a derivation on  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ . We have the DGA  $(\bigwedge \mathfrak{g}^*, d)$  of the Lie algebra. Let  $G$  be a simply connected Lie group with the Lie algebra  $\mathfrak{g}$ . Then we can regard  $(\bigwedge \mathfrak{g}^*, d)$  as the DGA  $A^*(G)^G$  of the left-invariant differential forms on  $G$ . Suppose  $G$  has a lattice  $\Gamma$ . Then we can regard the de Rham complex  $A^*(G/\Gamma)$  on  $G/\Gamma$  as the DGA  $A^*(G)^\Gamma$  of  $\Gamma$ -invariant differential forms on  $G$ . By

$$\bigwedge \mathfrak{g}^* \cong A^*(G)^G \subset A^*(G)^\Gamma \cong A^*(G/\Gamma),$$

we have the injection

$$\bigwedge \mathfrak{g}^* \rightarrow A^*(G/\Gamma).$$

**Theorem 2.2** (Nomizu [9]). *Suppose  $G$  is a simply connected nilpotent Lie group with a lattice  $\Gamma$ . Then the injection*

$$\bigwedge \mathfrak{g}^* \rightarrow A^*(G/\Gamma)$$

*induces a cohomology isomorphism.*

This theorem relates to Sullivan's rational homotopy theory [12].

**Corollary 2.3** (see [6]). *Suppose  $G$  is a simply connected nilpotent Lie group with a lattice  $\Gamma$ . Then the DGA  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$  is the minimal model of  $A^*(G/\Gamma)$ .*

### 3. FORMALITY OF NILMANIFOLDS:HASEGAWA'S THEOREM

**Definition 3.1** (D. Sullivan). A DGA  $A$  is *formal* if there exists a sequence of DGA(differential graded algebra) homomorphisms

$$A \rightarrow C_1 \leftarrow C_2 \cdots \leftarrow (H^*(A), d = 0)$$

such that all homomorphisms induce cohomology isomorphisms. A manifold  $M$  is formal if the de Rham DGA  $A^*(M)$  is formal.

**Theorem 3.2** (Deligne,-Griffiths-Morgan-Sullivan [2]). *Compact Kähler manifolds are formal.*

**Theorem 3.3** (Hasegawa [6]). *Let  $\mathfrak{g}$  be a nilpotent Lie algebra. Then the DGA  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$  is formal if and only if  $\mathfrak{g}$  is abelian. Hence a nilmanifold  $G/\Gamma$  is formal if and only if  $G/\Gamma$  is a torus.*

By Theorem 3.2 we have:

**Corollary 3.4.** *Kähler nilmanifolds are tori.*

### 4. BENSON-GORDON'S THEOREM

**Definition 4.1.** A  $2n$ -symplectic manifold  $(M, \omega)$  satisfies *Hard Lefschetz property* if the linear map

$$[\omega]^{n-i} \wedge : H^i(M) \rightarrow H^{2n-i}(M)$$

is an isomorphism for any  $1 \leq i \leq n$ .

**Theorem 4.2** (Beson-Gordon [1]). *Let  $\mathfrak{g}$  be a  $2n$ -dimensional nilpotent Lie algebra. Suppose  $\mathfrak{g}$  has a symplectic form  $\omega$  (i.e.  $\omega \in \bigwedge \mathfrak{g}^*$  such that  $d\omega = 0$  and  $\omega^n \neq 0$ ). Then the linear map  $[\omega] \wedge : H^1(M) \rightarrow H^{2n-1}(M)$  is an isomorphism if and only if  $\mathfrak{g}$  is abelian. Hence a symplectic nilmanifold  $(G/\Gamma, \omega)$  satisfies hard Lefschetz property if and only if  $G/\Gamma$  is a torus.*

Corollary 3.4 also follows from Benson-Gordon's theorem.

## 5. SOLVABLE CASE

We consider the following question:

**Question 1.** Let  $G$  be a simply connected solvable Lie group with a lattice  $\Gamma$ . Then does the injection

$$\bigwedge \mathfrak{g}^* \rightarrow A^*(G/\Gamma)$$

induce a cohomology isomorphism?

We have:

**Theorem 5.1** (Hattori [7]). *Let  $G$  be a simply connected completely solvable (i.e. for any  $g \in G$  all eigenvalues of the adjoint operator  $\text{Ad}_g$  are positive real numbers) Lie group with a lattice  $\Gamma$ . Then the injection*

$$\bigwedge \mathfrak{g}^* \rightarrow A^*(G/\Gamma)$$

*induces a cohomology isomorphism.*

But in general the isomorphism  $H^*(\mathfrak{g}) \cong H^*(G/\Gamma)$  does not hold.

**Example 1.** Let  $G = \mathbb{R} \times_{\phi} \mathbb{R}^2$  such that  $\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix}$ . Then  $G$  has the lattice  $\mathbb{Z} \times_{\phi} \mathbb{Z}^2$  and we have  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^3$ . Hence  $G/\Gamma$  is a torus and  $\dim H^1(G/\Gamma) = 3$ . But  $\dim H^1(\mathfrak{g}) = 1$ . We have

$$H^1(\mathfrak{g}) \not\cong H^1(G/\Gamma).$$

**Question 2.** In case of a solvmanifold, do Corollary 2.3, Hasegawa's theorem and Benson-Gordon's theorem hold?

**Example 2** (Fernandez-Gray [4]). Let  $G = \mathbb{R} \times_{\phi} \mathbb{R}^2$  such that  $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ .  $G$  has a lattice  $\Gamma$ . Consider the 4-dimensional solvmanifold  $G/\Gamma \times S^1$ .  $G/\Gamma$  has a symplectic form.

**Proposition 5.2.** *The solvmanifold  $G/\Gamma$  as Example 2 satisfies the following conditions:*

- (1)  $A^*(G/\Gamma)$  is formal.
- (2)  $G/\Gamma$  satisfies the hard Lefschetz property.
- (3) The minimal model of  $A^*(G/\Gamma)$  is isomorphic to the minimal model of  $A^*(S^2 \times S^1 \times S^1)$ .

## 6. MAIN RESULTS

We consider the following question:

**Question 3.** How do we generalize Nomizu's theorem, Hasegawa's theorem and Benson-Gordon's theorem for general solvmanifolds?

We give preliminaries for the main results.

**Preliminary 1** (Algebraic hull [10]). Let  $G$  be a simply connected solvable Lie group. Then there exists a unique  $\mathbb{R}$ -algebraic group  $\mathbf{H}_G$  with an injective group homomorphism  $\psi : G \rightarrow \mathbf{H}_G(\mathbb{R})$  so that:

- (1)  $\psi(G)$  is Zariski-dense in  $\mathbf{H}_G$ .
- (2)  $Z_{\mathbf{H}_G}(\mathbf{U}(\mathbf{H}_G)) \subset \mathbf{U}(\mathbf{H}_G)$ .
- (3)  $\dim \mathbf{U}(\mathbf{H}_G) = \dim G$ .

Such  $\mathbf{H}_G$  is called the algebraic hull of  $G$ .

We denote  $\mathbf{U}_G = \mathbf{U}(\mathbf{H}_G)$  and call  $\mathbf{U}_G$  the unipotent hull of  $G$ .

**Preliminary 2** (Hain's DGA [5]). Let  $M$  be a  $C^\infty$ -manifold and  $\rho : \pi_1(M, x) \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$  a representation and  $\mathbf{T}$  the Zariski-closure of  $\rho(\pi_1(M, x))$  in  $(\mathbb{C}^*)^n$ . Let  $\{V_\alpha\}$  be the set of one-dimensional representations for all characters  $\alpha$  of  $\mathbf{T}$  and  $(E_\alpha, D_\alpha)$  be a rank one flat bundle with the monodromy  $\alpha \circ \rho$  and  $A^*(M, E_\alpha)$  the space of  $E_\alpha$ -valued  $C^\infty$ -differential forms. Denote  $A^*(M, \mathcal{O}_\rho) = \bigoplus_\alpha A^*(M, E_\alpha)$  and  $D = \bigoplus_\alpha D_\alpha$ . Then  $(A^*(M, \mathcal{O}_\rho), D)$  is a DGA.

**Preliminary 3** (Diagonalization of the Adjoint representation). Suppose  $G$  is a simply connected solvable Lie group and  $\mathfrak{g}$  is the Lie algebra of  $G$ . Consider the adjoint representation  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$  and its derivation  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow D(\mathfrak{g})$  where  $D(\mathfrak{g})$  be the Lie algebra of the derivations of  $\mathfrak{g}$ . We construct representations of  $\mathfrak{g}$  and  $G$  as following.

Let  $\mathfrak{n}$  be the maximal nilpotent ideal of  $\mathfrak{g}$ . There exists a subvector space (not necessarily Lie algebra)  $V$  of  $\mathfrak{g}$  so that  $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{n}$  as the direct sum of vector spaces and for any  $A, B \in V$   $(\text{ad}_A)_s(B) = 0$  where  $(\text{ad}_A)_s$  is the semi-simple part of  $\text{ad}_A$  (see [3, Proposition III.1.1]). We define the map  $\text{ad}_s : \mathfrak{g} \rightarrow D(\mathfrak{g})$  as  $\text{ad}_s(A+X) = (\text{ad}_A)_s$  for  $A \in V$  and  $X \in \mathfrak{n}$ . Then we have  $[\text{ad}_s(\mathfrak{g}), \text{ad}_s(\mathfrak{g})] = 0$  and  $\text{ad}_s$  is linear (see [3, Proposition III.1.1]). Since we have  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$ , the map  $\text{ad}_s : \mathfrak{g} \rightarrow D(\mathfrak{g})$  is a representation and the image  $\text{ad}_s(\mathfrak{g})$  is abelian and consists of semi-simple elements. We denote by  $\text{Ad}_s : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$  the extension of  $\text{ad}_s$ . Then  $\text{Ad}_s(G)$  is diagonalizable.

**Main theorems :** Let  $G$  be a simply connected solvable Lie group with a lattice  $\Gamma$ . We consider the solvmanifold. Then we have  $\pi_1(G/\Gamma) \cong \Gamma$ . For the restriction of the above diagonalizable representation  $\text{Ad}_s|_\Gamma$  on  $\Gamma$ , we consider Hain's DGA  $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_s|_\Gamma})$ . We prove:

**Theorem 6.1** (Generalized Nomizu's theorem (K. [8])). *Let  $G$  be a simply connected solvable Lie group with a lattice  $\Gamma$  and  $\mathbf{U}_G$  be the unipotent hull of  $G$ . Let  $\mathfrak{u}$  be the Lie algebra of  $\mathbf{U}_G$ . Then we have a injection*

$$\bigwedge \mathfrak{u}^* \rightarrow A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_{s|\Gamma}})$$

*which induces a cohomology isomorphism. Thus  $\bigwedge \mathfrak{u}^*$  is Sullivan's minimal model of  $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_{s|\Gamma}})$ .*

If  $G$  is nilpotent, the adjoint operator  $\text{Ad}$  is a unipotent representation and hence  $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_{s|\Gamma}}) = A_{\mathbb{C}}^*(G/\Gamma)$  and  $\bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \bigwedge \mathfrak{u}^*$ . In this case, Theorem 6.1 reduce to the classical theorem proved by Nomizu in [9].

By Theorem 6.1, we have a natural extension of Hasegawa's theorem for solvmanifolds.

**Theorem 6.2** (Generalized Hasegawa's theorem (K. [8])). *Let  $G$  be a simply connected solvable Lie group with a lattice. Then the following conditions are equivalent:*

- (A) *The DGA  $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_{s|\Gamma}})$  is formal.*
- (B)  *$\mathbf{U}_G$  is abelian.*
- (C)  *$G = \mathbb{R}^n \rtimes_{\phi} \mathbb{R}^m$  such that the action  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^m)$  is semi-simple.*

We can also have an extension of Benson and Gordon's theorem.

**Theorem 6.3** (Generalized Benson-Gordon's theorem (K. [8])). *Let  $G$  be a simply connected solvable Lie group with a lattice  $\Gamma$ . Suppose  $\dim G = 2n$  and  $G/\Gamma$  has a symplectic form  $\omega$ . Then the following conditions are equivalent:*

- (A) 
$$[\omega]^{n-i} \wedge : H^i(A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_{s|\Gamma}})) \rightarrow H^{2n-i}(A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_{s|\Gamma}}))$$
*is an isomorphism for any  $i \leq n$ .*
- (B)  *$\mathbf{U}_G$  is abelian.*
- (C)  *$G = \mathbb{R}^n \rtimes_{\phi} \mathbb{R}^m$  such that the action  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^m)$  is semi-simple.*

## 7. DETAIL OF THEOREM 6.1

Let  $G$  be a simply connected solvable Lie group and  $\mathfrak{g}$  the Lie algebra of  $G$ . Consider the diagonal representation  $\text{Ad}_s$  as Preliminary 3 and the derivation  $\text{ad}_s$  of  $\text{Ad}_s$ . For some basis  $\{X_1, \dots, X_n\}$  of  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ,  $\text{Ad}_s$  is represented by diagonal matrices. Let  $\mathbf{T}$  be the Zariski-closure of  $\text{Ad}_s(G)$



in  $\text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ . Let  $\{V_{\alpha}\}$  be the set of one-dimensional representations for all characters  $\alpha$  of  $\mathbf{T}$ . We consider  $V_{\alpha}$  the representation of  $\mathfrak{g}$  which is the derivation of  $\alpha \circ \text{Ad}_s$ . Then we have the cochain complex of Lie algebra  $(\bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\alpha}, d_{\alpha})$ . Denote  $d = \bigoplus_{\alpha} d_{\alpha}$ . Then  $(\bigoplus_{\alpha} \bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\alpha}, d)$  is a DGA. If  $G$  has a lattice  $\Gamma$ , then we have the injection

$$\bigoplus_{\alpha} \bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\alpha} \rightarrow A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_s|_{\Gamma}}).$$

By  $\text{Ad}_s(G) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$  we have  $\mathbf{T} \subset \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$  and hence we have the action of  $\mathbf{T}$  on  $\bigoplus_{\alpha} \bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\alpha}$ . Denote  $(\bigoplus_{\alpha} \bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\alpha})^{\mathbf{T}}$  the sub-DGA of  $\bigoplus_{\alpha} \bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\alpha}$  which consists of the  $\mathbf{T}$ -invariant elements of  $\bigoplus_{\alpha} \bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\alpha}$ . To prove Theorem 6.1, we show:

**Theorem 7.1** (K. [8]). *Let  $\mathbf{U}_G$  be the unipotent hull of  $G$  and  $\mathfrak{u}$  the Lie algebra of  $\mathbf{U}_G$ . (1) Then we have an DGA isomorphism*

$$\bigwedge \mathfrak{u}^* \cong \left( \bigoplus_{\alpha} \bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\alpha} \right)^{\mathbf{T}}.$$

(2) If  $G$  has a lattice  $\Gamma$ , then the injection

$$\left( \bigoplus_{\alpha} \bigwedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\alpha} \right)^{\mathbf{T}} \rightarrow A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_s|_{\Gamma}})$$

induces a cohomology isomorphism.

## 8. KAHLER SOLVMANIFOLDS

By Simpson's results [11], we can prove:

**Theorem 8.1** (K [8]). *Suppose  $M$  is a compact Kähler manifold with a Kähler form  $\omega$  and  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$  is a representation. Then the following conditions hold:*

(A) (formality) *The DGA  $A^*(M, \mathcal{O}_{\rho})$  is formal.*

(B) (hard Lefschetz) *For any  $0 \leq i \leq n$  the linear operator*

$$[\omega]^{n-i} \wedge : H^i(A^*(M, \mathcal{O}_{\rho})) \rightarrow H^{2n-i}(A^*(M, \mathcal{O}_{\rho}))$$

*is an isomorphism where  $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$ .*

By Theorem 8.1 formality and hard Lefschetz property of DGA  $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_s|_{\Gamma}})$  are criteria for  $G/\Gamma$  to have a Kähler metric. We will see such conditions are stronger than untwisted formality and hard Lefschetz property.

**Remark 8.1.** *There exist examples of solvmanifolds  $G/\Gamma$  which satisfy formality and the hard Lefschetz property of the untwisted de Rham complex  $A^*(G/\Gamma, \cdot)$  but do not satisfy formality and the hard Lefschetz property of  $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_s|_{\Gamma}})$ .*

However we will see these criteria can not classify Kähler solvmanifolds completely.

**Remark 8.2.** *There exist examples of non-Kähler solvmanifolds which satisfy formality and the hard Lefschetz property of  $A^*(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_{s\Gamma}})$ .*

#### REFERENCES

- [1] C. Benson, and C. S. Gordon, Kähler and symplectic structures on nilmanifolds. *Topology* **27** (1988), no. 4, 513–518.
- [2] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan, Real homotopy theory of Kahler manifolds. *Invent. Math.* **29** (1975), no. 3, 245–274.
- [3] N. Duney, A. F. M. ter Elst, D. W. Robinson, *Analysis on Lie Groups with Polynomial Growth*, Birkhäuser (2003).
- [4] M. Fernandez, and A. Gray, Compact symplectic solvmanifolds not admitting complex structures. *Geom. Dedicata* **34** (1990), no. 3, 295–299.
- [5] R. M. Hain, The Hodge de Rham theory of relative Malcev completion. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **31** (1998), no. 1, 47–92.
- [6] K. Hasegawa, Minimal models of nilmanifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.* **106** (1989), no. 1, 65–71.
- [7] A. Hattori, Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **8** 1960 289–331 (1960).
- [8] H. Kasuya, Minimal models, formality and hard Lefschetz properties of solvmanifolds with local systems. <http://arxiv.org/abs/1009.1940>.
- [9] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups. *Ann. of Math. (2)* **59**, (1954). 531–538.
- [10] M. S. Raghathan, *Discrete subgroups of Lie Groups*, Springer-verlag, New York, 1972.
- [11] C. T. Simpson, Higgs bundles and local systems. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No.* **75** (1992), 5–95.
- [12] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No.* **47** (1977), 269–331 (1978).

(H.kasuya) GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCE UNIVERSITY OF TOKYO JAPAN

*E-mail address:* khsc@ms.u-tokyo.ac.jp



# Lagrange 部分多様体の displaceability と displacement energy

小野 薫

京都大学数理解析研究所

## 概要

symplectic 幾何学において Lagrange 部分多様体は重要な対象である。本講演では Lagrange 部分多様体のもつ特性の一つとして、「Hamilton 微分同相写像により自分自身に交わらない位置に動かすにはそれなりのエネルギーが必要である」という事実に関わる考察とそれにより得られる結果の応用例について述べたい。

## 1 はじめに

多様体  $X$  上の symplectic 構造とは  $X$  の非退化な閉 2 次微分形式  $\omega$  を与えることである。最も基本的な例は偶数次元の実ベクトル空間  $\mathbf{R}^{2n}$  の座標  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$  として、 $\omega_{std} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$  としたものである。Darboux の定理により、 $X$  に適当な局所座標  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$  が取れて、 $\omega$  は座標近傍上で  $\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$  と表される。 $X$  の微分同相写像  $\psi$  で、 $\psi^*\omega = \omega$  を満たすものを symplectic 微分同相写像 (symplectomorphism と呼ぶこともある) といい、それ全体のなす群を  $Symp(X, \omega)$  と書く。symplectic 微分同相写像の中に Hamilton 微分同相写像と呼ばれる特徴的なクラスがある。先ずこれについて説明する。本講演では、 $X$  が閉多様体の時を主に考える。

$X$  上の滑らかな関数  $h$  に対し、Hamilton ベクトル場  $X_h$  を  $i(X_h)\omega = dh$  により定義する。Darboux 座標系においては  $X_h$  は  $\sum_{i=1}^n (\frac{\partial h}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i})$  と表される。 $H \in C^\infty(\mathbf{R} \times X)$  を  $X$  上の関数の 1-径数族  $H = \{h_t = H(t, \bullet)\}$  と見ると、 $H$  から Hamilton ベクトル場の 1-径数族  $\{X_{h_t}\}$  が定まる。これを積分することで、 $\{\varphi_H^t\}$  が

得られる。即ち、 $\varphi_H^0 = id_X$  であり、各  $p \in X$  に対して

$$\frac{d}{dt}\varphi_H^t(p) = X_{h_t}(\varphi_H^t(p))$$

を満たす微分同相写像の 1-径数族が定まる。 $X$  の微分同相写像  $\psi$  が Hamilton 微分同相写像であるとは、ある  $H$  が存在して、 $\psi = \varphi_H^1$  と書けることをいう。Hamilton 微分同相写像が symplectic 微分同相写像であることは、Hamilton ベクトル場  $X_h$  が  $\mathcal{L}_{X_h}\omega = 0$  を満たすことから分かる。Hamilton 微分同相写像全体は群を成すことがわかり、それを  $Ham(X, \omega)$  と書くことにする。

$H^1(X; \mathbf{R}) = 0$  であれば、 $Ham(X, \omega)$  は  $Symp(X, \omega)$  の単位元連結成分  $Symp_0(X, \omega)$  と一致する。一般には、 $Ham(X, \omega)$  と  $Symp_0(X, \omega)$  の差は flux 準同型と呼ばれるもので測られる。詳細を述べることはしないが、一つ例を挙げる。2次元トーラスに一つ面積要素を与えて得られる  $(T^2, \omega)$  を考える。 $T^2$  の (一般的な) 回転は symplectic 微分同相写像ではあるが Hamilton 微分同相写像とはならない。そのことは、(一般的な) 回転は不動点を持たないということに反映している。Hamilton 微分同相写像は (然るべき多くの) 不動点を持つことは Arnold により予想され、トーラスの場合は Conley-Zehnder [CZ] により証明された<sup>1</sup>。微分同相写像  $\psi$  に対して、不動点を持つかどうか、あるいはこれから議論する Lagrange 部分多様体とその  $\psi$  に依る像が交点を持つかどうかという条件は然るべき位相について閉じた条件であることを考えると、 $Ham(X, \omega)$  が  $Symp_0(X, \omega)$  において何らかの位相で閉じていることが予想される。位相として  $C^1$ -位相をとれば、予想が正しいことは [O] で証明した。 $C^0$ -位相についてどうかはトーラスなどの場合を除き、一般には未だに分かっていない ( $C^0$ -flux 予想)。

## 2 Lagrange 部分多様体

$(X, \omega)$  の部分多様体  $L$  が Lagrange 部分多様体であるとは、(1) 微分形式  $\omega$  の  $L$  への制限が 0 である、(2)  $\dim L = \frac{1}{2} \dim X$  の 2 条件を満たすことをいう。(1) のみを満たす場合その部分多様体は isotropic であるといわれ、その次元は  $\dim X$  の半分以下となる。(2) はそのようなもので最大次元であることを課している。本講演では Lagrange 部分多様体としては閉多様体  $L$  が埋め込まれている場合のみを考える。Lagrange 部分多様体は symplectic 幾何学において重要な対象であり、Weinstein は “Everything is a Lagrangian submanifold.” と述べている。具体的には、

<sup>1</sup>一般の閉 symplectic 多様体上の Betti 数版の Arnold 予想は [FO], [LT] により示された。

- 余接束の切断で Lagrange 部分多様体となるものは、底多様体の閉 1 次微分形式と対応する
- symplectic 微分同相写像  $\psi : X \rightarrow X$  のグラフを  $(X \times X, -pr_1^*\omega + pr_2^*\omega)$  の部分多様体と見たものは Lagrange 部分多様体となる ( $pr_i$  は第  $i$  成分への射影)
- 実数体上定義された複素射影代数多様体の実部は Lagrange 部分多様体

などがある。

Lagrange 部分多様体の特徴的性質として、恒等写像に近い Hamilton 微分同相写像による自分自身の像と交わるということが Arnold, Weinstein 達により観察されていた<sup>2</sup>。以下で引用する定理はこの性質をより明らかにした。

$M$  を滑らかな閉多様体とし、 $T^*M$  をその余接束とする。 $M$  の局所座標を  $x_1, \dots, x_n$  とすると  $dx_1, \dots, dx_n$  は  $T^*M$  の局所枠を与えるので、それに関するファイバー座標を  $y_1, \dots, y_n$  とおく。このとき、 $\sum dx_i \wedge dy_i$  は局所座標の取り方に依らずに定まり、 $T^*M$  の symplectic 形式を与える。 $T^*M$  は非 compact なので、Hamilton 関数  $H$  としては、 $H$  に依って定まる  $T^*M$  の compact 部分集合  $K$  があり、 $p \notin K$  ならば  $H(t, p) = 0$  なるもののみを用いて、compact 台をもつ Hamilton 微分同相写像を考える。またそれ全体を  $Ham_c(T^*M)$  と表す。

定理 2.1<sup>3</sup> (Laudenbach-Sikorav [LS1], Gromov [G], Hofer [Ho1])  $O_M$  を  $T^*M$  の零切断とする。任意の  $\psi \in Ham_c(T^*M)$  に対して  $O_M \cap \psi(O_M) \neq \emptyset$  が成立する。

$L$  を  $(X, \omega)$  の Lagrange 部分多様体 ( $L$  は閉多様体と限っていることに注意) とすると、 $L$  の  $X$  での管状近傍  $U$  と  $O_L$  の  $T^*L$  での管状近傍  $V$  を、 $U$  と  $V$  とが symplectic 微分同相になるように取れる。従って、 $X$  上の Hamilton 微分同相写像の族  $\{\varphi_H^t\}$  が、 $\varphi_H^t(L) \subset U$  を  $0 \leq t \leq 1$  に対して満たせば、(然るべく  $H$  を  $\mathbf{R} \times U$  に台を持つように修正することで) 上記の定理を用いて  $\varphi_H^1(L) \cap L \neq \emptyset$  が分かる。

一方で、「大きな」Hamilton 微分同相写像を用いれば、元の位置と交わらないように Lagrange 部分多様体を動かすことが出来る場合もある。例えば、単位 2 次元球面に標準的な面積要素を入れた symplectic 多様体の中で (大円ではなく) 小円を考えると、適当な回転 (勿論面積要素を保つ) により元の位置と交わらないようにできる。今までに出てきた「恒等写像に近い」とか「大きな」ということを測るには何

<sup>2</sup> $S$  を  $X$  の部分多様体で、 $\dim S = \frac{1}{2} \dim X$  ではあるが、Lagrange 部分多様体ではないものとする。更に、 $S$  の法束が至る所消えない切断を持つとすると、 $X$  の (恒等写像に近い) Hamilton 微分同相写像  $\psi$  で  $\psi(S) \cap S = \emptyset$  とできることが知られている (Laudenbach-Sikorav [LS2], Polterovich [P])。

<sup>3</sup>[LS1], [Ho1] では交点の個数についての下からの評価も与えられているが省略する。

を用いればよいであろうか？それは (他にも測り方があるかもしれないが) 次節で述べる Hofer 距離によって記述することができる。

### 3 Hofer 距離と Chekanov の定理

$Ham(X, \omega)$  の特筆すべき事実として、両側不変距離の存在がある。ここでは Hofer 距離と呼ばれているものについて説明する。 $H : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbf{R}$  を滑らかな関数とする。 $X$  が閉多様体の場合には、各  $t \in [0, 1]$  に対し、 $\int_X h_t \omega^n = 0$  となるように正規化したものを考え、 $X$  が非 compact な場合は  $X$  方向に compact 台を持つものを考える。そのような  $H$  に対し、Hofer norm を

$$\|H\| = \int_0^1 (\max_X h_t - \min_X h_t) dt$$

と定める。 $\psi \in Ham(X, \omega)$  或は  $Ham_c(X, \omega)$  に対して、 $\|\psi\| = \inf\{\|H\| : \varphi_H^1 = \psi\}$  と書き、 $\psi_1, \psi_2$  に対して  $d(\psi_1, \psi_2) = \|(\psi_1)^{-1} \circ \psi_2\|$  と定める。 $d$  が非退化性を除く距離の公理を満足し、両側不変、逆元を取る操作で不変であることは定義からすぐに分かる。

定理 3.1 (Hofer [Ho2], Lalonde-McDuff [LM])

- (1)  $d$  は  $Ham_c(\mathbf{R}^{2n}, \omega_{std})$  上で非退化である。
- (2)  $d$  は  $Ham(X, \omega)$  上で非退化である。

非退化性を示す際には次の量が重要な役割を果たす。

定義  $A \subset X$  を 相対 compact 部分集合とする。 $A$  の displacement energy  $e(A)$  を次で定義する。

$$e(A) = \inf\{\|H\| : \varphi_H^1(A) \cap \bar{A} = \emptyset\}$$

もしも、条件を満たす  $H$  が存在しないときには  $e(A) = +\infty$  と置く。一般の部分集合  $A$  に対しては  $e(A) = \sup\{e(K) : K \subset A, K \text{ は compact}\}$  と定義する。

また、 $A \subset X$  が displaceable とは、ある Hamilton 微分同相写像  $\psi$  が存在して  $\psi(A) \cap \bar{A} = \emptyset$  とできることをいう。

もしも  $\psi$  が恒等写像でないならば、ある開部分集合  $U$  があり、 $\psi(U) \cap \bar{U} = \emptyset$  となる。そこで、 $U$  の displacement energy が何らかの方法で下から評価できれば  $d$  の非退化性を示すことができる。上の定理はそのようにして得られた。

Chekanov [C] は Lagrange 部分多様体  $L$  の displacement energy の下からの評価を与えた。いかなる開部分集合も Lagrange トーラスを含むので、その評価を用い

て  $d$  の非退化性の別証明も得られる。Chekanov の定理を述べるために少し準備をする。

$X$  の概複素構造  $J$  が  $\omega$  と両立するとは  $g_J(\bullet, \bullet) = \omega(\bullet, J\bullet)$  が Riemann 計量となることをいう。また、 $\omega$ -tame であるとはゼロではない接ベクトル  $v$  に対して  $\omega(v, Jv) > 0$  が成立することをいう。symplectic 多様体  $(X, \omega)$  は、 $\omega$  と両立する概複素構造、従って  $\omega$ -tame な概複素構造を持つ。 $\mathcal{J}_\omega$  で  $\omega$ -tame な概複素構造全体のなす空間を表す。これは然るべき位相に関して可縮であることが知られている。 $(X, \omega)$  に対して、 $a_S(J)$  を定数でない  $J$ -正則球面上の  $\omega$  の積分値の最小値、 $a_D(L; J)$  を  $L$  に境界を持つ定数でない  $J$ -正則円盤上の  $\omega$  の積分値の最小値を表し、 $a(L; J) = \min\{a_S(J), a_D(L; J)\}$  とおく。 $(a_S(J), a_D(L; J))$  が最小値を取るとは Gromov の compact 性から分かり、 $a(L; J) \in (0, +\infty]$  である。)  $J \in \mathcal{J}_\omega$  について上限を取って、 $a(L) = \sup\{a(L; J) : J \in \mathcal{J}_\omega\}$  と定める。これで Chekanov の定理を述べることができる。

**定理 3.2**(Chekanov [C])  $L$  を  $(X, \omega)$  の閉 Lagrange 部分多様体とすると、次が成り立つ。

$$e(L) \geq a(L).$$

Floer の仕事 [F] により、 $J$ -正則球面や  $J$ -正則円盤がなければ、 $L$  とその Hamilton 変形の Floer cohomology が定義できて、しかも Hamilton 変形下で不変で、その cohomology は  $L$  の cohomology と同型になる。特に  $L$  を displace することはできない。非常に粗っぽい言い方ではあるが、 $J$ -正則円盤があると、一般には Floer cohomology は定義されないが、そのエネルギーレベルに至までは Floer complex もどきが構成できて、上の定理を示すことができるというのが Chekanov の論法である。少し技術的になるが、Floer complex (もどき) の Floer continuation equation の解に関わるエネルギー評価で、Hofer norm を分解した  $E_+(H) = \int_0^1 \max h_t dt$ ,  $E_-(H) = \int -\min h_t dt$  それぞれが独立に現れることが Chekanov の議論で一つの鍵となっている。

## 4 Floer cohomology の torsion と displacement energy

Lagrange 部分多様体の Floer 理論についてその一般論をここで詳しく述べることはできない。興味のある方は [FOOO1] を参照されたい。ここでは深谷氏、Oh 氏、



太田氏と私の共同研究による Lagrange 部分多様体の displacement energy に関する定理の主張を説明する。

path の空間  $\mathcal{P} = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X : \gamma(0) \in L_0, \gamma(1) \in L_1\}$  上に 1 次微分形式を

$$\alpha(\xi) = \int_0^1 \omega(\xi(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)) dt$$

と定める。これは“閉 1 次微分形式”となり、その Morse-Novikov complex の構成を真似て Floer complex が構成できると期待される。そうなれば  $\alpha$  の pull-back が完全形式となるような  $\mathcal{P}$  の被覆空間上を考えるので、得られた複体はその群環の Novikov 完備化上で定義される。Novikov 環は、 $(X, \omega), L$  に依存するので、それらを普遍 Novikov 環に埋め込んで考える。ここでは、次数を調整する生成元を含まない形の普遍 Novikov 環を次の様に定義する。 $R$  を  $\mathbf{Q}$  を含む体、例えば  $\mathbf{C}$  とし、

$$\Lambda_0 = \left\{ \sum_i a_i T^{\lambda_i} : a_i \in R, \lambda_i \in \mathbf{R}_{\geq 0}, \lambda_i \rightarrow +\infty \right\}$$

と定める。また、 $\Lambda$  で、条件  $\lambda_i \in \mathbf{R}_{\geq 0}$  を  $\lambda_i \in \mathbf{R}$  に置き換えたものを表す。 $\Lambda$  は  $\Lambda_0$  の商体である。 $\Lambda_0$  は PID ではないが、有限生成加群に対して単因子論の類似が成立する。従って、 $\Lambda_0$  上の有限生成加群はいくつかの  $\Lambda_0$  と  $\Lambda_0/(T^{\mu_j})$  の直和と同型になる。 $\mu_j$  を torsion exponent と呼ぶことにする。

Lagrange 部分多様体  $L_0, L_1$  が横断的に交わっているとき、それらの交叉に関する Floer complex は  $L_0 \cap L_1$  を生成元とする cochain module と  $L_0, L_1$  に境界を持つ  $J$ -正則写像  $u : \{z \in \mathbf{C} : 0 \leq \Im z \leq 1\} \rightarrow X$  で、交差点をつなぐものを数えることで coboundary 作用素により定義されると期待される。しかし、一般には coboundary 作用素の条件は満たされないので Floer complex は定義されない。[FOOO1] では上記の naive な Floer coboundary 作用素を適切に修正して Floer complex を作る方法を論じた。 $J$ -正則円盤や、Floer trajectories の moduli 空間の向き付けの為に Lagrange 部分多様体の対には相対 spin 性が必要となるので、以下これを仮定する。特に、 $L_0, L_1$  にそれぞれ spin 構造が与えられていれば十分である。修正ができる場合でも、修正の仕方は一意とは限らず、ある集合でパラメータ付けられた Floer complexes が得られる。[?] では Floer complex 自体は  $\Lambda_0$  上で構成され、 $\Lambda$  まで係数拡大すると Hamilton 変形で不変になることが示されている。本講演では、coboundary 作用素に修正して得られた Floer complex を修正データを省略して  $CF(L_1, L_0; \Lambda_0)$  或は  $CF(L_1, L_0; \Lambda)$  その cohomology を  $HF(L_1, L_0; \Lambda_0)$  或は  $HF(L_1, L_0; \Lambda)$  と書くことにする。

定理 4.1 [FOOO5]  $L_0, L_1$  を横断的に交叉する相対 spin Lagrange 多様体対で、Floer complex に修正できるものとする。 $\Lambda_0$ -加群として、

$$HF(L_1, L_0; \Lambda_0) \cong (\Lambda_0)^{\oplus a} \bigoplus \bigoplus_j \Lambda_0 / (T^{\mu_j})$$

であれば、Hamilton 微分同相写像  $\psi$  に対して次が成り立つ。

$$\#(\psi(L_1) \cap L_0) \geq a + 2\#\{j : \mu_j \geq \|\psi\|\}$$

特に、上の定理で  $a \neq 0$  であれば、 $e(L) = +\infty$ ,  $a = 0$  の時、 $e(L) \geq \max_j \mu_j$  である。また  $L_0 = L_1$  の場合を含む clean intersection の場合にも Floer complex は定義され、上記の定理も成り立つ。

注意 Usher [U] では torsion exponent に類似した boundary depth という概念が導入されている。

具体例を述べてこの節を終わる。 $S^2(M)$  で面積  $M$  の 2次元球面を表す。 $D(m) \subset S^2(M)$  を面積  $m$  の円盤とする。 $T(m, n) = \partial D(m) \times \partial D(n) \subset S^2(M) \times S^2(N)$  の displacement energy を考察する。 $m \neq M/2, n \neq N/2$  であれば、定理 3.1 から  $e(T(m, n)) \geq \min\{m, n, M - m, N - n\}$  が分かり、実際に displace する Hamilton 微分同相写像もすぐに見つかり、 $e(T(m, n)) = \min\{m, n, M - m, N - n\}$  となる。 $m = M/2, n \neq N/2$  の場合には、Floer cohomology の torsion に  $\min\{n, N - n\}$  が現れる。定理 4.1 を用いて、同様に  $e(T(m, n)) = \min\{n, N - n\}$  となる。 $m = M/2, n = N/2$  であれば、Floer cohomology の自由加群部分が消えないので、 $T(m, n)$  は  $S^2(M) \times S^2(N)$  の中で displace することはできない。従って  $e(T(m, n)) = +\infty$  である。

これらは toric 多様体の moment 写像のファイバーの例であり、それらの Floer cohomology については [FOOO2], [FOOO3], [FOOO4] で系統的に研究されている。

## 5 いくつかの応用

最後に今までの結果から容易に従ういくつかの結果を述べる。

### 5.1 polydisk の polydisk への埋め込みの symplectic isotopy 類

面積  $a$  の円盤を  $D(a) \subset (\mathbf{R}^2, \omega_{std})$  と書く。 $0 < a, b < 1$  とすると、自然な包含写像  $\iota : D(a) \times D(b) \rightarrow D(1) \times D(1)$  がある。また、 $D(1) \times D(1)$  の 2つの factors

を入れ替える写像を  $T$  とする。 $\iota, T \circ \iota$  は共に  $D(a) \times D(b)$  の  $D(1) \times D(1)$  への symplectic 埋め込みである。このとき、 $\iota$  と  $T \circ \iota$  は symplectic 埋め込みの族でつながるか、 $D(1) \times D(1)$  の compact 台を持つ Hamilton 微分同相写像  $\psi$  で  $T \circ \iota = \psi \circ \iota$  となるものが存在するかをという問題を考える。 $a + b < 1$  であれば、そのような  $\psi$  は  $U(2)$  の中で見つけることができる。Floer-Hofer-Wysocki は symplectic homology を用いることで次を示した。

**定理 5.1**(Floer-Hofer-Wysocki [FHW])  $a + b \geq 1$  であれば、 $\iota$  と  $T \circ \iota$  は Hamilton 変形でつなぐことはできない。

この定理に Lagrange トーラスの displacement energy を使った別証明を与える。 $0 < c \leq a, 0 < d \leq b$  に対して、 $T(c, d) = \partial D(c) \times \partial D(d) \subset D(a) \times D(b)$  と置く。もしも、 $\psi \circ \iota = T \circ \iota$  を満たす Hamilton 微分同相写像  $\psi$  が存在すれば、 $T(c, d)$  と  $T(d, c)$  は  $D(1) \times D(1)$  の中で compact 台を持つ Hamilton 微分同相写像で移り合うことになる。 $D(1) \times D(1)$  を  $S^2(1+\epsilon) \times S^2(M)$ ,  $M$  は十分大, に埋め込むと、 $T(c, d)$ ,  $T(d, c)$  の  $S^2(1+\epsilon) \times S^2(M)$  での displacement energy は等しくなければならない。しかし、 $a + b > 1$  であれば前節の最後の考察により、これを満たさない  $c, d$  を見つけることができる。

## 5.2 Lagrange 部分多様体を保つ Hamilton 微分同相写像の homological monodromy

Lagrange 部分多様体  $L \subset (X, \omega)$  と  $\psi \in \text{Ham}(X, \omega)$  が  $\psi(L) = L$  を満たすとする。このとき、 $\psi$  が  $L$  の homology に誘導する同型を  $\psi$  の  $L$  への homological monodromy と呼ぶことにする。これについては M.-L. Yau [Y], Hu-Lalonde-Leclercq [HLL] などの研究がある。

ここでは  $T(c, c) \subset D(1) \times D(1)$ ,  $T(1/2, 1/2) \subset S^2(1) \times S^2(1)$  について考える。(高次元の類似も考えられる)

**定理 5.2**  $\psi$  を  $D(1) \times D(1)$  の Hamilton 微分同相写像で  $T(c, c)$  を保つものを考える。 $c \geq 1/2$  であれば  $\psi$  の  $L$  への homological monodromy は自明である。

証明は、 $T(c, c)$  の Lagrange 部分多様体としての deformation 空間上での、然るべき compact 化の中での displacement energy の振る舞いを見ることによる。

Lagrange トーラスの displacement energy を用いる訳ではないが、関連したことを1つ述べる。 $T(c, c) \subset S^2(1) \times S^2(1)$  を考える。 $c \neq 1/2$  とする。 $c < 1/2$  とし

て一般性を失わない。このとき、 $T(c, c) = \partial D(c) \times \partial D(c)$  の2つの factors を入れ替えることは  $D(1) \times D(1)$  に台をもつ Hamilton 微分同相写像で実現される。 $\sigma$  を  $\partial D(1/2) \times \partial D(1/2)$  の2つの因子を入れ替える写像を表し、 $\sigma_*$  でそれが homology に誘導する同型を表すと次が成り立つ。

定理 5.3  $T(1/2, 1/2) \subset S^2(1) \times S^2(1)$  に対して、 $\psi|_* = \sigma_*$  なる  $\psi \in \text{Ham}(S^2(1) \times S^2(1))$  は存在しない。

証明には、準同型  $\rho : \pi_1(T(1/2, 1/2)) \rightarrow \{\pm 1\}$  で、 $\rho([\partial D(1/2) \times pt]) = 1$ ,  $\rho([pt \times \partial D(1/2)]) = -1$  に付随した Floer cohomology とその Hamilton 変形下での不変性を用いる。

## 参考文献

- [C] Y.V. Chekanov, *Lagrangian intersections, symplectic energy, and areas of holomorphic curves*, Duke Math. J. 95 (1998), no. 1, 213–226.
- [CZ] C. C. Conley and E. Zehnder, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold*, Invent. Math. 73(1983), 33–49.
- [F] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differential Geom. 28 (1988), 513–547, *Witten’s complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Differential Geom. 30 (1989), 207–221.
- [FHW] A. Floer, H. Hofer and K. Wysocki, *Applications of symplectic homology I*, Math. Z. 217 (1994), 577–606.
- [FOOO1] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory - anomaly and obstructions*, Part I & Part II, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 46.1 & 46.2, International Press/Amer. Math. Soc. 2009.
- [FOOO2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I*, Duke Math. J. 151 (2010), 23–174.
- [FOOO3] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds II : bulk deformations*, preprint 2008, arXiv:0810.5654.

- [FOOO4] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, arXiv: 1009.1648.
- [FOOO5] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Displacement of polydisks and Lagrangian Floer theory*, arXiv:1104.4267.
- [FO] K. Fukaya and K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariants*, *Topology* 38 (1999), 933-1048.
- [G] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, *Invent. Math.* 82 (1985), 307-347.
- [Ho1] H. Hofer, *Lagrangian embeddings and critical point theory*, *Ann Inst H. Poincaré* 2 (1985), 407-462, *Ljusternik-Schnirelmann theory for Lagrangian intersections*, *Ann. Inst H. Poincaré* 5 (1988), 465-499.
- [Ho2] H. Hofer, *On the topological properties of symplectic maps*, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 115 (1990), 25-38.
- [HLL] S. Hu, F. Lalonde and R. Leclercq, *Homological Lagrangian Monodromy*, *Geometry & Topology* 15 (2011), 1617-1650.
- [LM] F. Lalonde and D. McDuff, *The geometry of symplectic energy*, *Ann. Math. (2)* 141 (1995), 349-371.
- [LS1] F. Laudenbach and J.-C. Sikorav, *Persistence d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie Hamiltonienne dans un fibre cotangent*, *Invent. Math.* 82 (1985), 349-357.
- [LS2] F. Laudenbach and J.-C. Sikorav, *Hamiltonian disjunction and limits of Lagrangian submanifolds*, *IMRN* 1994 no.4, 161-168.
- [LT] G. Liu and G. Tian, *Floer homology and Arnold conjecture*, *J. Differential Geom.*, 49(1998), 1-74.
- [O] K. Ono, *Floer-Novikov cohomology and the flux conjecture*, *Geom. and Funct. Anal.* 16 (2006), 981-1020.

- [P] L. Polterovich, *An obstacle to non-Lagrangian intersections*, In Floer Memorial Volume, Progress in Math. 1995, 575-586.
- [U] M. Usher, *Boundary depth in Floer theory and its applications to Hamiltonian dynamics and coisotropic submanifolds*, Israel J. Math. 184 (2011), 1-57.
- [Y] M.-L. Yau, *Monodromy and isotopy of monotone Lagrangian tori*, Math. Res. Lett. 16 (2009), 531-541.